Topología I, 30.8.96

Tarea núm. 2
(Fecha de entrega: 6.9.96)

1. Sea $A \subset X$ un abierto en un espacio topológico. Prueba que un subconjunto $U \subset A$ es abierto en A si y solo si es abierto en X.

2. Sean X y Y dos espacios topológicos. Demuestra los siguientes incisos:

   a) Una función $f : X \to Y$ es continua si y solo si $f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F \subset Y$ cerrado.

   b) Si f y g son funciones continuas $X \to Y$, $A \subset X$ es denso y Y es Hausdorff (por ejemplo, métrico), entonces $f|_A = g|_A$ implica $f = g$.

   c) ¿Es cierto que si $f : X \to Y$ es continua, entonces $f(U)$ es abierto para todo $U \subset X$ abierto? Si no es cierto, encuentra un contraejemplo.

3. Sea p un entero primo fijo. Para un entero $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$, definimos su norma p-ádica por $\|n\|_p := 1/p^t$, donde p^t es la máxima potencia de p que divide a n. Para $n = 0$ definimos $\|0\|_p := 0$. Por ejemplo, $\|-18\|_3 = 1/9$ y $\|n\|_p = 1$ si y solo si n y p son primos relativos.

   a) Prueba que $d_p(a, b) := \|a - b\|_p$ define una métrica en $\mathbb{Z}$ (se llama la métrica p-ádica).

   b) Encuentra las bolas abiertas de radio $1/p^k$ alrededor de 0, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

   c) Prueba que todas las bolas abiertas son cerradas.

4. En cada caso, decide si el subconjunto $A \subset X$ es cerrado, abierto o denso, y encuentra su cerradura e interior:

   a) $X = \mathbb{R}, A = \mathbb{Q} - \{3/4\}$.

   b) $X = \mathbb{R}, A =$ números diádicos $= \{x \in X \mid$ el desarrollo de x en base 2 es finito$\}$.

   c) $X = [0, 1], A = \{x \in X \mid$ se puede representar x por una fracción decimal que no contiene 7$\}$.

   d) $X = l_2, A = \{(x_1, x_2, \ldots) \in l_2 \mid \sum |x_i| < \infty\}$.

   e) $X = \mathbb{R}^2, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^4 + 5x^6y^7 \neq 8\}$.

   f) $X = \mathbb{Z}$ con la métrica 3-ádica, $A = \{n \in X \mid n$ es impar$\}$.

   g) $X = C[0, 1], A =$ las funciones diferenciables.

5. Sea X un espacio topológico. Prueba los siguientes incisos:

   a) A es cerrado si y solo si $\partial A \subset A$.

b) A es abierto si y solo si $\partial A \cap A$ es vacío.

c) Si A es abierto o cerrado, entonces $\operatorname{int} \partial A$ es vacío.

d) Encuentra un $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{int} \partial A$ no sea vacío.

6. En este ejercicio damos una demostración “topológica” de la existencia de un número infinito de primos. Consideramos la topología en $\mathbb{Z}$ generada por las sucesiones aritméticas. (Una sucesión aritmética (SA) es un conjunto de la forma $\{an + b \mid n \in \mathbb{Z}\}, a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0)$. Prueba los siguientes incisos:

   a) La intersección de dos SA es una SA o vacía. En particular, un abierto no vacío es infinito.

   b) Cada SA es un cerrado.

   c) El complemento de $\bigcup\limits_{p} p\mathbb{Z}$ es $\{1, -1\}$, donde la unión es sobre todos los primos $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$.

   d) Concluye de los tres incisos anteriores que hay un número infinito de primos.