Topologia I, 27.9.96

Tarea num. 6
(Fecha de entrega 4.10.96)

1. Sea C^* el conjunto de los complejos distintos de 0, $T = \{z \in C \mid |z| = 1\}$.

a) Prueba que C^* es un grupo topologico (respecto a la multiplicacion de numeros complejos y la topologia usual de C), y que $T \subset C^*$ es un subgrupo cerrado.

b) Prueba que todos subgrupos compactos de C^* etsan contenidos en T.

c) Prueba que un subgrupo infinito de T es denso.

Sugerencia: usando la compacidad de T, existe una sucesion de cauchy de elementos distintos del subgrupo. Asi que para cada $\epsilon > 0$ existen dos elementos distintos x, y en el subgrupo con $d(x, y) < \epsilon$. Usando el hecho que la metrica en T es invariante bajo translaciones, $d(gx, gy) = d(x, y)$, prueba que las potencias de y/x es una ϵ-red en T.

d) Sea $h = e^{2\pi ir}$, donde $r \in [0, 1]$, y $H = \{h^n \mid n \in Z\}$ el subgrupo ciclico generado por h en T. Prueba que H es un grupo finito ssi r es racional, y que todos subgrupos finitos de T se obtienen de esta manera.

e) Sea $1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, ...$ la sucesion que se obtiene al tomar el primer digito de cada uno de las potencias de 2 (en base 10). Prueba que 7 aparece una infinidad de veces.

Sugerencia: $r = \log_{10} 2$ es irracional, asi que sus multiples (mod 1) son densos en $[0, 1]$, y en particular existe una infinidad de ellos en el segmento $[\log_{10} 7, \log_{10} 8)$.

2. Considera R como un grupo aditivo.

a) Prueba que es un grupo topologico, respeto a la topologia usual de R.

b) Prueba que si $G \subset R$ es un subgrupo cerrado distinto de R, entonces existe un $a > 0$ tal que $G = aZ$.

c) Sea $H \subset T$ el subgrupo generado en T por $h = e^{2\pi ir}$, r irracional (ver 1d). Prueba que H es isomorfo, como un grupo, al grupo $Z \subset R$, pero no como grupo topologico. (Isomorfismo de grupos topologicos: un isomrfismo de grupos que es un homeomorfismo en lo mismo tiempo).

3. Sea G un grupo topologico, $H \subset G$ un subgrupo.

a) Prueba que H, con la topologia inducida por G, es un grupo topologico.

b) Sea $X = G/H$ el espacio cociente de las clases laterales $\{xH\}$ con la topologia cociente. Prueba que la accion $G \times X \to X$, $xH \mapsto gxH$, es continua.

c) Prueba que si H es un subgrupo normal, entonces G/H, con la topologia cociente, es un grupo topologico.

d) Prueba que el grupo cociente R/Z es isomorfo, como grupo topologico, a T.