Examen Final

Topología I, 23.1.96

El número al final de cada pregunta denota su valor. Hay que escoger 4 de los 5 problemas cuya suma da 100 puntos.

1. (20 puntos)

   a) Sea A un subconjunto de un espacio topológico X. Define: A es de primera categoría. (2)

   b) Encuentra un espacio topológico X con un subconjunto A que no es de primera categoría. (5)

   c) Decide si los irracionales en los reales es un conjunto G_δ (intersección numerable de abiertos), o F_σ (unión numerable de cerrados), o ambos. (13)

2. (20 puntos)

   a) Sea X un espacio topológico y $f : S^n \to X$ un mapeo continuo. Prueba que f es homotópico a un mapeo constante si y solo si f se extiende a un mapeo continuo $D^{n+1} \to X$, donde D^{n+1} es la bola unitaria cerrada en $\mathbb{R}^{n+1}$. (10)

   b) Prueba que S^1 no es una retracción de D^2. (10)

3. (30 puntos)

   a) Sea G un grupo topológico y Γ un subgrupo discreto. Prueba que la proyección canónica $G \to G/\Gamma$ es una cubierta. (20)

   b) Encuentra todos los subgrupos discretos de $\mathbb{R}$. (5)

   c) Encuentra todos los subgrupos discretos de S^1. (5)

4. (30 puntos) Sea $X \subset \mathbb{C}^2$ el conjunto $\{(z_1, z_2) \mid z_1 \neq 0, z_2 \neq 0\}$.

   a) Decide si X es compacto. (3)

   b) Decide si X es arco-conexo. (7)

   c) Calcula el grupo fundamental de X respecto al punto base $(1,1)$ y para cada elemento del grupo encuentra una trayectoria que lo representa. (20)

5. (30 puntos) Calcula el grupo fundamental de $\mathbb{R}P^n$, $n = 1, 2, \ldots$ y para cada elemento del grupo encuentra una trayectoria que lo representa.