Tarea num. 9
(Fecha de entrega 1.11.95)

1. Prueba que el conjunto de las funciones diferenciables $[0,1] \to R$, con la metrica inducida por $C[0,1]$, no es un espacio metrico completo .

2. Sea X un espacio metrico. Una completacion de X es un espacio metrico completo $\tilde{X}$ con una isometria $f : X \to \tilde{X}$ tal que $f(X)$ es denso en $\tilde{X}$. En este problema probamos el teorema siguiente:

Cualquier espacio metrico X posee una completacion $X \to \tilde{X}$. Ademas, la completacion es unica, en el sentido siguiente: si $f_1 : X \to \tilde{X}_1$ y $f_2 : X \to \tilde{X}_2$ son dos completaciones de X, entonces existe una isometria $\tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, unica, que mapea f_1 a f_2; ie el siguiente diagrama conmuta:

$$X$$

$$\tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$$

a) Prueba que una funcion uniformamente continua entre dos espacios metricos manda sucesiones de Cauchy a sucesiones de Cauchy.

b) Sean X y Y dos espacios metricos, Y completo, A un subconjunto denso en X y $f : A \to Y$ una funcion uniformamente continua (ver tarea 3, problema 3c). Prueba que f tiene una extension unica a una funcion continua $X \to Y$, y esta extension es uniformamente continua tambien (ver tambien tarea 2, problema 2b).

c) Sea A un subconjunto denso en un espacio metrico X. Prueba que si toda sucesion de Cauchy en A converge a un elemento de X entonces X es completo.

d) Prueba que la completacion de un espacio metrico, si existe, es unica, en el sentido explicado arriba.

e) Sea $\bar{X}$ el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy en un espacio metrico X. Prueba que para cada $\bar{x} = (x_1, x_2, ...)$ y $\bar{y} = (y_1, y_2, ...)$ en $\bar{X}$, el limite $\lim d(x_i, y_i)$ existe y denotalo por $\rho(\bar{x}, \bar{y})$. Prueba que ρ es una seuda-metrica en $\bar{X}$ (ver tarea 1, problema 6). Denota el espacio de clases de equivalencia correspondiente por $[\bar{X}]$.

f) Usando la notacion del inciso anterior, prueba que $x \mapsto [(x, x, x, ...)]$ define una isometria $X \to [\bar{X}]$ cuya imagen es densa en $[\bar{X}]$, asi que obtenemos una completacion de X.

3. Prueba la existencia de una funcion continua $[0,1] \to R$ que no es monotona en ningun sub-intervalo de $[0,1]$.

Sugerencia: sea $\{I_n\}$, $n = 1, 2, 3...$, la coleccion de todos los sub-intervalos de $[0,1]$ con extremos racionales y considera los subconjuntos $F_n := \{f \in C[0,1] | f \text{ es monotona en } I_n\}$.

4^*. Sea $f : [0,1] \to R$ una funcion con derivadas de todo orden tal que para cada $x \in [0,1]$ existe un n tal que la n-sima derivada de f en x es 0 (n posiblemente depende de x). Prueba que f es un polinomio.

Sugerencia: sea $F_n = \{x \in [0,1] | f^{(n)}(x) = 0\}$, $n = 0, 1, 2, ...$, $G_n = \text{int}(F_n)$, $G = \cup G_n$. Prueba que: a) $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset ....$ b) Es suficiente probar que $G = [0,1]$. c) G es denso en $[0,1]$ (Usa el teorema de la categoria de Baire). d) Si $J \subset G$ es un intervalo, entonces existe un n tal que $J \subset G_n$ (considera priemro un intervalo cerrado, luego una union creciente de intervalos cerrados). e) $K = I - G$ no tiene puntos aislados (si no es vacio). f) Si K no es vacio entonces existe un intervalo J y un m tal que $J \cap K \subset K \cap F_m$ (Usa el teorema de la categoria de Baire para $K = \cup K_n$ donde $K_n = K \cap F_n$). g) $J \cap K \subset \bigcap_m^\infty F_n$. h) Sea L un intervalo maximal de $G \cap J$. Prueba que $L \subset G_m$. (Se sabe, por d), que $L \subset G_n$ para algun n. L tiene por lo menos un exteremo en $J \cap K$. Considera los casos $n < m$ y $n \geq m$).