Topología I, 22.8.96

Tarea núm. 1

Fecha de entrega: Los primeros 3 problemas martes 27.8.96. El resto viernes 30.8.96.

1. Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ un subconjunto. Sea T la topología inducida en X por la métrica d, y $\tilde{d}$ la métrica inducida en A por d. Prueba que la topología inducida en A por T coincide con la topología inducida en A por $\tilde{d}$.

2. Definición: un espacio topológico X es Hausdorff si para cualquier dos puntos $x, y \in X$ existen unos abiertos disjuntos A y B tal que $x \in A$ y $y \in B$.

   a) Prueba que $\mathbb{R}$, con la topología estándar, es Hausdorff.

   b) Prueba que cualquier espacio métrico es Hausdorff (respecto a la topología inducida por la métrica).

   c) Da un ejemplo de un espacio topológico no Hausdorff.

3. Sea X un conjunto. Definimos una topología en X: los cerrados son los conjuntos finitos y todo X. Prueba que eso define una topología en X.

4. Sea (X, d) un espacio métrico. Prueba que $d/(1+d)$ es una métrica equivalente a d (es decir, induce la misma topología en X como d). Concluye que cualquier espacio metrizable admite una métrica acotada.

5. *a*) Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ definimos

   $$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

   Prueba que d es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

   b) Sea l_2 el espacio de todas las sucesiones infinitas de números reales $x = (x_1, x_2, \ldots)$ que satisfacen $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$, y define

   $$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}.$$

   Prueba que d está bien definida (es decir, $< \infty$) y define una métrica en l_2.

   Sugerencia. Prueba que en un espacio vectorial con producto escalar (x, y) (es decir, bilineal, simétrico, y positivo definitivo), la fórmula $d(x, y) = \|x -$

$y\|$, donde $\|v\| = \sqrt{(v,v)}$, define una métrica. Para la desigualdad del triángulo es suficiente probar $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. Para eso es suficiente probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz $(v, w) \leq \|v\| \, \|w\|$. Prueba primero esta desigualdad en el caso particular de un plano euclidiano (espacio vectorial de dimensión 2 con producto escalar) y en el caso general aplica el caso particular al plano generado por los vectores v y w.

6. Sea X un conjunto. Una *seudo-métrica* en X es una función $d_0 : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface para todo $x, y, z \in X$:

   a) $d_0(x, y) \geq 0$ y $d_0(x, x) = 0$,
   b) $d_0(x, y) = d_0(y, x)$,
   c) $d_0(x, z) \leq d_0(x, y) + d_0(y, z)$.

   Así que d_0 satisface todos los requisitos de una métrica, excepto que es posible tener $d_0(x, y) = 0$ sin que $x = y$. Define una relación $\sim$ por $x \sim y$ ssi $d_0(x, y) = 0$.

a) Prueba que $\sim$ es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica, transitiva).

b) Para un $x \in X$ denota por $[x]$ la clase de equivalencia de x, es decir, $[x] = \{y \,|\, y \sim x\}$, y por $[X]$ el conjunto de las clases de equivalencias. Definimos $d([x], [y]) = d_0(x, y)$. Prueba que d está bien definida y que es una métrica en $[X]$.

c) Sea X el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales. Para todo $x, y \in X$ definimos $d_0(x, y) = \lim |x_i - y_i|$. Prueba que d_0 es una seudo-métrica.