Variable Compleja I, 10 de Marzo, 1999

Examen num. 1

Resolver 4 de los siguientes 5 problemas.

1. Calcular el valor (la parte real e imaginaria) de

$$(1+i)^{10} + (1-i)^{10}.$$

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica cuyo valor absoluto $|f|$ es constante. Demostrar que f es constante.

3. Encontrar la transformada de Möbius que manda $0, i, -i$ a $1, -1, 0$ (respectivamente.)

4. Encontrar todas las transformadas de Möbius que representan rotaciones de la esfera de Riemann.

(Sugerencia: Demuestra primero que $A : z \mapsto -1/\bar{z}$ representa la transformaci'on "antípoda" en la esfera de Riemann, $v \mapsto -v$, $v \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Luego demuestra que una transformada de Möbius T representa una rotaci'on de S^2 ssi conmuta con la antípoda, i.e. $TA = AT$.)

5. Encontrar todas las transformadas de Möbius que preservan el c'irculo unitario $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, i.e. las transformadas de Möbius T tal que $T(S^1) \subset S^1$.

(Sugerencia: Demuestra que una transformada de Möbius T preserva S^1 ssi conmuta con la reflexión $R : z \mapsto 1/\bar{z}$, i.e. $TR = RT$.)