Topologia I, 20.9.96

Tarea num. 5
(Fecha de entrega 27.9.96)

1. a) Prueba que cada funcion continua $[0,1] \to [0,1]$ tiene un punto fijo.

b) Sea X un espacio topologico no conexo. Prueba que existe una funcion continua $X \to X$ sin puntos fijos.

c) Encuentra un ejemplo de un espacio conexo X con una funcion continua $X \to X$ sin puntos fijos.

d) Sea X un espacio topologico. Prueba que X es conexo ssi cada funcion continua de X a un espacio discreto es constante.

e) Sea X un espacio topologico y $f : X \to R$ una funcion *localmente constane* (i.e. cada punto en X posee una vicindad en donde f es constante). Prueba que si X es conexo entonces f es constante, y da un contra-ejemplo en caso que X no es conexo.

2. Prueba que la frontera de una bola en R^n, $n \geq 2$, o l_2, es conexa.

3. Prueba que un espacio topologico metrizable que es la imagen continua de un espacio compacto localmente conexo es localmente conexo. (Localmente conexo: cada vecindad de cada punto contiene una vecindad conexa).

4. Sea X un espacio metrico , $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$. Una ϵ-cadena entre x y y consiste en una sucesion finita de puntos $x_1, x_2, ..., x_n$ tal que $x_1 = x$, $x_n = y$ y $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$, para todo $i = 1, 2, ..., n-1$.

a) Si X es conexo prueba que para cada dos puntos $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$ existe una ϵ-cadena entre x y y.

b) Prueba que si X es compacto y si para cada dos puntos $x, y \in X$ y $\epsilon > 0$ existe una ϵ-cadena entre x y y entonces X es conexo.

c) Da un contra-ejemplo al inciso anterior para X no compacto.

Sugerencias: para a): fija x y prueba que $\{z |$ existe una ϵ-cadena entre x y $z\}$ es un subconjunto abierto y cerrado en X. Para b):, prueba que si $X = F_1 \cup F_2$ con F_1, F_2 cerrados disjuntos y no vacios, entonces $d(F_1, F_2) := \inf\{d(x_1, x_2) | x_i \in F_i\} > 0$.

5. Sea X un espacio topologico y $x \in X$.

a) Prueba que la componente conexa determinada por x es un cerrado en X.

b) Prueba que cada conjunto abierto-cerrado (abierto y tambien cerrado) que contiene a x contiene a la componente conexa determinada por x.

c) Prueba que cada subconjunto abierto-cerrado en X es una union de componentes conexas de X.

d)* Prueba que si X es compacto metrizable entonces la componente conexa que contiene a x es la interseccion de todos los abiertos-cerrados que contienen a x.

e)* Encuentra un contra-ejemplo al inciso anterior para X no compacto.

6. a) Sea F un cerrado en R , K un subconjunto convexo en R^n o l_2 y $f : F \to K$ una funcion continua. Prueba que existe una extension continua de f a una funcion continua de R a K.

Sugerencia: El complemento de F es una union disjunta numerable de intervalos abiertos. En cada uno de estos intervalos puedes extender por segmentos de rectos.

b) Sea X el cubo $\{(x_1, ..., x_n) \in R^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, ...n\}$ en R^n. Prueba que existe una funcion continua $f : [0,1] \to X$ que es *sobre*.

Sugerencia: define f primero en el conjunto de Cantor $\Delta \subset [0,1]$, luego usa a).

c)* Describe un ejemplo concreto del mapeo en b) para $n = 2$.