Tarea num. 7
(Fecha de entrega 18.10.96)

1. a) Prueba que cada abierto conexo en R^n es arco-conexo ("conexo por trayectorias ").
b) Prueba que cada abierto conexo en R^n es conexo por trayectorias poligonales (i.e. trayectorias continuas $\gamma : [0,1] \to R^n$ tal que existen $0 = t_0 < t_1 < t_2 ... < t_n = 1$ tal que en cada segmento $[t_i, t_{i+1}]$ γ es una funcion lineal, posiblemente no homogenia).

2. Sea $\{C_\alpha\}$ una familia de subconjuntos arco conexos de un espacio toplogico. Prueba que si la interseccion de la familia no es vacia entonces la union es arco-conexa.

3. a) Define una accion de Z_2 en S^n por $(-1) \cdot x = -x$. Prueba que es una accion continua libre (ie todos los estabilizadores son triviales) y que S^n/Z_2 es homeomorfo a RP^n.

b) Define una accion de $U(1)$ en $S^{2n+1} \subset C^{n+1}$ por $\lambda \cdot x = \lambda x$. Prueba que es una accion continua libre y que $S^{2n+1}/U(1)$ es homeomorfo a CP^n.

c) Define una accion de $Sp(1)$ (los quaterniones de norma 1) en $S^{4n+3} \subset H^{n+1}$ por $\lambda \cdot x = \lambda x$. Prueba que es una accion continua libre y que $S^{4n+3}/Sp(1)$ es homeomorfo a HP^n.

4. Definimos una accion del grupo S_3 (permutaciones de 3 objetos) en R^3 con la formula $\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)})$.

a) Prueba que es una accion continua, de hecho lineal y aun ortogonal (ie, la imagen de S_3 en el grupo de homeomorfismo de R^3 esta contenida en $O_3(R)$) y encuentra las orbitas y los estabilizadores de esta accion.

b) Prueba que el plan $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ es invariante y dibuja algunas orbitas en este plan.

c)* Prueba que el cociente R^3/S_3 es homeomorfo a $R^2 \times [0, \infty)$.

5. Sea G un grupo topologico compacto. Define una accion de G en $C(G; C)$ (el espacio de las funciones continuas complejas $G \to R$ con la metrica de supremo) por $(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$.

a) Prueba que es una accion por isometrias. Es una accion continua?

b) Para el grupo $T = U(1)$ prueba que para cada entero n, el subespacio 1-dimensional generado por el exponencial $f(z) = z^n$ es invariante.

c) Prueba que la funcion que asigna a una funcion f en T su integral $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$ es continua y invariante (ie constante en las orbitas de la accion).

d)* Prueba que un subespacio lineal cerrado es invariante ssi esta generado (ie es la cerradura del espacio lineal generado por) los exponenciales que contiene.