Topología I, 5.11.96

Examen núm. 2

1. *a*) Define “G es un grupo topológico”.

   b) Sea G un grupo topológico y X un espacio topológico. Define “G actúa continuamente en X”.

   c) Prueba que $\mathbb{Z}$ (los enteros) es un grupo topológico con respecto a la topología discreta y la adición de números.

   d) Prueba que la función $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(n, x) \mapsto n + x$, define una acción continua y libre de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$. (Debes probar tres condiciones.)

   e) Prueba que el espacio de las órbitas de la acción en el inciso (d) es homeomorfo a S^1.

2. Definimos una acción del grupo $\mathbb{Z}$ (los enteros con la topología discreta) en S^1 por
$$a \cdot z = e^{i\pi \frac{12a}{34}} z.$$

   a) Prueba que es una acción continua.

   b) Prueba que todas las órbitas de la acción son finitas y que tienen el mismo número de puntos. Encuentra este número.

   c) Prueba que la acción se factoriza a través de un grupo cíclico finito, es decir, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{Z} \to \mathrm{Homeo}(S^1)$ es la composición de la proyección $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ y una acción continua $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \to \mathrm{Homeo}(S^1)$.

   d) Prueba que el cociente $S^1/\mathbb{Z}$ es homeomorfo a S^1.