Topologia I, 15.11.96

**Tarea num. 12**
(Fecha de entrega 22.11.96)

**1.** Sea $X$ un espacio topologico y $f : S^n \to X$ un mapeo continuo, $n = 1, 2, \ldots.$ Prueba que $f$ se extiende a un mapeo continuo $R^{n+1} \to X$ ssi $f$ es homotopico a un mapeo constante. Concluye que si $X$ es contraible entonces $f$ se extiende.

**2.** a) Encuentra el grupo fundamental de $C^*$ (el complemento del origen en el plan complejo $C$) respecto al punto base $1 \in C^*$.

b) Sea $\gamma : S^1 \to C^*$ un mapeo continuo. Prueba que existe un entero unico $k$ tal que $\gamma$ es homotopico al mapeo $z \mapsto z^k$. Este numero se llama el indice de $\gamma$ respecto al origen (o el "winding number").

Sugerencia: Puedes usar a), excepto que tienes que cuidar los puntos bases y el tipo de homotopias que usas. Para eso puedes probar el siguiente lemma: sean $f_1, f_2$ dos mapeos de espacios puntuados $(X, x_0) \to (G, g_0)$, donde $G$ es un grupo topologico, tal que $f_1 \sim f_2$ no necesariamente relativo al punto base $x_0$. Entonces $f_1 \sim f_2$ relativo a $x_0$.

c) Prueba que si $\gamma$ es liso por pedazos entonces el indice esta dado por la integral de linea $\int_\gamma dz/z$.

d) Prueba el teorema fundamental del algebra: cada polinomio no constante con coeficientes complejos tiene una raiz compleja.

Sugerencia: Sea $p(z)$ un tal polinomio de grado $n > 0$. Sea $C_R$ el circulo de radio $R$ centrado en el origen. Prueba que para $R$ suficientemente grande $p(z) \neq 0$ para $z \in C_R$ y que $p|_{C_R} : C_R \to C^*$ es homotopico al mapeo $z \mapsto z^n$, asi que no es nul-homotopico. Ahora usa problema 1 para concluir que para algun $r < R$ la trayectoria cerrada $p|_{C_r}$ debe pasar por el origen.

**3.** Calcula el grupo fundamental del complemento de una linea recta en $R^3$. (Sugerencia: encuentra un circulo que sea un retracto por deformacion de este espacio).

$4^*$. Una aplicacion divertida del problema anterior: en cada momento existe sobre la tierra un triangulo equilateral "isotermico" de lado 1000 km, ie la temperatura en los 3 vertices del triangulo mide lo mismo.

Sugerencia. Lo formulamos matematicamente primero: si $f : S^2 \to R$ es una funcion continua y $a$ un numero positivo suficientemente pequeño ( $a \leq \sqrt{3}$), entonces existen 3 puntos $u_1, u_2, u_3$ en $S^2$ tal que $||u_i - u_j|| = a$ para $i \neq j$, y $f(u_1) = f(u_2) = f(u_3)$.

Ahora Sea $l := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$. Para cada triangulo, ie tripleta de puntos $(u_1, u_2, u_3)$ en $S^2$, definimos $T(u_1, u_2, u_3) := (f(u_1), f(u_2), f(u_3))$. Tenemos entonces que encontrar un triangulo de lado $a$ en donde el valor de $T$ este en $l$. Suponemos que no lo hay. Fijamos un triangulo $(u_1, u_2, u_3)$ de lado $a$ donde $u_1$ es un punto maximo de $f$. Para cada $e \in S^2$ denotamos por $R_e(\theta) : S^2 \to S^2$, la rotacion alrededor del eje $e$ por un angulo $\theta$ (usando la "ley de la mano derecha" para definir la direccion de la rotacion). Sea $e(s)$, $0 \leq s \leq 1$ una trayectoria que conecta a $u_1$ con "el centro" del triangulo $(u_1, u_2, u_3)$ (de hecho hay dos tales centros; escoge uno). Ahora define $\gamma : S^1 \times I \to R^3 - l$ como $\gamma(\theta, s) := T(R_{e(s)}(\theta)u_1, R_{e(s)}(\theta)u_2, R_{e(s)}(\theta)u_3)$. Sea $\gamma_s := \gamma|_{S^1 \times \{s\}} : S^1 \to R^3 - l$. Prueba que $\gamma_0$ es nul-homotopico, porque su imagen esta en el conjunto convexo $\{x_1 \geq x_2\} \cap \{x_1 \geq x_3\}$, y que $\gamma_1$ no es nul-homotopico.