Tarea num. 4
(Fecha de entrega 20.9.96)

1. Sea X un espacio metrico acotado. Para un $x \in X$ y $A \subset X$ definimos $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$. Sea $B \subset X$. Definimos $\sigma(A, B)$ a $\max\{ \sup_{x \in A} d(x, B) \, , \, \sup_{y \in B} d(y, A)\}$.

a) Prueba que σ es una seudo-metrica sobre el espacio $P(X)$ de todos los subconjuntos no vacios en X (ver tarea num. 1, problema 6).

b) Prueba que σ, restringida al espacio $2^X \subset P(X)$ de los subconjuntos cerrados no vacios en X, es una metrica (se llama la metrica de Hausdorff).

c) Prueba que el espacio metrico 2^X en b) es isometrico al espacio metrico que se obtiene del espacio seudo-metrico $P(X)$ en a) al pasar a clases de equivalencia.

d) Prueba que si X es completo entonces 2^X tambien es completo.
Sugerencia: Sea $\{A_i\}$ una sucesion de Cauchy. Prueba que se converge a $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}$.

e) Un espacio topologico es *totalmente acotado* si para cada $\epsilon > 0$ existe una ϵ-red finita. Prueba que si X es totalmente acotado entonces 2^X tambien es totalmente acotado.

Sugerencia: Sea $\epsilon > 0$. Prueba que si $A \subset X$ es una ϵ-red finita entonces $P(A) \subset 2^X$ tambien es.

f) Prueba que si X es compacto entonces 2^X tambien es compacto.

Sugerencia: Usar tarea num. 3, problemas 3a y 4, y el inciso anterior.

2. Un espacio topologico X es σ-compacto si existe en X una sucesion $\{K_i\}$ de compactos tal que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.

a) Prueba que un espacio separable y localmente compacto es σ-compacto. (Localmente compacto: cada punto tiene una vicindad compacta. Vicindad de un punto: un conjunto que contiene un abierto que contiene al punto).

b) Prueba que un espacio metrico σ-compacto es separable.

c) Prueba que l_2 no es σ-compacto.

3. Decide si los enteros Z, con la metrica p-adica, es un espacio topologico compacto.