Topologia I, 1.11.96

Tarea num. 10
(Fecha de entrega 8.11.96)

1. Sean X, Y, Z tres espacios topologicos, f_0 y f_1 mapeos continuos $X \to Y$, g_0 y g_1 mapeos continuos $Y \to Z$. Prueba que si f_0 es homotopico a f_1 y g_0 es homotopico a g_1 entonces la composicion $g_0 \circ f_0$ es homotopica a $g_1 \circ f_1$. Formaliza y prueba tambien una version "relativa" (para pares topologicos).

2. Sea X un espacio topologico arco-conexo. Prueba que para cualquier dos puntos $x_0, x_1 \in X$, los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ son isomorfos.

Sugerencia: fija una trayectoria α entre x_0 y x_1 y define $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ por $[\gamma] \mapsto [\alpha^{-1}\gamma\alpha]$.

3. Sean X, Y dos espacios topologicos, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Prueba que el grupo $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ es isomorfo al producto directo de grupos $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

4. Sean (X, x_0), (Y, y_0) dos espacios topologicos puntuados, $f : X \to Y$ un mapeo continuo tal que $f(x_0) = y_0$. Define un mapeo $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ por $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$. Prueba que

a) f_* esta bien definido.

b) f_* es un homomrfismo de grupos.

c) Para la identidad $id : X \to X$, tenemos que $id_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ es la identidad.

d) Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $g : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ son mapeos continuos de espacios puntuados (ie $f(x_0) = y_0$, $g(y_0) = z_0$) entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ ("la regla de la cadena").

e) Sean f_0, f_1 dos mapeos de pares topologicos $(X, x_0) \to (Y, y_0)$. Entonces si f_0 y f_1 son homotopicos (relativo a x_0), entonces $(f_0)_* = (f_1)_*$.

f) Sea $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ un mapeo continuo de pares tal que existe un mapeo continuo de pares $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ tal que $g \circ f \sim id_X$ y $f \circ g \sim id_Y$ (homotopia relativo a x_0, y_0, resp.). Tal f se llama una "equivalencia homotopica". Entonces $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ es un isomorfismo de grupos.

g) R^n es homotopicamente equivalente a un punto.

5)* Sea G un grupo topologico. Prueba que el grupo fundamental de G, respecto a cualquier punto base, es abeliano.