Topologia I, 9.12.96

Examen Final

Comentarios:

1. Hay que resolver el primer problema (20 puntos) y suficiente del resto para acumular 100 puntos.
2. Se puede usar, sin probar, cualquier resultado que se probó en la clase (excluyendo la tarea), mientras esté claramente formulado.

Los problemas:

1. Define los siguientes términos:
   a) Espacio métrico completo. (2)
   b) Subconjunto denso en un espacio topológico. (2)
   c) La frontera de un subconjunto de un espacio topológico. (2)
   d) Espacio topológico de la segunda categoría. (2)
   e) Espacio topológico arco-conexo. (2)
   f) Espacio topológico compacto. (2)
   g) Espacio topológico simplemente conexo. (2)
   h) Cubierta de un espacio topológico. (2)
   i) El grupo de transformaciones de una cubierta. (2)
   j) Acción propiamente discontinua de un grupo en un espacio topológico. (2)
2. Sea X un espacio topológico simplemente conexo y G un grupo actuando propiamente discontinuamente en X.
   a) Prueba que X/G es arco-conexo. (5)
   b) Prueba que $X \to X/G$ es una cubierta. (10)
   c) Prueba que G es isomorfo al grupo de transformaciones de la cubierta $X \to X/G$. (20)
   d) Prueba que el grupo fundamental de X/G, respecto a cualquier punto base, es isomorfo a G. (25)
3. Prueba la existencia de una función continua $[0,1] \to \mathbb{R}$ que no es monótona en ningún subintervalo. (20)
4. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ una trayectoria continua cerrada, es decir, $\gamma(0) = \gamma(1)$. Prueba que existe un entero *único* k tal que γ es homotópica, a través de trayectorias cerradas, a la trayectoria $t \mapsto e^{2\pi ikt}$; es decir, existe un entero único k tal que existe un mapeo continuo $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$ tal que $H(t,0) = \gamma(t)$, $H(t,1) = e^{2\pi ikt}$, y $H(0,s) = H(1,s)$, para todo $t, s \in [0,1]$. (20)
5. Encuentra el grupo fundamental del complemento de una línea en $\mathbb{R}^3$ y encuentra para cada elemento de este grupo una trayectoria representativa. (20)
6. Sea X el espacio de todas las funciones diferenciables $[0,1] \to \mathbb{R}$ con la métrica de supremo:

   $$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1]\}.$$

   Decide si este espacio es un espacio métrico completo. (20)