Topologia I, 6.9.96

Tarea num. 3
(Fecha de entrega 13.9.96)

1. Sea A un subconjunto de un espacio topologico X. Prueba que A es compacto ssi cada cubierta de A por abiertos $\{G_\alpha\}$ en X, $A \subset \cup_\alpha G_\alpha$, posee una sub-cubierta finita.

2. a) Decide si el subconjunto de R^3 definido por la ecuacion $x^2 + y^2 - z^2 = xy + yz - zx$ es compacto.

b) Sea K un subconjunto compacto en R^3. Definimos un subconjunto A de R^2 por $A = \{(x, y)|$ existe un $z \in R$ tal que $(x, y, z) \in K\}$. Prueba que A es compacto.

3. Sea X un espacio topologico compacto. Prueba los siguientes:

a) Si X es metrico entonces es completo (cada sucesion de Cauchy converge).

b) Una funcion real continua en X es acotada, y alcanza su minimo y maximo.

c) Si X y Y son metricos y $f : X \to Y$ es una funcion continua entonces f es *uniformamente* continua (i.e. para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $d(x_1, x_2) < \delta$ entonces $d(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$).

d) Si X es metrico y $f : X \to X$ es una isometria (ie $d(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in X$) entonces $f(X) = X$.

e) Si X es metrico y $f : X \to X$ es una funcion que satisface $d(f(x_1), f(x_2)) \geq d(x_1, x_2)$ para todo $x, y \in X$ entonces f es una isometria.

f) Si X es metrico y $f : X \to X$ es una funcion continua que satisface $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para todo $x \neq y$ en X entonces f tiene un punto fijo, unico, en X (i.e. un punto x tal que $f(x) = x$). Encuentra un contra-ejemplo para X no compacto. (Sugerencia: Usar 3.b para la funcion $g(x) = d(x, f(x))$).

4. Sea X un espacio metrico completo tal que para cada $\epsilon > 0$ existe una ϵ-red finita en X (i.e. una coleccion de puntos $x_1, x_2, ..., x_n$ tal que la union de las bolas abiertas $B(x_i, \epsilon)$ cubre a todo X). Prueba que X es compacto.

5. Sea A un subconjunto cerrado y acotado en $C[0, 1]$ (con la metrica de supremo). Prueba que A es compacto si es equi-continuo (i.e. para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ para toda f en A). Generaliza para X metrico compacto en lugar de $[0, 1]$.

Sugerencia: usa ϵ-redes finitas en X para $\epsilon = 1/n$, $n = 1, 2, ...$ Dada una sucesion en A, usa un proceso diagonal para obtener una subsucesion que converge en cada punto de la union de estas redes.

6. a) Sean X, Y dos espacio topologico, $X_1, X_2 \subset X$, $X_1 \cup X_2 = X$, y $f : X \to Y$ una funcion tal que sus restricciones a X_1 y X_2 son continuas. Prueba que si X_1, X_2 son los dos abiertos, o los dos cerrados, entonces f es continua.

b) Prueba los homeomorfismos $RP^1 \cong S^1$, $CP^1 \cong S^2$, $HP^1 \cong S^4$.