Variable Compleja I, 4 de Junio, 1999

# Examen Final

**Resolver 4 de los siguientes 5 problemas.**

1. Los números de Fibonacci se definen por $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$, $n \geq 2$. Encuentra el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ y demuestra que es la serie de Taylor de una función racional (el cociente de dos polinomios).

2. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Demuestra que una singularidad aislada $z_0 \in U$ de una función holomorfa $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ es eliminable si la parte real de $f$ está acotada.

3. Demostrar que una función meromorfa en el plano extendido $\mathbb{C} \cup \infty$ es racional.

4. Sea $U$ el complemento en $\mathbb{C}$ del conjunto $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Da una definición del término "una rama analítica de $\sqrt{1+z} + \sqrt{1-z}$ en $U$," y demuestra que tal rama existe.

5. Encontrar todas las transformadas de Möbius que representan rotaciones de la esfera de Riemann.

(Sugerencia: Demuestra primero que $A : z \mapsto -1/\bar{z}$ representa la transformación "antípoda" en la esfera de Riemann, $v \mapsto -v$, $v \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Luego demuestra que una transformada de Möbius $T$ representa una rotación de $S^2$ si y solo si conmuta con la antípoda, i.e. $TA = AT$.)