Topologia I, 18.10.96

Tarea num. 8
(Fecha de entrega 2.10.96)

1. Sea X un espacio topologico, G y H dos grupos topologicos actuando continuamente en X, satisfaciendo la siguiente condicion: $x_1 \sim x_2 \pmod H$ implica $g \cdot x_1 \sim g \cdot x_2 \pmod H$ para todo $g \in G$.

a) Prueba que esta condicion se satisface cuando las acciones de G y H conmuten (ie $g \cdot (h \cdot x) = h \cdot (g \cdot x)$, para todo $g \in G$, $h \in H$, $x \in X$).

b) Prueba que la accion de G inducida en X/H es continua.

2. Sea $Gr_{k,n}(R)$ el conjunto de todos los subespacios lineales de dimension k en R^n ("el Grasmaniono"). Le damos una topologia de la manera siguiente. Consideramos el espacio $St_{k,n}(R)$ de todos los mapeos lineales inyectivos $\phi : R^k \to R^n$ ("la variedad de Stiefel"), con la topolgia inducida del espacio de todas las matrices $n \times k$ (un espacio euclideano de dimension kn). Definimos una accion del grupo $GL_k(R)$ en $St_{k,n}(R)$ por $\phi \mapsto \phi \circ h^{-1}$, $h \in GL_k(R)$.

a) Prueba que eso define una accion continua de $GL_k(R)$ en $St_{k,n}(R)$.

b) Prueba que el mapeo $\phi \mapsto \mathrm{Im}(\phi)$ (la imagen de ϕ) define una biyeccion entre $St_{k,n}(R)/GL_k(R)$ y $Gr_{k,n}(R)$.

Usamos esta biyeccion para dar topologia a $Gr_{k,n}(R)$ (declarandola un homeomorfismo). Definimos ahora una accion de $GL_n(R)$ en $St_{k,n}(R)$ por $\phi \mapsto g \circ \phi$, $g \in GL_n(R)$.

c) Prueba que eso define una accion continua de $GL_n(R)$ en $St_{k,n}(R)$, que conmuta con la accion de $GL_k(R)$ de inciso a), y que la accion inducida en $Gr_{k,n}(R)$, $W \mapsto g(W)$, $g \in GL_n(R)$, $W \in Gr_{k,n}(R)$, es continua y transitiva. Encuentra el estabilizador para el subespacio k-dimensional generado por los primeros k elementos de la base estandar de R^n.

d) Prueba que $Gr_{k,n}(R)$ es conexo y compacto.

Sugerencia: Prueba que la accion restringida a $SO_n(R)$ queda transitiva.

e) Definimos un mapeo $Gr_{k,n}(R) \to Mat_n(R)$ (las matrices reales $n \times n$ con la topologia usual). A cada $W \in Gr_{k,n}(R)$ le asociamos la matriz de la proyeccion ortogonal sobre W (ie, para $x \in R^n$ le descoponemos $x = x' + x''$, $x' \in W$, $x'' \in W^{\perp}$, y mandamos $x \mapsto x'$). Prueba que este mapeo define un homeomorfismo entre $Gr_{k,n}(R)$ y las matrices $P \in Mat_n(R)$ de rango k que satisfacen $P^t = P$, $P^2 = P$.

3. Definimos una accion del grupo Z (los enteros con la topologia discreta) en T por $a \cdot z = u^a z$, donde $u = e^{2\pi i r}$, r un numero real fijo.

a) Prueba que es una accion continua.

b) Prueba que para r racional todas las orbitas son finitas, y de hecho la accion factoriza a traves de un grupo ciclico finito, ie existe un $k \in N$ tal que $Z \to Homeo(T)$ es la composicion de la proyeccion $Z \to Z_k$ y una accion continua $Z_k \to Homeo(T)$. Ademas, T/Z es homeomorfo a T.

c) Prueba que para r irracional la accion es libre y que todas las orbitas son densas en T. Describe la topologia del cociente (Hausdorff? compacto? conexo? ...).

d)* Generaliza lo anterior para la accion de Z en T^n, $a \cdot (z_1, ..., z_n) = (u_1^a z, ...u_n^a z_a)$.