

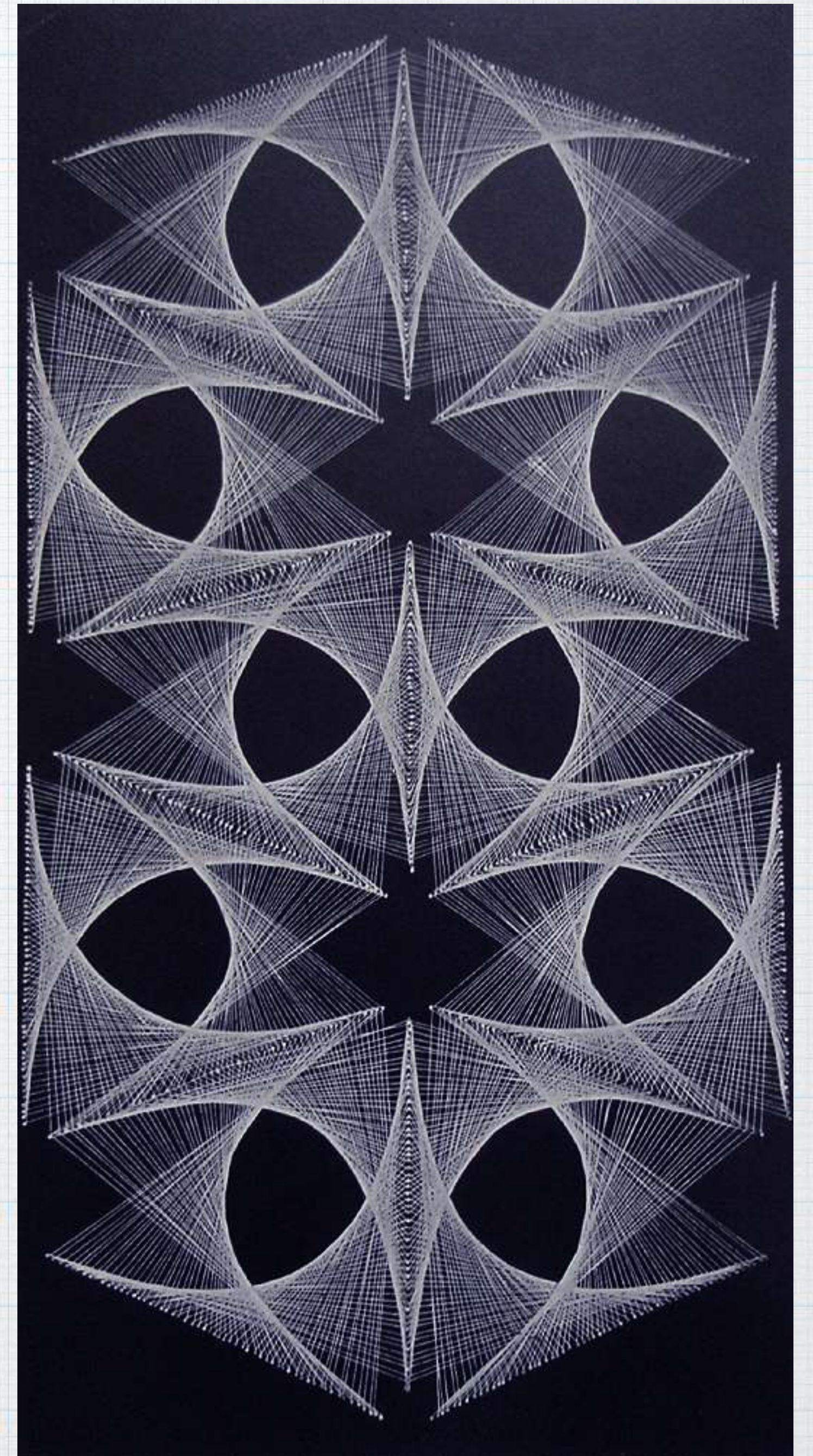
Taller de ciencia para jóvenes

Centro de investigación en Matemáticas, A.C.



Hilogramas: El arte de construir curvas usando rectas

Sebastian Zapata
UNAM, Cuernavaca



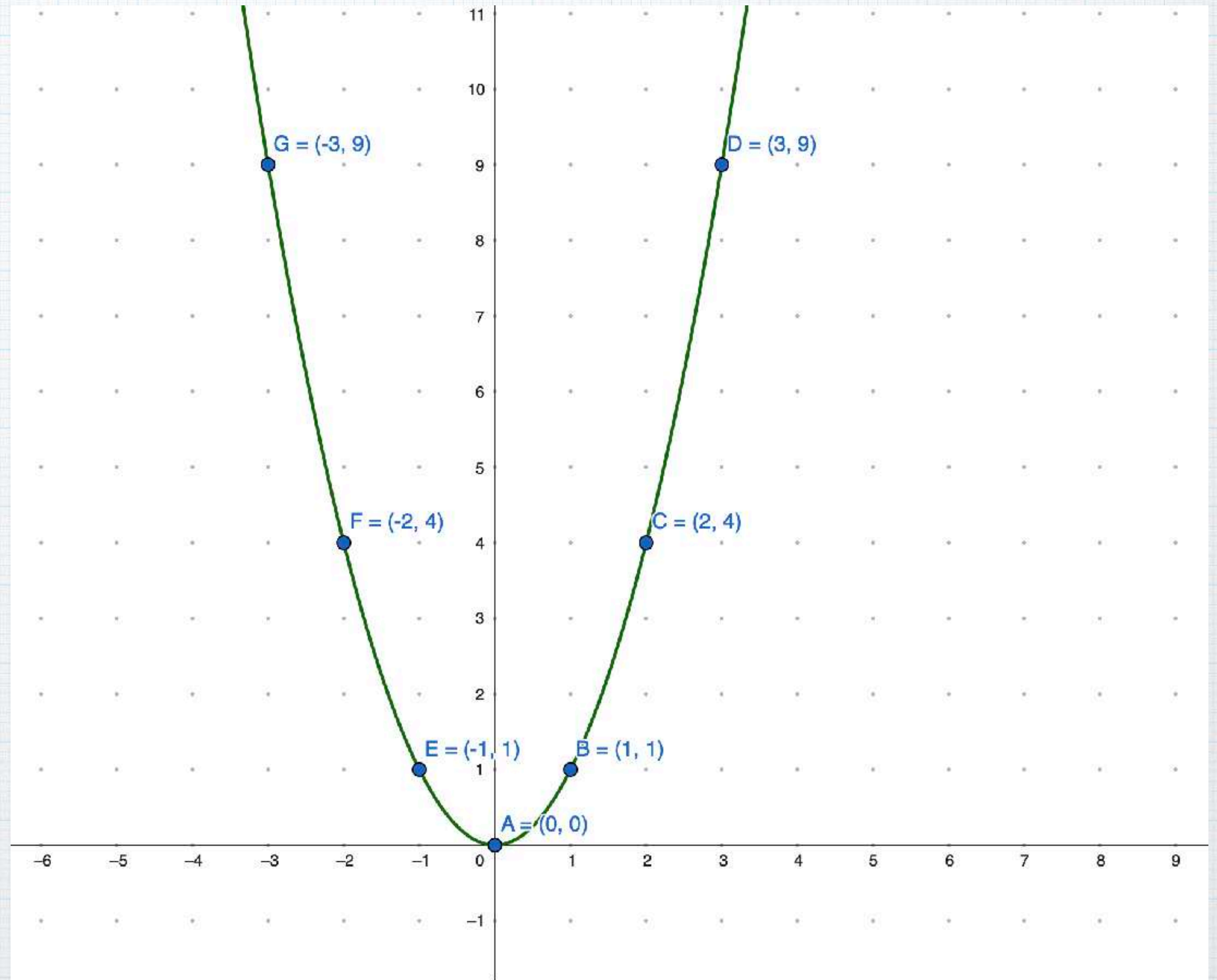
Funciones

$$f: A \rightarrow B$$

A cada $x \in A$

se le asocia un único $f(x) \in B$

$$f(x) = x^2$$

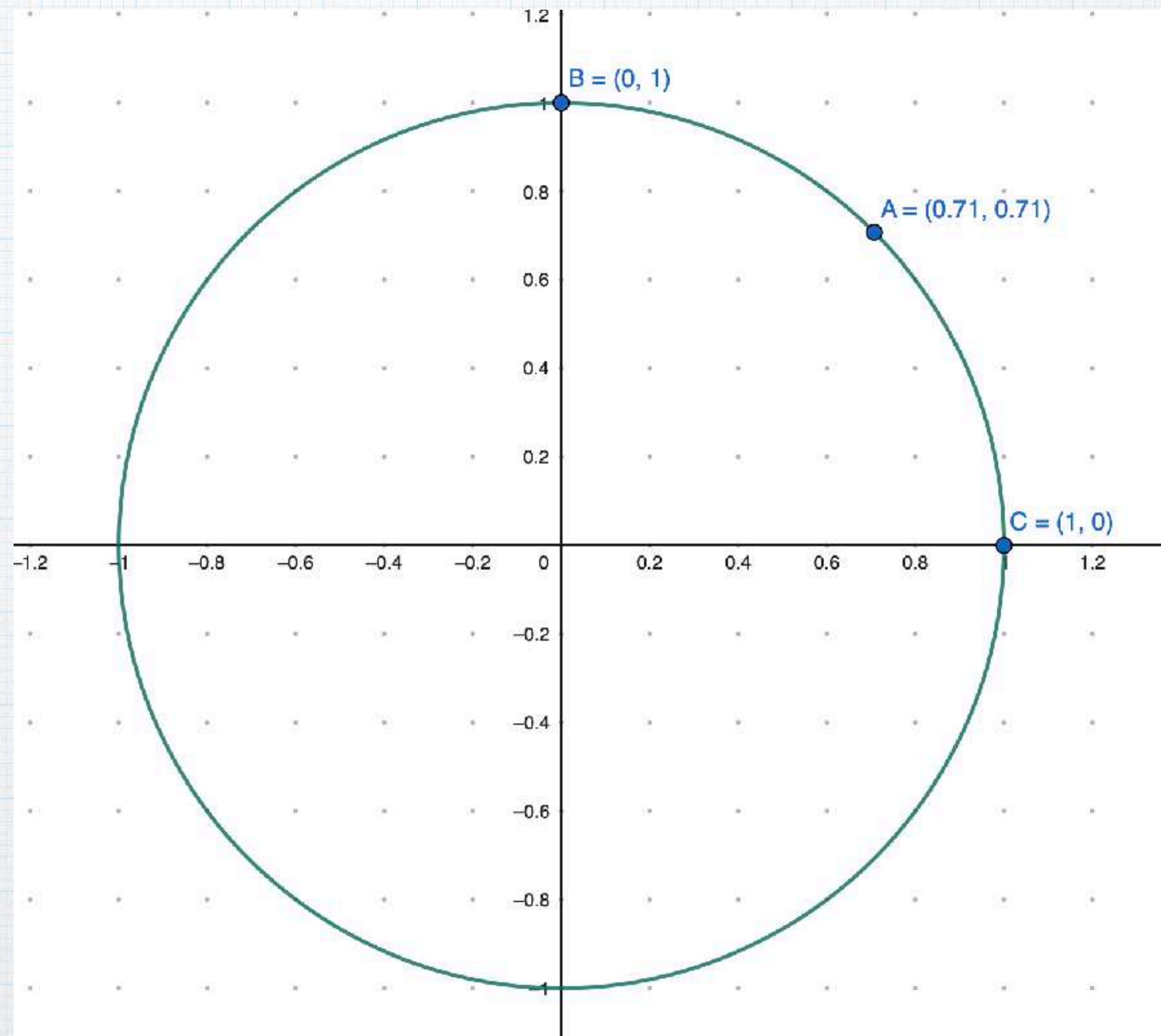


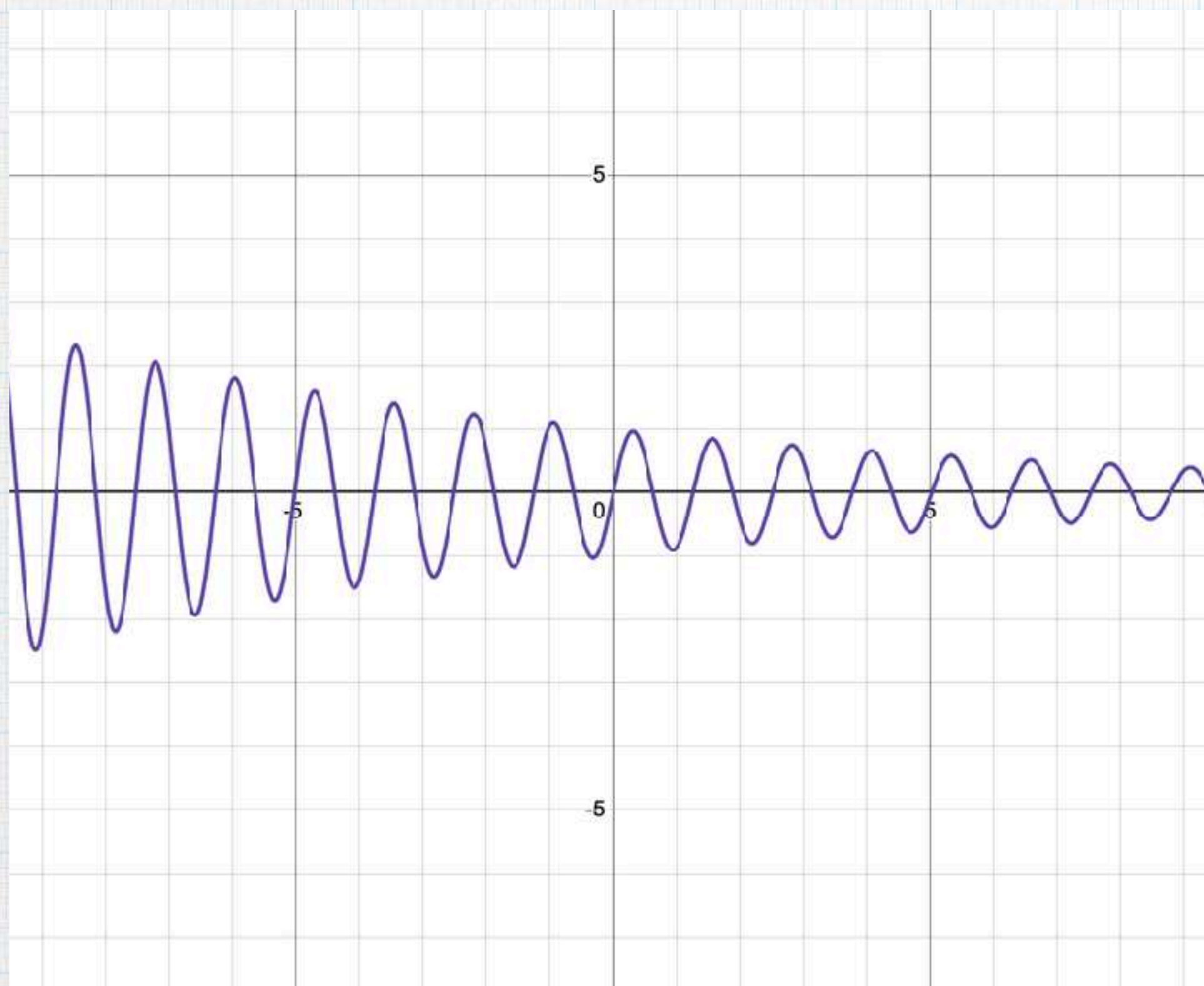
Relaciones

A cada $x \in A$

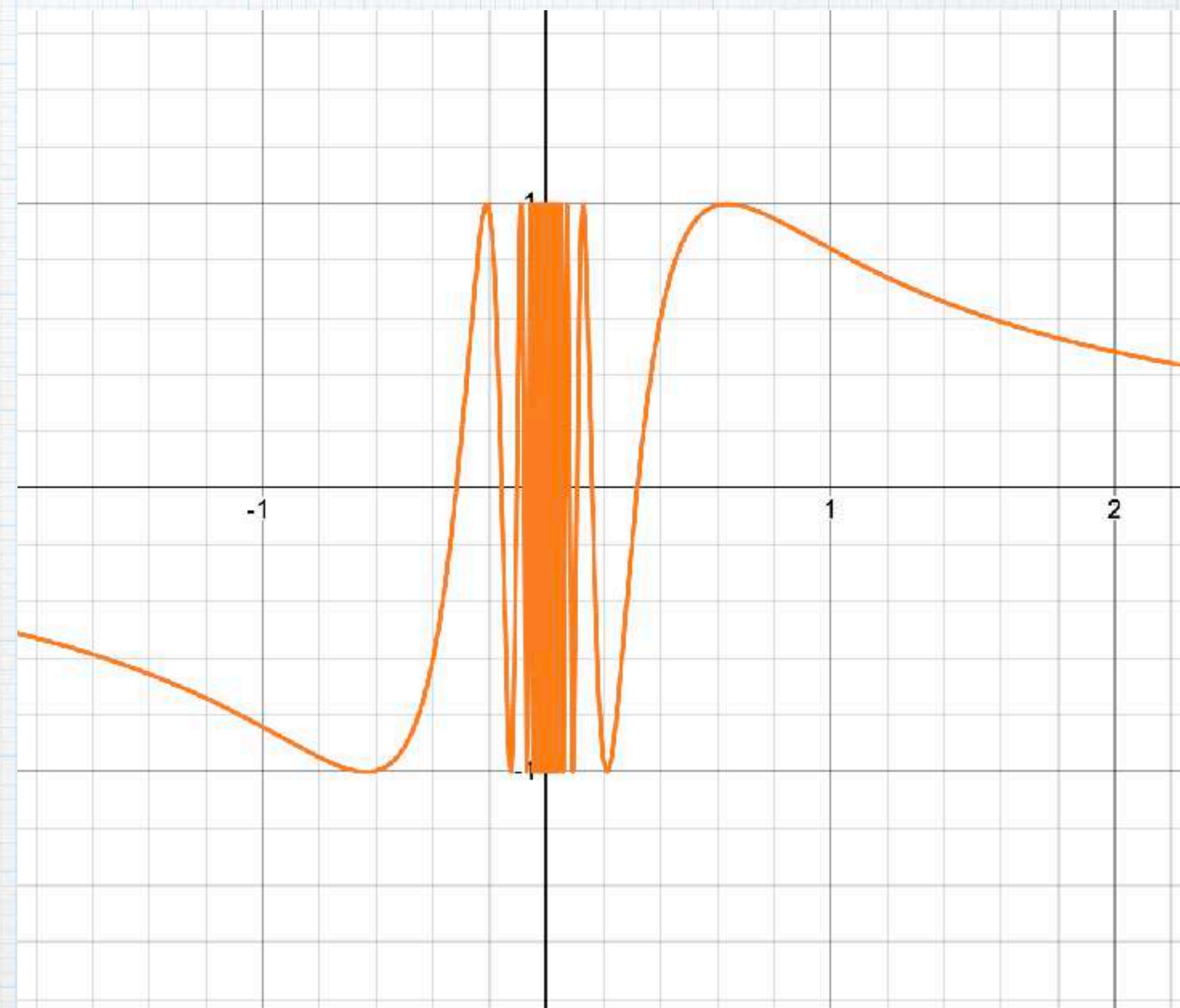
se le asocia un ~~único~~ $f(x) \in B$

$$x^2 + y^2 = 1$$

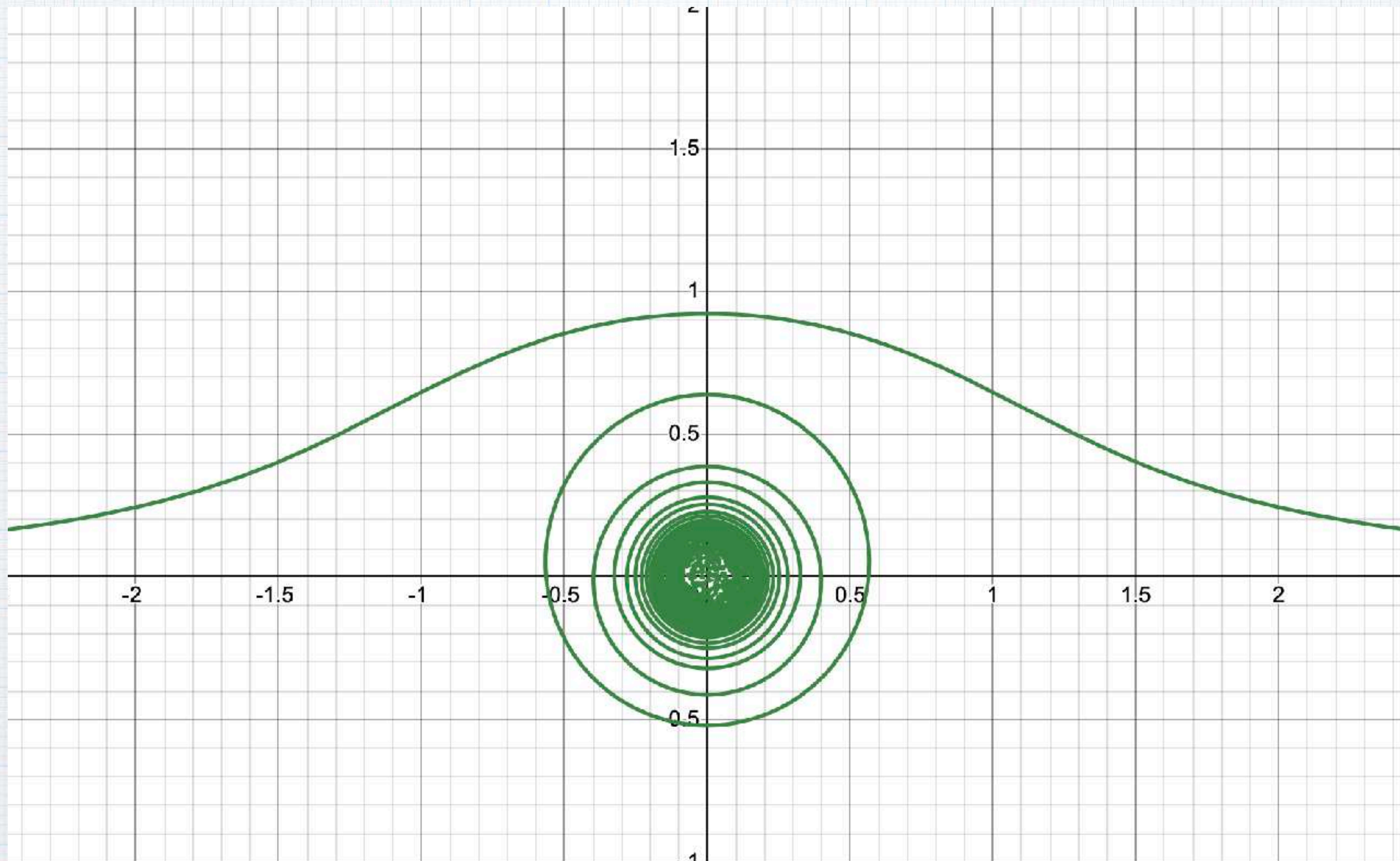




$$f(x) = e^{0.1x} \sin(5x)$$

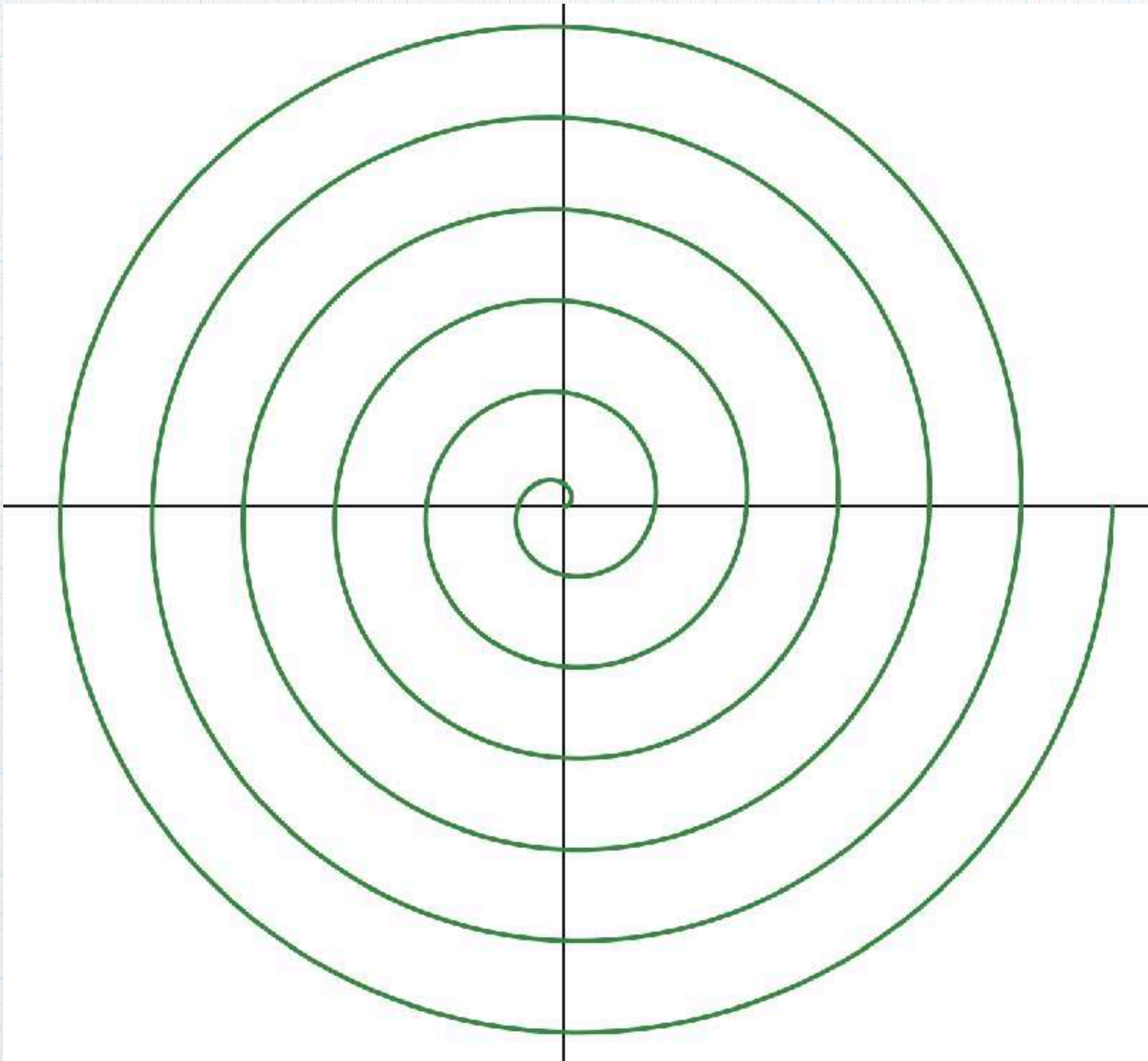


$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$



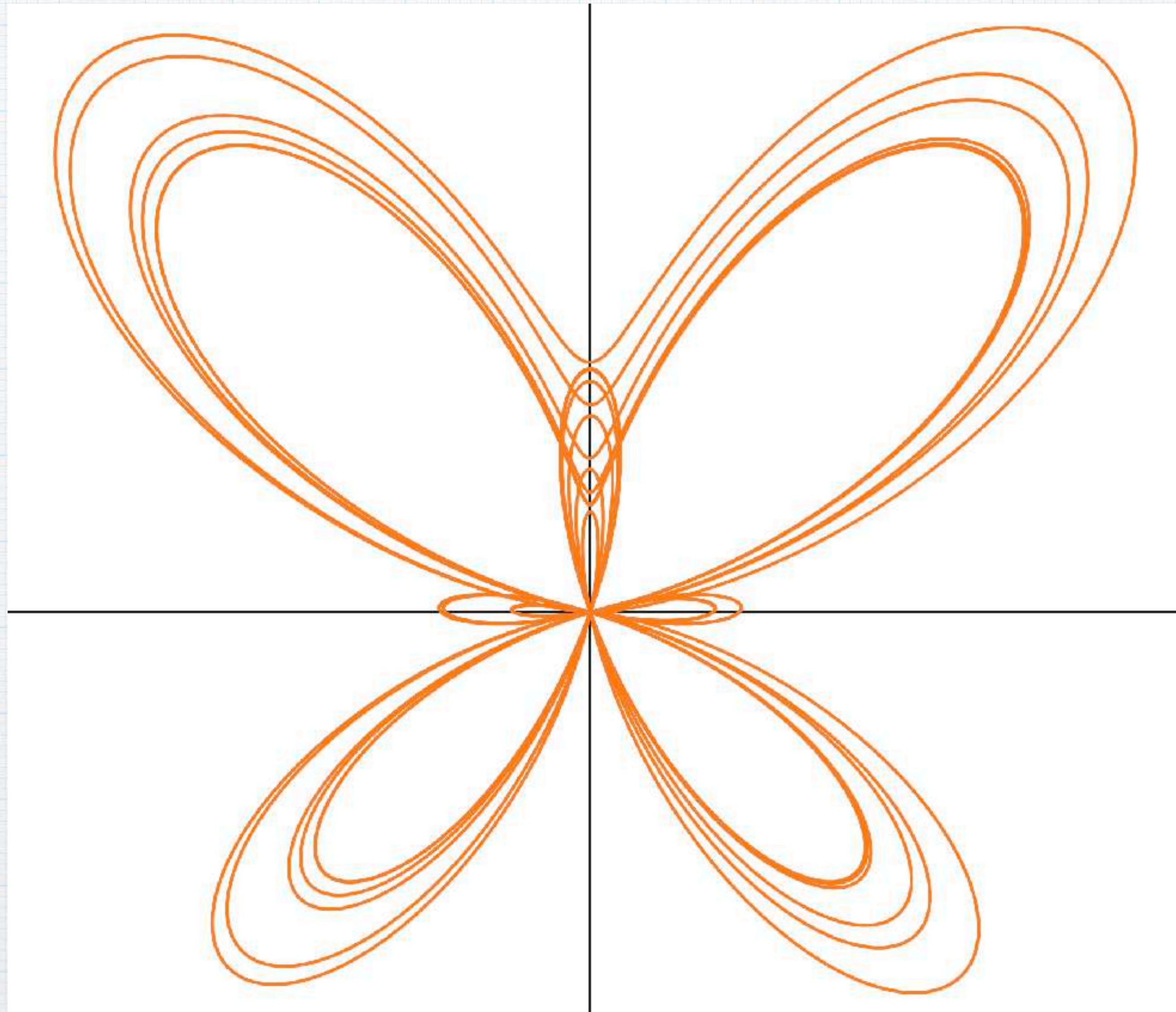
$$y = \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

Podemos usar coordenadas polares

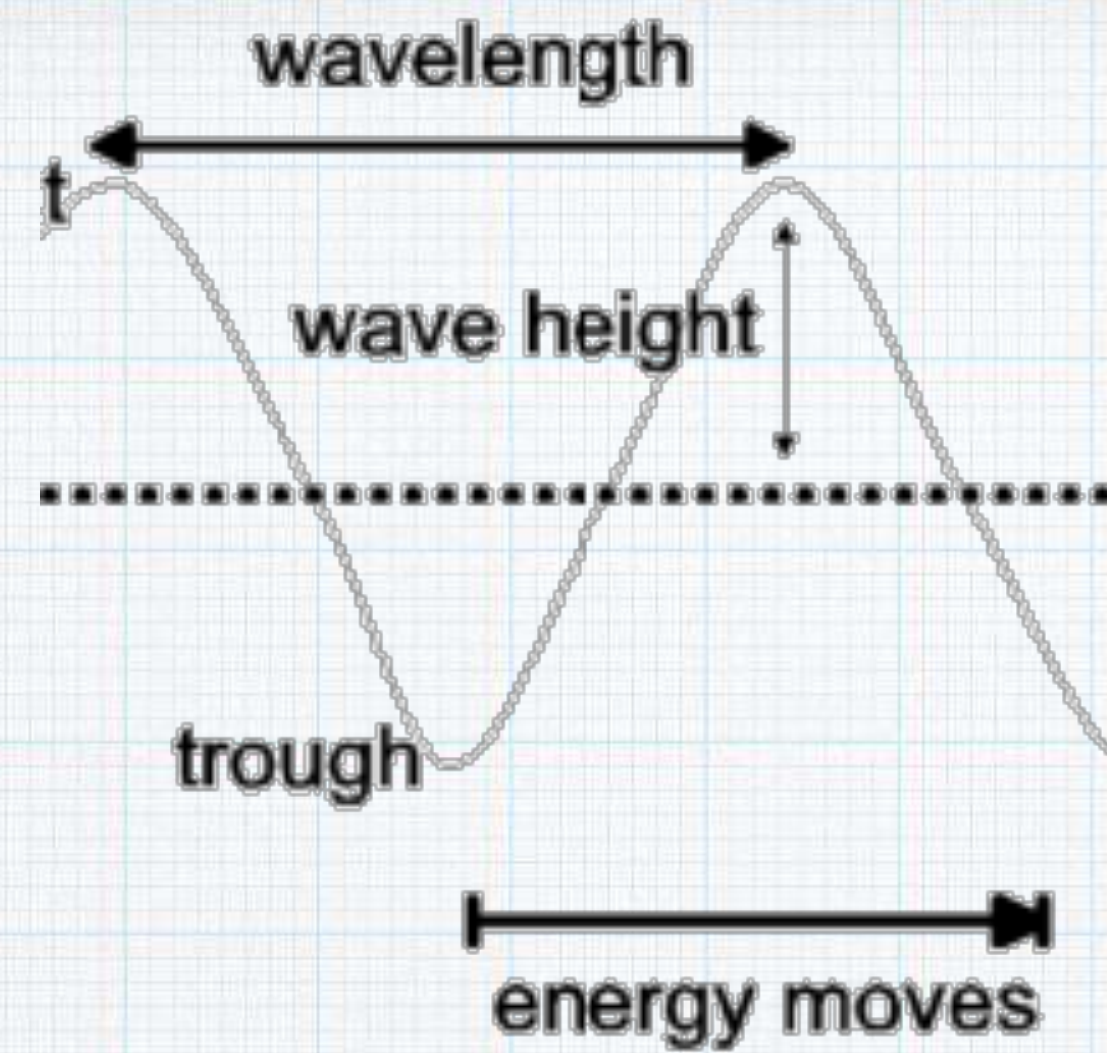


$$r = \theta$$

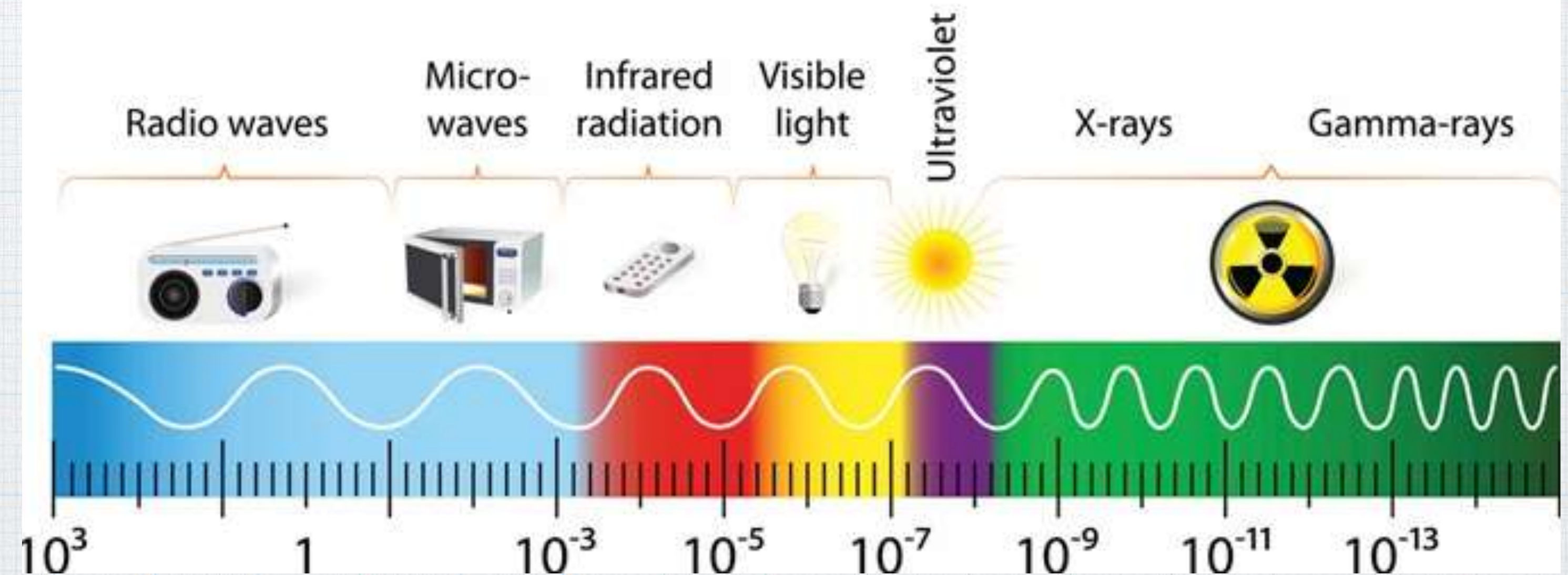
Curva mariposa

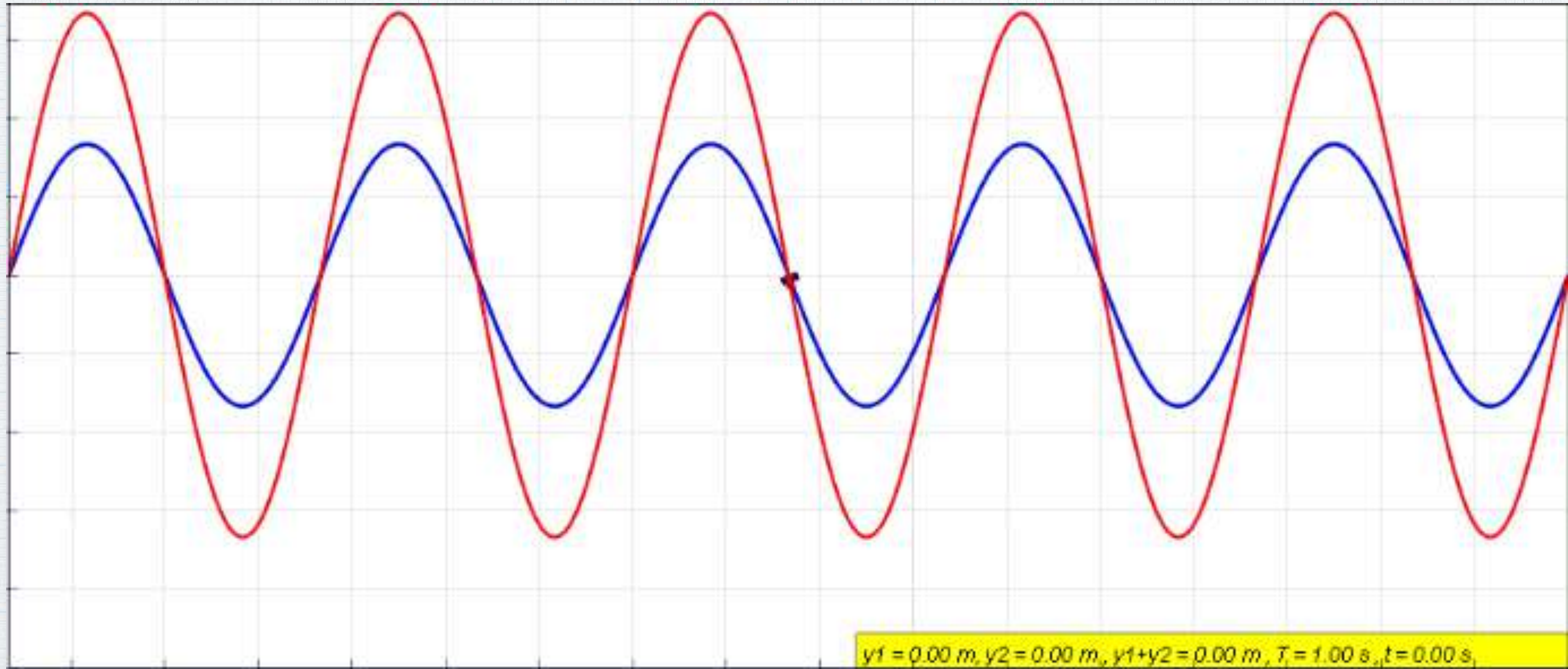


$$r = e^{\sin(\theta)} - 2\cos(4\theta) + \sin^5\left(\frac{\theta}{12}\right)$$



THE ELECTROMAGNETIC SPECTRUM



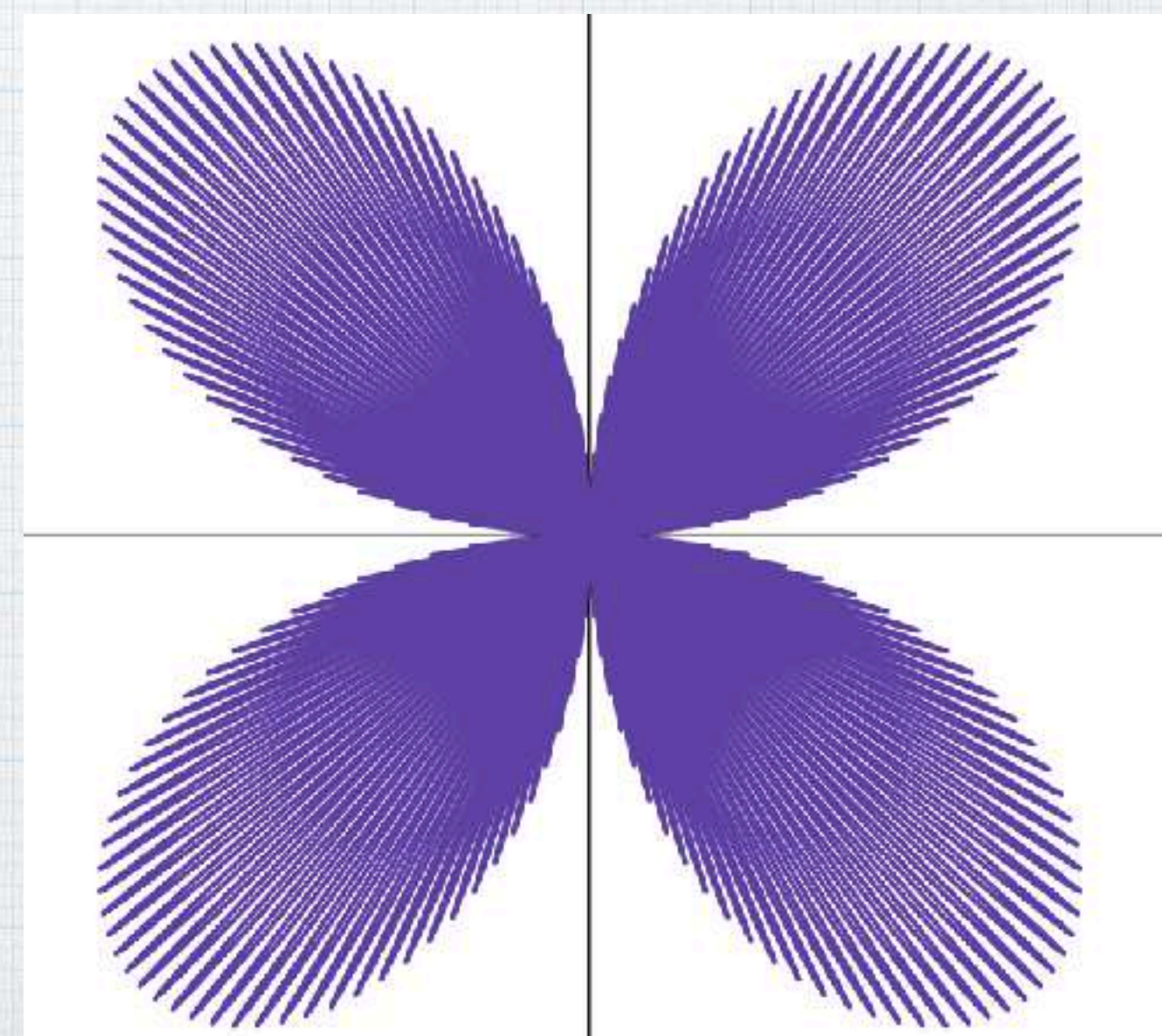
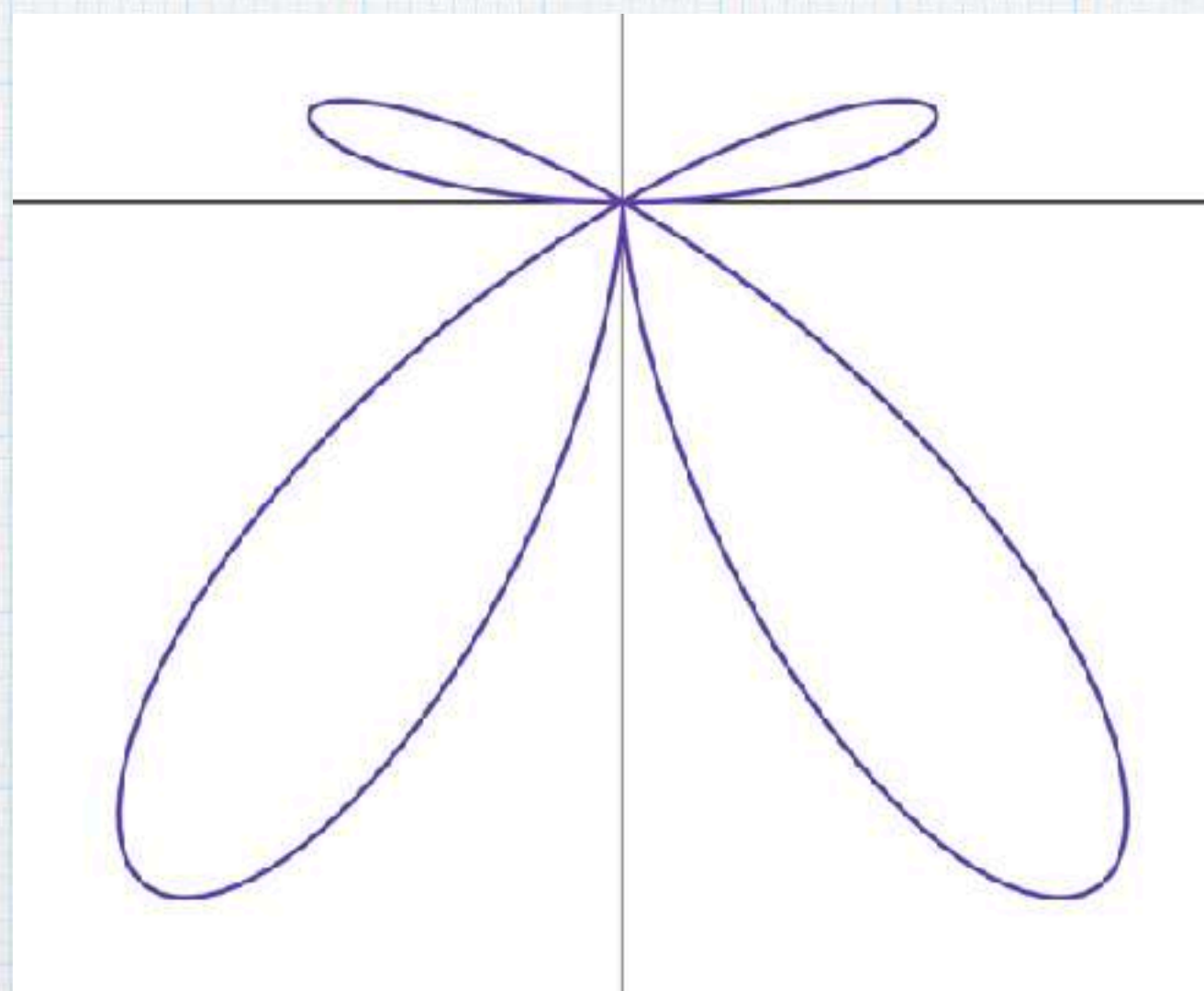
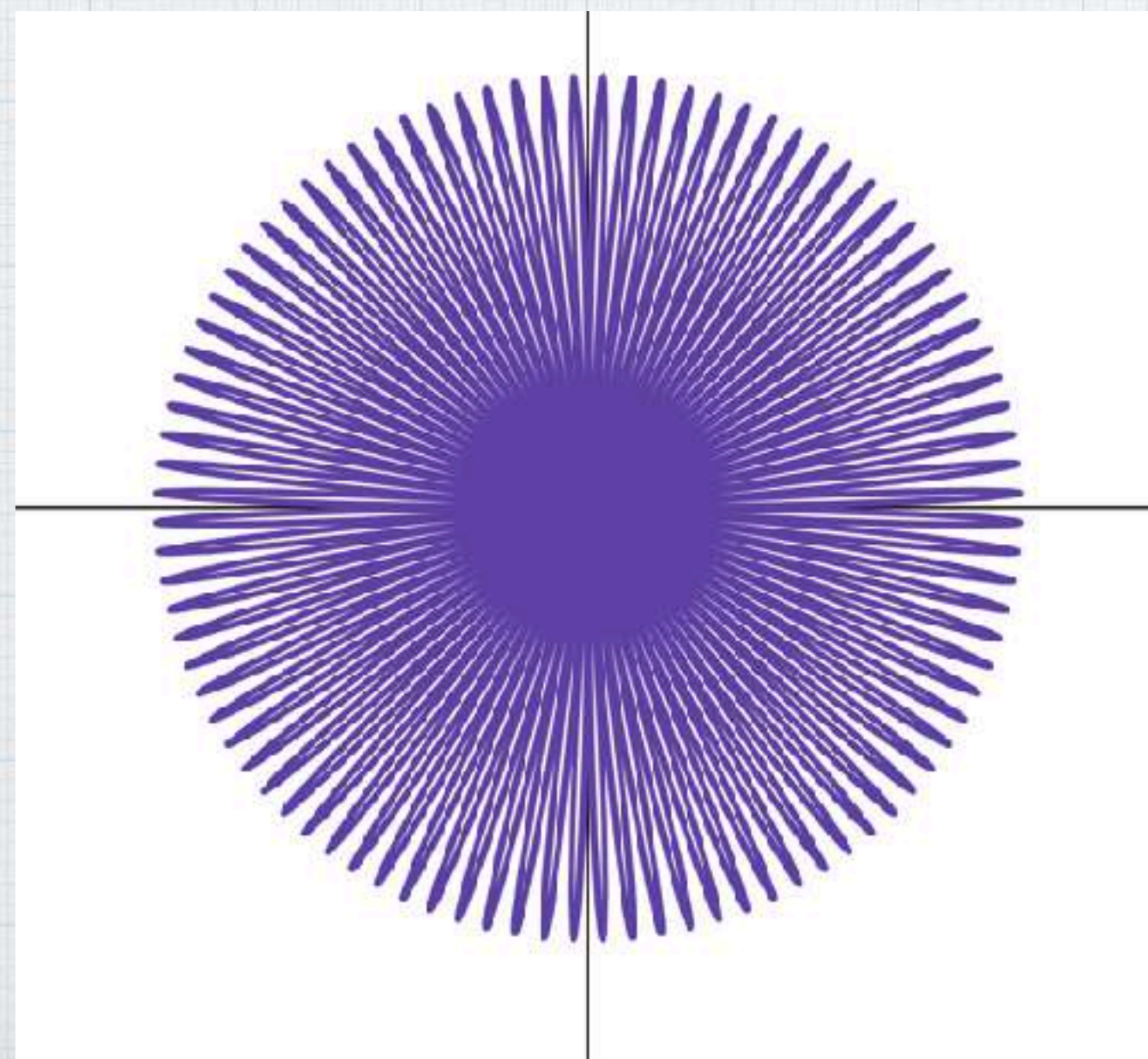
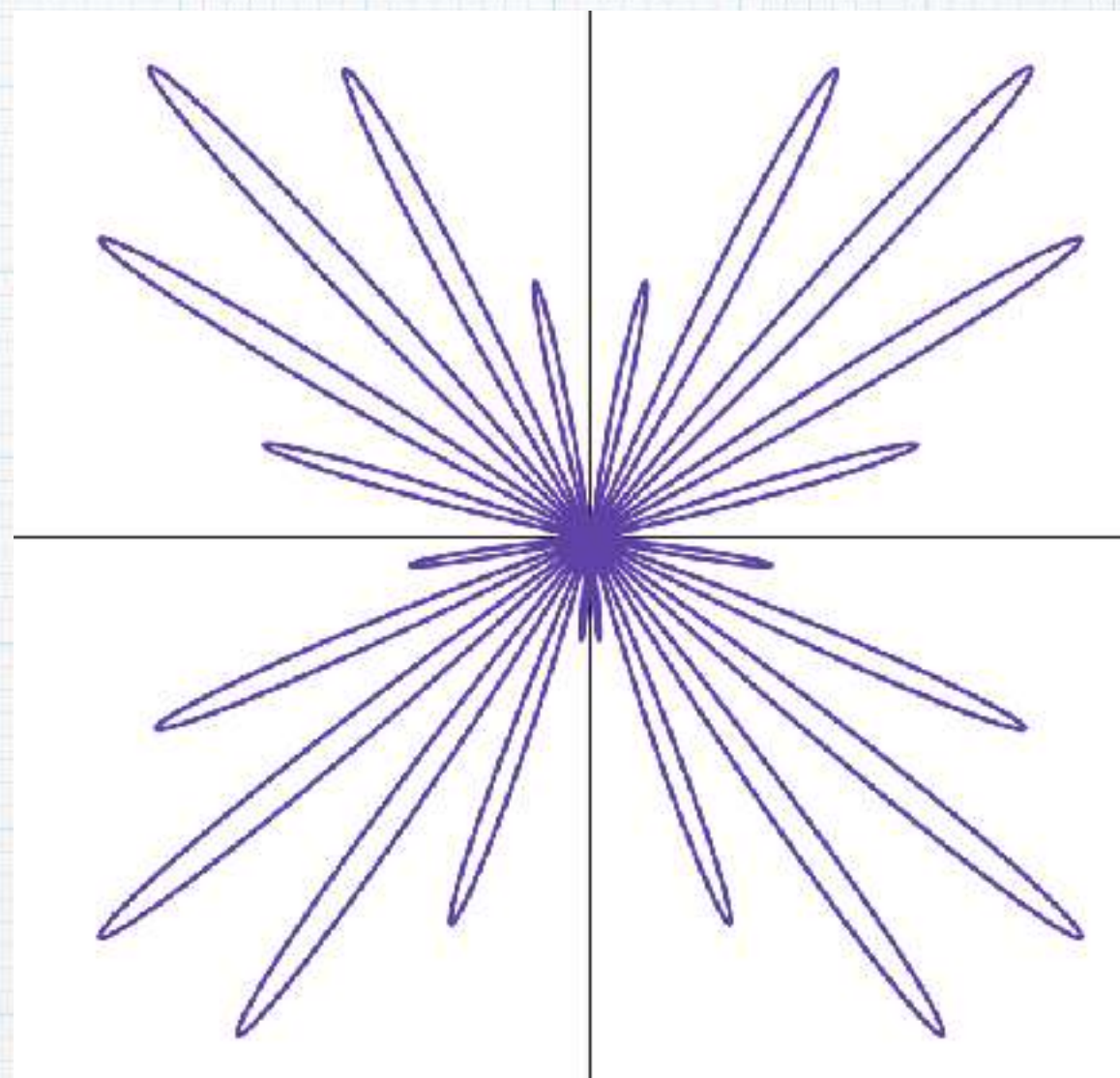
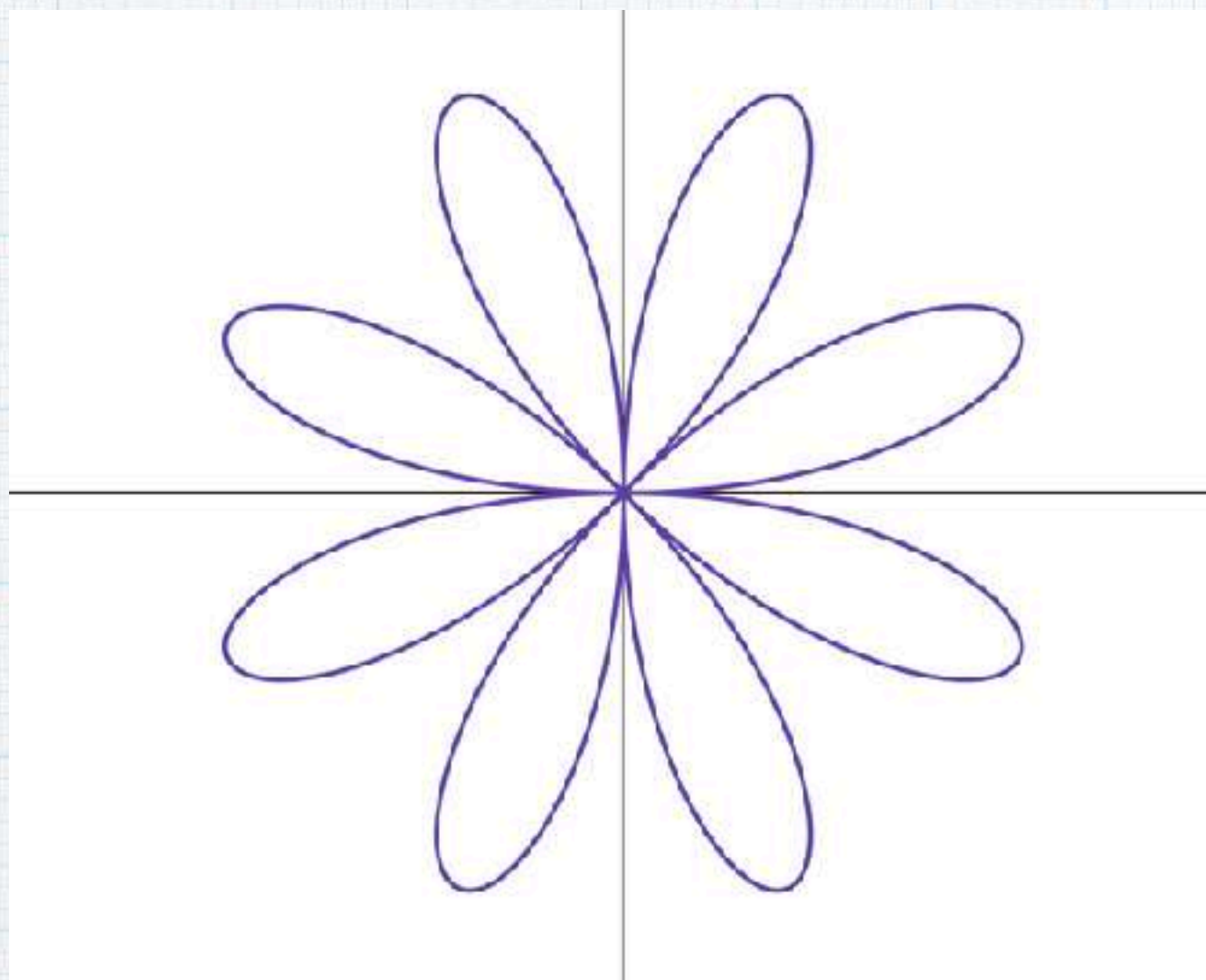


$$y_1 = \sin(ax)$$

$$y_2 = \cos(bx)$$

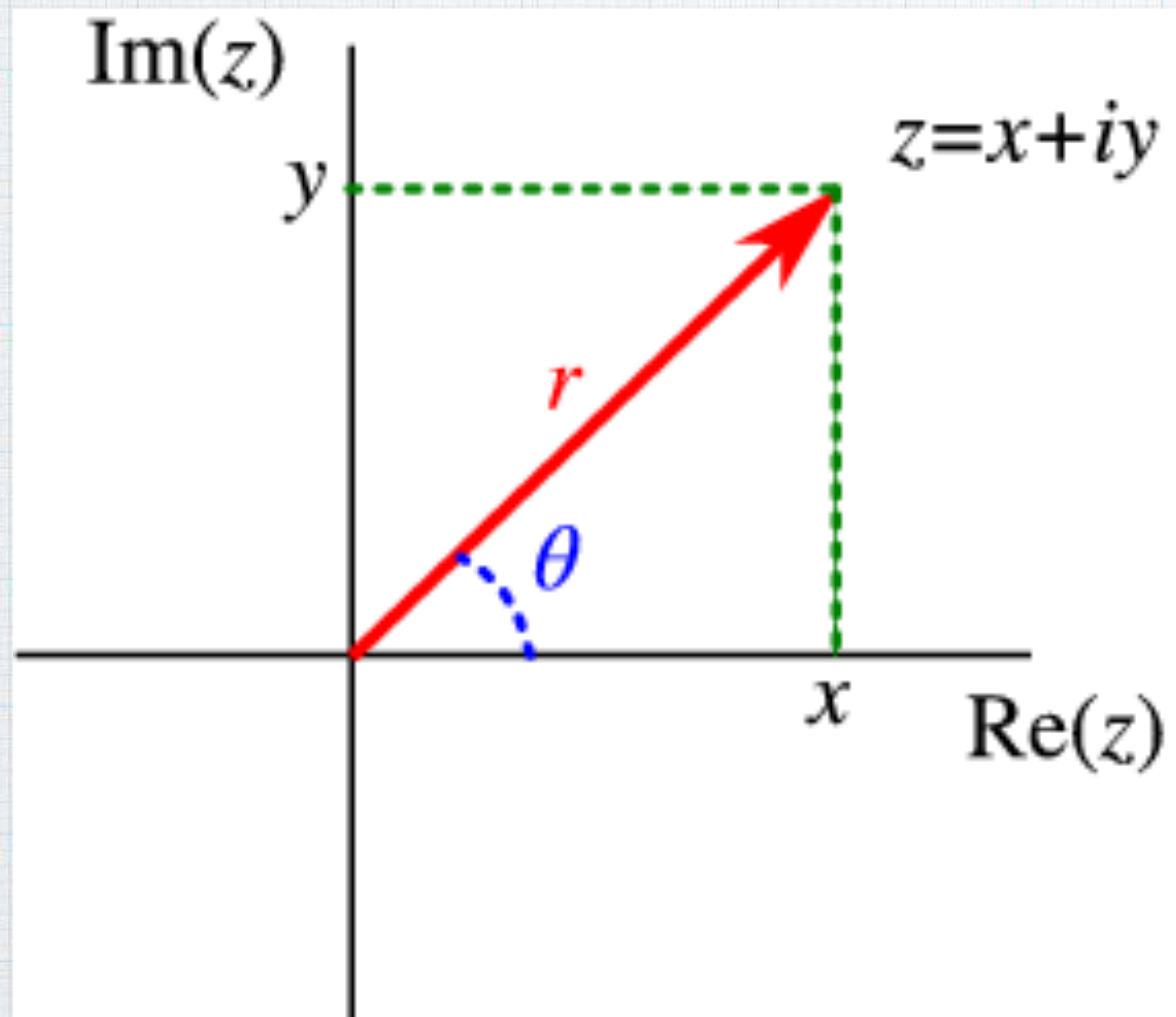
$$y_3 = \sin(ax)\cos(bx)$$

$$r = \text{sen}(a\theta)\cos(b\theta)$$

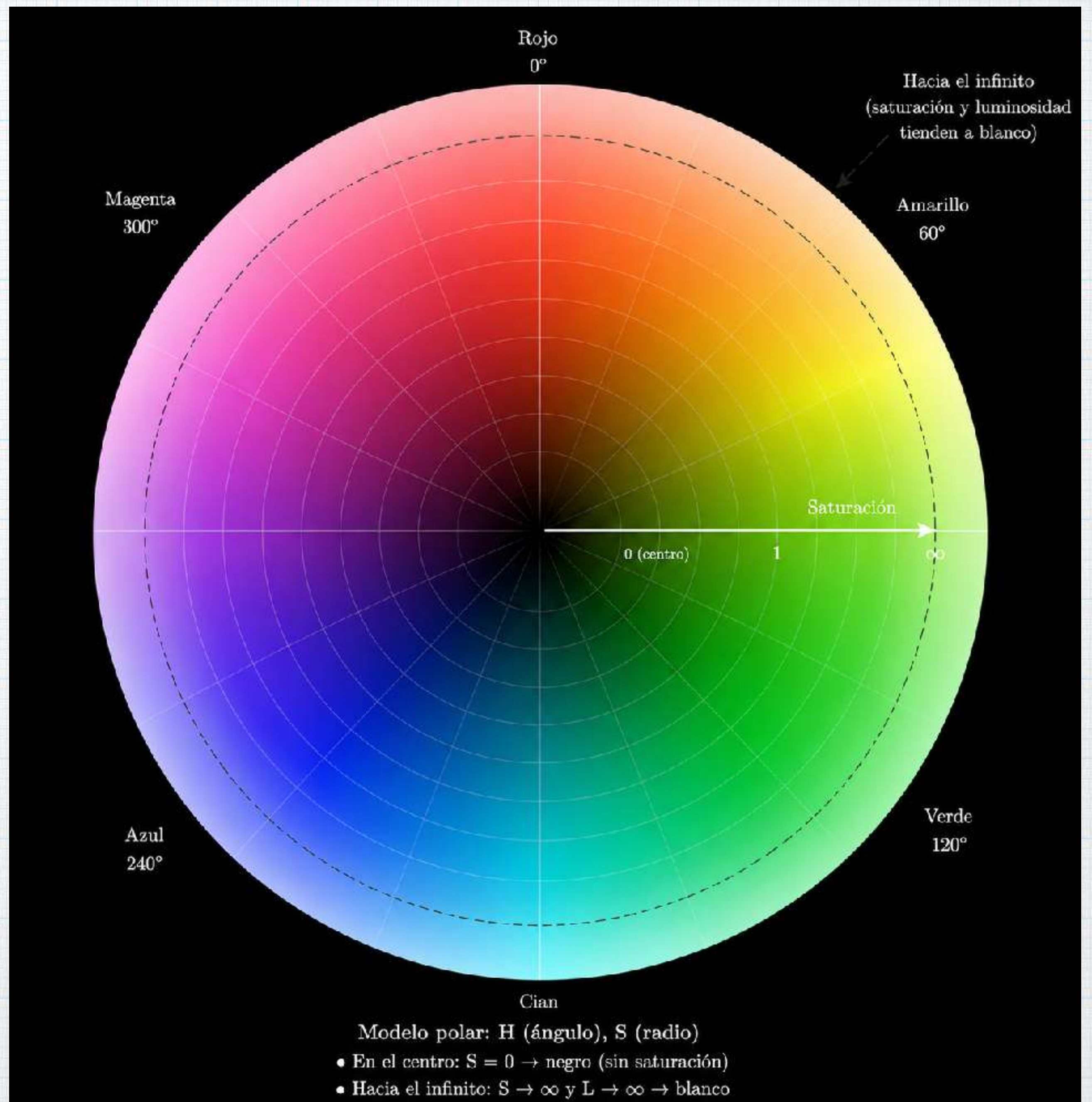


$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

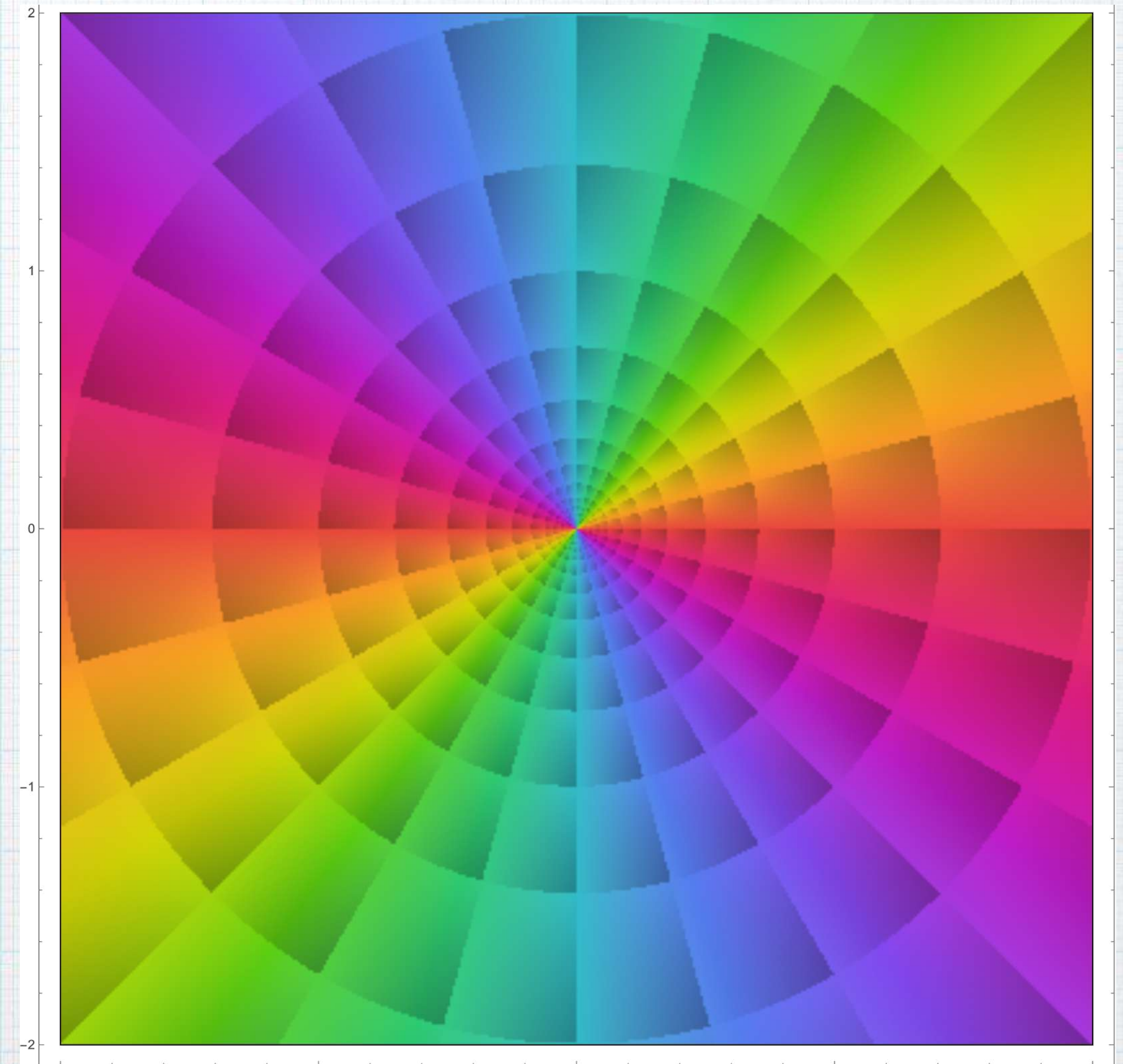
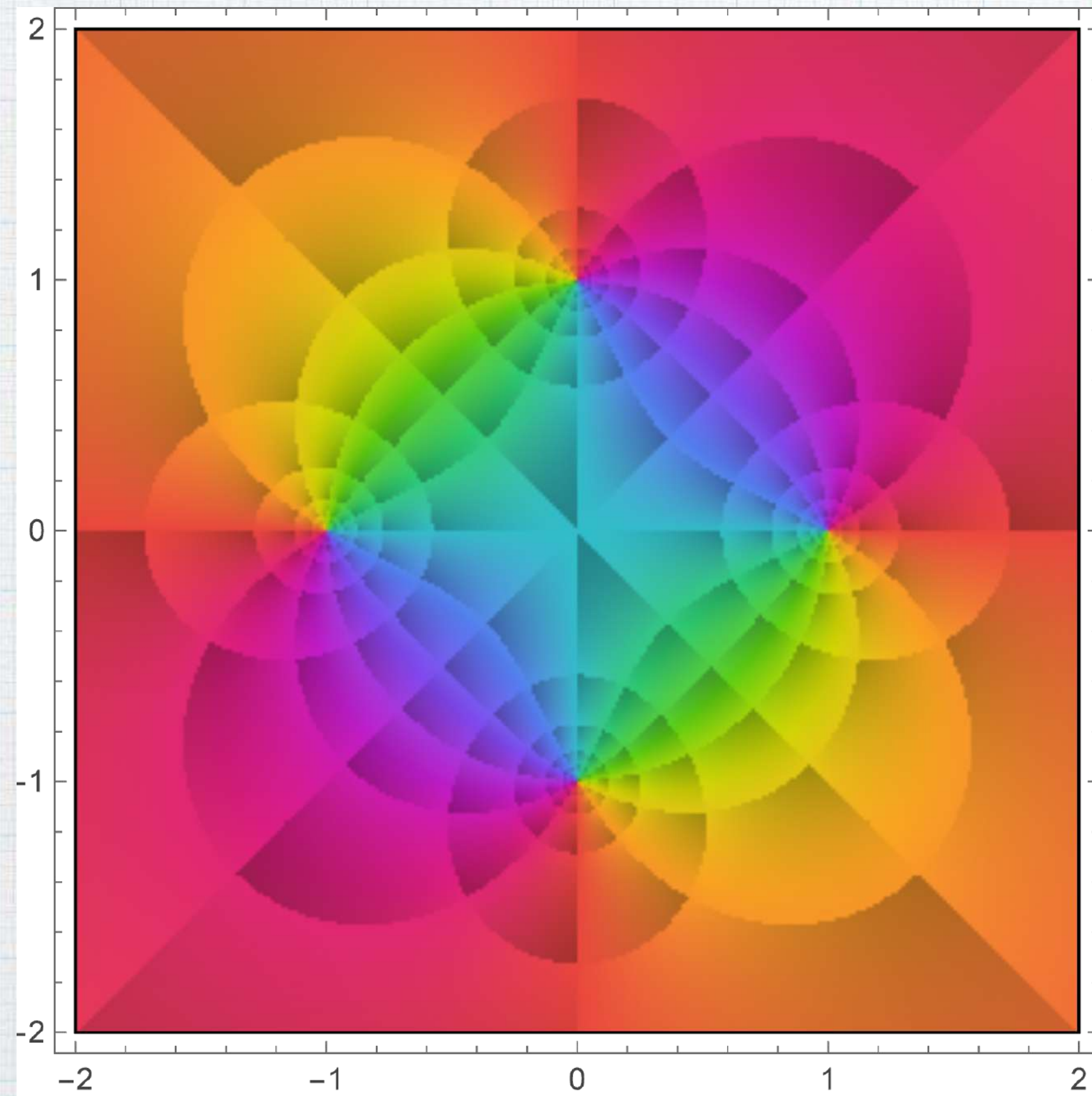
$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



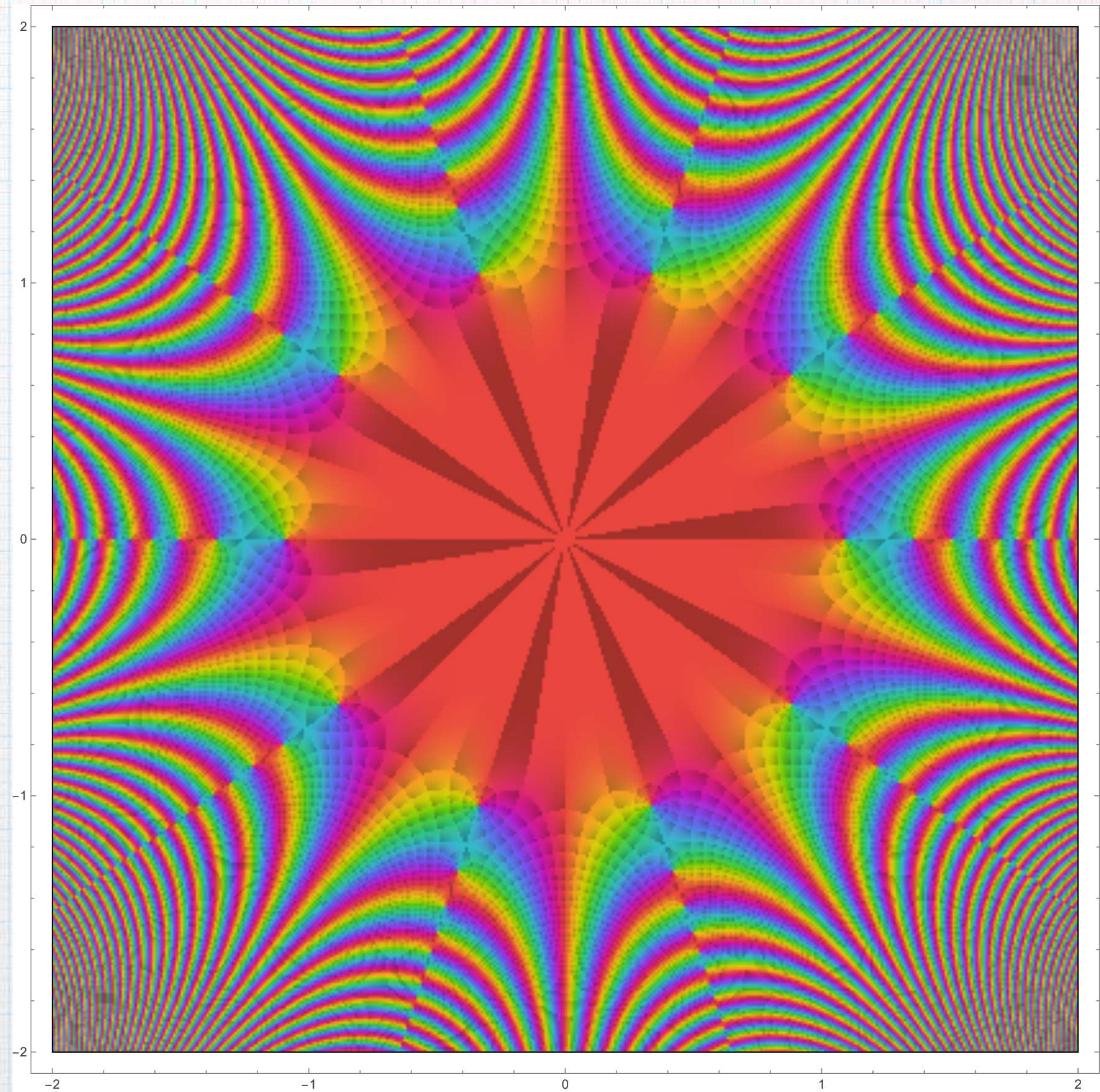
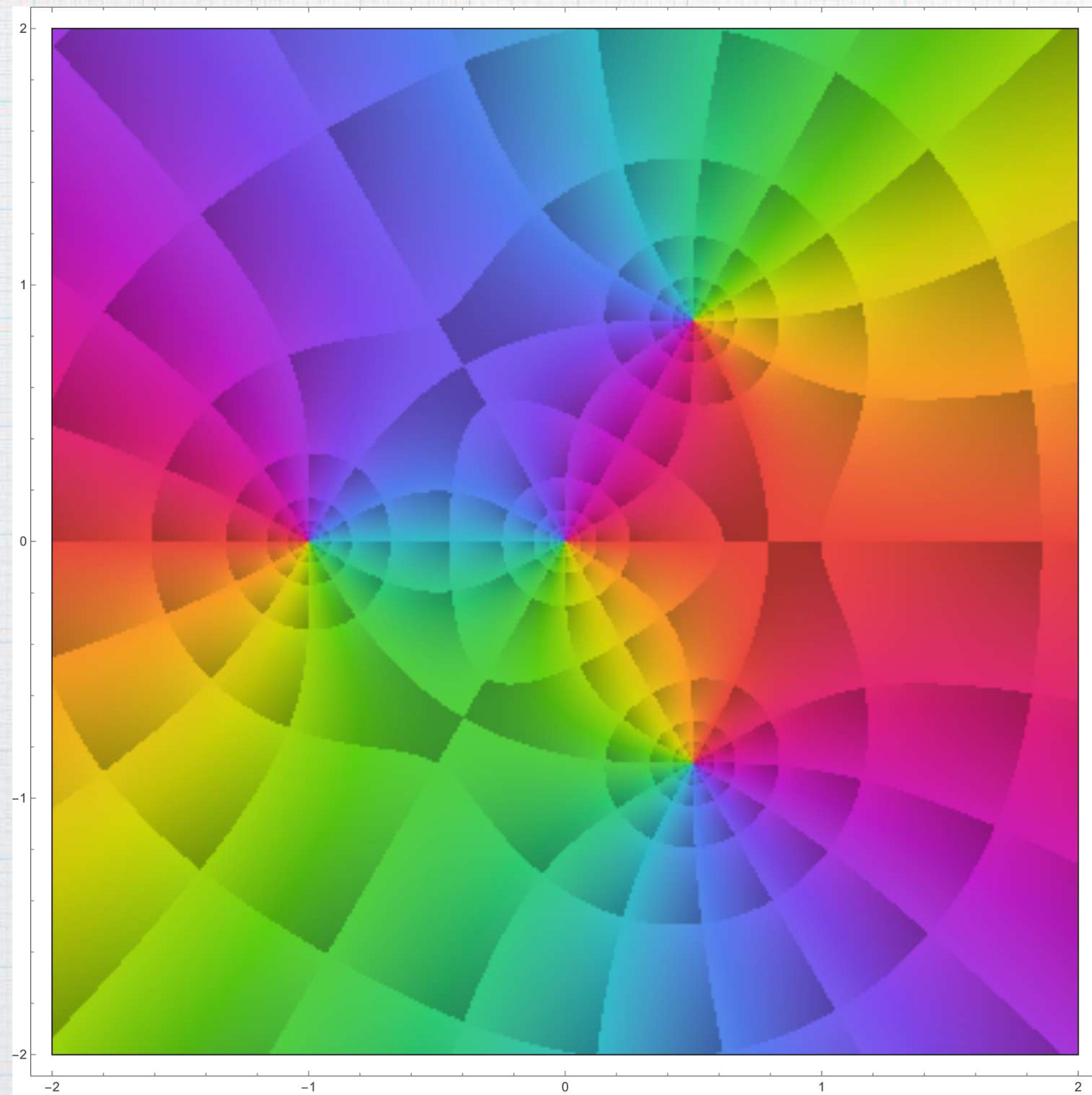
$$z = re^{i\theta}$$



Saliendonos de lo real...



Saliendonos de lo real...

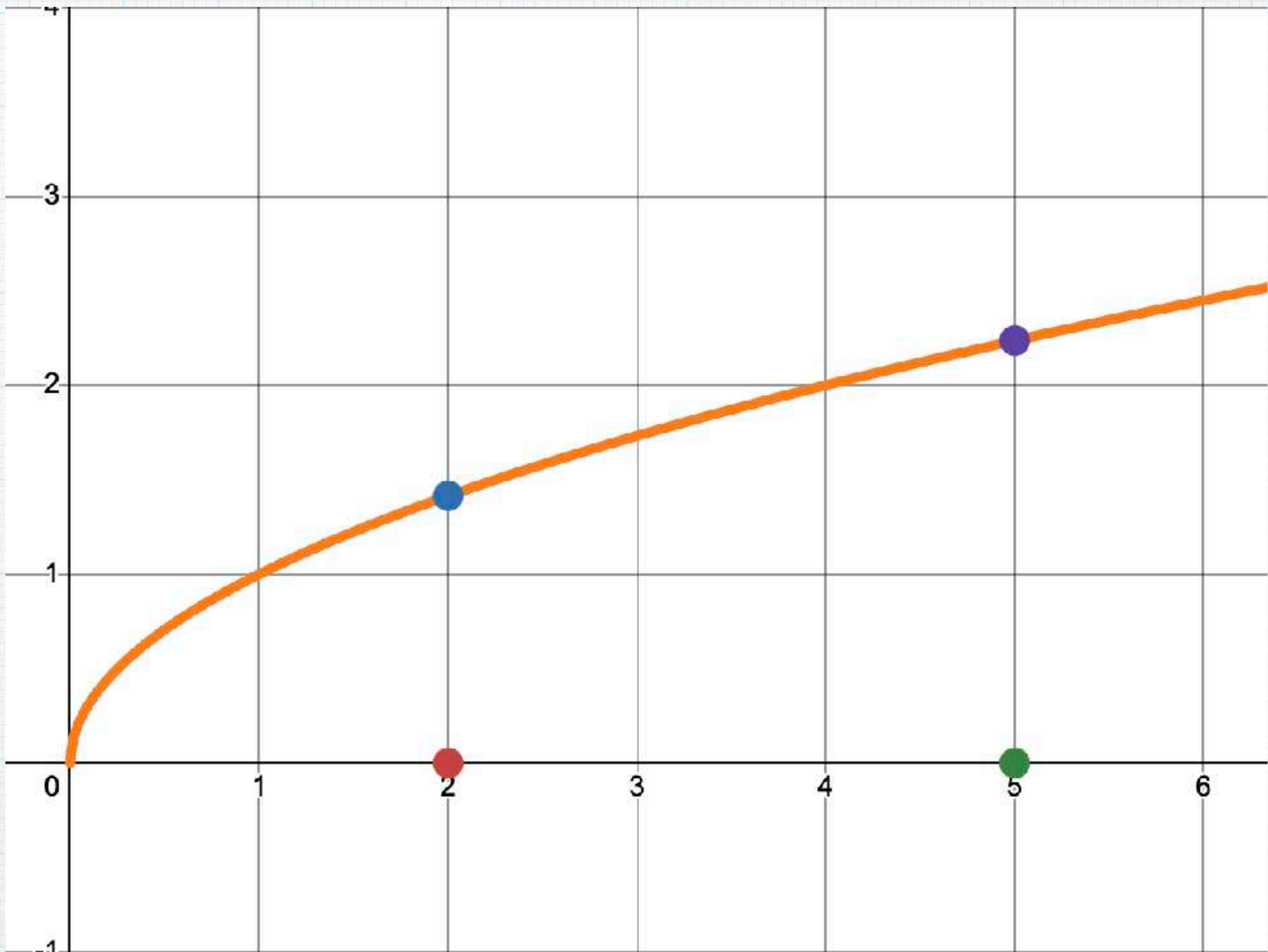


Derivadas

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Fijamos $x_0 = 2$

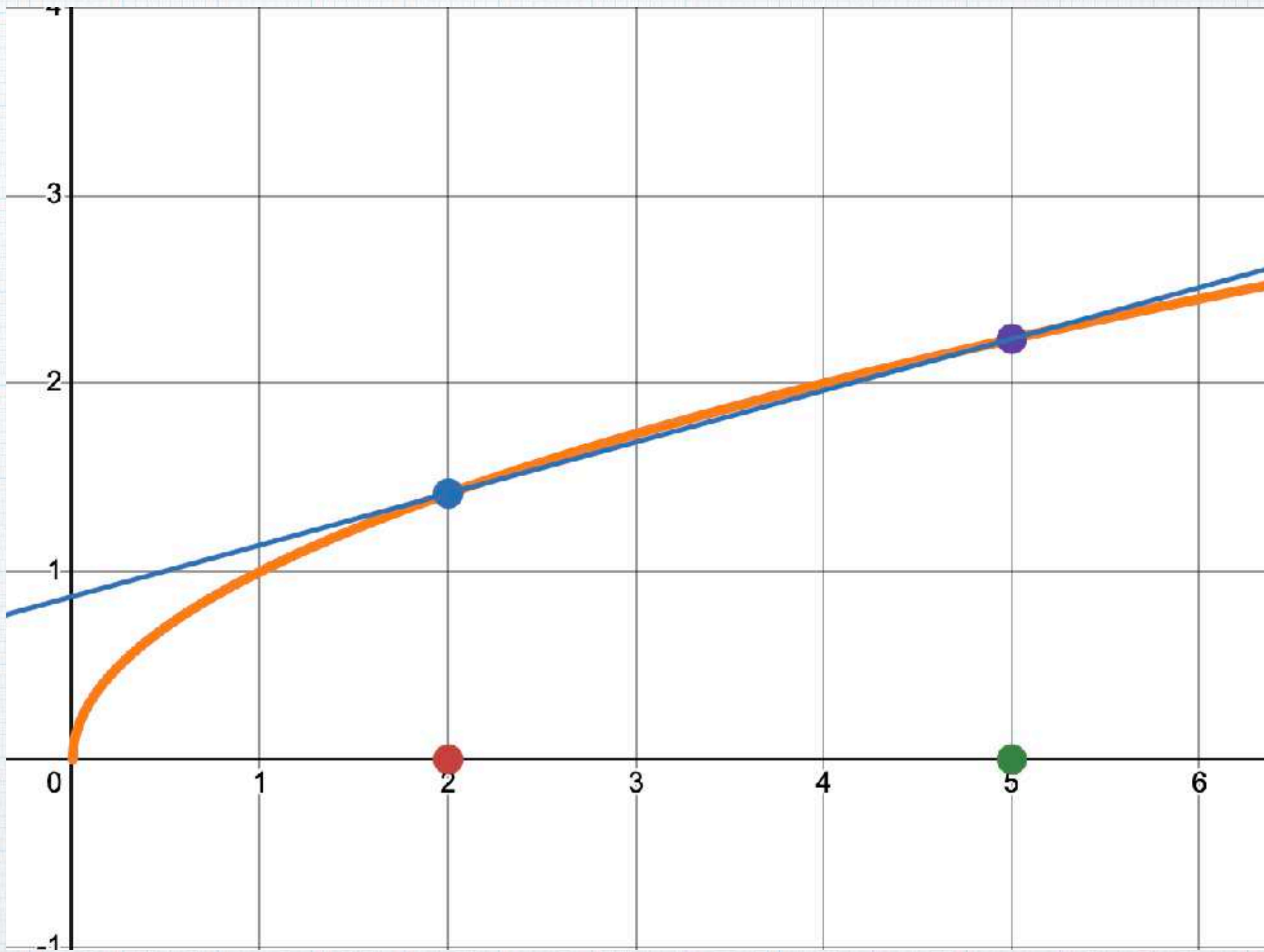
Y tomamos, p.e. $x = 5$



Derivadas

$$f(x) = \sqrt{x}$$

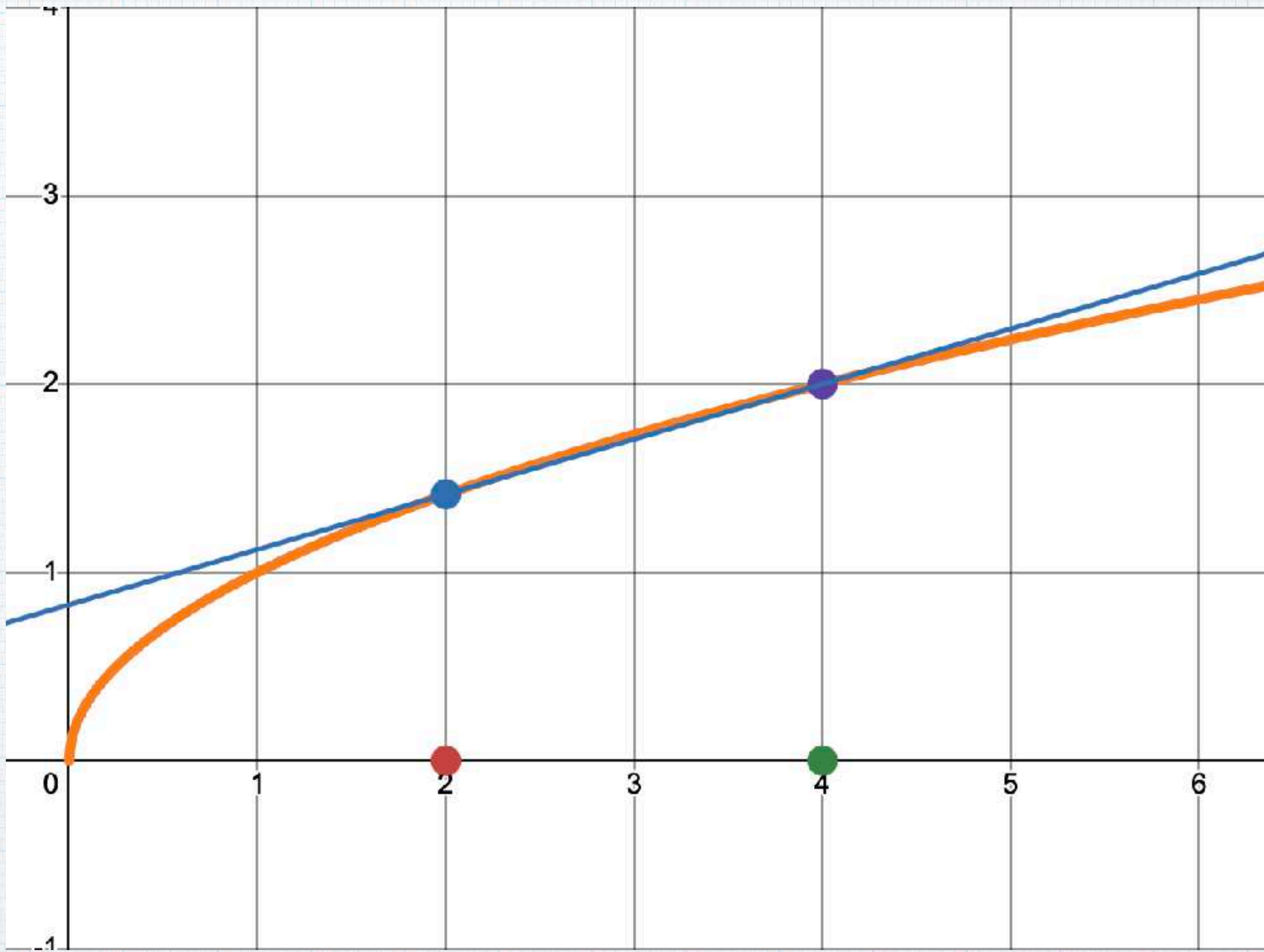
Fijamos $x_0 = 2$



Derivadas

$$f(x) = \sqrt{x}$$

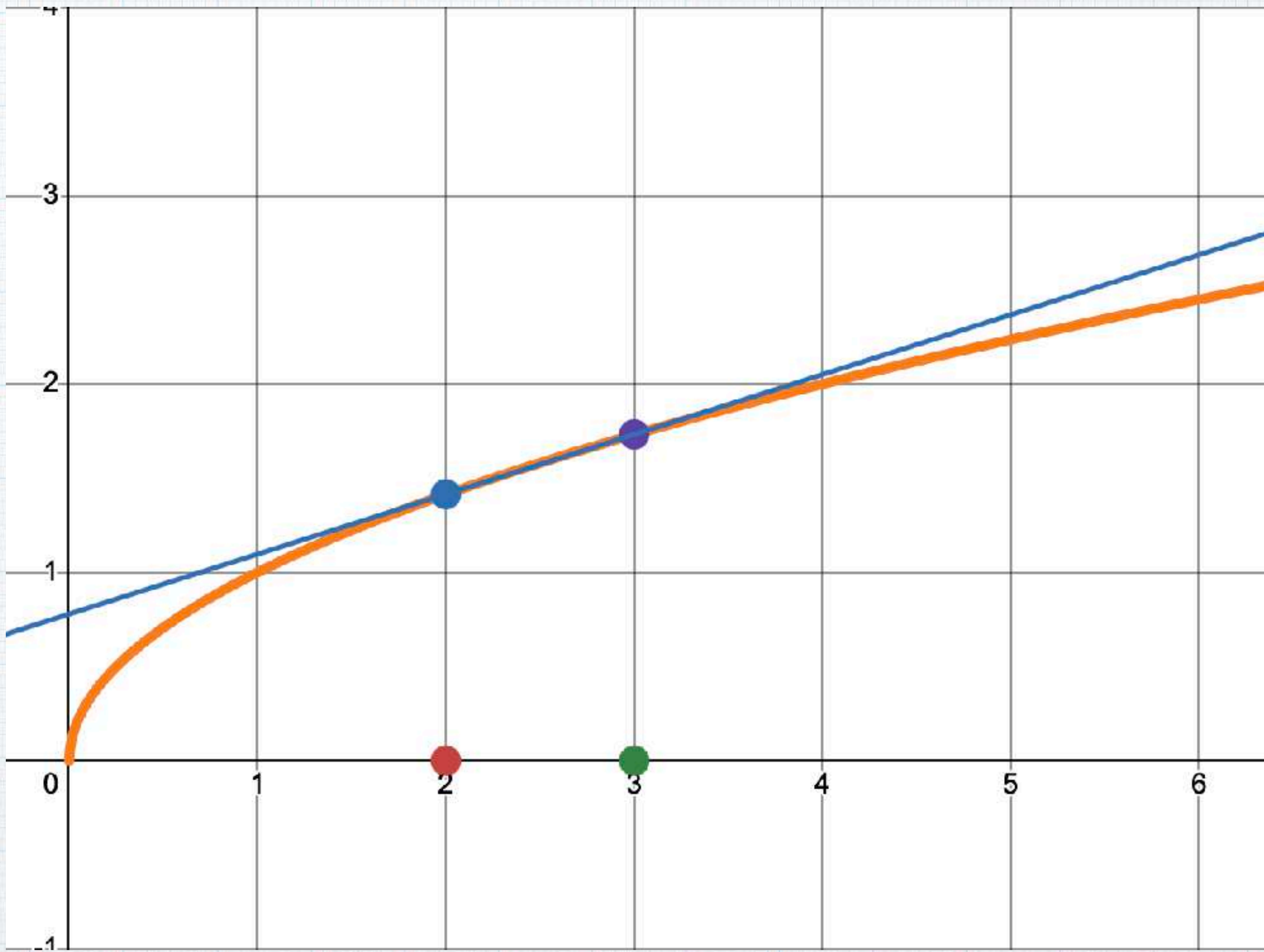
Fijamos $x_0 = 2$



Derivadas

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Fijamos $x_0 = 2$

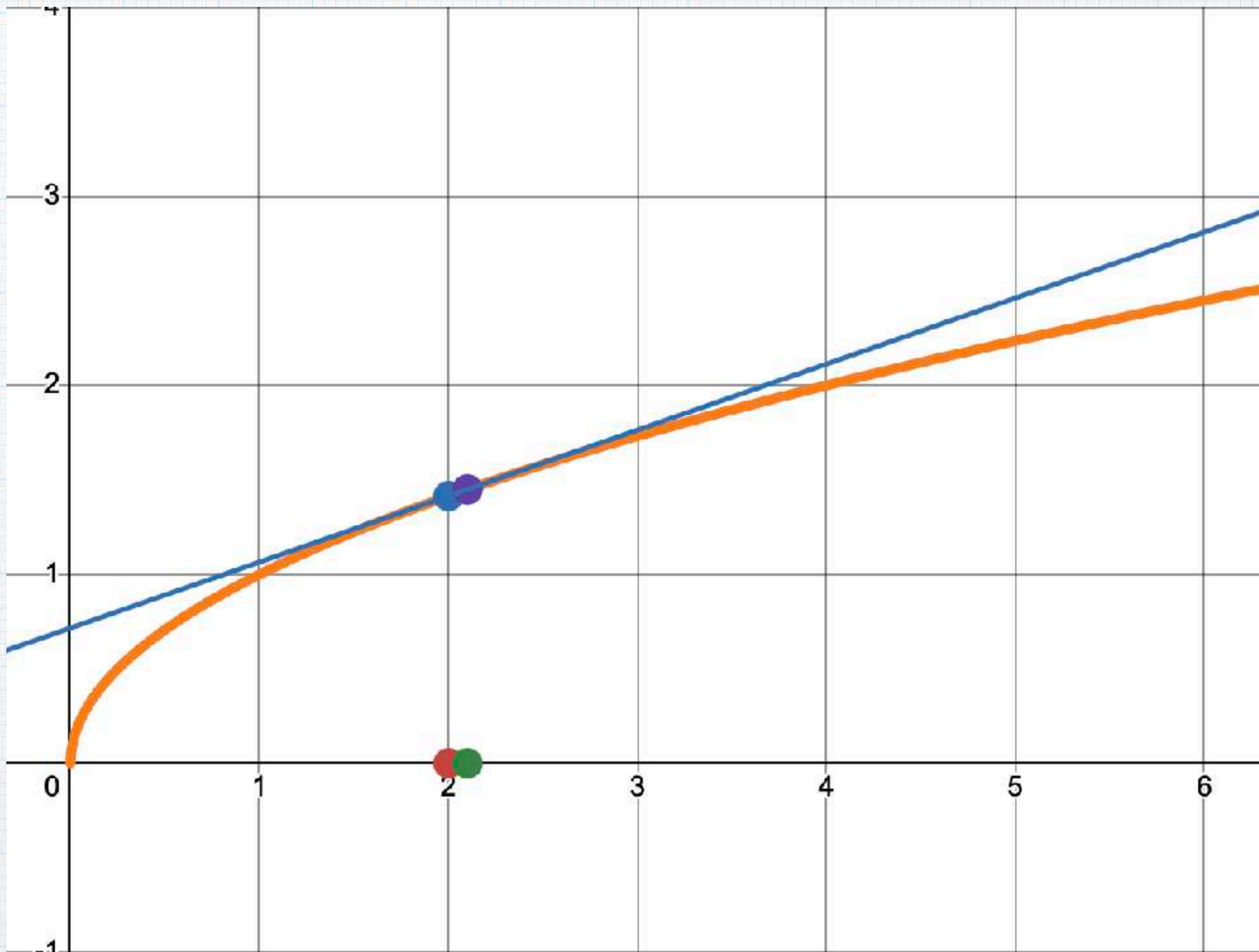


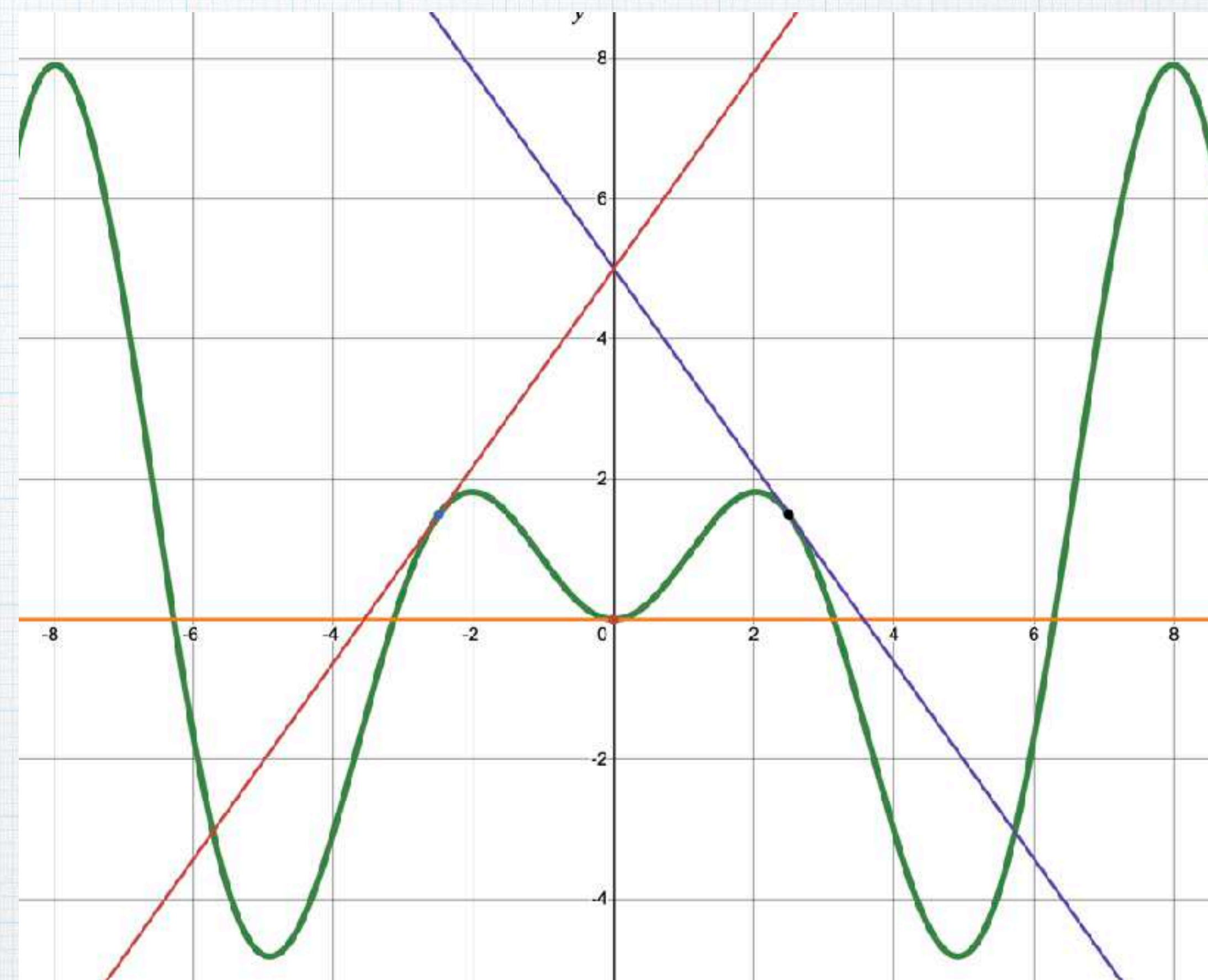
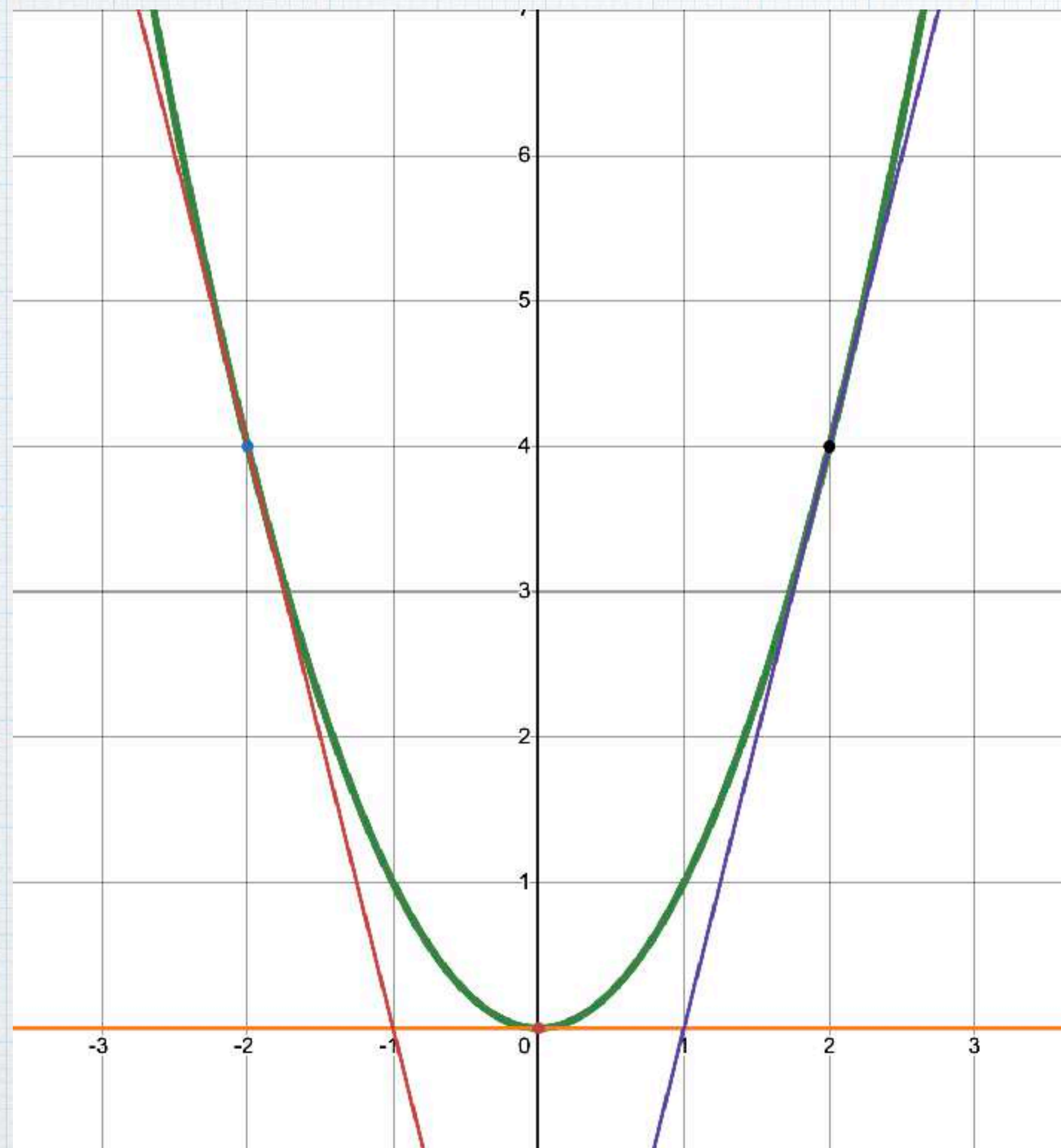
Derivadas

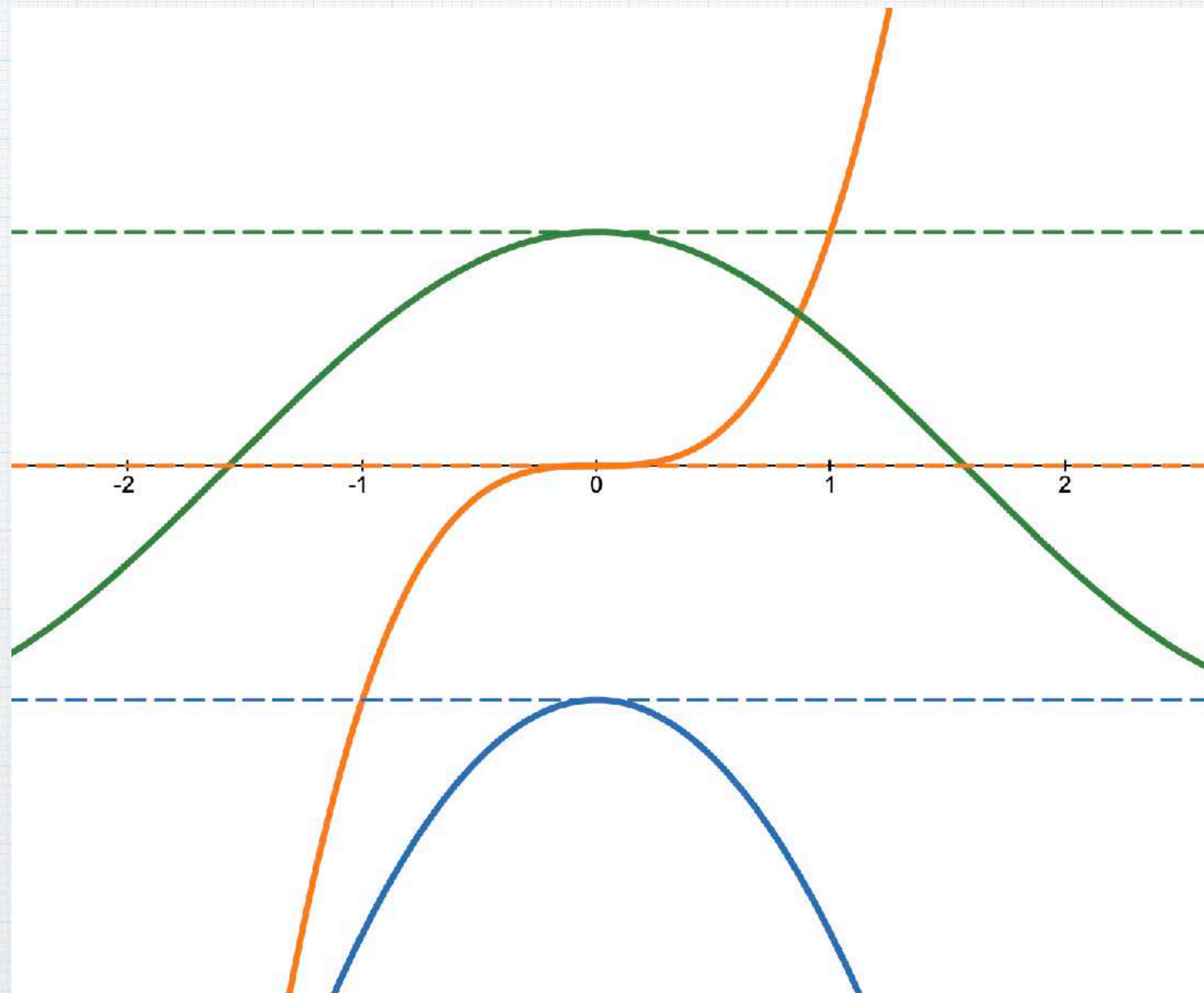
$$f(x) = \sqrt{x}$$

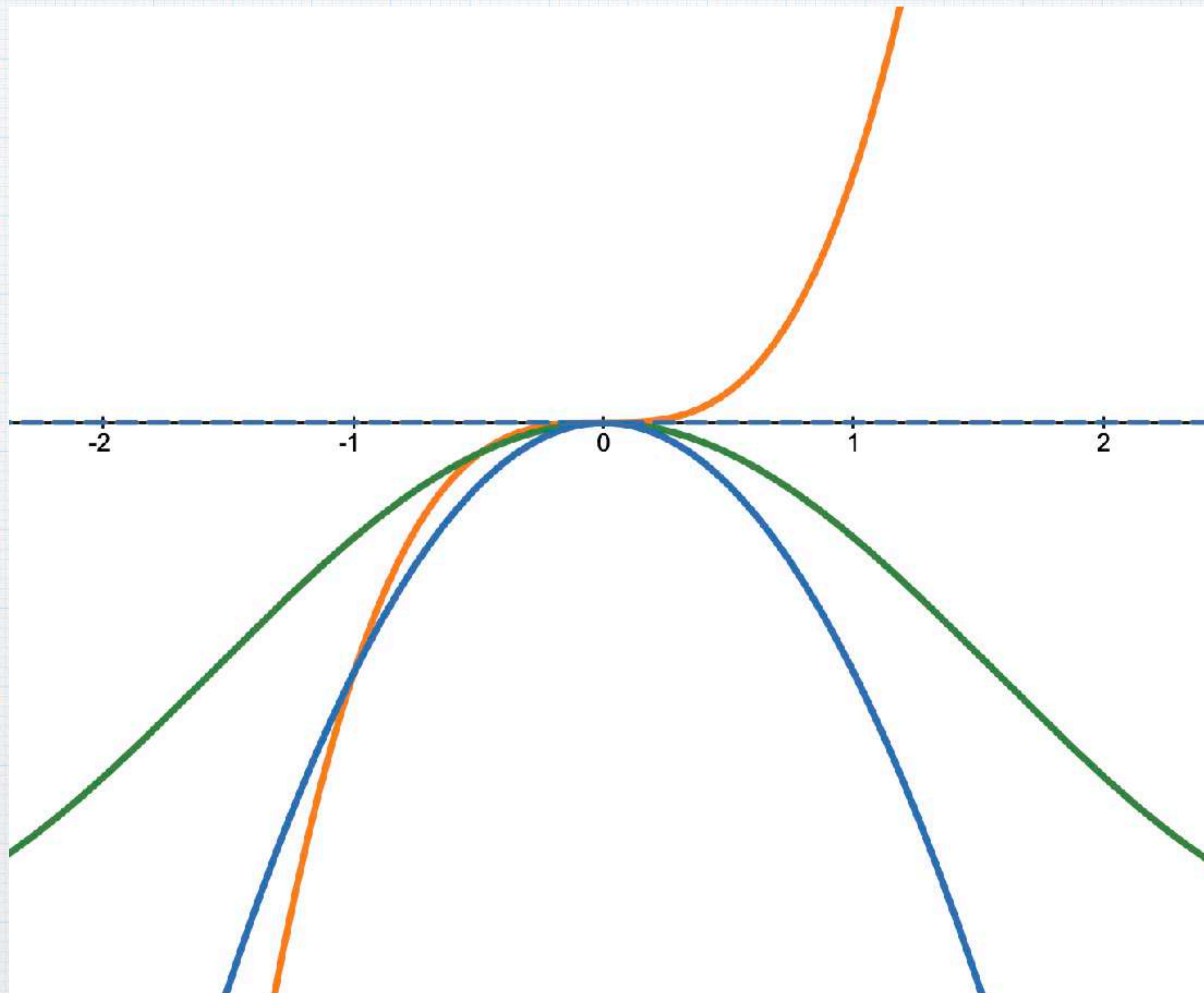
Fijamos $x_0 = 2$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

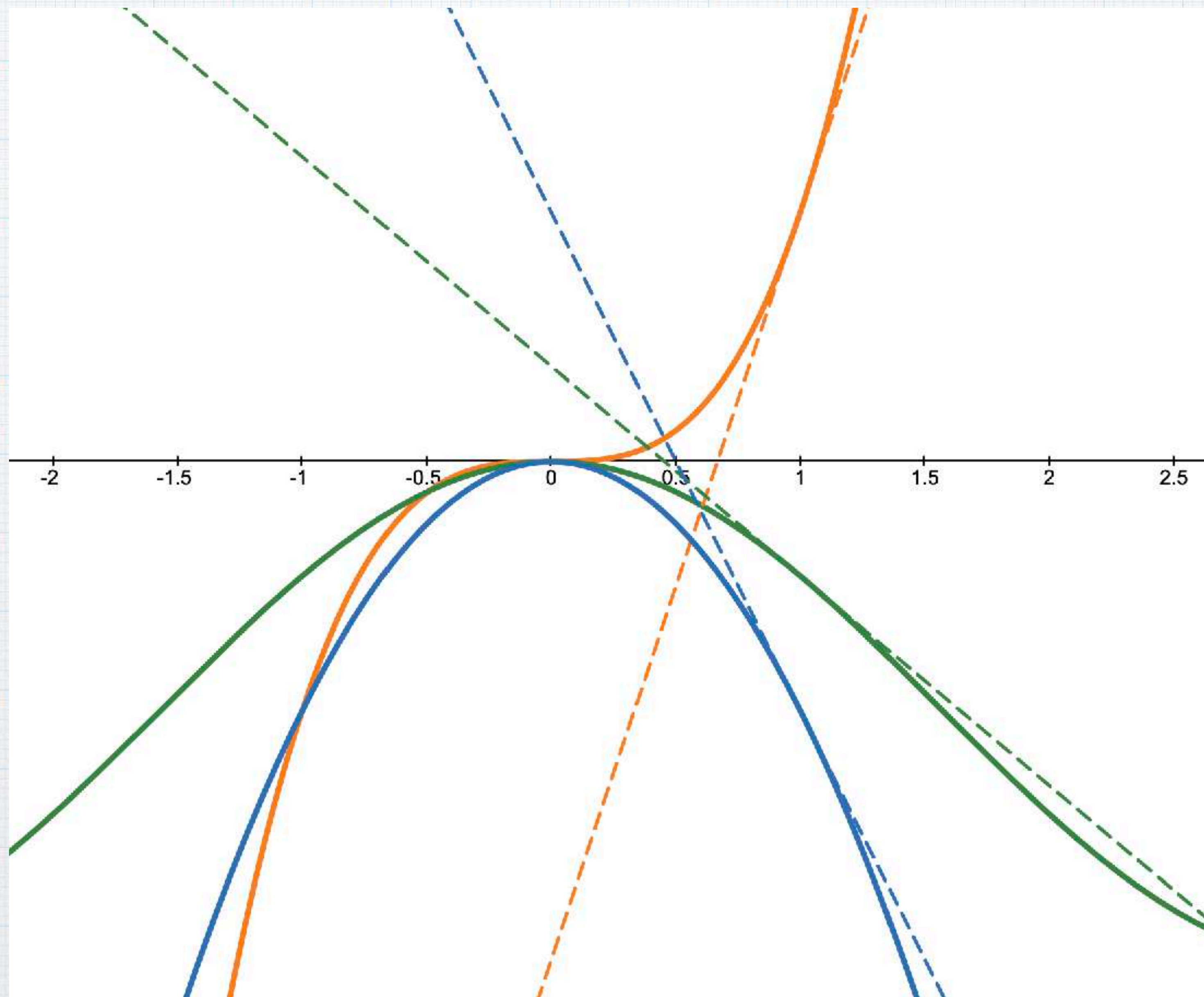




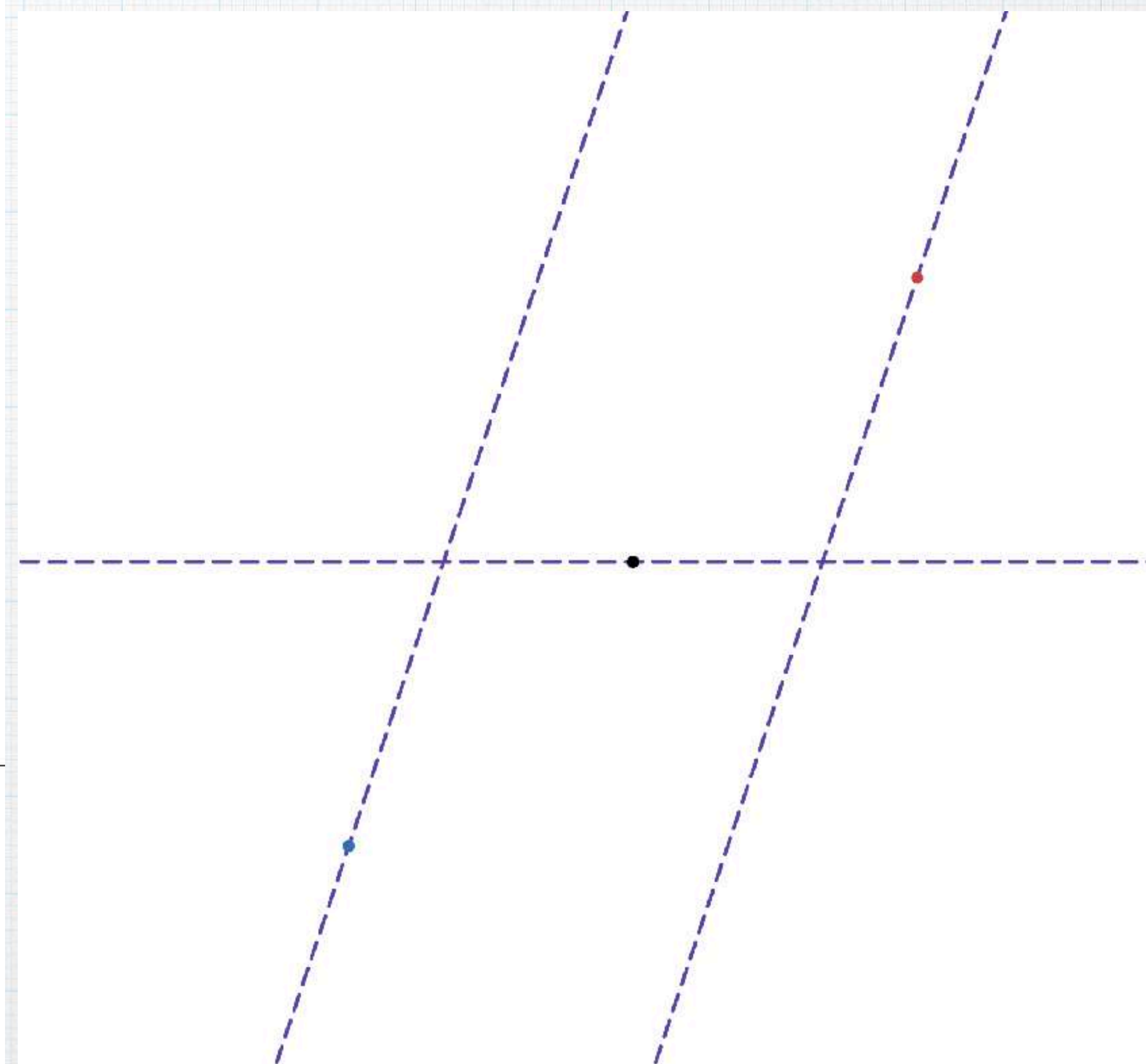
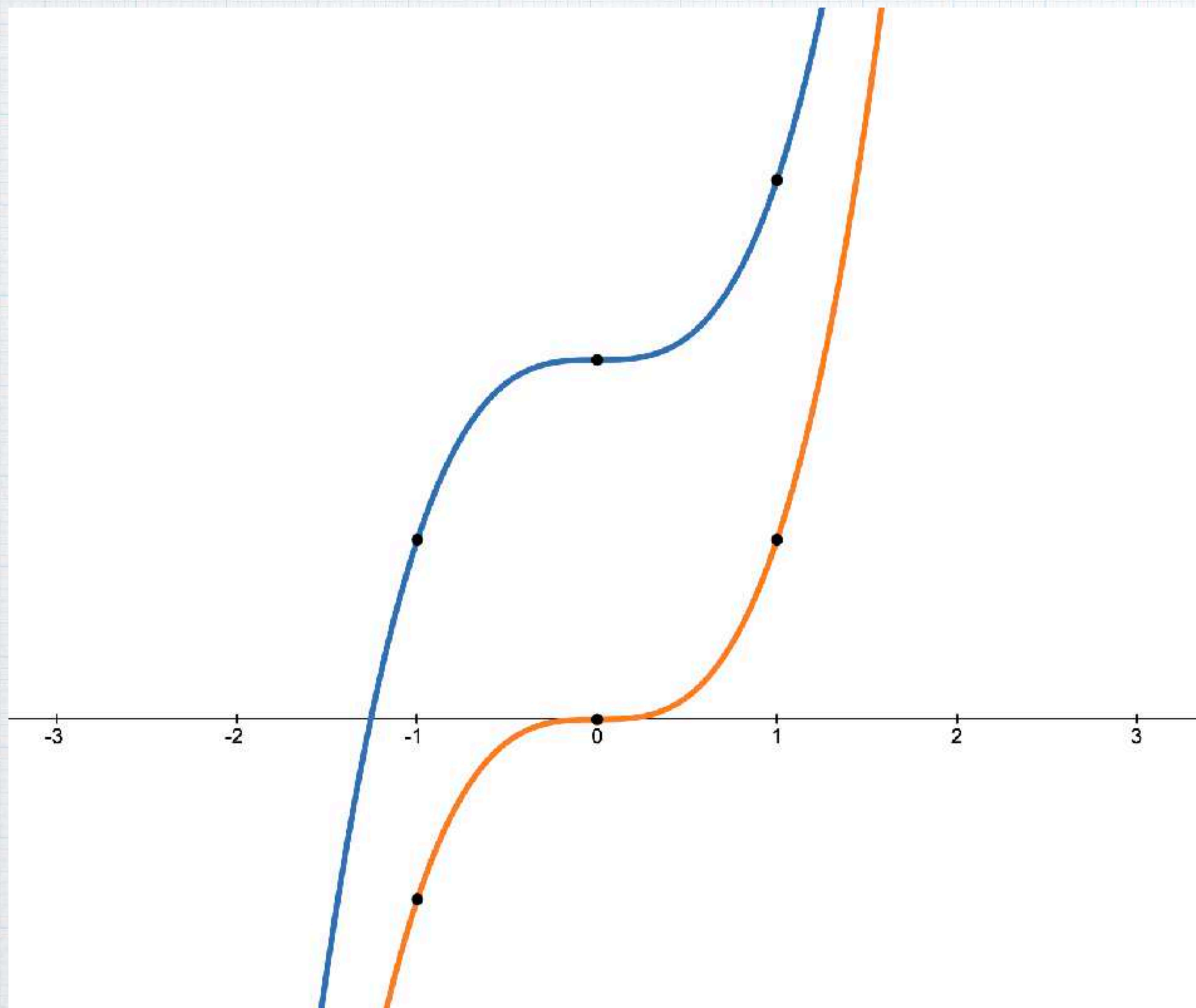


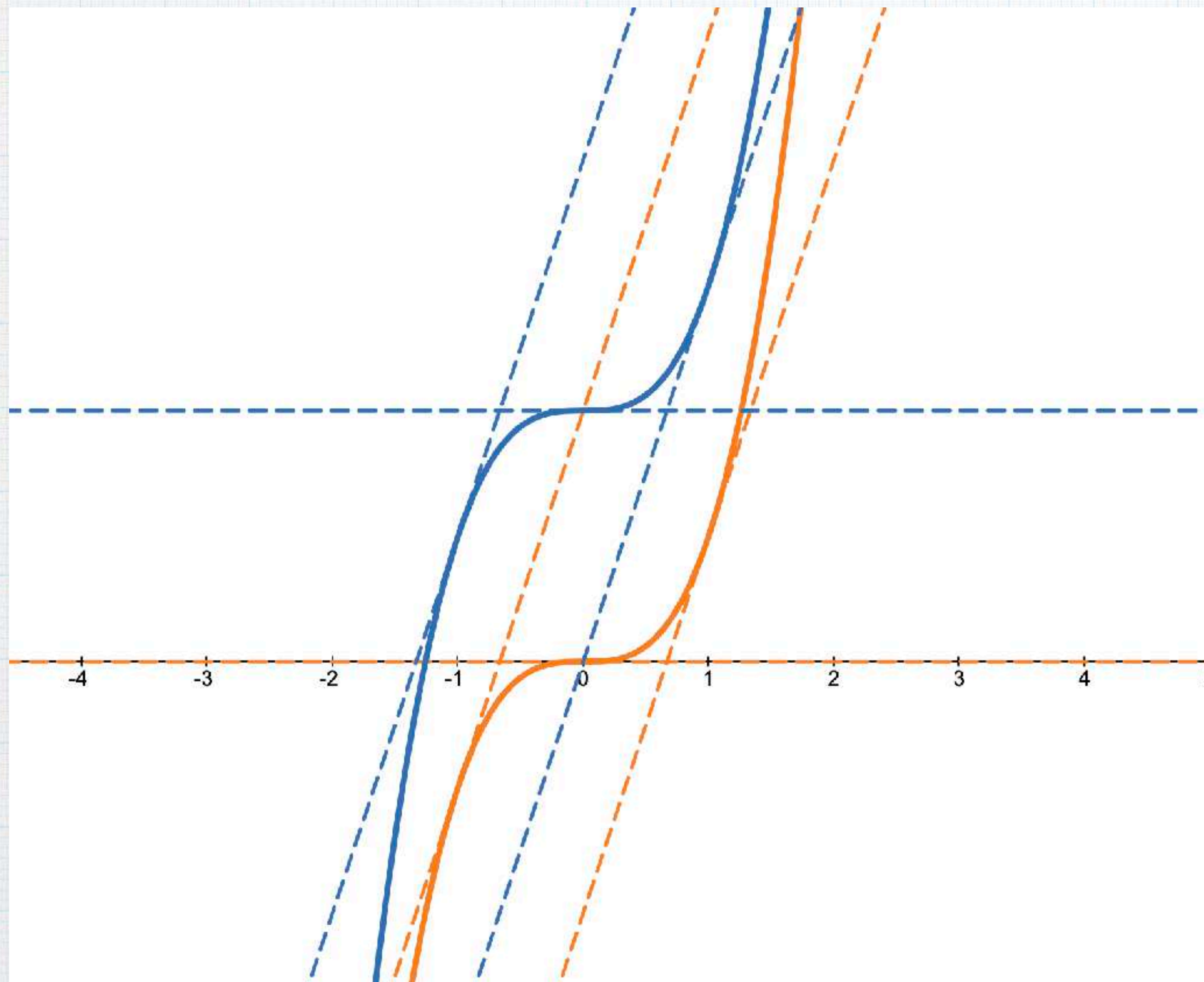


*** ¿En cuántos puntos necesitamos conocer la recta tangente para caracterizar la curva?**



* ¿Basta en todos los puntos donde la función está definida?





*** ¿En cuántos puntos (arbitrarios) necesitamos conocer la recta tangente para caracterizar la curva?**

R// Basta conocer el conjunto de pendientes en cada punto (la derivada) y un punto sobre la curva. ****

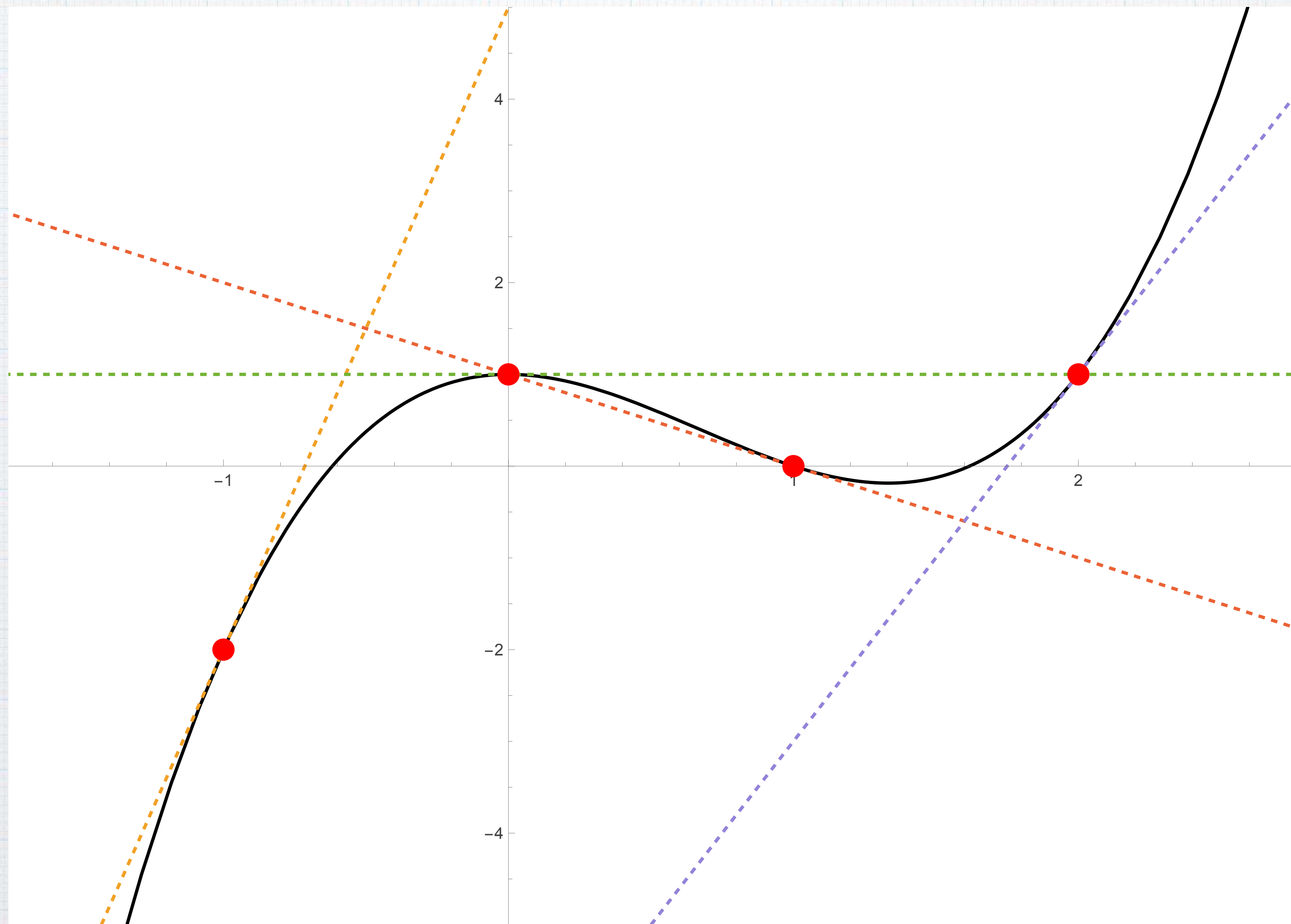
Integral (Indefinida)

Una integral indefinida se puede pensar como el proceso inverso a la derivación

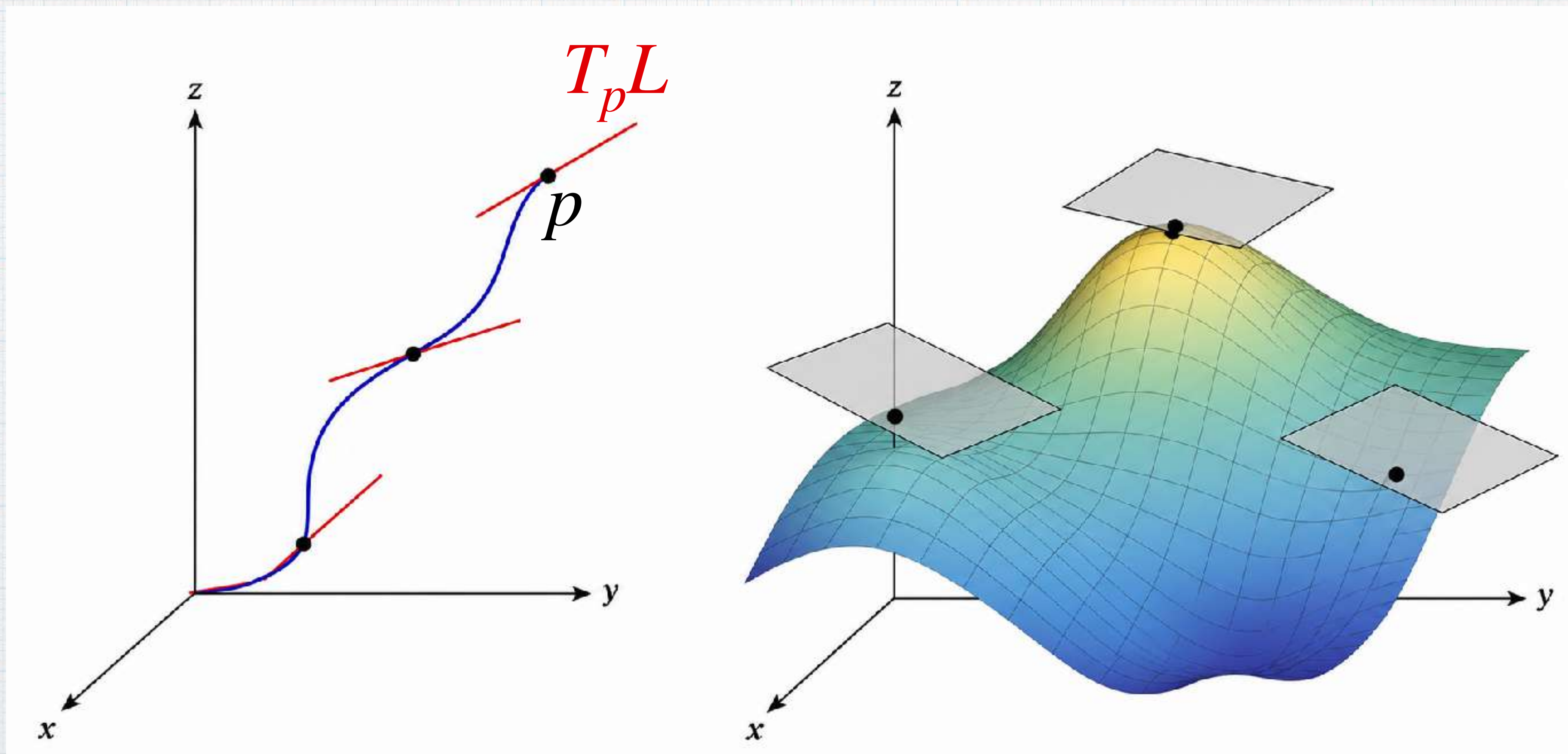
$$f(x) \xrightarrow{\text{Derivar}} f'(x)$$

$$\int f'(x)dx + C \xleftarrow{\text{Integrar}} f'(x)$$

$$f(x) = \int f'(x)dx + C$$



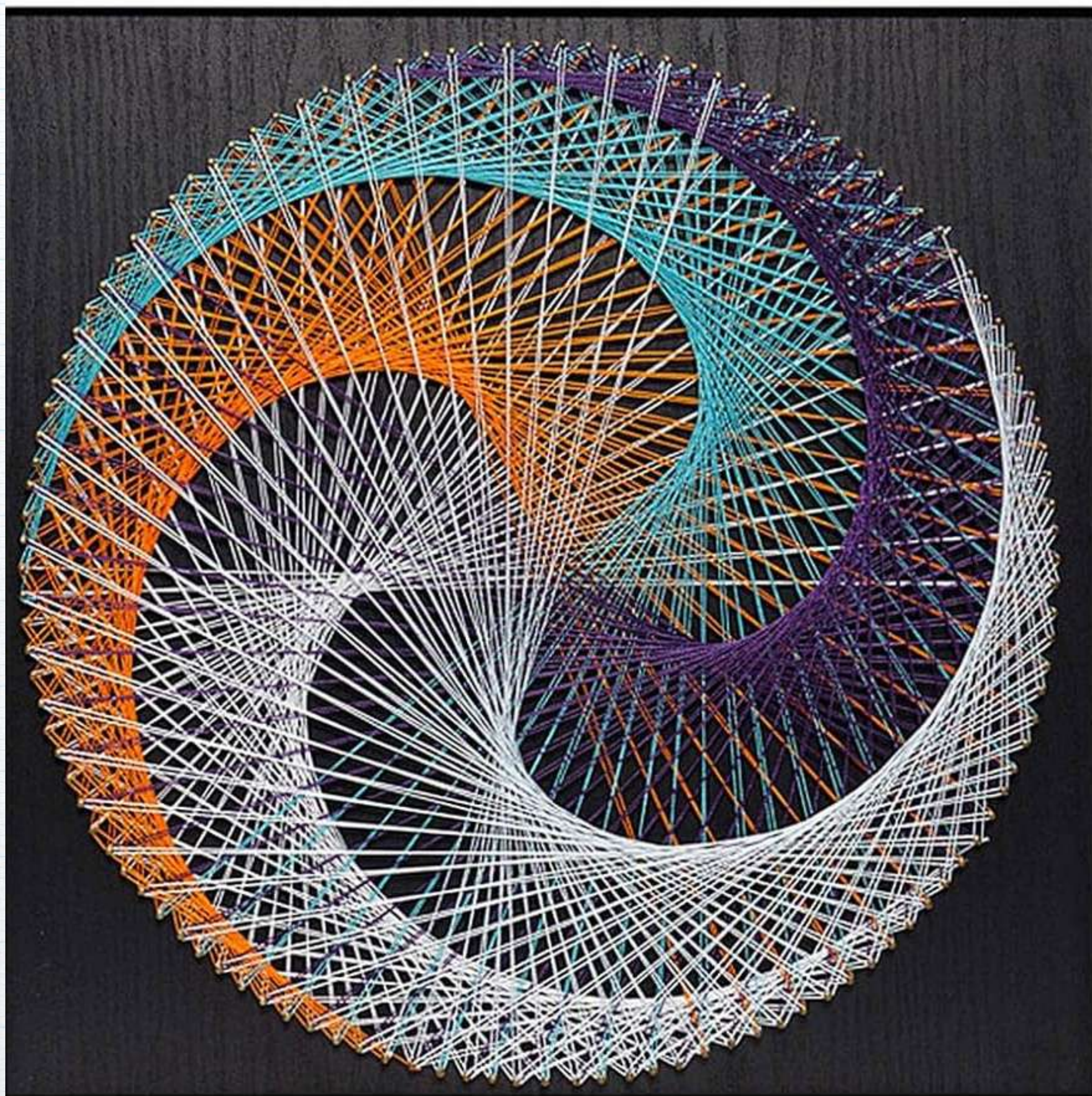
* Más en general

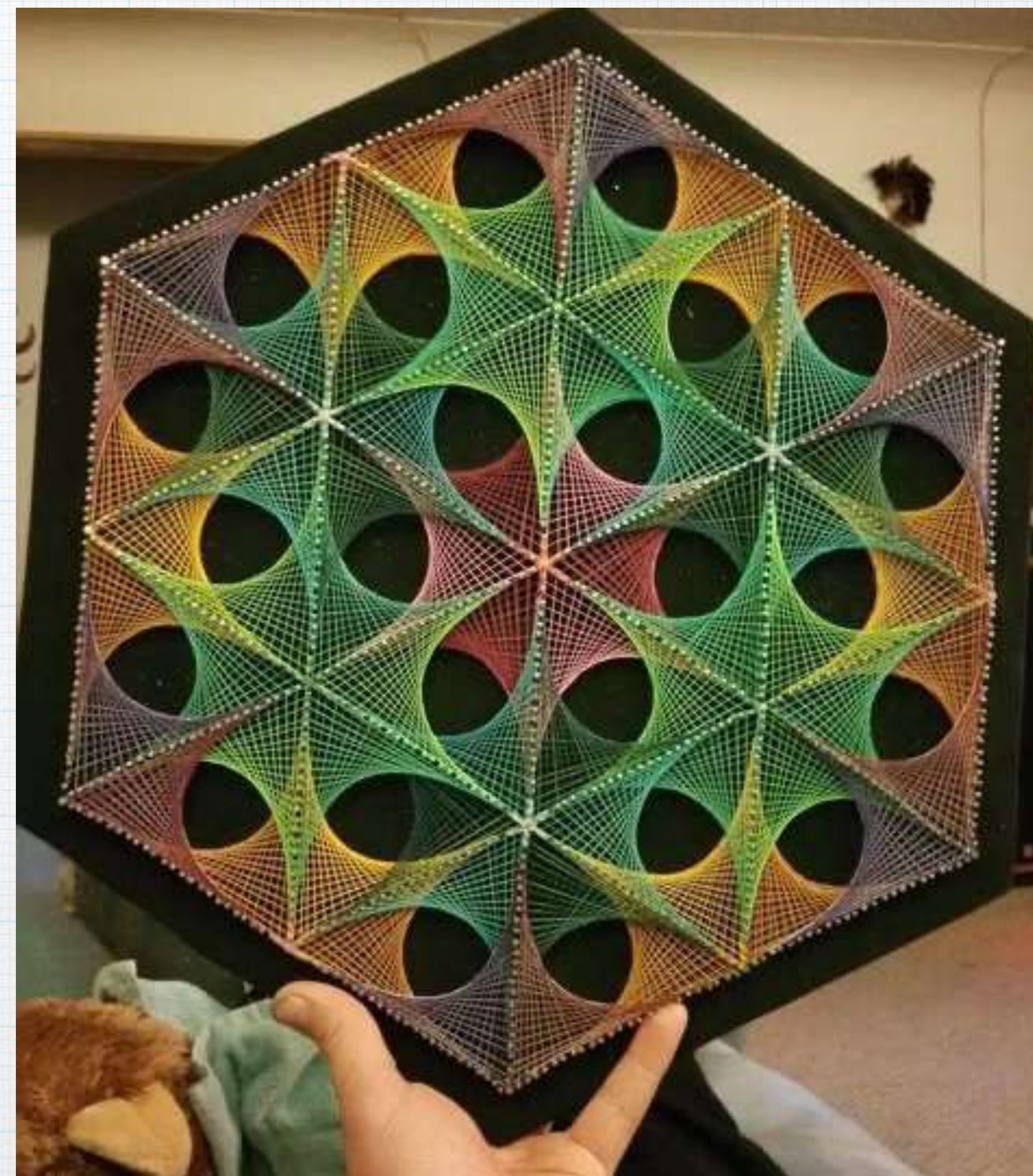


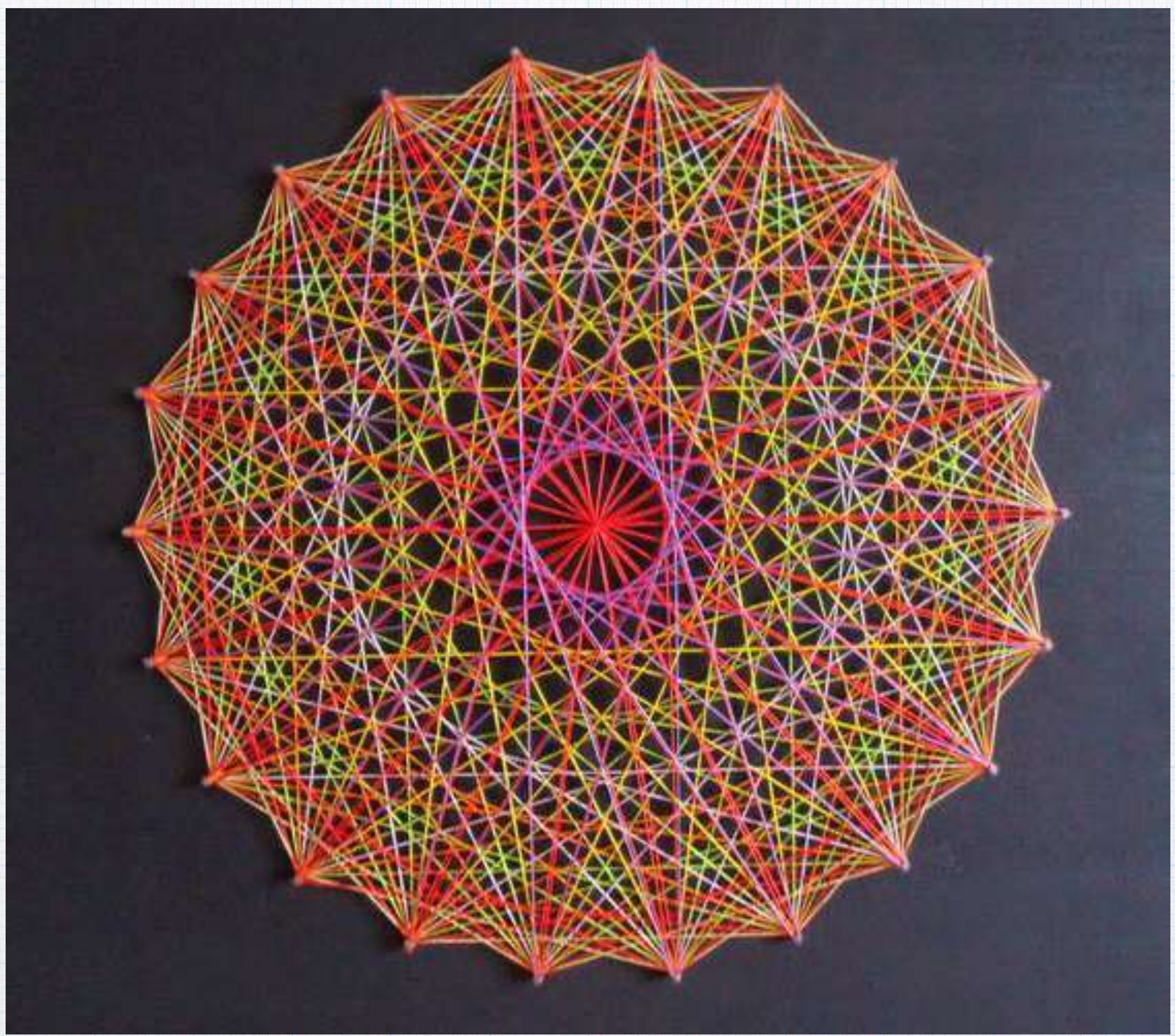
$$TM := \{(p, l) \mid p \in M, l \in T_p M\}$$

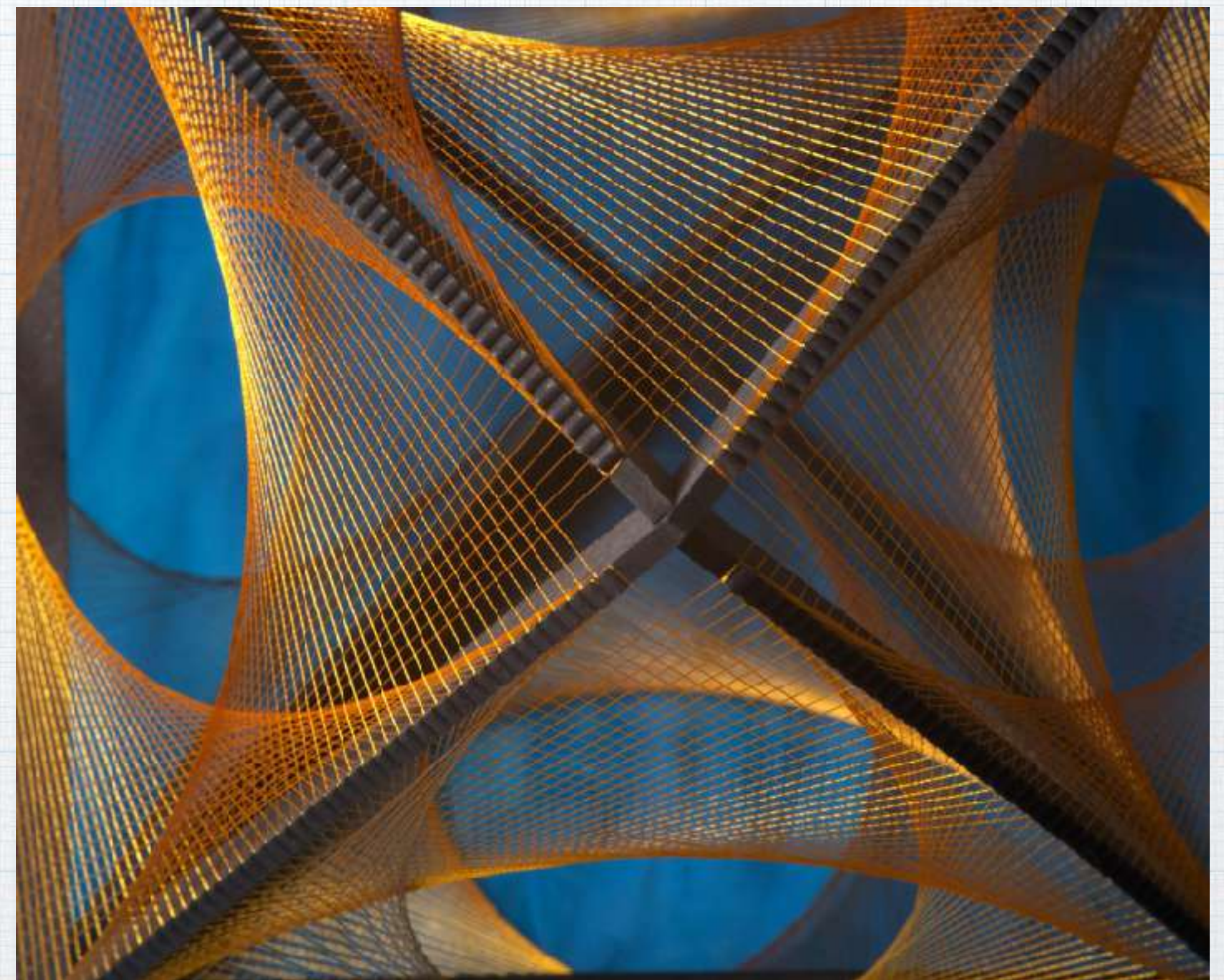
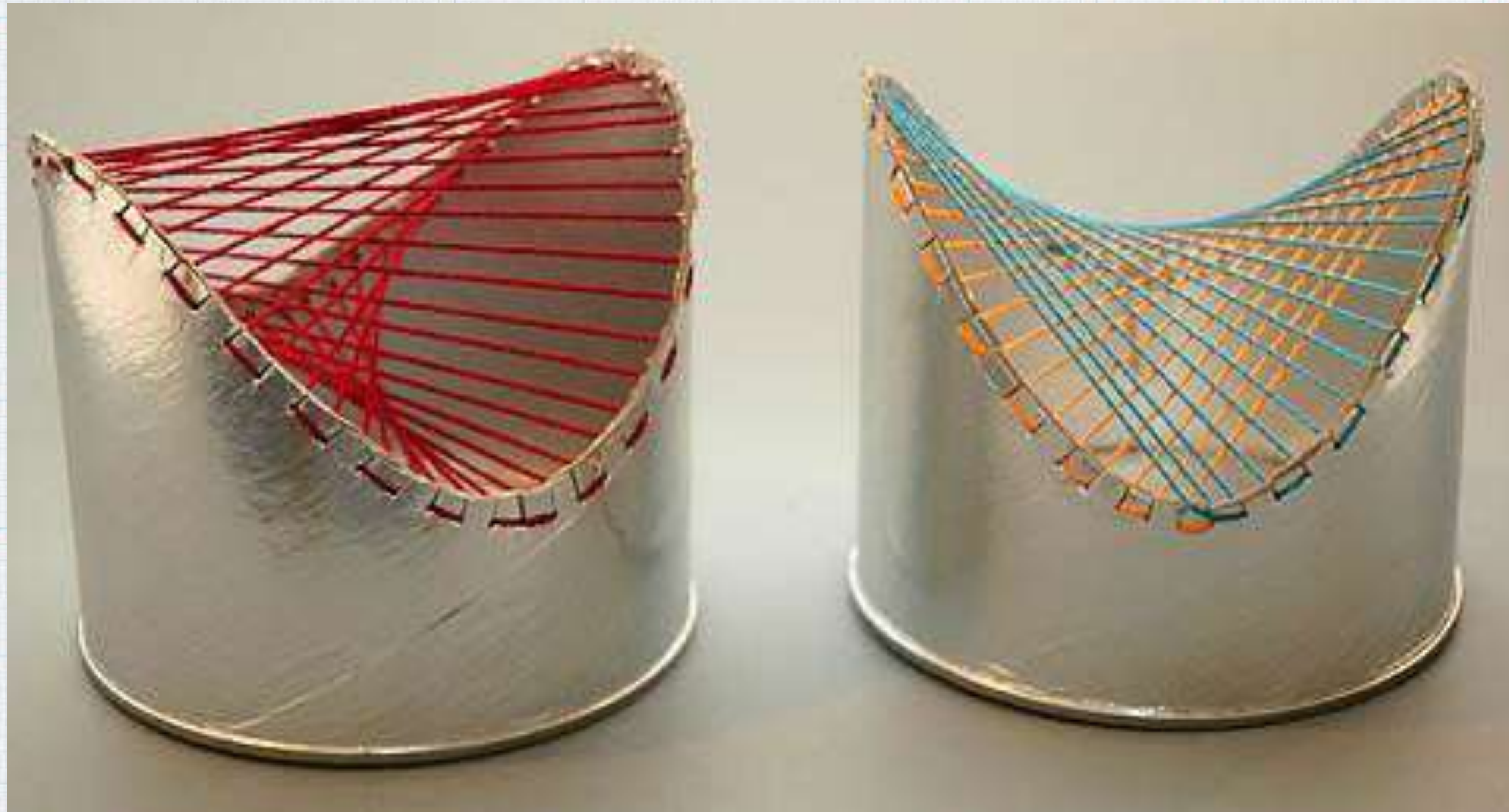
Hilorama (String art)

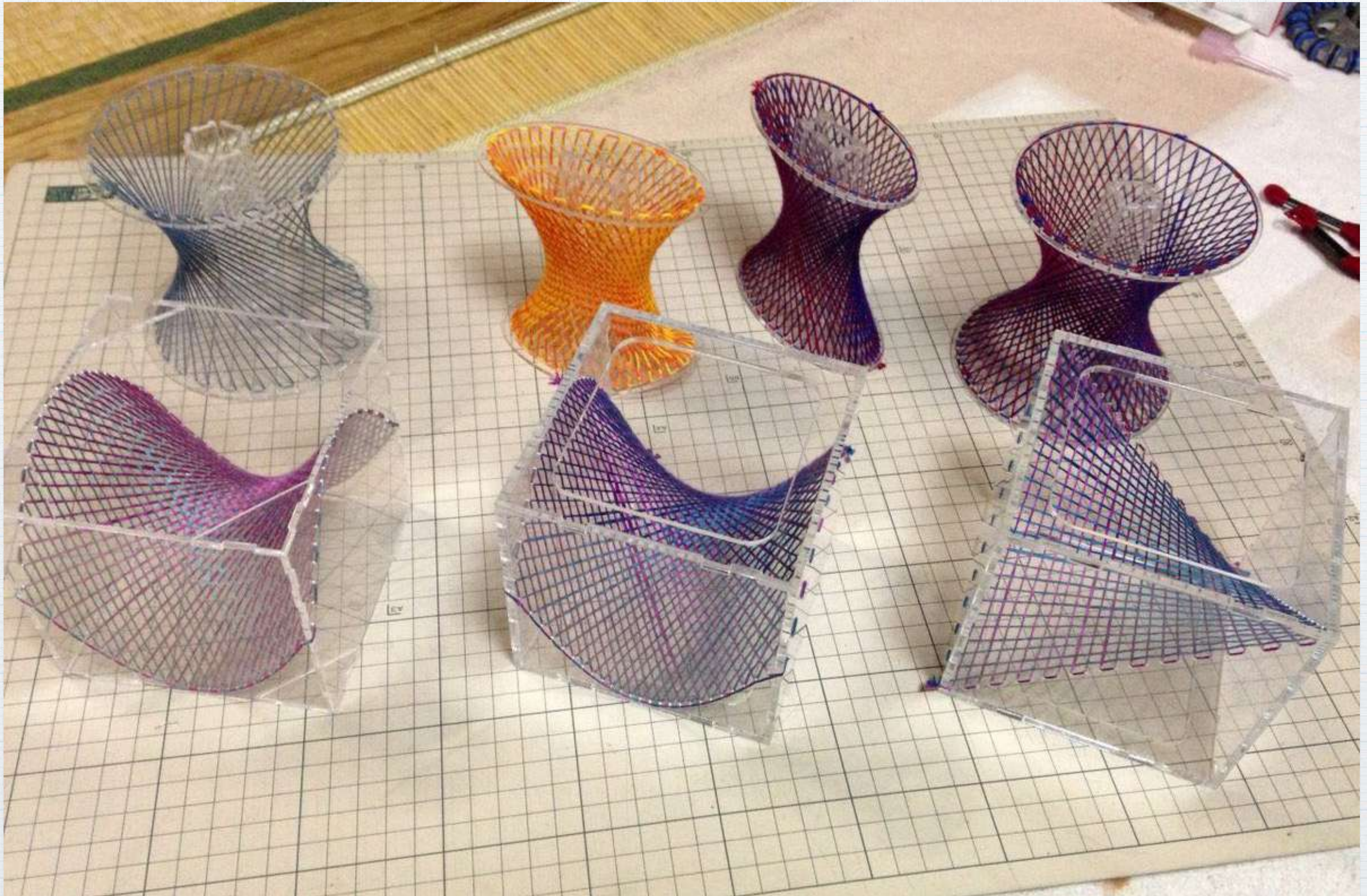


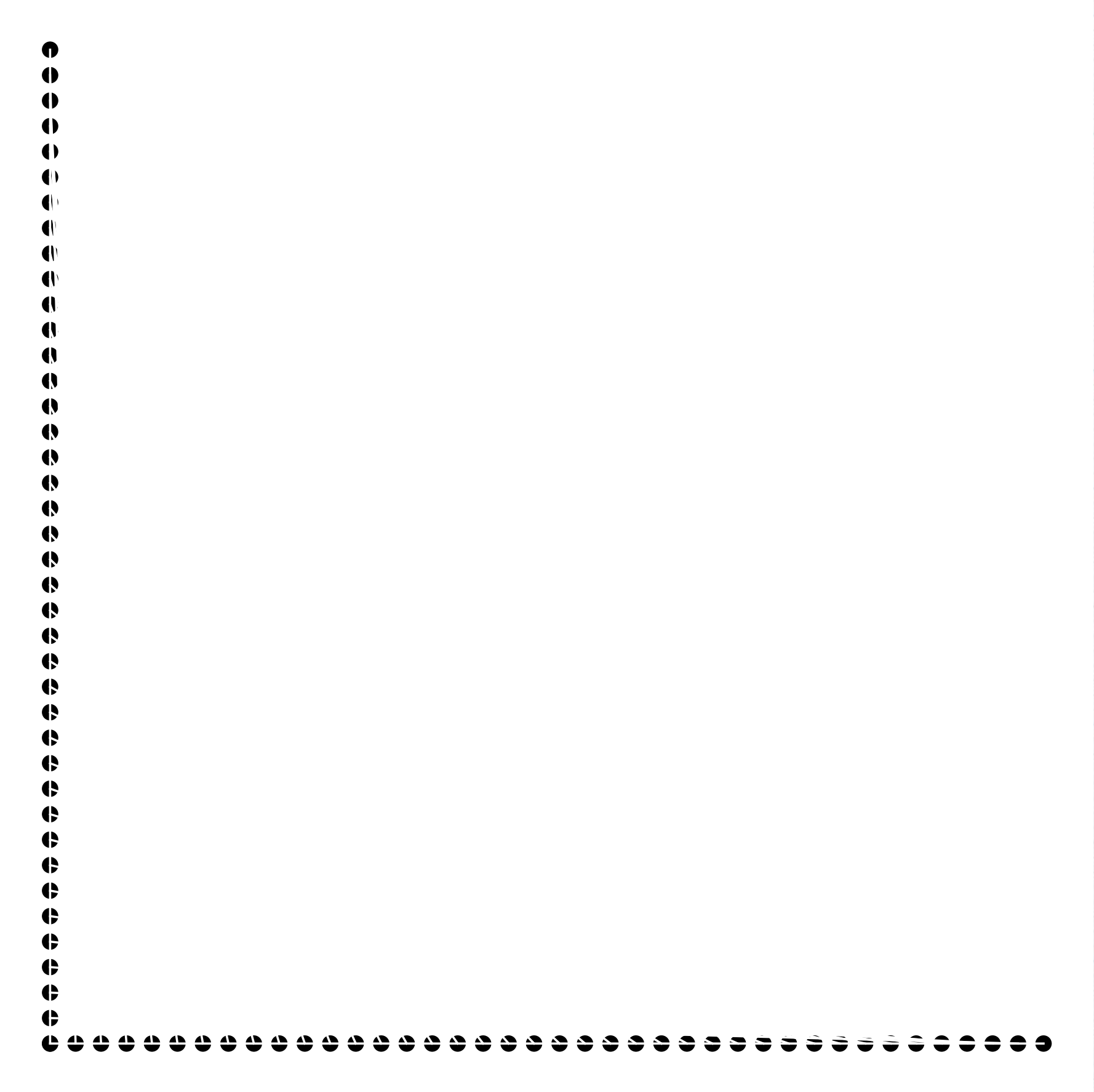












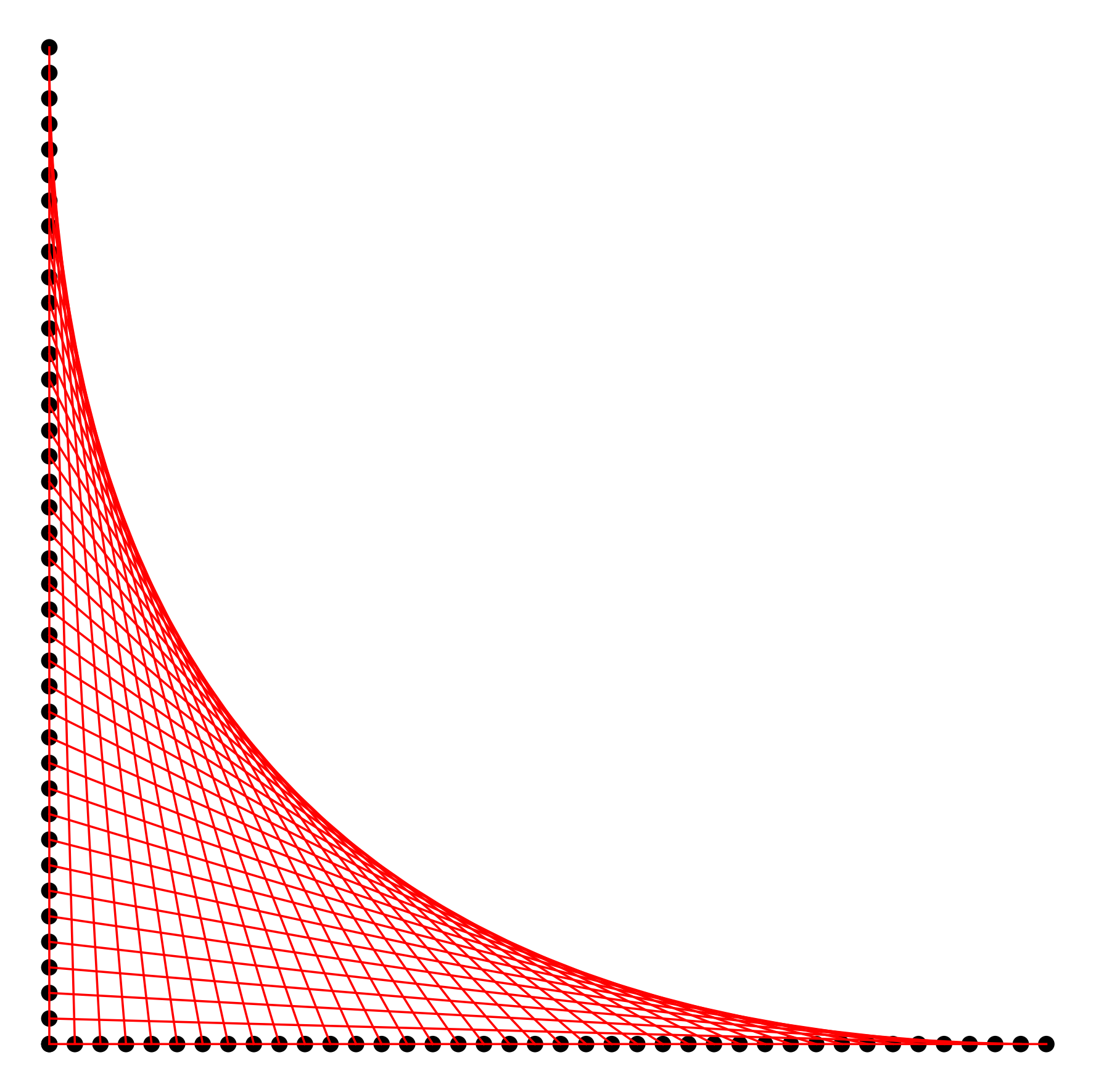
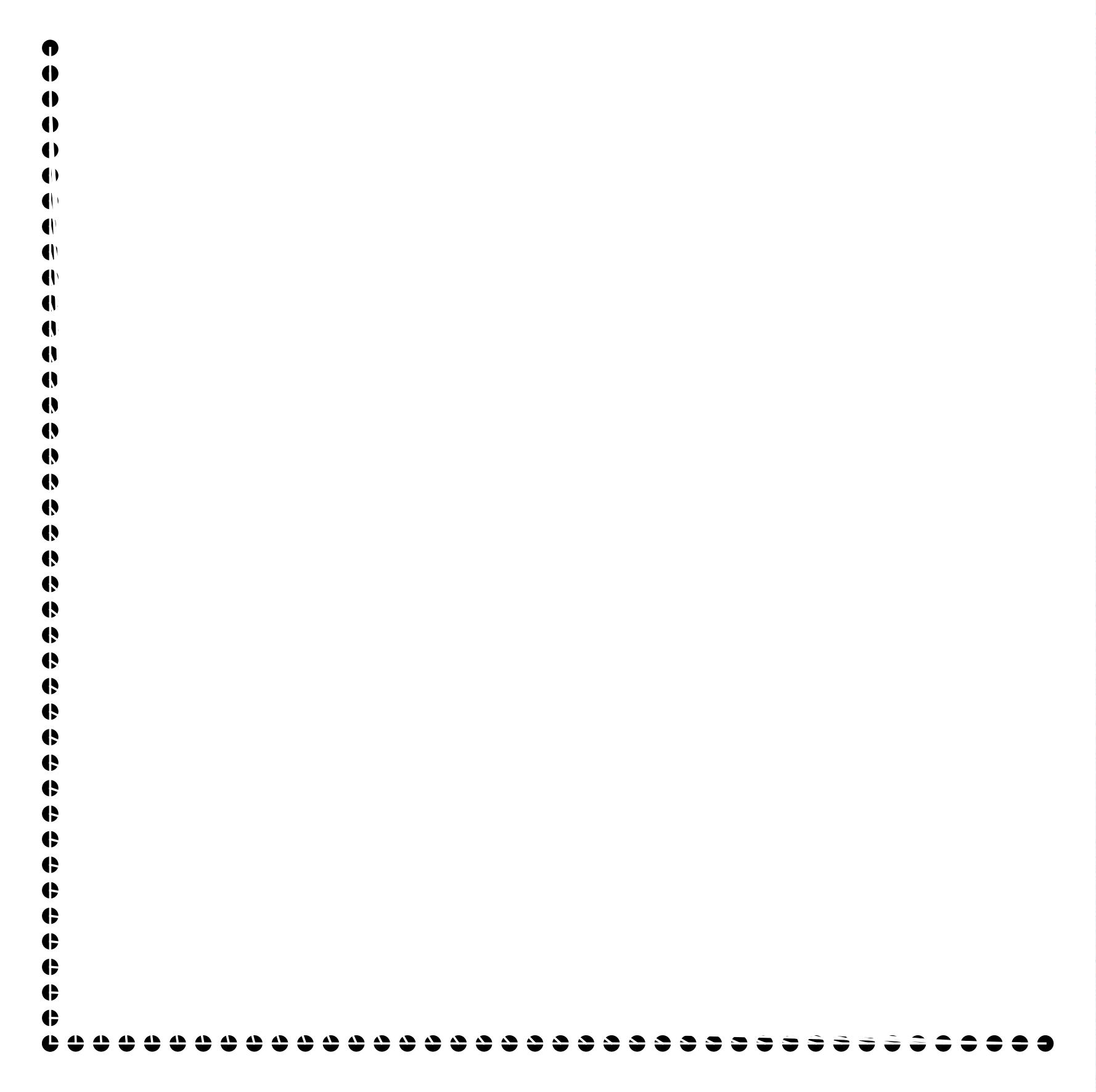
Si conectamos

$$(t,0)$$

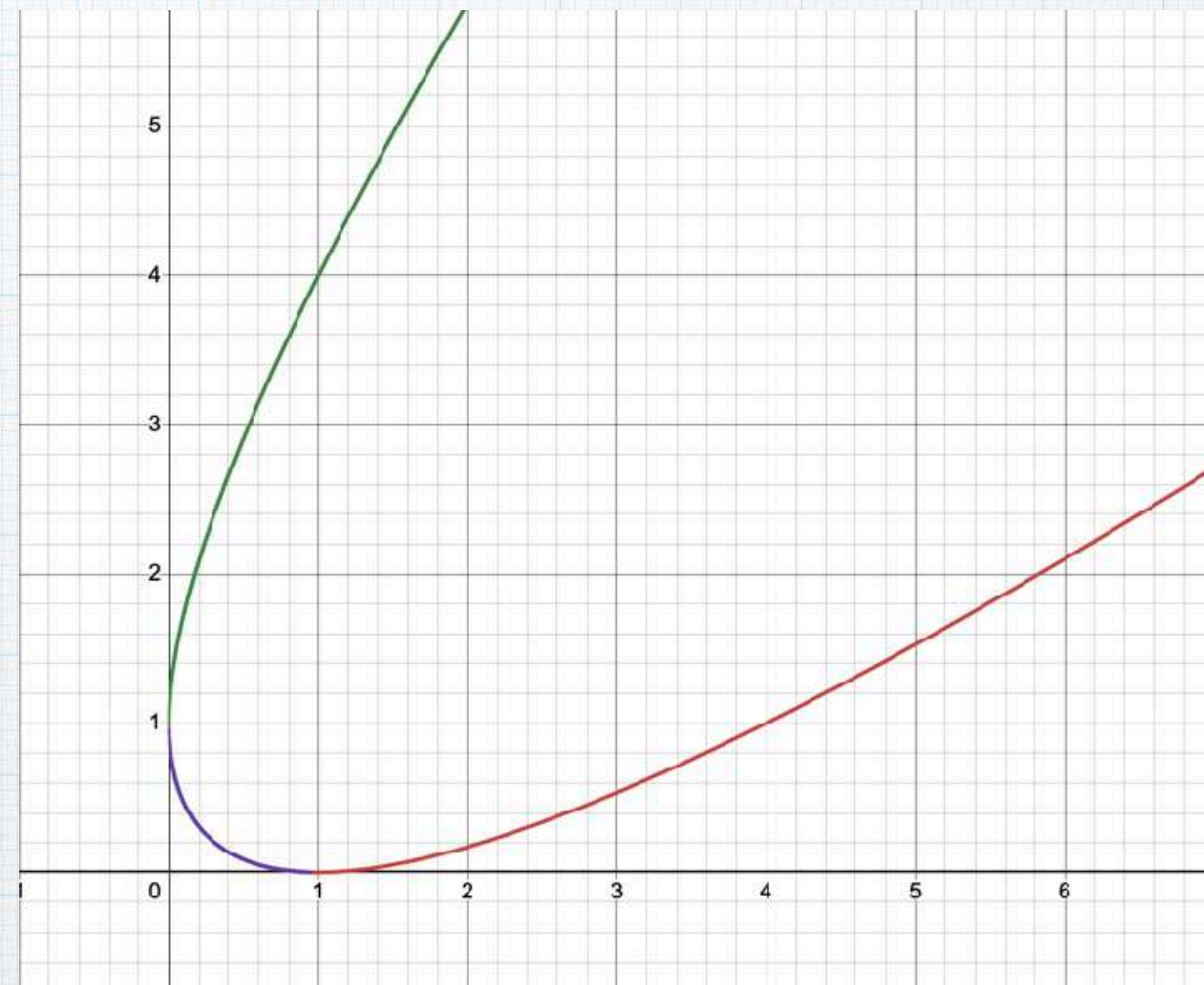
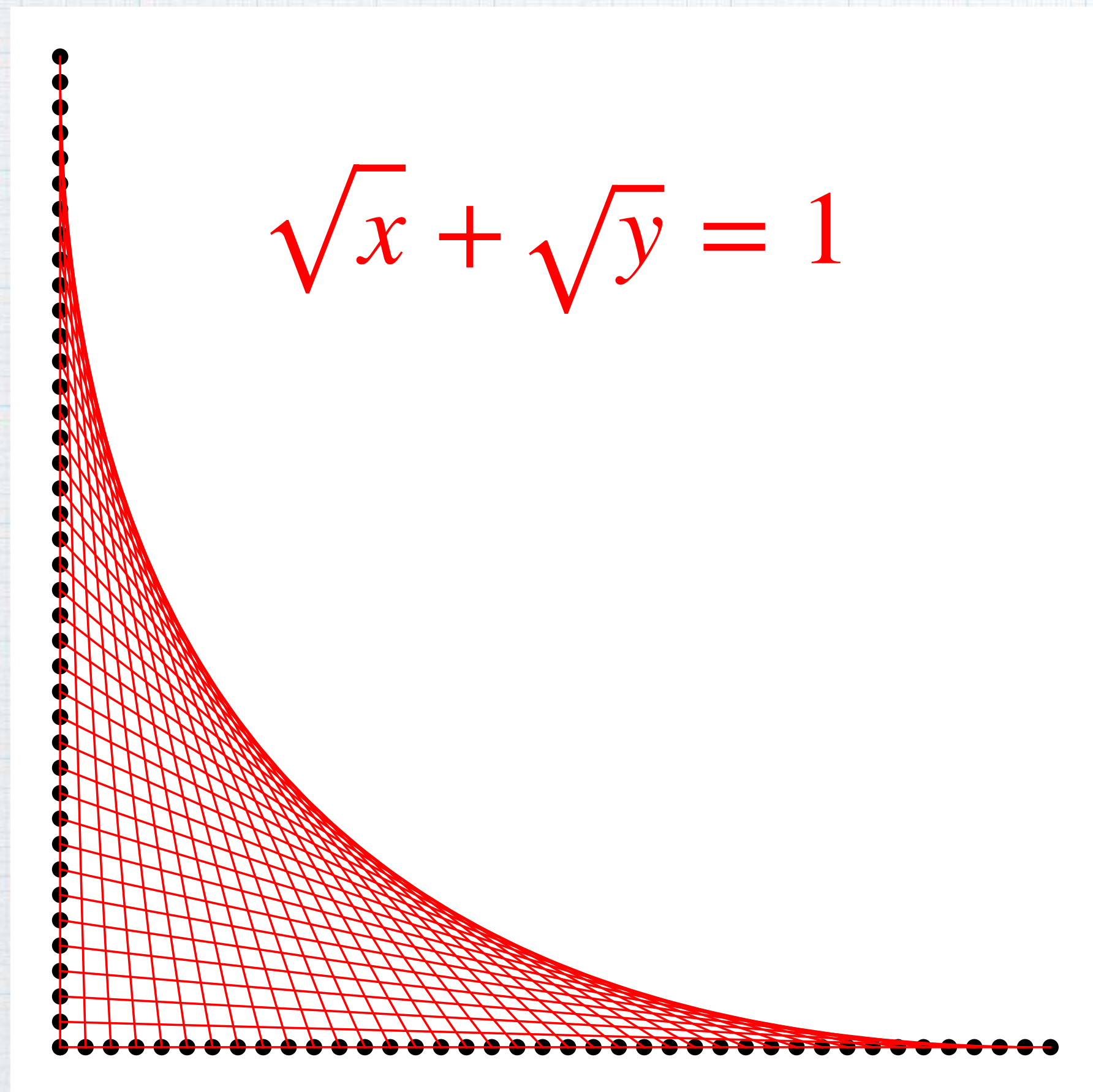
Con

$$(0,1 - t)$$

$$t \in [0,1]$$

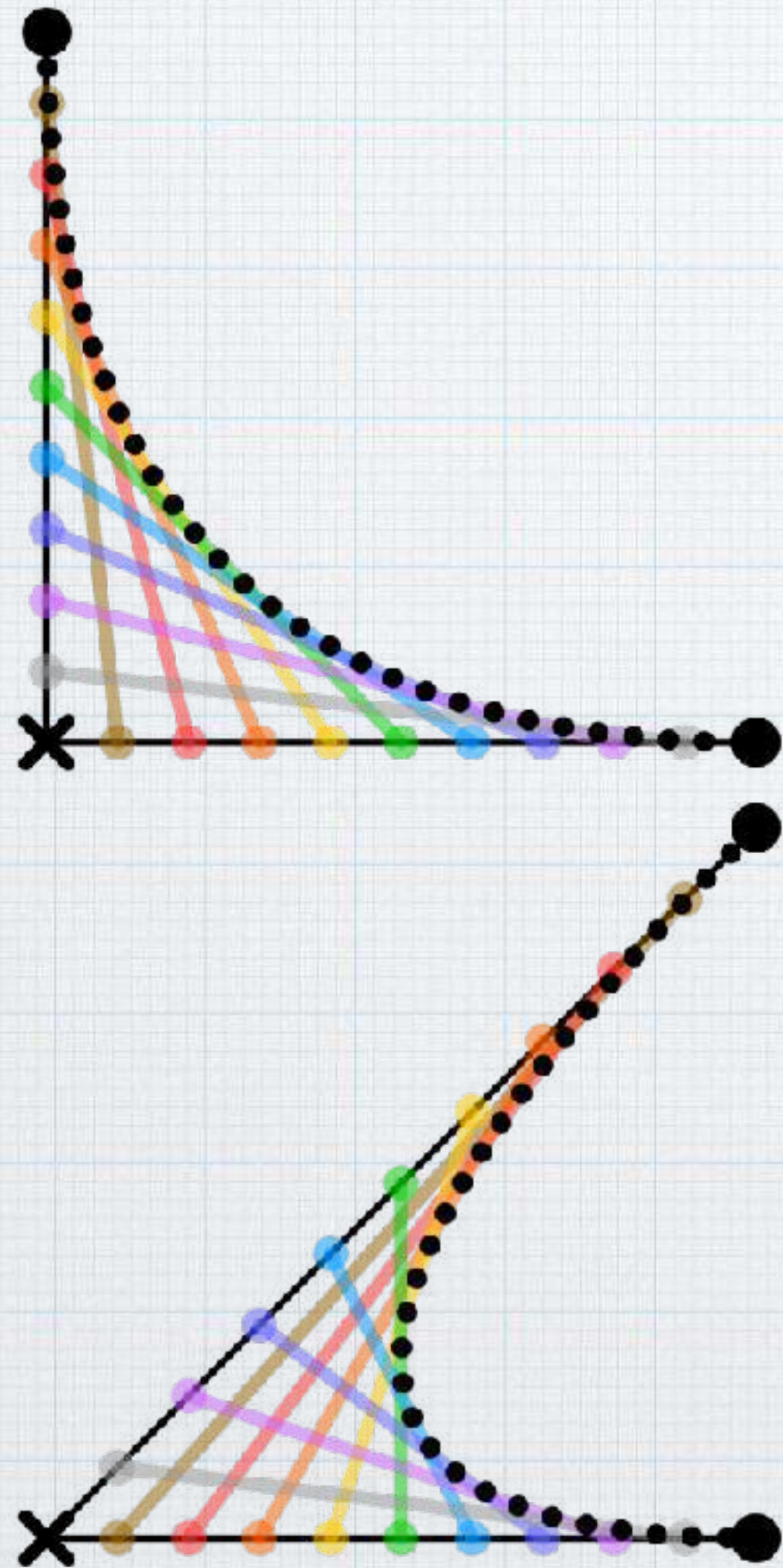


$$y = \left(1 \pm \sqrt{x}\right)^2$$



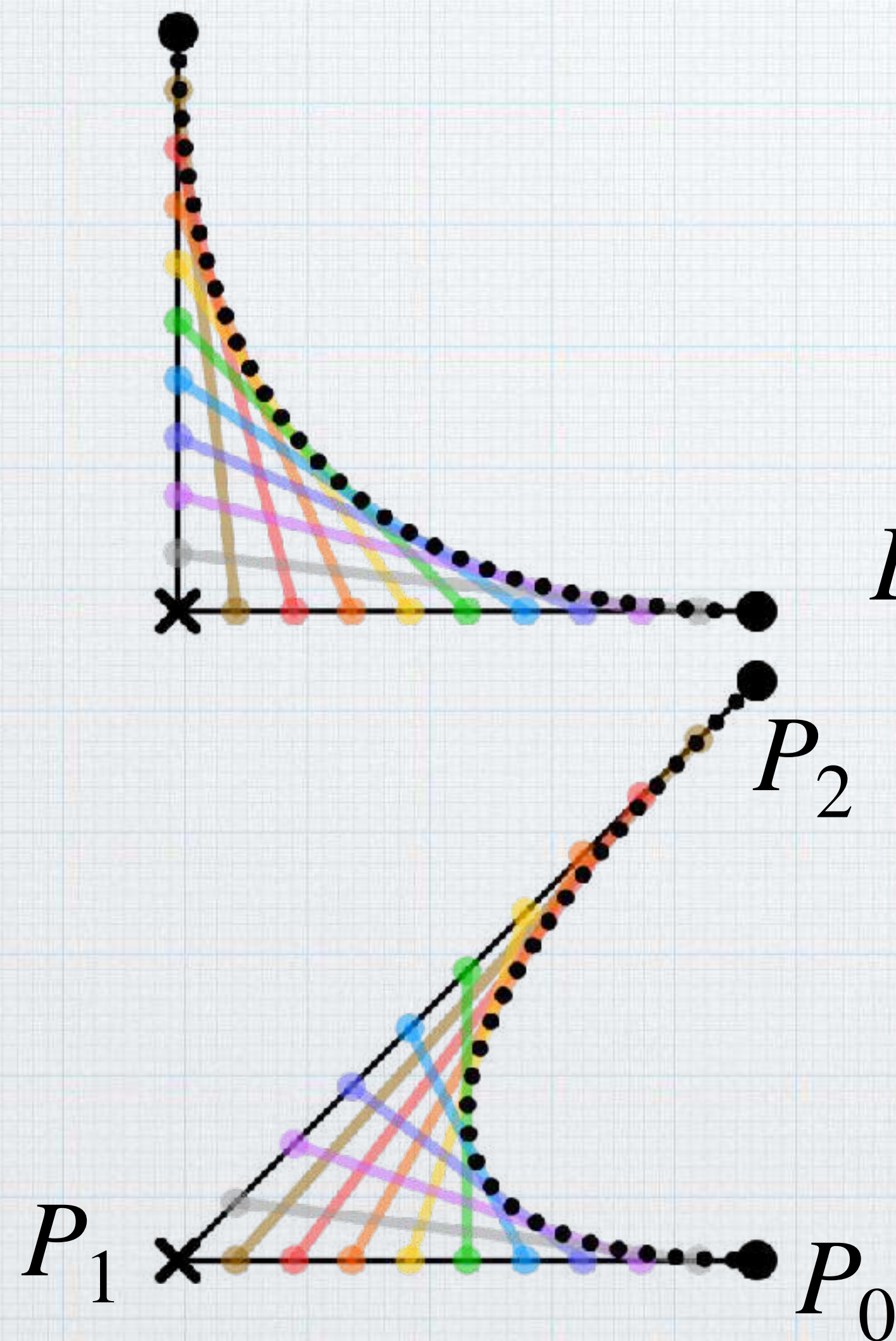
La curva obtenida se llama la envolvente del conjunto de rectas

¿Qué pasa si movemos los extremos?



¿Qué pasa si movemos los extremos?

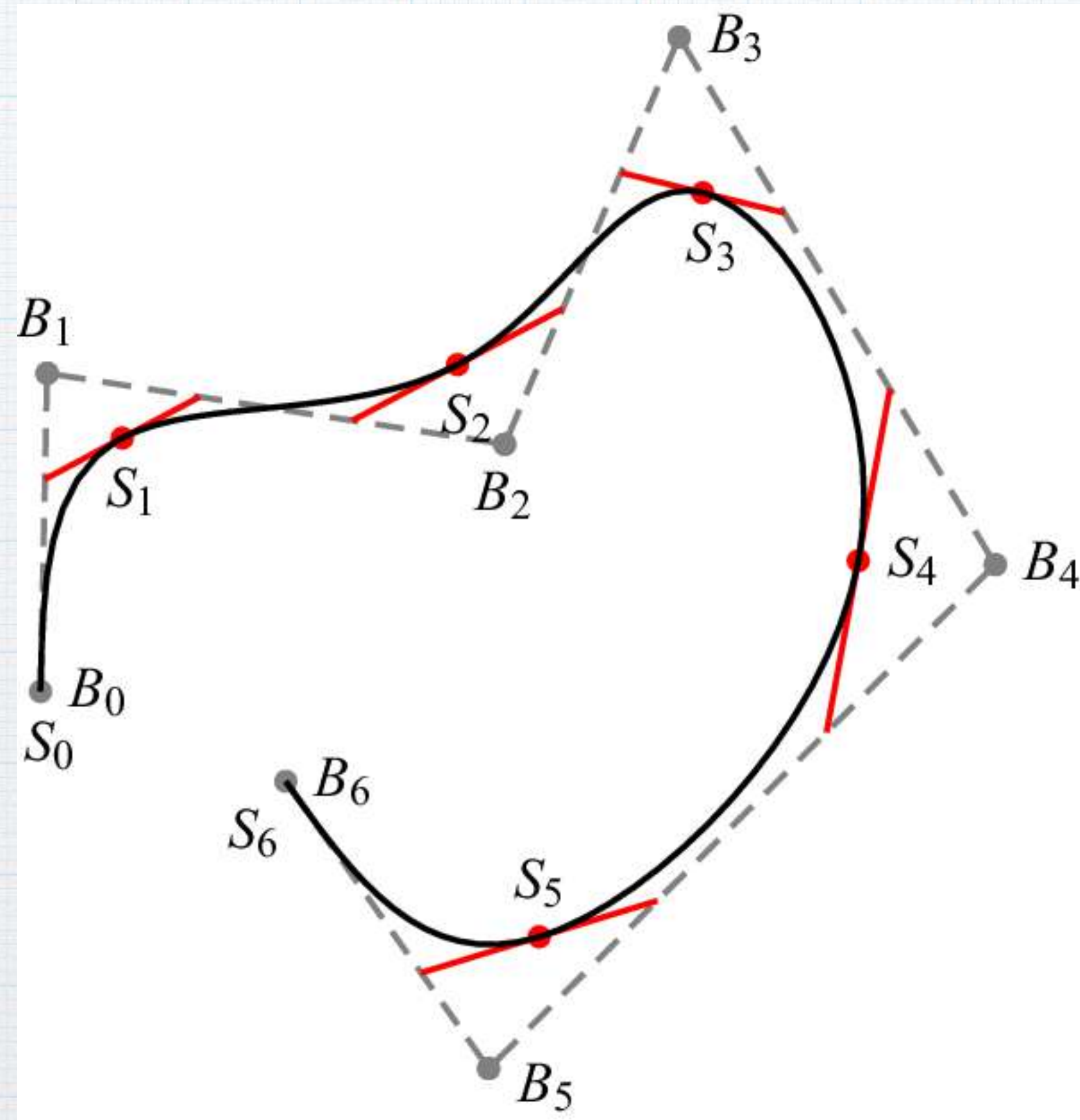
Curvas de Bezier



$$B(t) = (1 - t)[(1 - t)P_0 + tP_1] + t[(1 - t)P_1 + tP_2]$$

$$t \in [0, 1]$$

Para curvas más generales se usan (p.e.) las Bezier splines

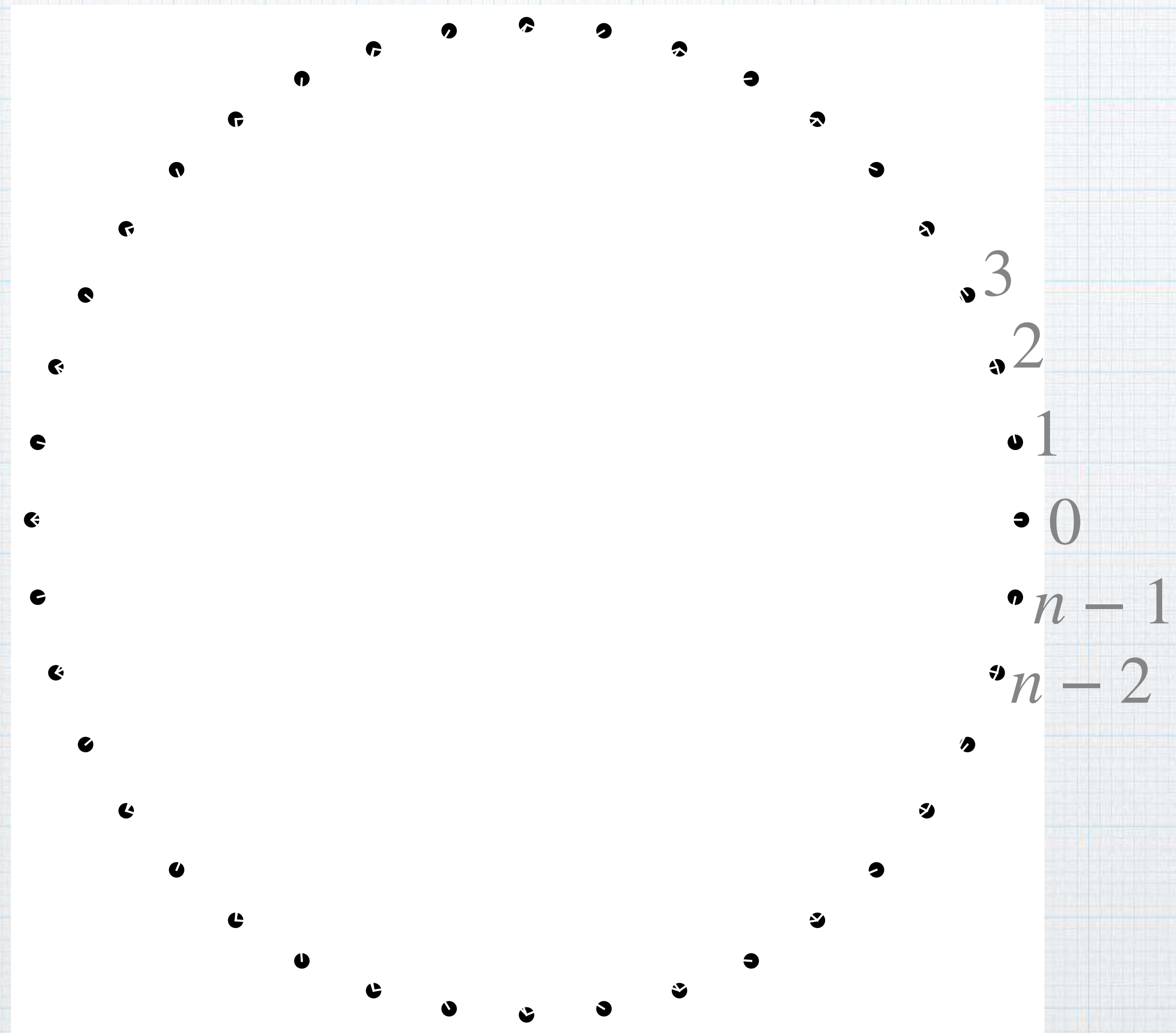


Ej1

Describir que curvas se pueden obtener en un hilorama cuadrado, si los clavos solo están en:

- 1. Lado izquierdo y derecho**
- 2. Abajo y arriba**

Consideremos ahora un arreglo circular de n clavos



Podemos usar reglas de asignación usando por ejemplo aritmética modular

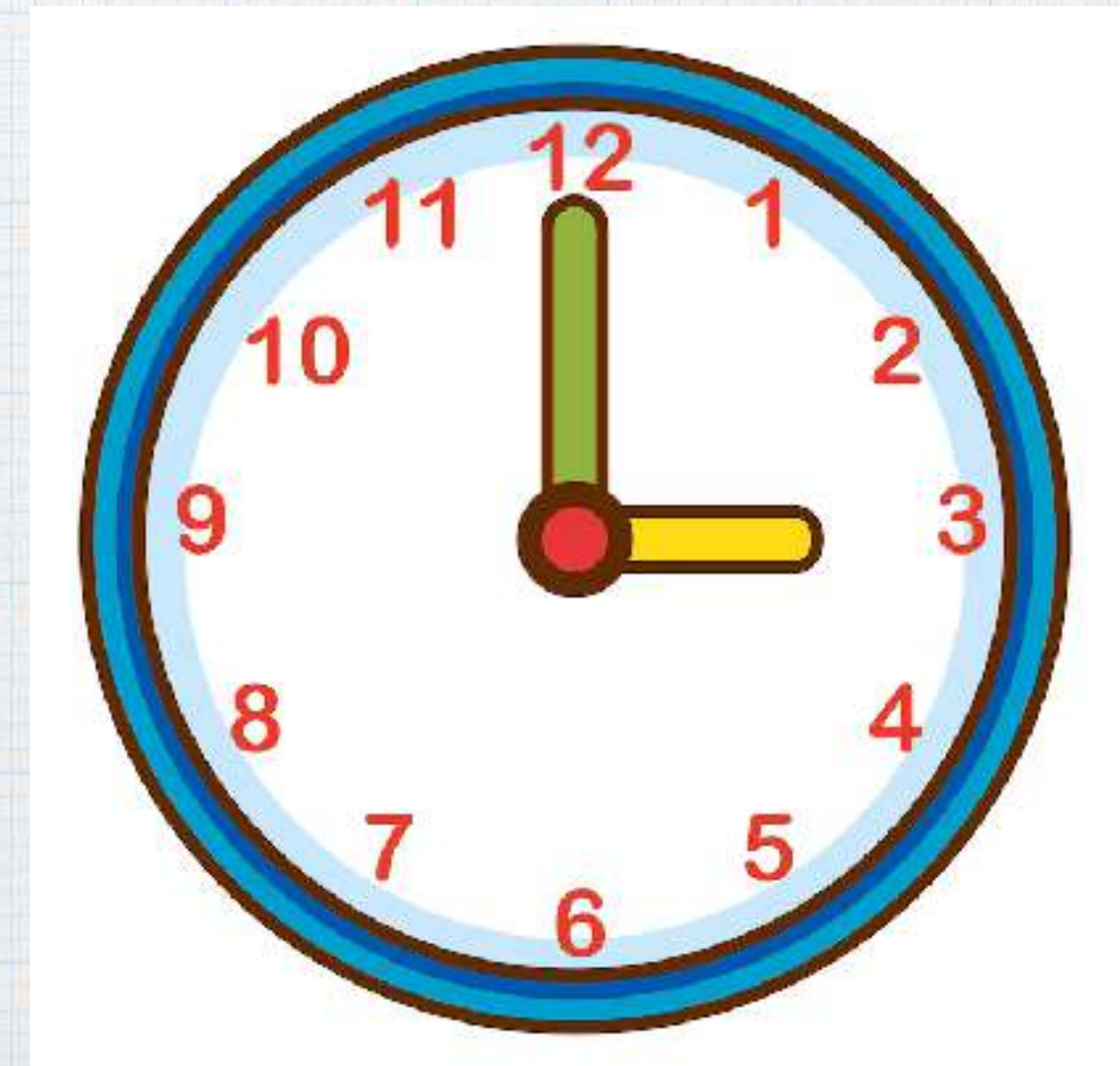
$$a, b \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Decimos que a y b son congruentes módulo n si dejan el mismo residuo al dividir por n

$$77 \equiv 107 \pmod{10}$$

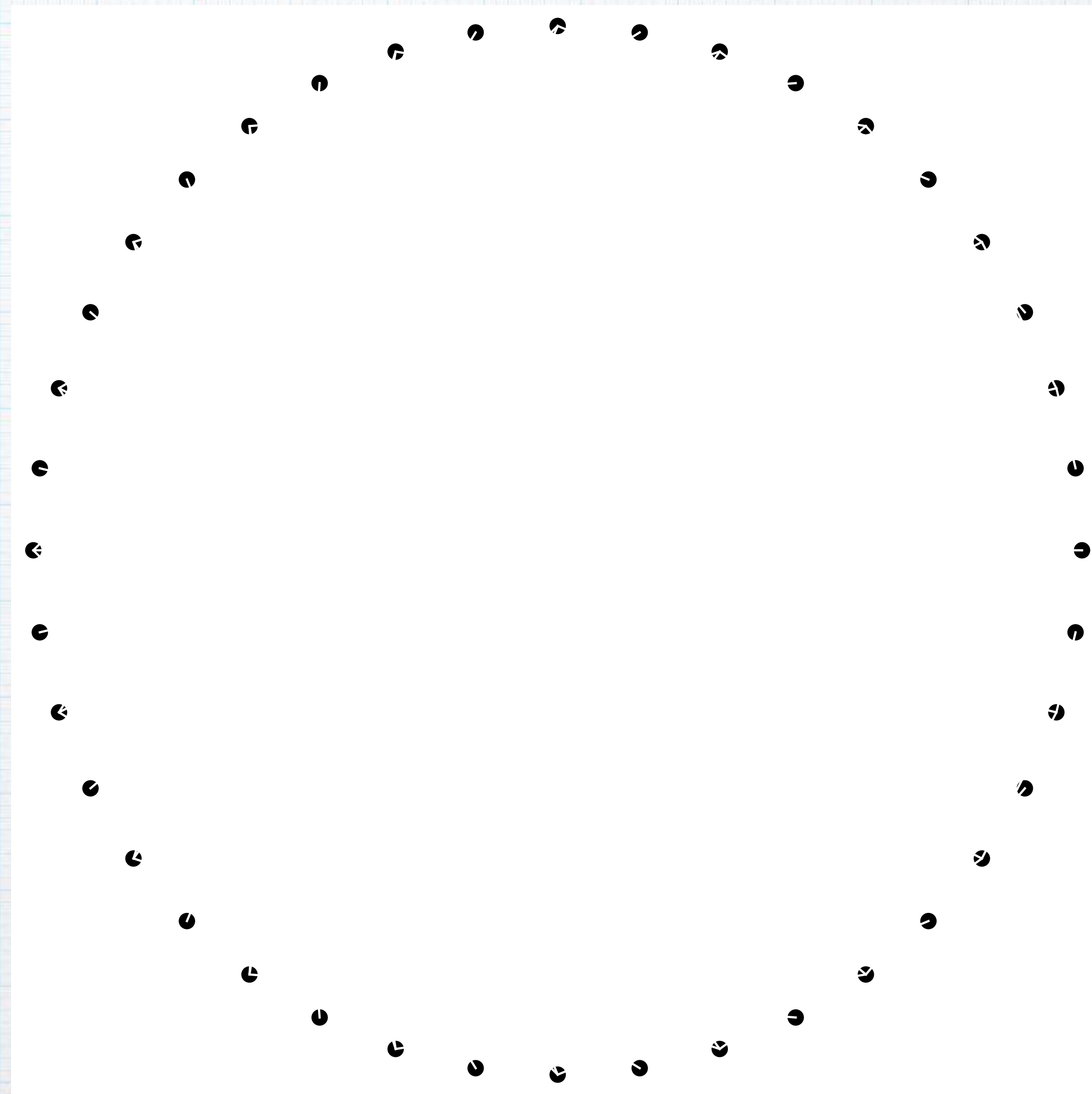
$$-7 \equiv 26 \pmod{3}$$

$$25 \equiv -100 \pmod{-5}$$



Fijamos un número
 n de clavos, y
enteros k, b .
Entonces cada
clavo i lo podemos
enviar según:

$$i \mapsto ki + b \pmod{n}$$



Ej2

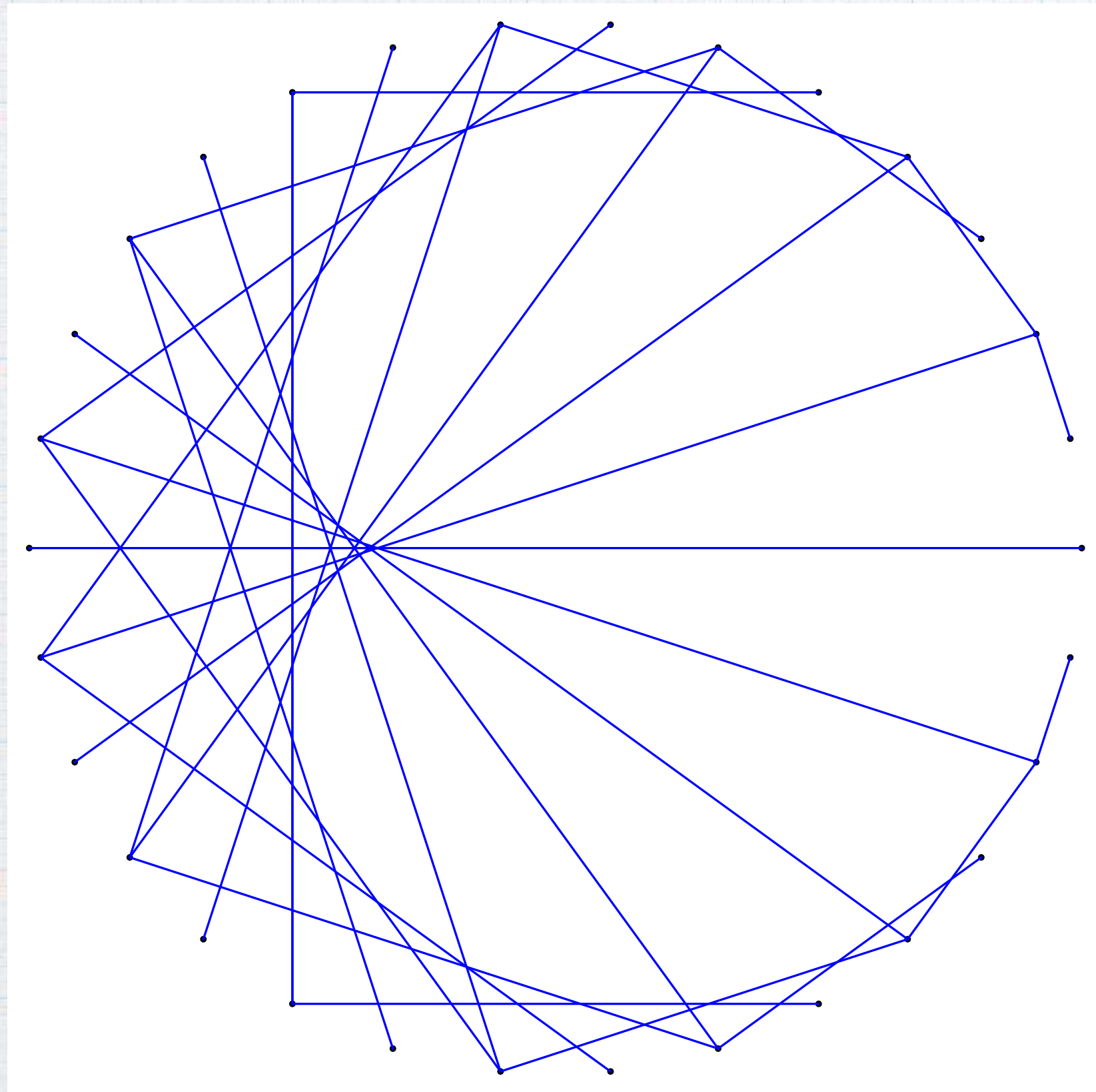
Describir la curva que se obtiene al usar la regla

$$i \mapsto 2i \pmod{30}$$

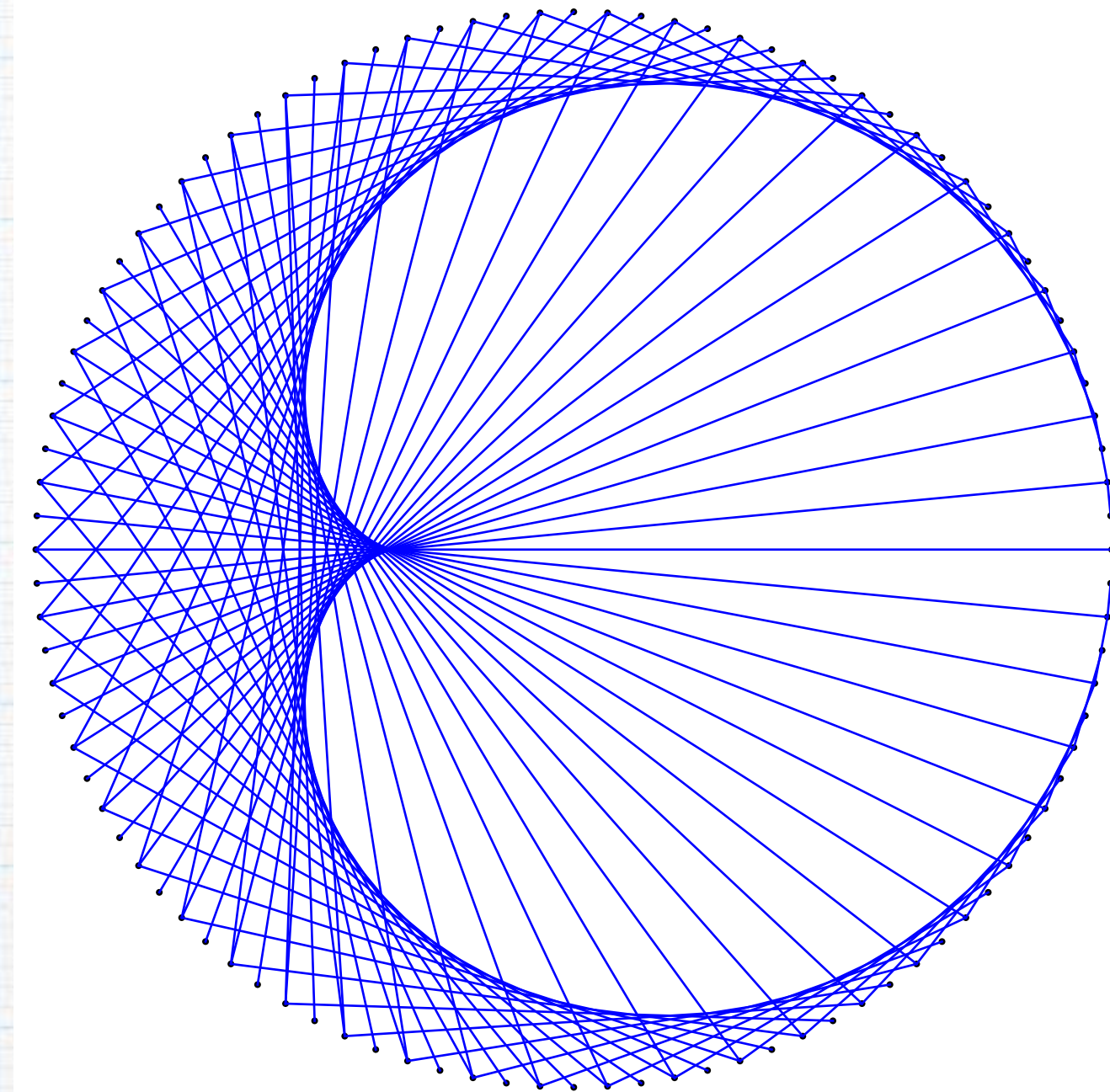
¿Qué ocurre con la siguiente?

$$i \mapsto 2i + 11 \pmod{30}$$

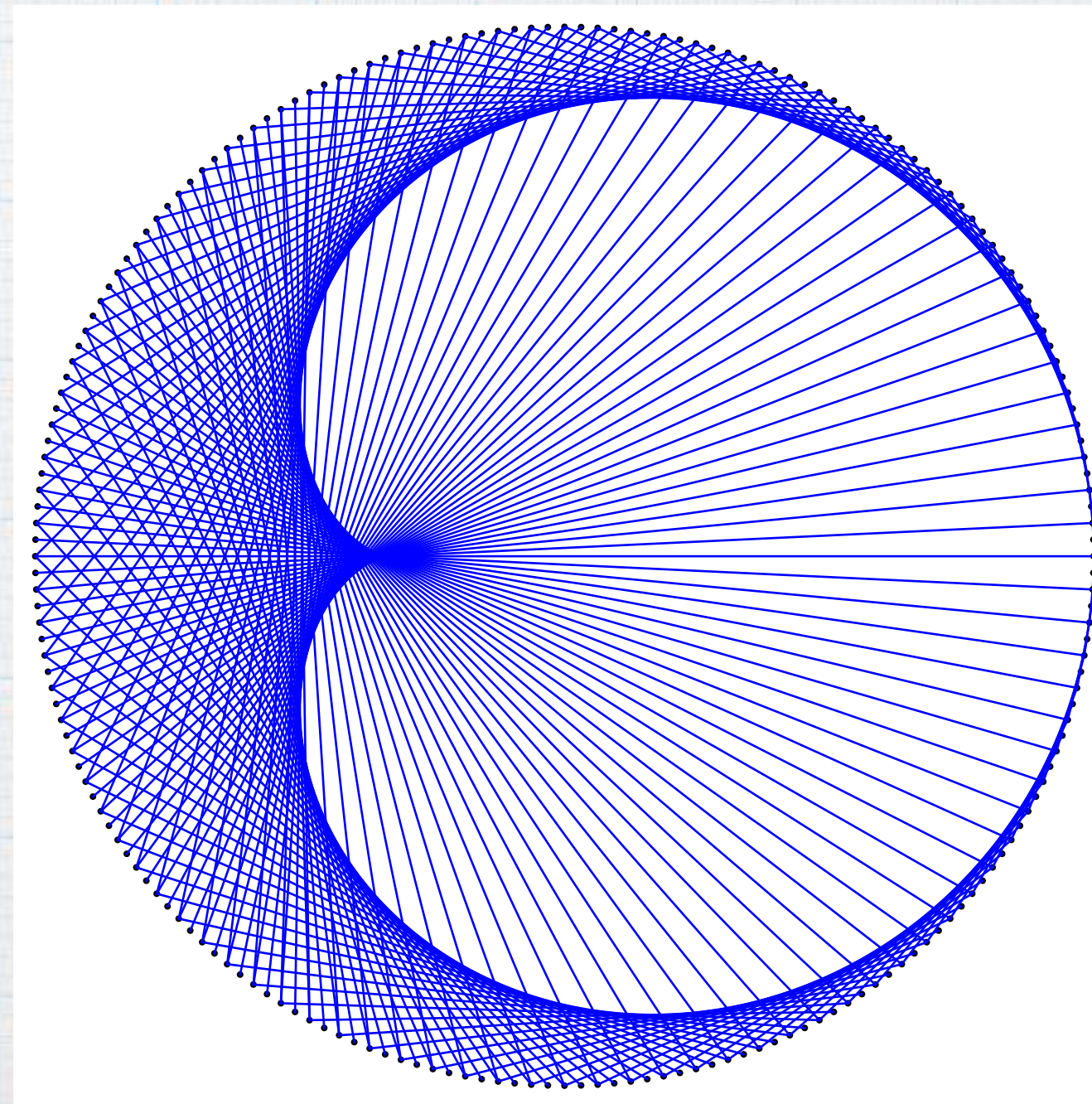
Con 30



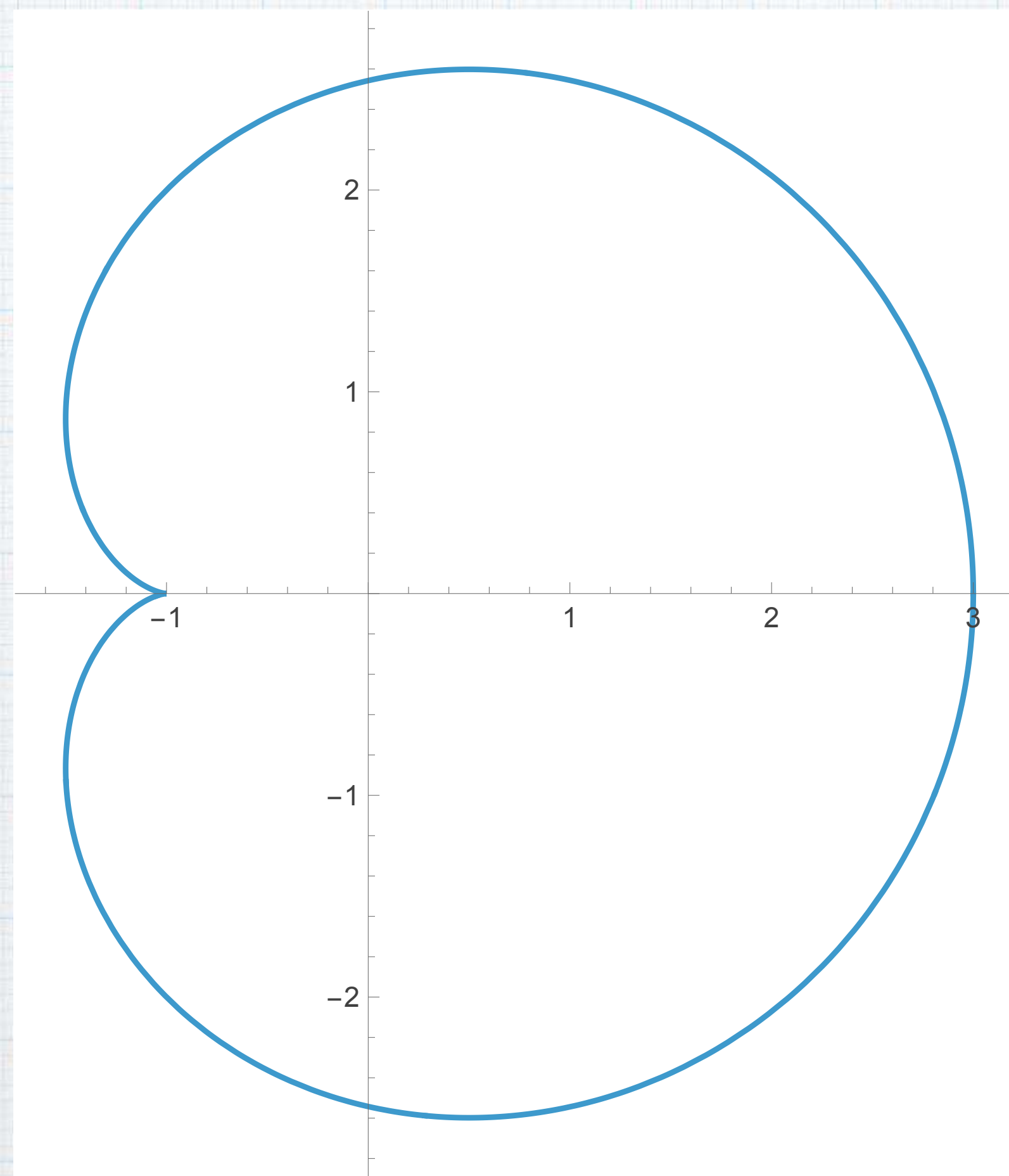
Con 100



Con 200



La cardioide

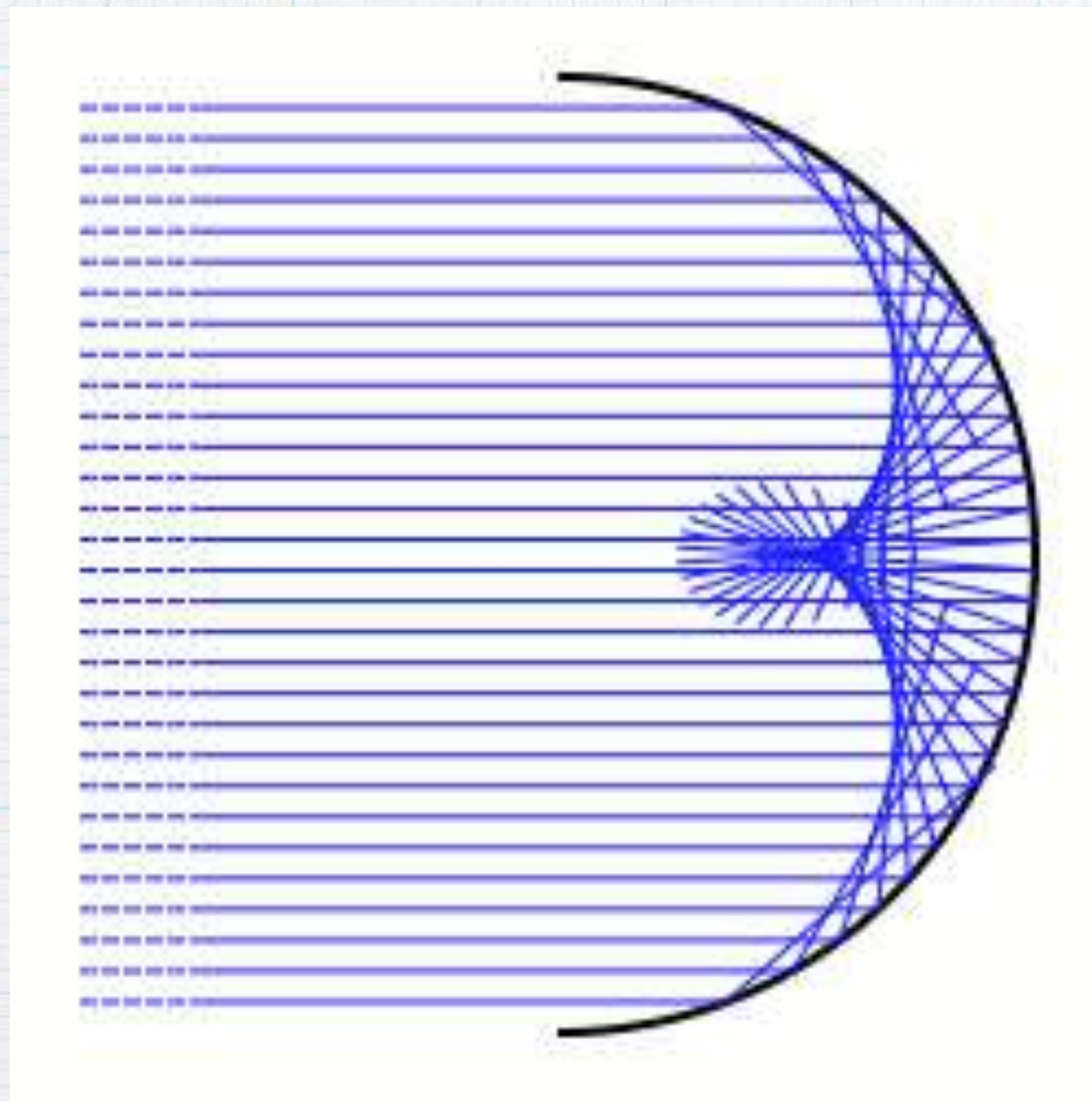




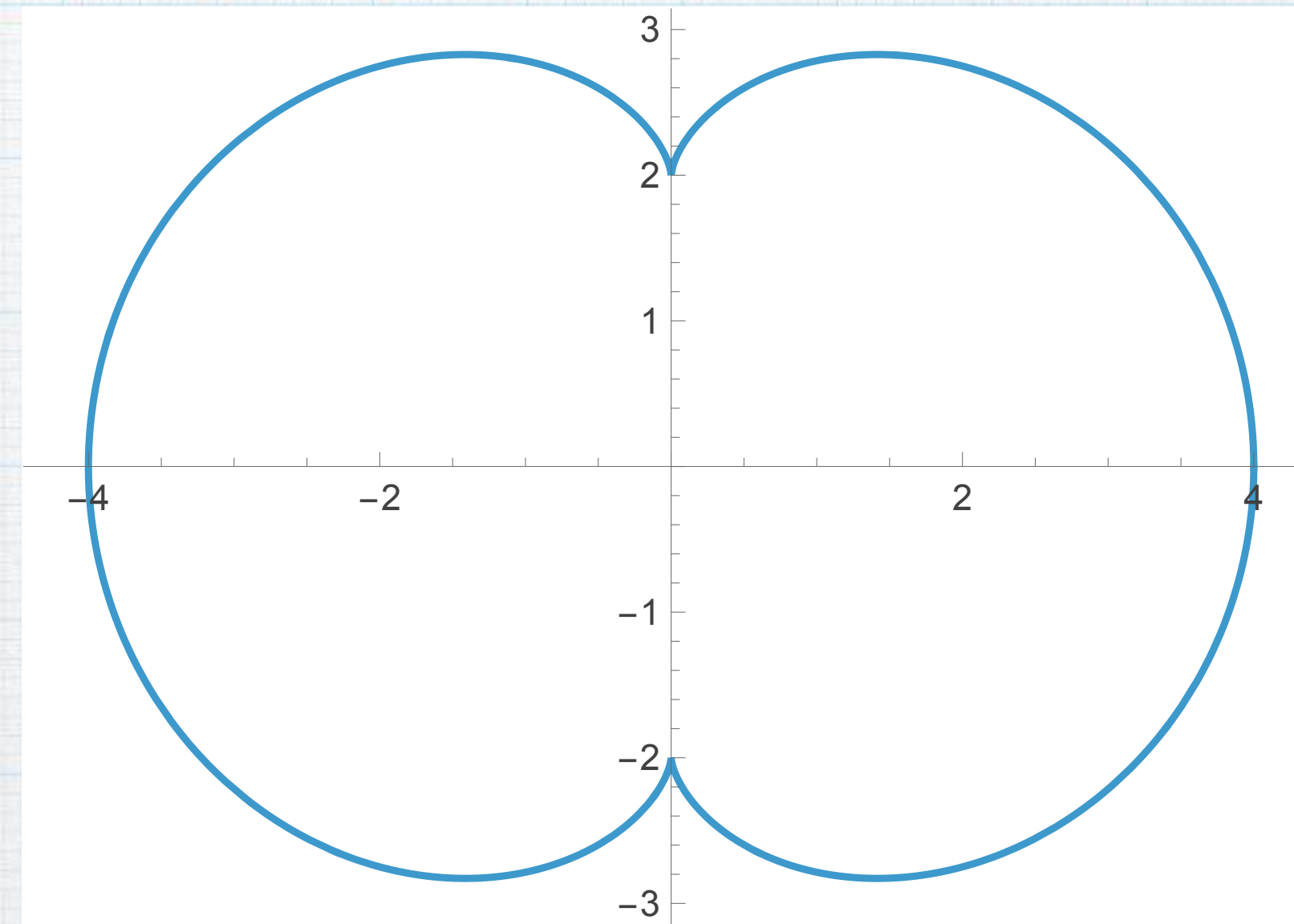
Ley de reflexión especular

Se preserva el ángulo respecto a la recta tangente

Si la fuente está sobre el círculo, obtenemos la cardioide

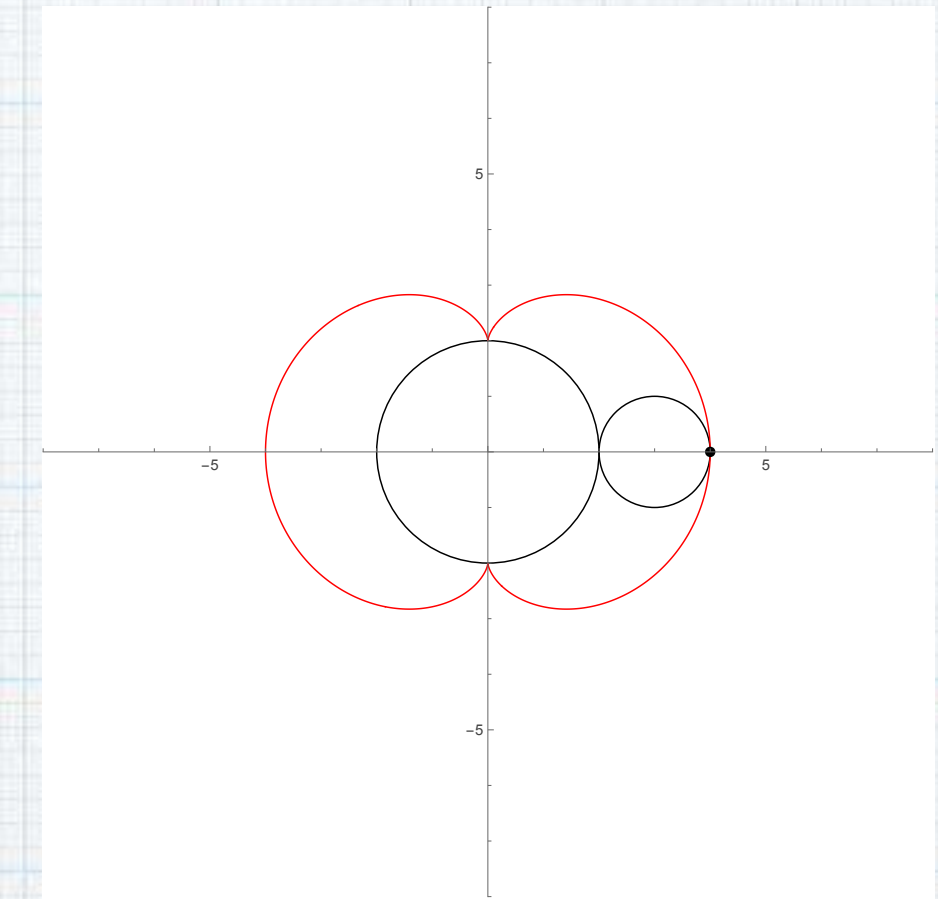
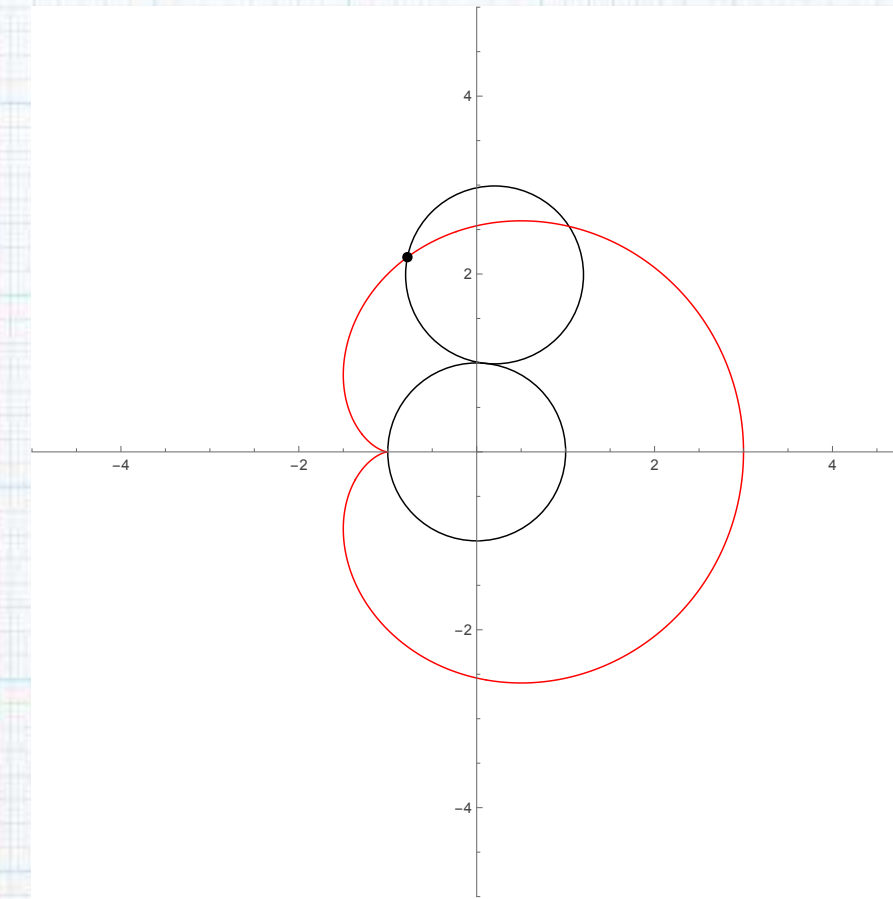
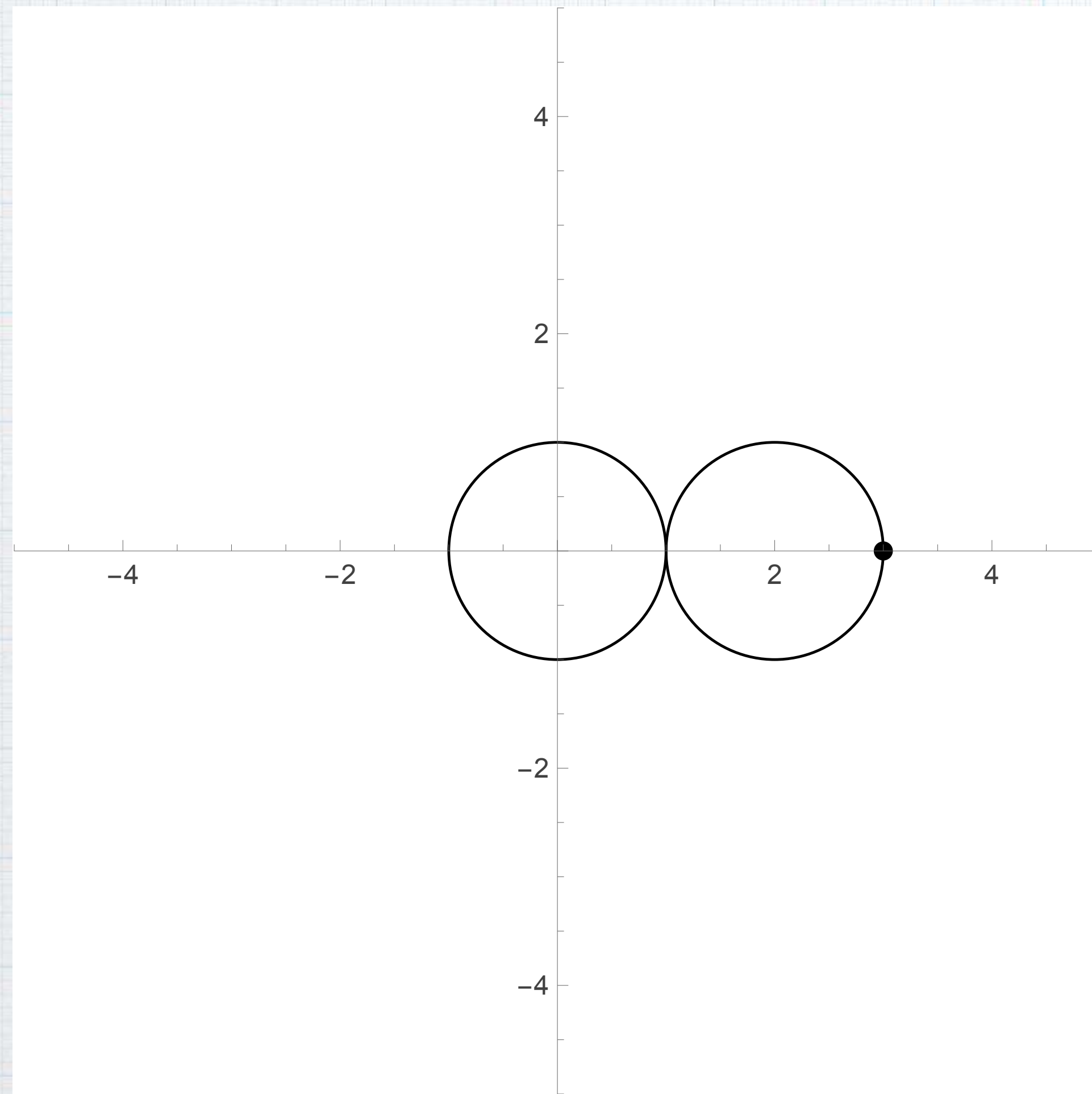


Si la fuente está en el infinito obtenemos la nefroide



Este tipo de curvas se llaman caústicas por reflexión.

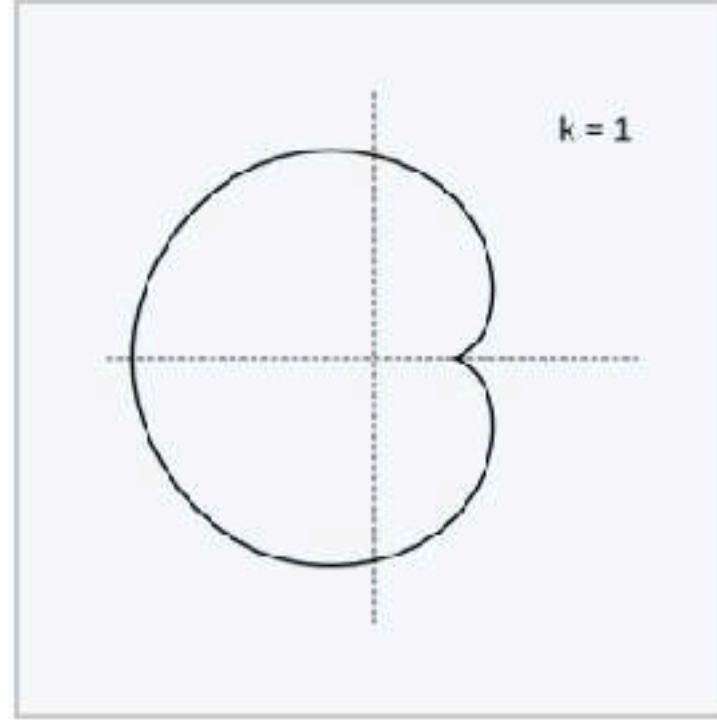
La cardioide y la nefroide hacen parte de otra familia de curvas, llamadas epicicloides



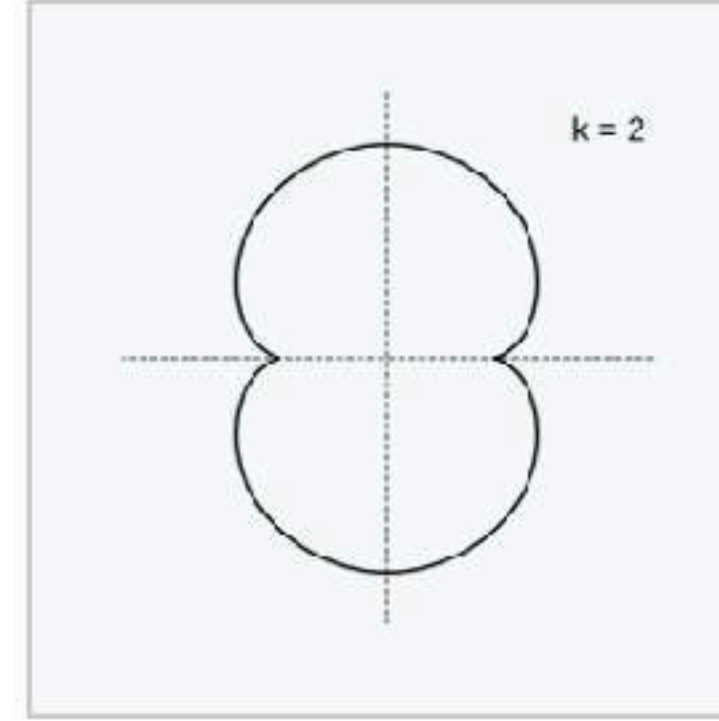
Ej3

Dar una condición entre los radios, para que la curva resultante sea cerrada

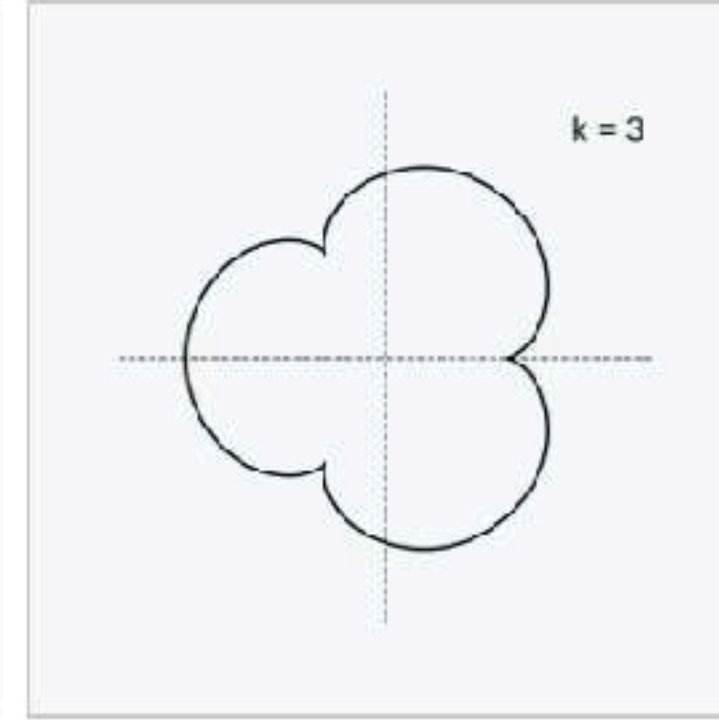
Epicycloid examples



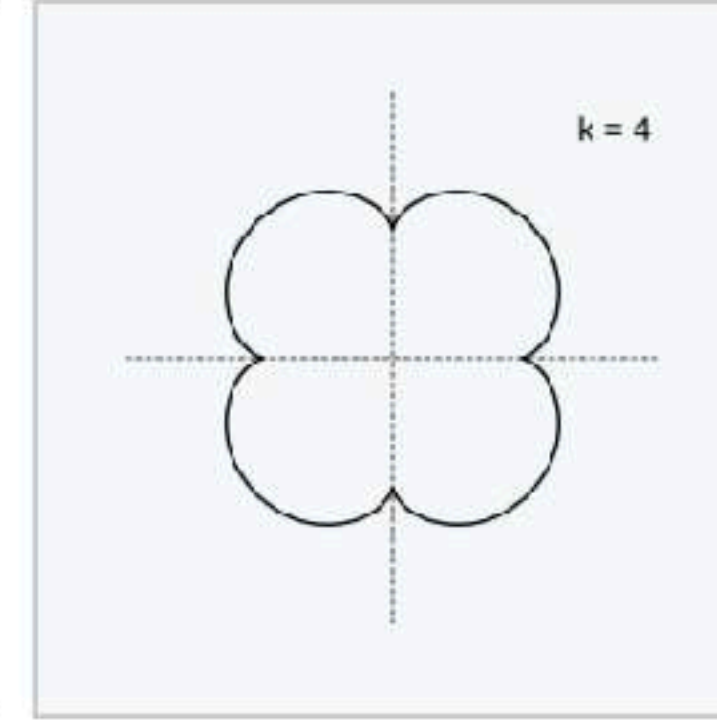
$k = 1$; a *cardioid*



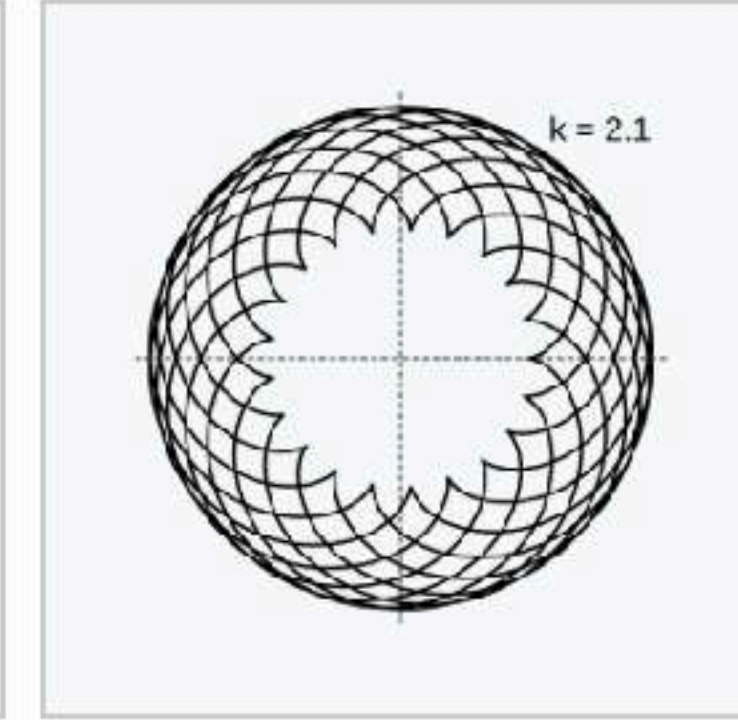
$k = 2$; a *nephroid*



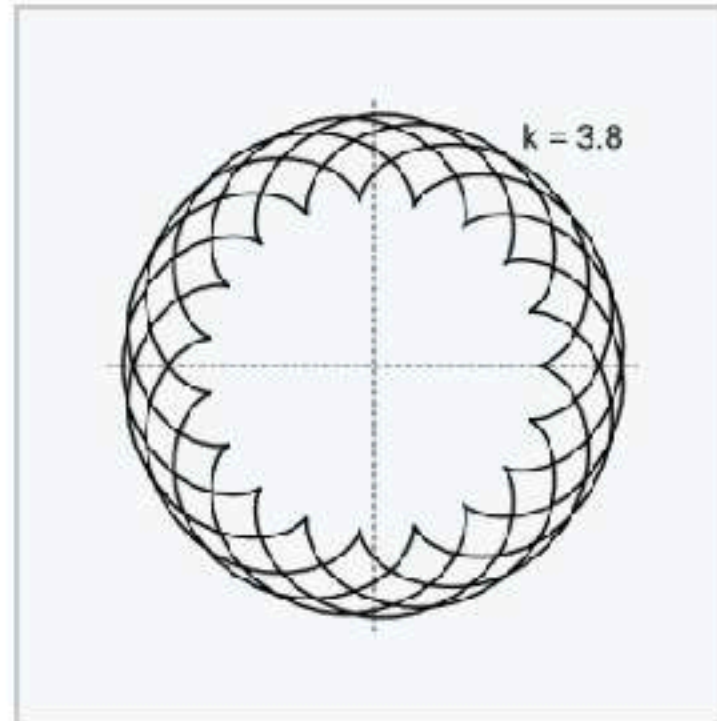
$k = 3$; a *trefoiloid*



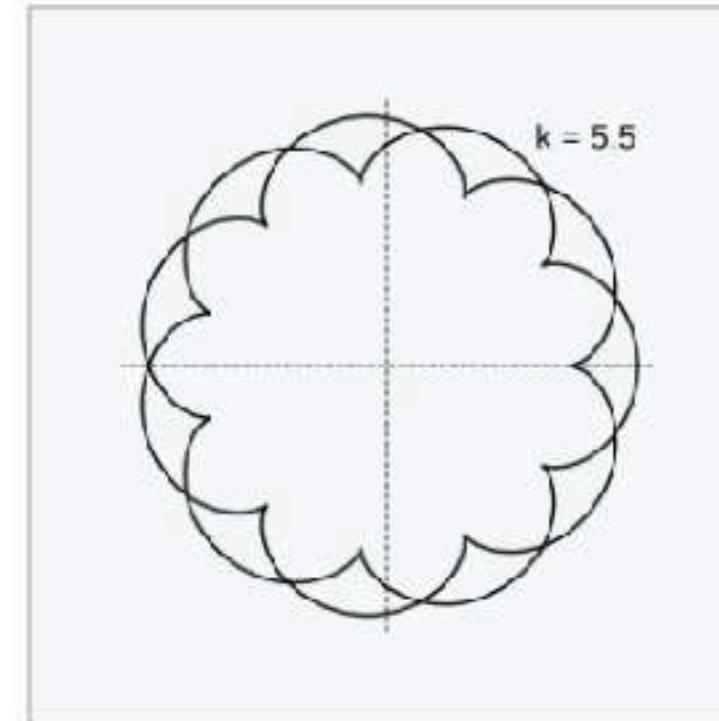
$k = 4$; a *quatrefoiloid*



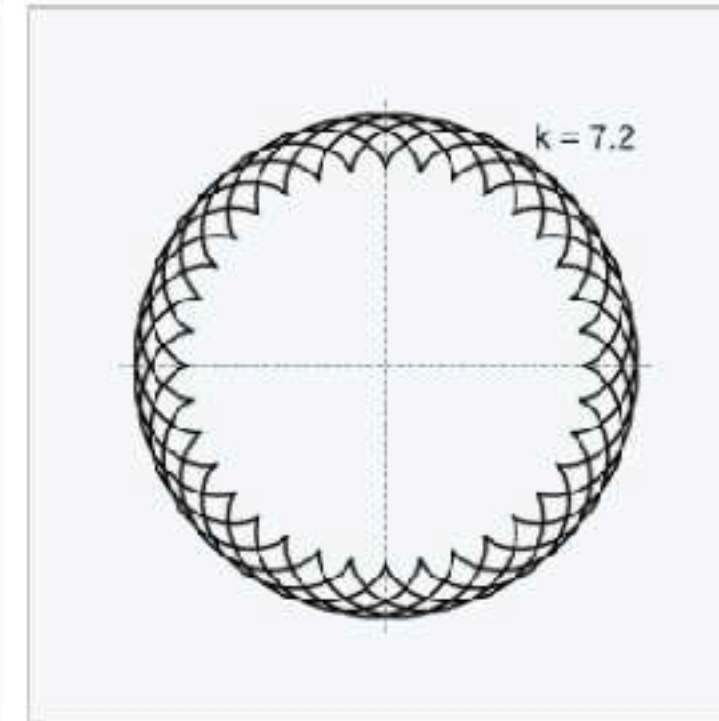
$k = 2.1 = 21/10$



$k = 3.8 = 19/5$



$k = 5.5 = 11/2$



$k = 7.2 = 36/5$

Ej4

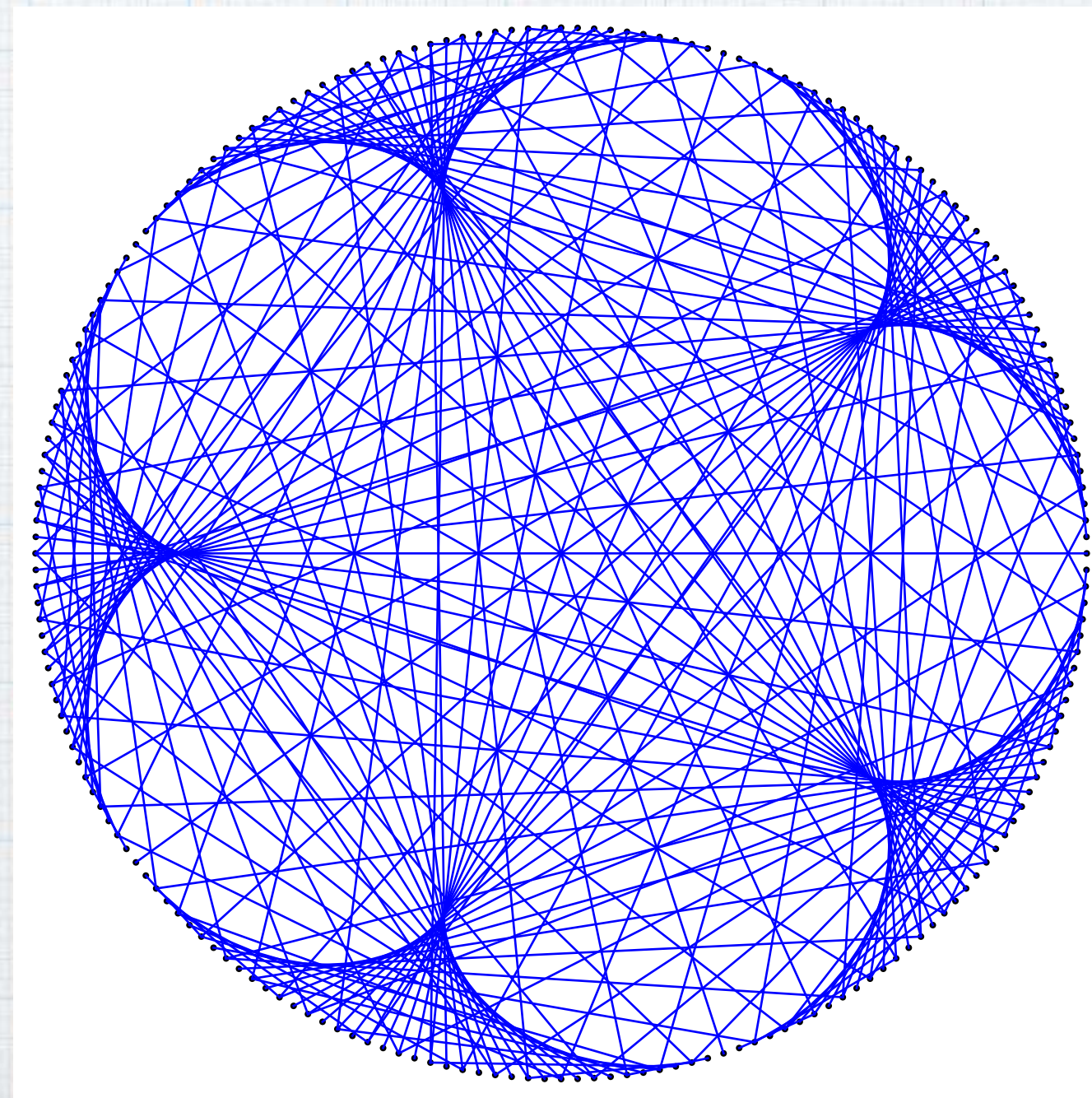
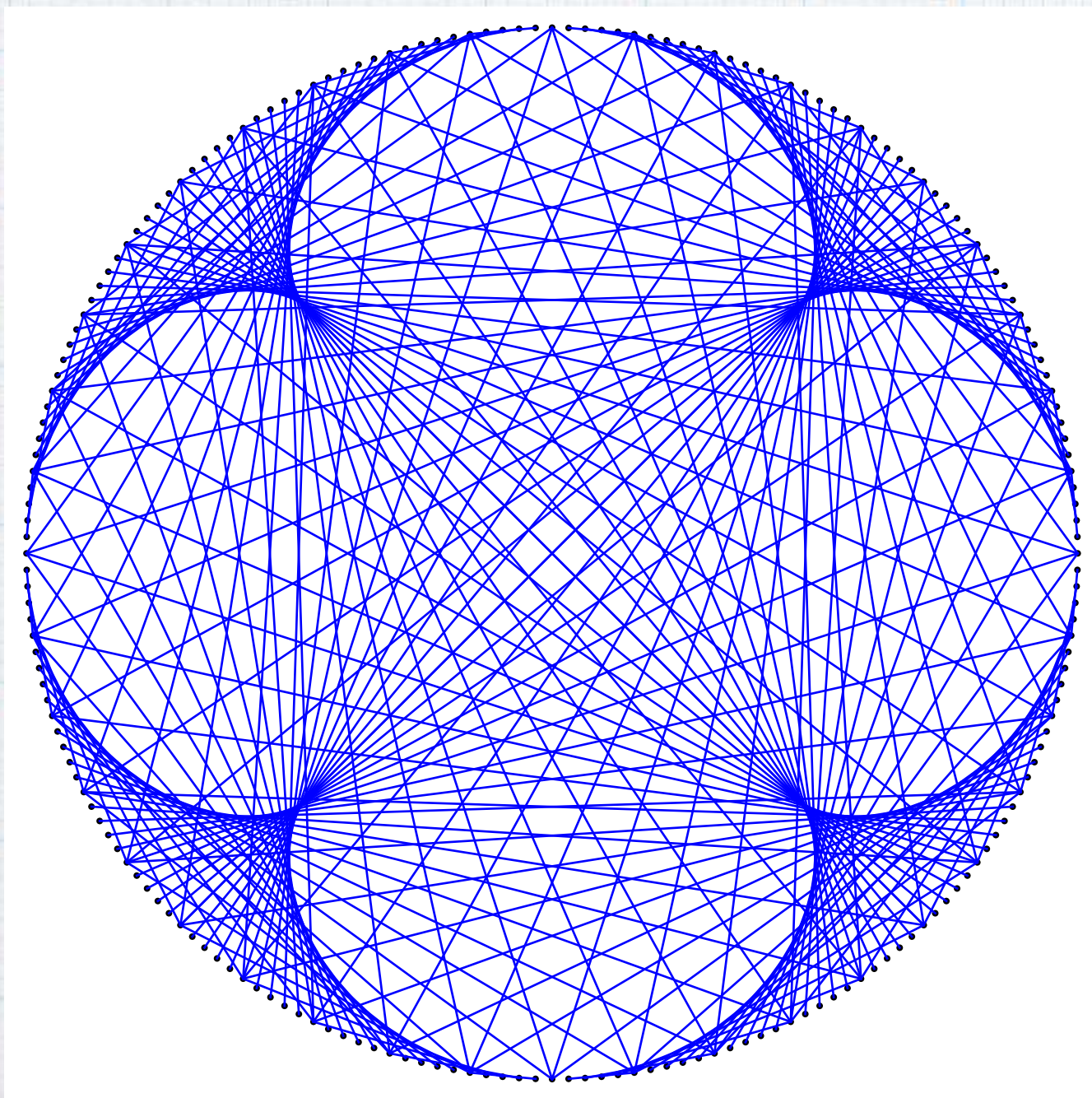
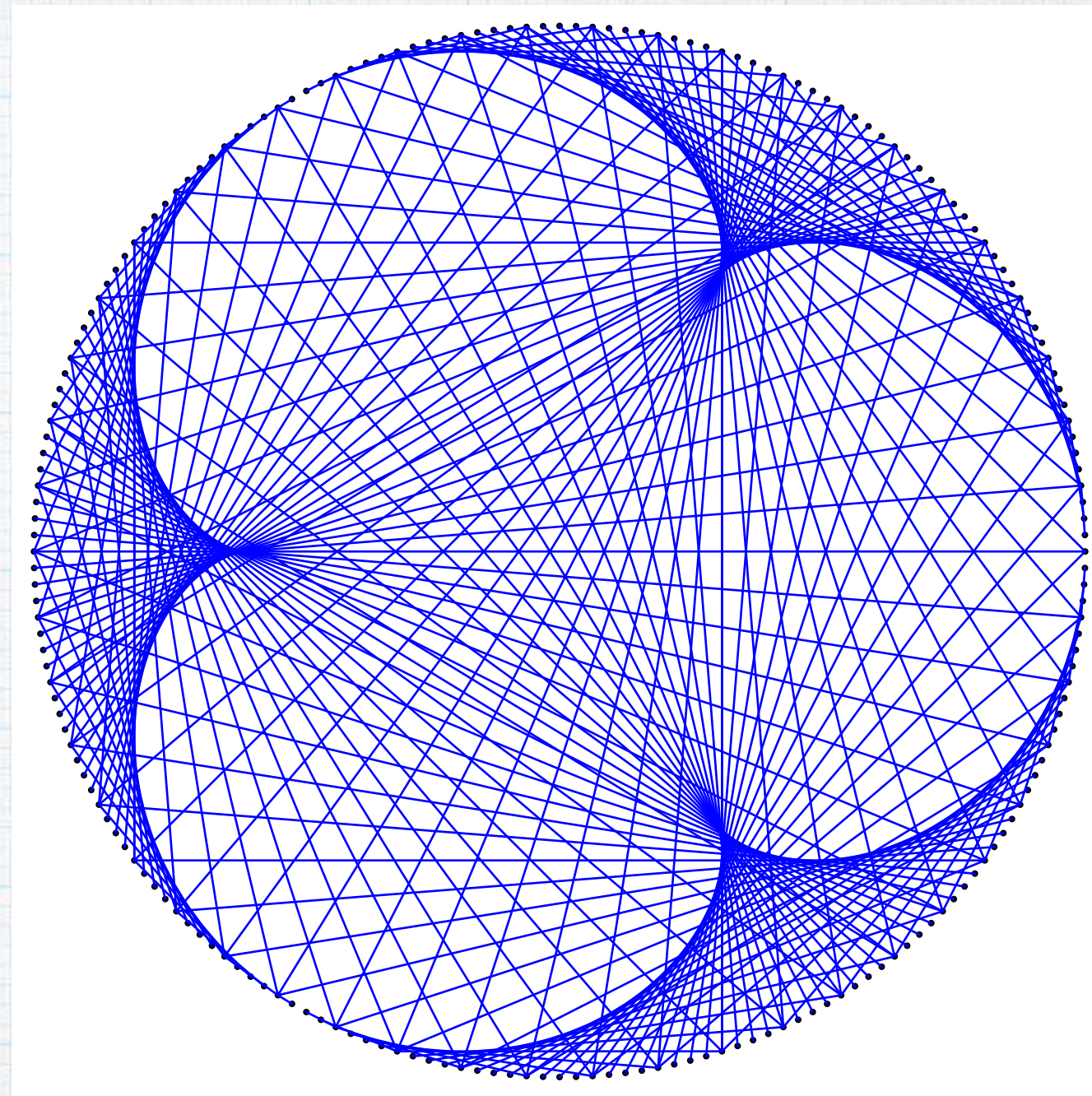
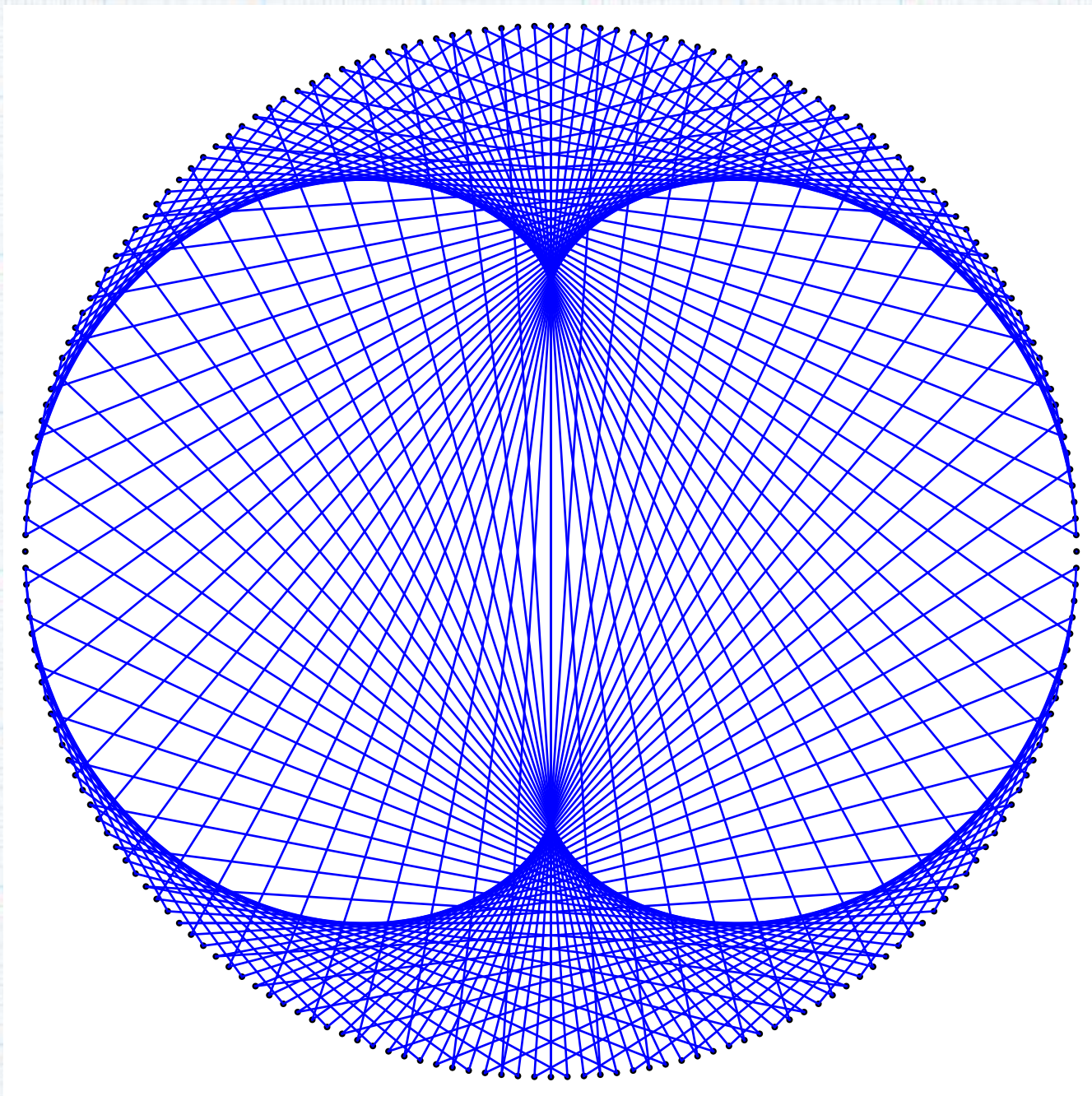
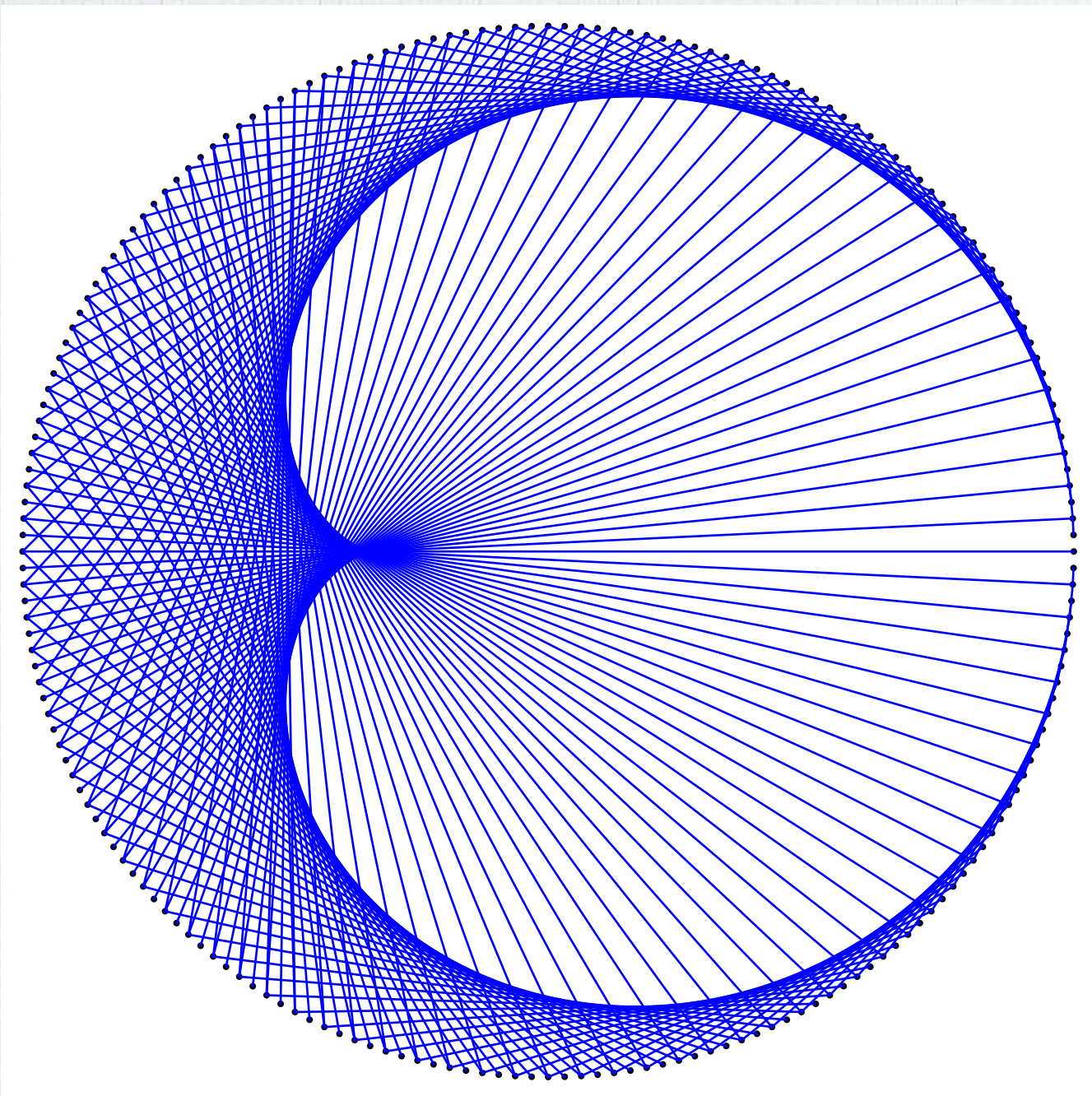
Describir la curva que se obtienen con:

$$i \mapsto 3i \pmod{30}$$

¿Qué pasa cuando $k=n-1, n, n+1$; $n=2k-2$, etc?

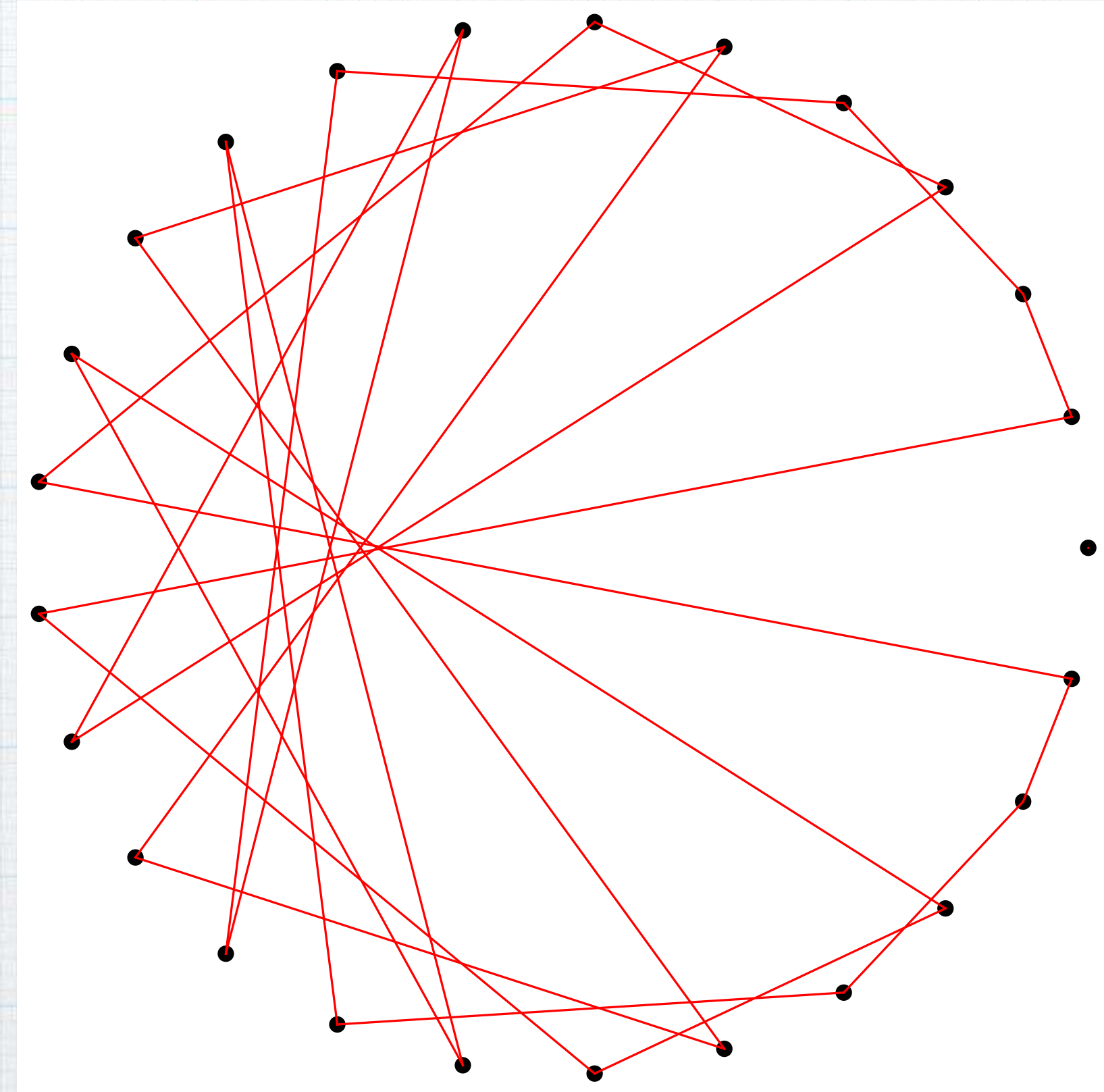
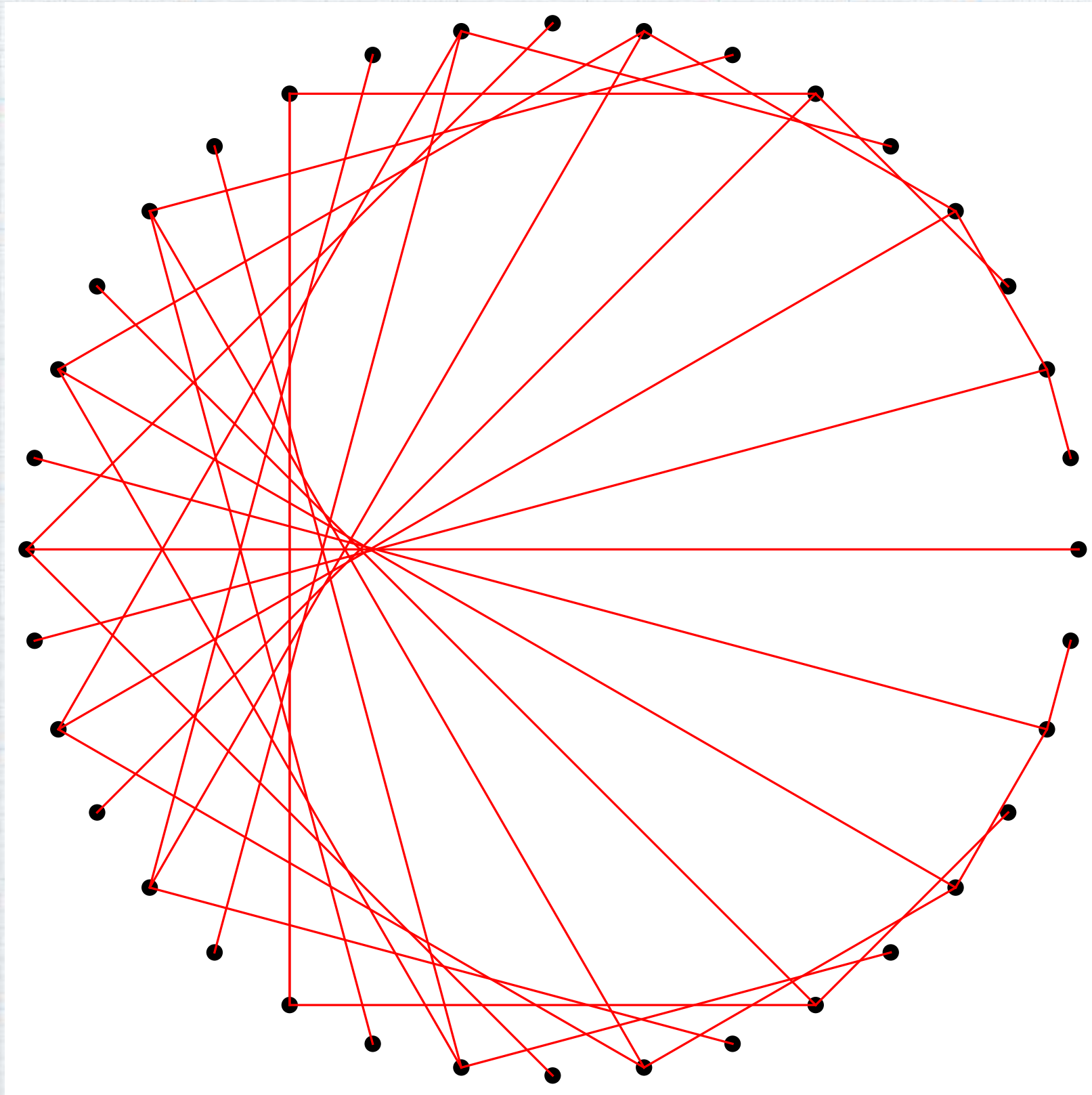
¿Qué pasa con ki ?

$$i \mapsto ki \pmod{n}$$



Diremos que un hilorama es de 1 ciclo si no necesitamos hacer “saltos” para recorrer todos los clavos.

E.g. los siguientes tienen más de un ciclo



Ej5

Dar una conjetura que relacione k y n , para que un hilorama circular que siga la regla

$$i \mapsto ki \bmod (n)$$

sea continuo (si omitimos el clavo 0 y los que se conecten a el).

Lo que estamos estudiando aquí, son las órbitas del grupo cíclico

$$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$$

La operación es la suma mod n

$$f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$$
$$f(i) := ki$$

¿Qué pasa en los siguientes casos?

$$\text{mcd}(k, n) \neq 1$$

$$\text{mcd}(k, n) = 1$$

Supongamos que $\text{mcd}(k, n) = 1$ entonces la función $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$
 $f(i) := ki$

Tiene número de ciclos iguales a $1 + \sum_{d|n, d>1} \frac{\phi(d)}{\text{ord}_d(k)}$

Donde $\phi(d)$ Es la función de Euler, que es la cantidad de números menores a d que sean coprimos con d

$\text{ord}_d(k)$ Es el orden multiplicativo de $k \bmod d$, esto es, el menor entero positivo m para el cual

$$k^m \equiv 1 \pmod{d}$$

¿Cuando podemos minimizar el número de ciclos?

$$1 + \sum_{d|n, d>1} \frac{\phi(d)}{\text{ord}_d(k)}$$

Cuando k sea una raíz primitiva de n

Ejemplo: 3 es raíz primitiva del 7

Teorema (Gauss): Existen raíces primitivas de n si y solo si

$$n = 4, p^m, 2p^m$$

Con p primo