Solución de un problema de la tarea

Geometria Riemanniana
24 Marzo, 1998

El Problema. Hay que demostrar que

$$f_1(x) = t + 2\frac{x-t}{|x-t|^2}, \text{ con } t = -e_1 = (-1, 0, \ldots, 0),$$

es una isometría $D \to H$, donde $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ con la métrica $|dx|^2/(1-|x|^2)^2$, y $H = \{y \in \mathbb{R}^n | \, y_1 > 0\}$ con la métrica $|dy|^2/|y_1|^2$.

Demostración.

1. Nota que $f_1 = T \circ f \circ T^{-1}$, donde $T(x) = x + t, \; f(x) = x/|x|^2$.
2. $(f \circ f)(x) = x \Longrightarrow$ mismo para f_1 (donde está bien definido).
3. $f_1(D) \subset H$ (hecho en clase) $\Longrightarrow f_1$ es un difeo $D \to H$ (porque tiene inversa segun 2.)
4. Calculando $(f_1)_*(x) : T_x D \to T_{f_1(x)} H$.

   Primero, $(f_1)_* = T_* \circ f_* \circ T_*^{-1}$ (regla de la cadena) y T es una isometría así que calculamos f_*. Sea $y = f(x)$, entonces

   $$dy = \frac{dx}{|x|^2} + x \, d(\frac{1}{|x|^2}),$$

   $$d(\frac{1}{|x|^2}) = d(\,(|x|^2)^{-1}) = -(|x|^2)^{-2} d(|x|^2) = -\frac{2}{|x|^4}\langle x, dx\rangle$$

   $$\Longrightarrow dy = \frac{dx}{|x|^2} - \frac{2x}{|x|^4}\langle x, dx\rangle = \frac{1}{|x|^2}\left(dx - 2\frac{x\langle x, dx\rangle}{|x|^2}\right)$$

   i.e.

   $$f_*(x)v = \frac{1}{|x|^2}\left(v - 2\frac{x\langle x, v\rangle}{|x|^2}\right) = \lambda(Rv), \;\; v \in T_x D,$$

   donde

   $$\lambda = \frac{1}{|x|^2}, \text{ y } Rv = v - 2\frac{x\langle x, v\rangle}{|x|^2}$$

   es la **reflexión** de v respeto al hiperplano $x^\perp$ (una isometría).

Def. Un difeo $F:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ se llama un **mapeo conforme** con un factor conforme $\lambda\in C^\infty(M_1)$, $\lambda>0$, si

$$||F_*(x)v||_{g_2}=\lambda(x)||v||_{g_1},\ \text{para todo } v\in T_xM_1.$$

Cor. $f:\mathbb{R}^n\setminus 0\to\mathbb{R}^n\setminus 0,\ x\mapsto x/|x|^2$, es un difeo conforme con un factor conforme $\lambda=1/|x|^2$, respecto a la métrica canonica en $\mathbb{R}^n$.

Obviamente, un mapeo conforme con factor conforme $=1$ es un isometría, y la composición de dos mapeos conformes F_1,F_2 con factores conformes λ_1,λ_2 (resp.) es un mapeo conforme $F_2\circ F_1$ con factor conforme $\lambda_1(\lambda_2\circ F_1)$.

Cor. $f_1=T\circ f\circ T^{-1}$ tambien es un difeo conforme, con $\lambda(x)=|T^{-1}x|^{-2}=|x+e_1|^{-2}$ (respecto a la métrica canonica).

Prop. Si $F:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ es un mapeo conforme con un factor conforme λ, y redefinimos $\tilde{g_i}=\lambda_i^2 g_i$, $\lambda_i\in C^\infty(M_i)$, $\lambda_i>0$, $i=1,2$, entonces $F:(M_1,\tilde{g_1})\to(M_2,\tilde{g_2})$ es un mapeo conforme con un factor conforme

$$\frac{\lambda_2\circ F}{\lambda_1}\lambda.$$

Dem. Ejercicio (fácil).

Ahora aplicamos el último a nuestra situacion, con $\tilde{g_1}=\lambda_1^2|dx|^2,\tilde{g_2}=\lambda_2^2|dy|^2$ en D, H (resp.), ie

$$\lambda_1=\frac{1}{1-|x|^2},\ \lambda_2=\frac{1}{|y_1^2|},\ \lambda=\frac{1}{|x+e_1|^2},$$

entonces $f_1:(D,\tilde{g_1})\to(H,\tilde{g_2})$ es un mapeo conforme con factor conforme

$$\frac{1-|x|^2}{|x+e_1|^2}(\lambda_2\circ f_1)(x)=\ldots=1,$$

según un cálculo fácil, ie, $f_1:(D,\tilde{g_1})\to(H,\tilde{g_2})$ es una isometría. QED.