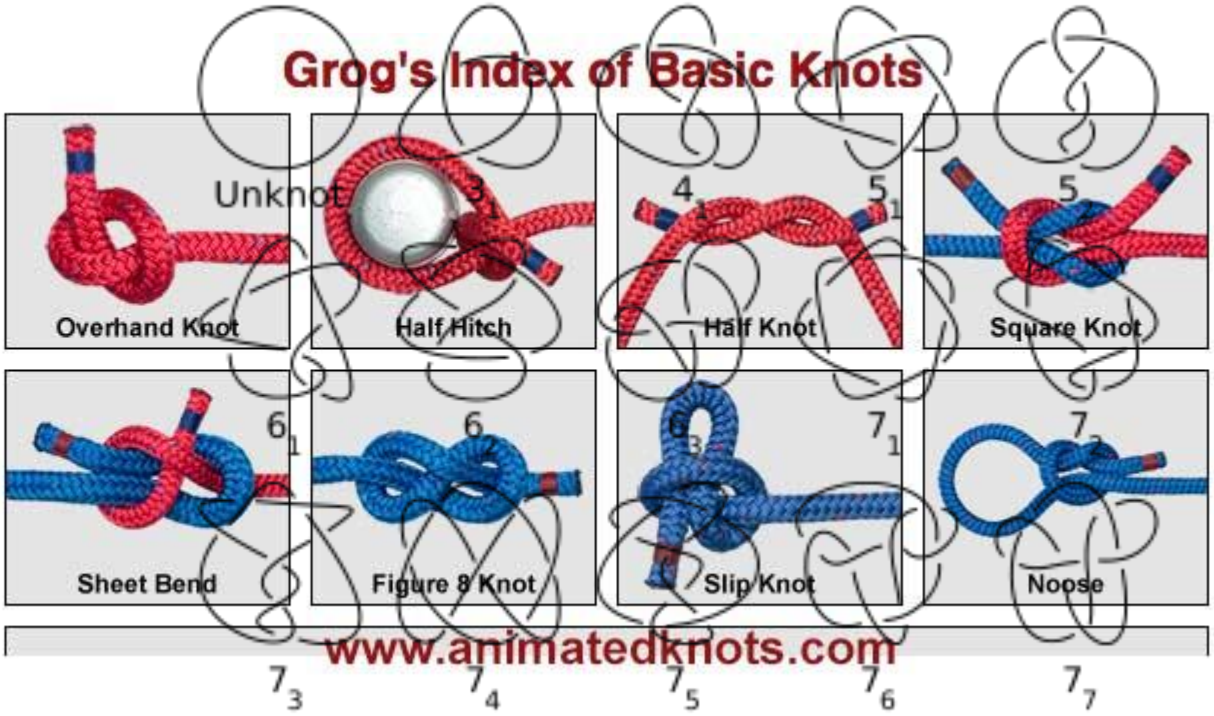
Topología: nudos y enredos

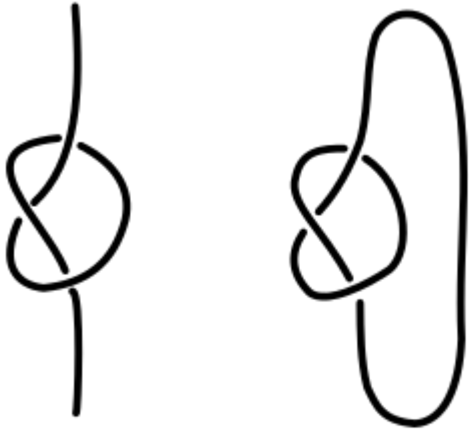
Taller de ciencia para Jóvenes 2024

Jesús Rodríguez Viorato

¿Qué son los nudos?



¿Qué son los nudos en matemáticas?



Son curvas cerradas simples en el espacio 3-dimensional.

Circunferencia $\rightarrow$ Espacio Tridimensional

Parte 1.
Historia de los nudos

Primera aparición en las Matemáticas

La integral de Gauss (1833)

Gauss ---> Johann B. Listing

$$\frac{1}{4\pi}\oint_{\gamma_1}\oint_{\gamma_2}\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}\cdot(d\mathbf{r}_1\times d\mathbf{r}_2).$$

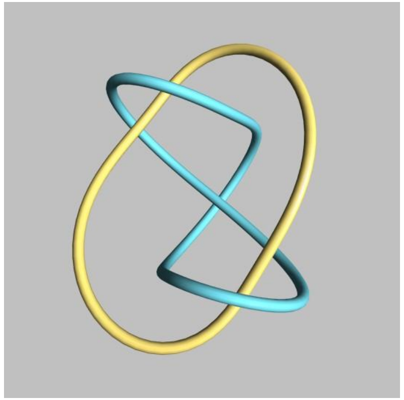
Listing acuñó la palabra

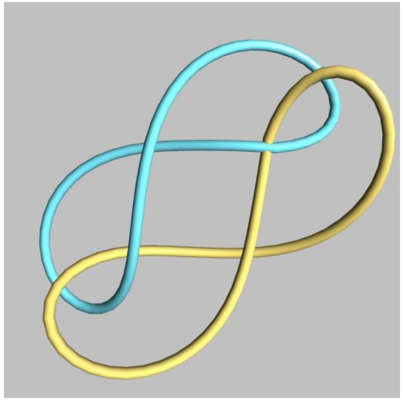
“Topology”

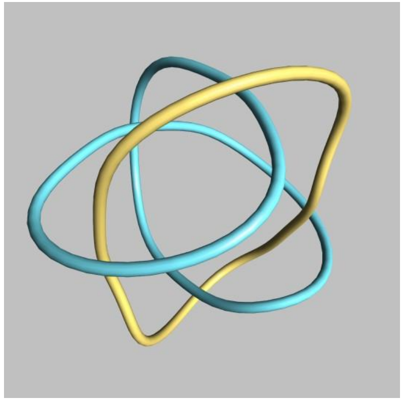
Es independiente de la “forma” del enla

Se le co no el

Númer

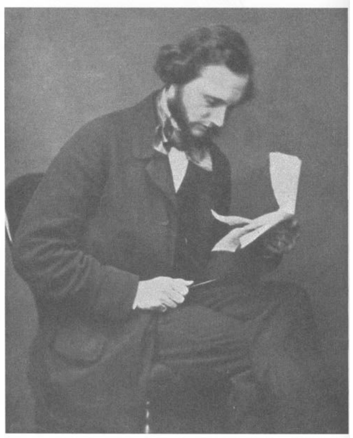






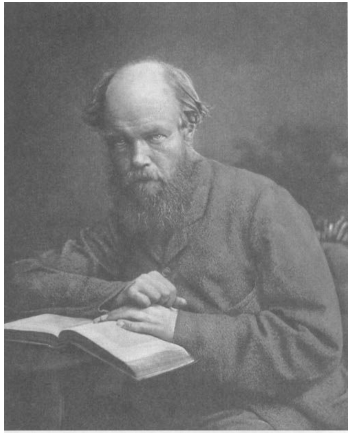
Vortex atom theory

William Thomson



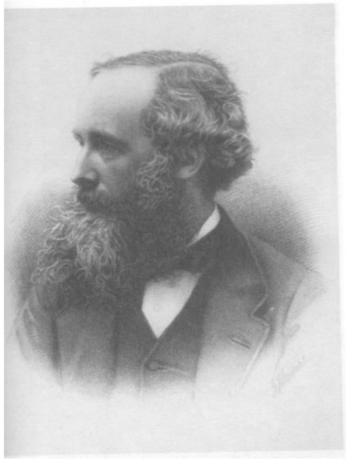
Aka. Lord Kelvin

Peter Guthrie Tait

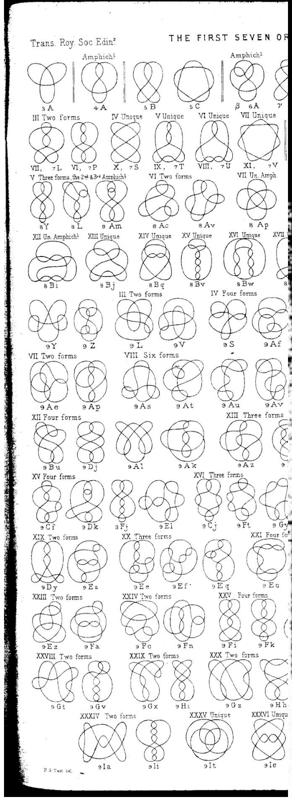


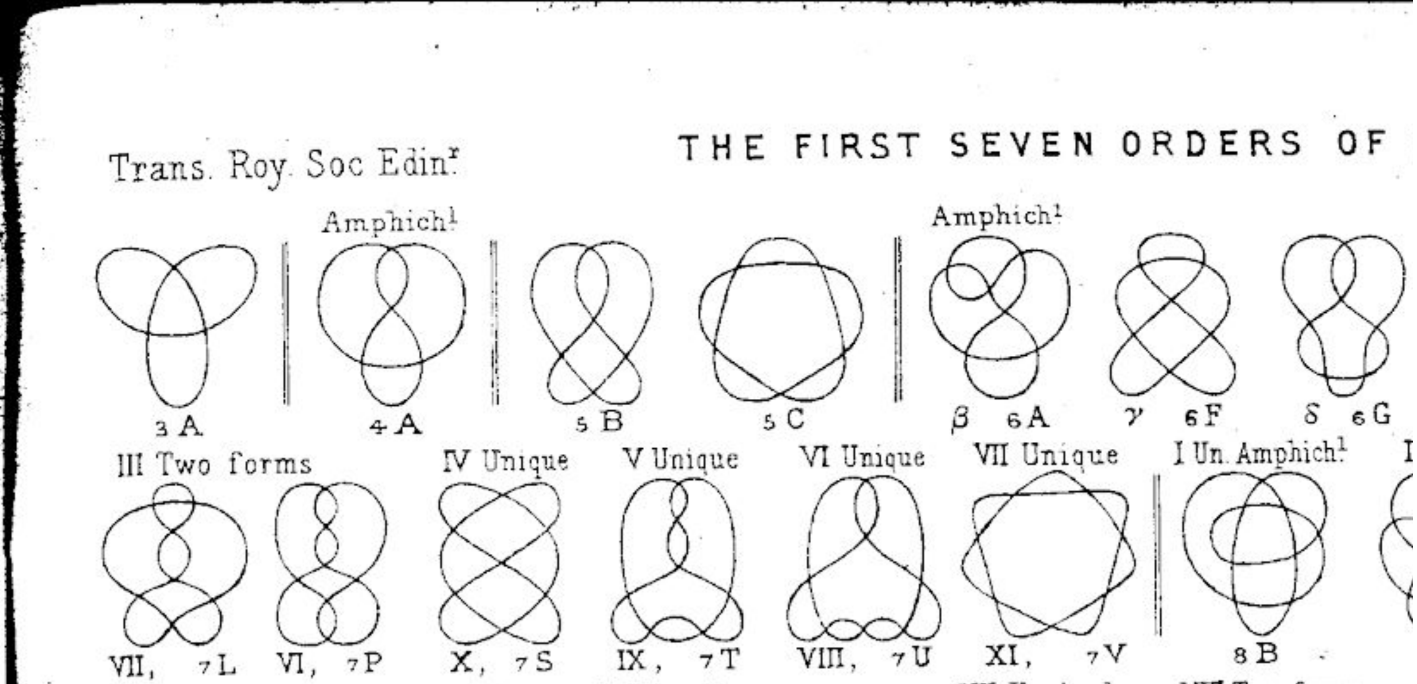
(1860) Los átomos son remolinos de **éter** que forman nudos

James Clerk Maxwell



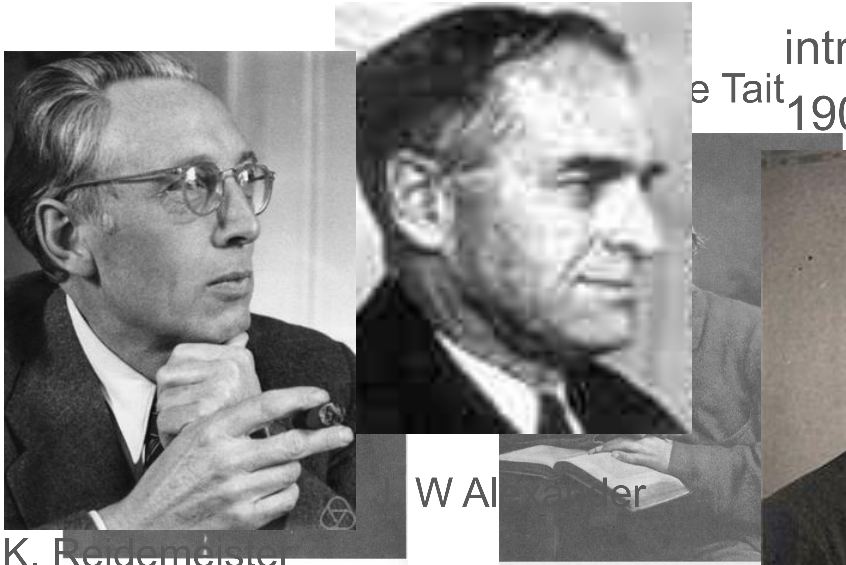
Las tablas de Tait





Adiós física, hola matemáticas

Los matemáticos siguen intrigados por los nudos 1900 - present



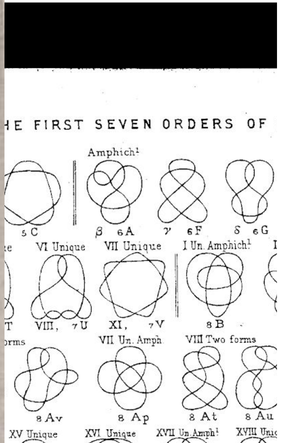
e Tait

J W Alexander

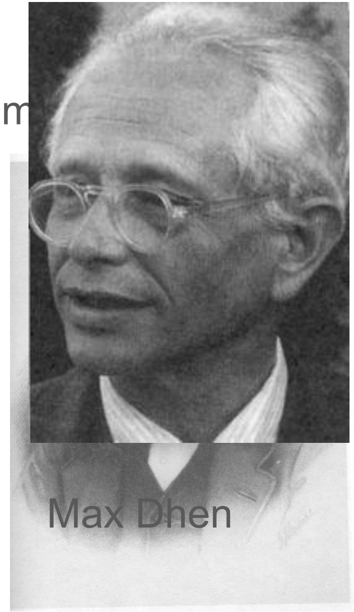
K. Reidemeister

Aka. Lord Kelvin

W. Wirtinger



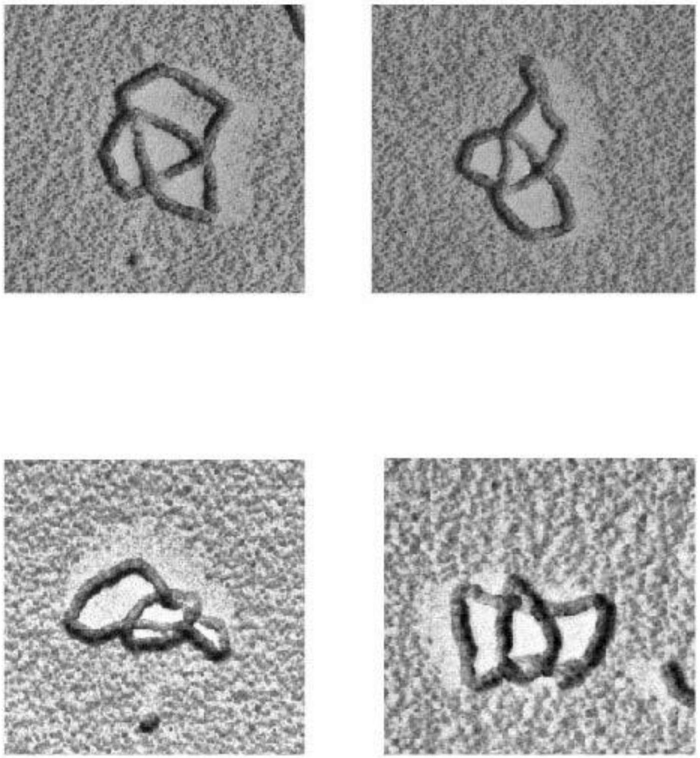
Jam



Max Dhen

Después de 100 años … en los 80s

Biología del ADN



¿Qué nudos aparecen?

¿Cómo desanudarlos?

¿Cómo reconocer si está anudado?

Un nudo no trivial no tan trivial

Es difícil reconocer si un nudo está anudado.

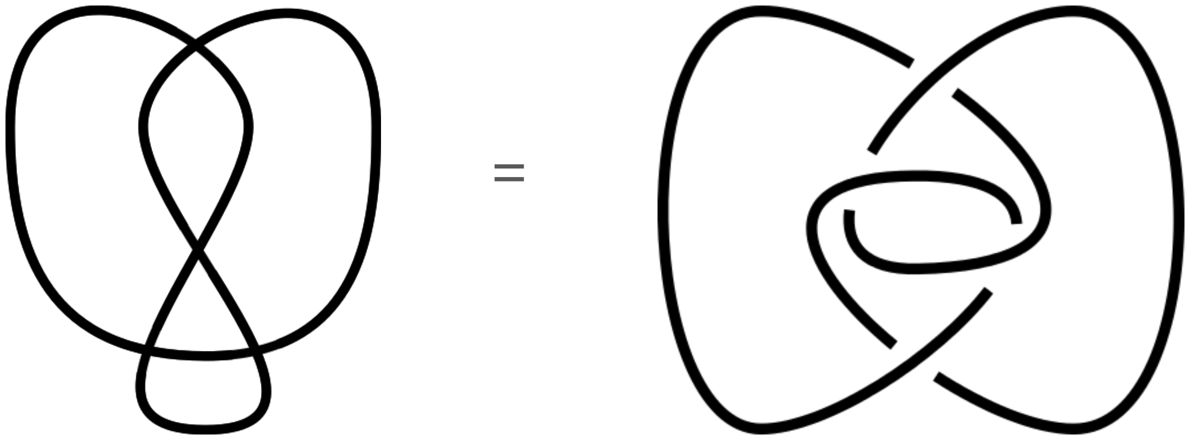
Hasta ahora

Las técnicas de teoría de nudos se han aplicado en

- Dinámica de fluidos
- Física solar
- DNA
- Química

Parte 2
La teoría de los nudos

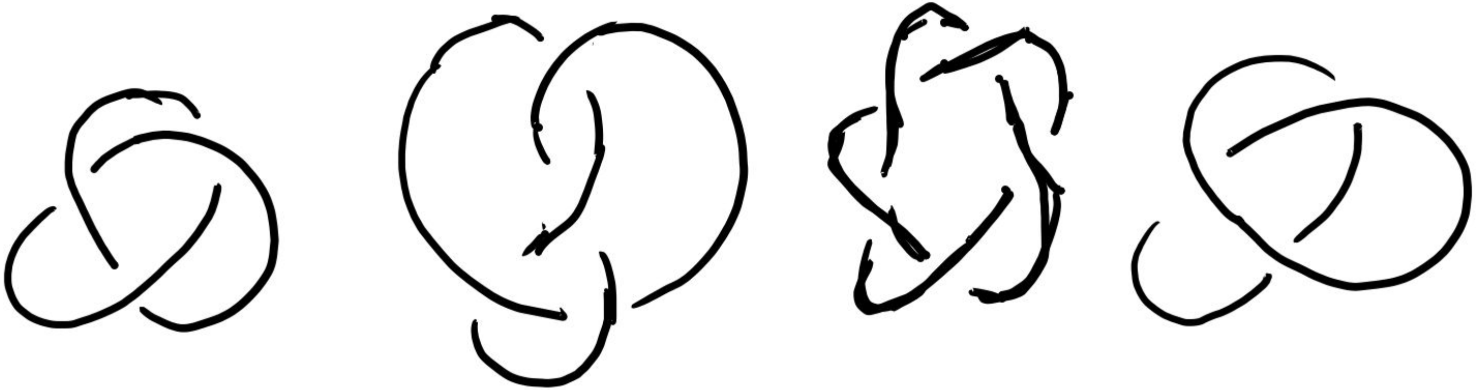
Diagramas de nudos



Número de Cruces

Definición: El *número de cruces* de un nudo es el número de más pequeño de cruces que puede tener un diagrama del nudo.

¿Cuál es el número de cruce de los siguientes nudos?



Ejercicios

¿Por qué no hay nudos de dos cruces?

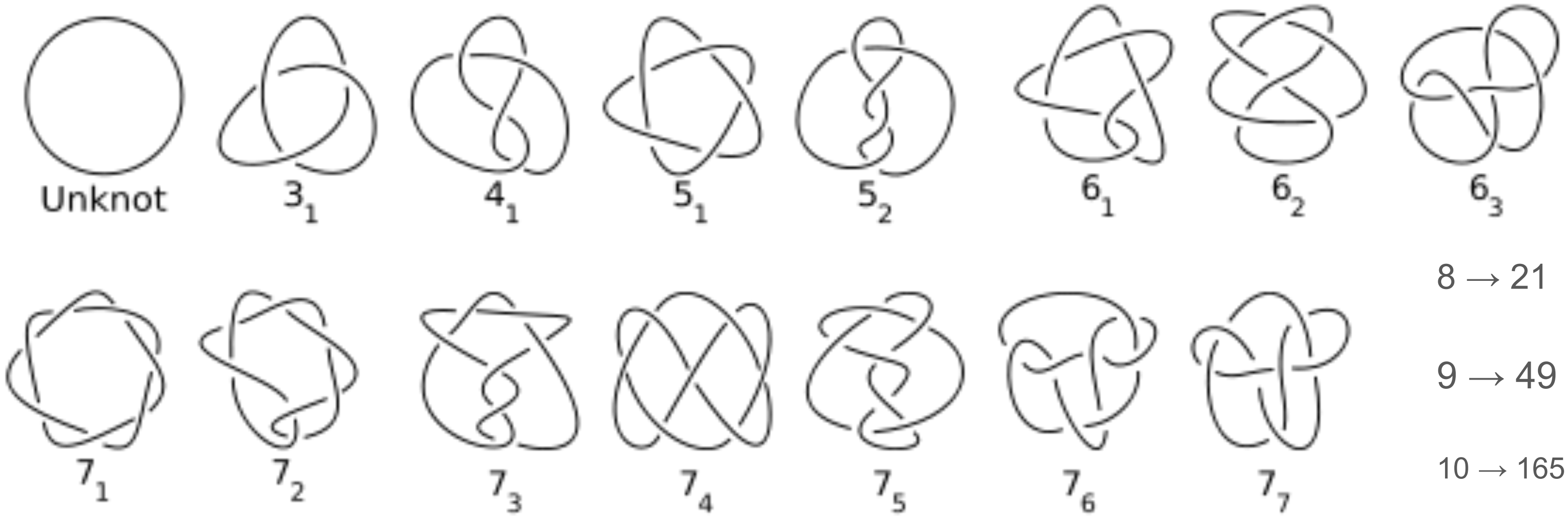
¿Cuántos nudos de dos 3, 4 y 5 cruces hay?

¿Cómo crees que hizo Tait para encontrar todos los nudos hasta 9 cruces? Son 84 nudos

No mucho después Tait calculó tambien los de 10 cruces. Otros 165 nudos

¿Cómo Tait logró hacer sus tablas?

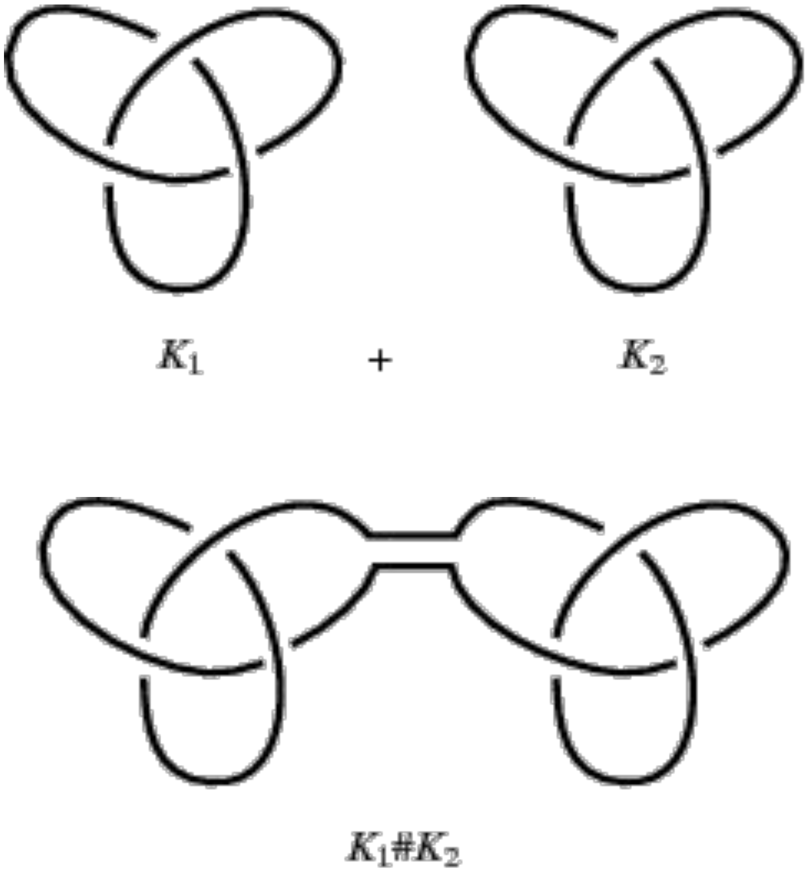
Diagramas por número de cruces



$8 \rightarrow 21$

$9 \rightarrow 49$

$10 \rightarrow 165$

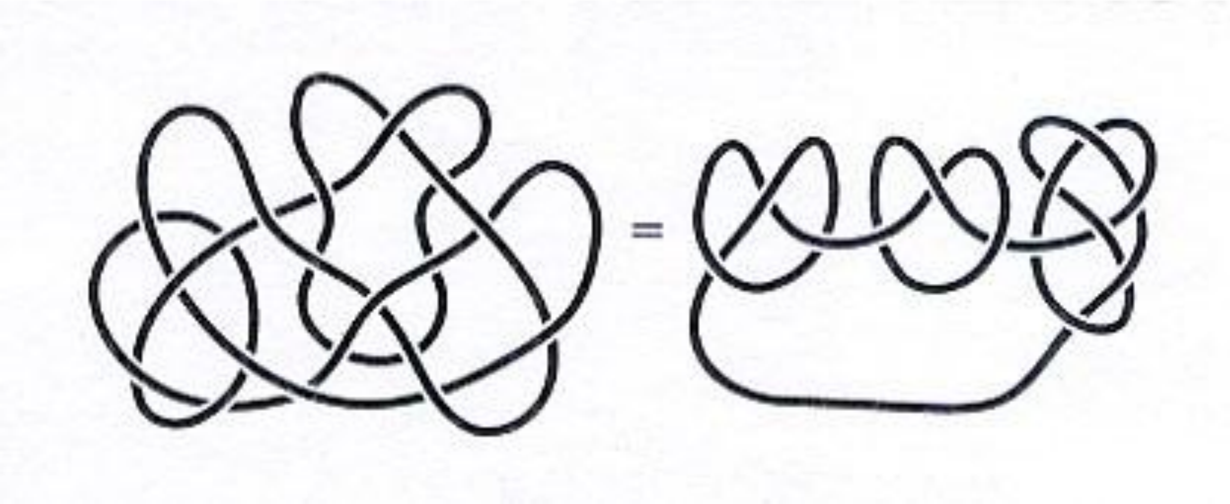


La suma de nudos o suma conexa

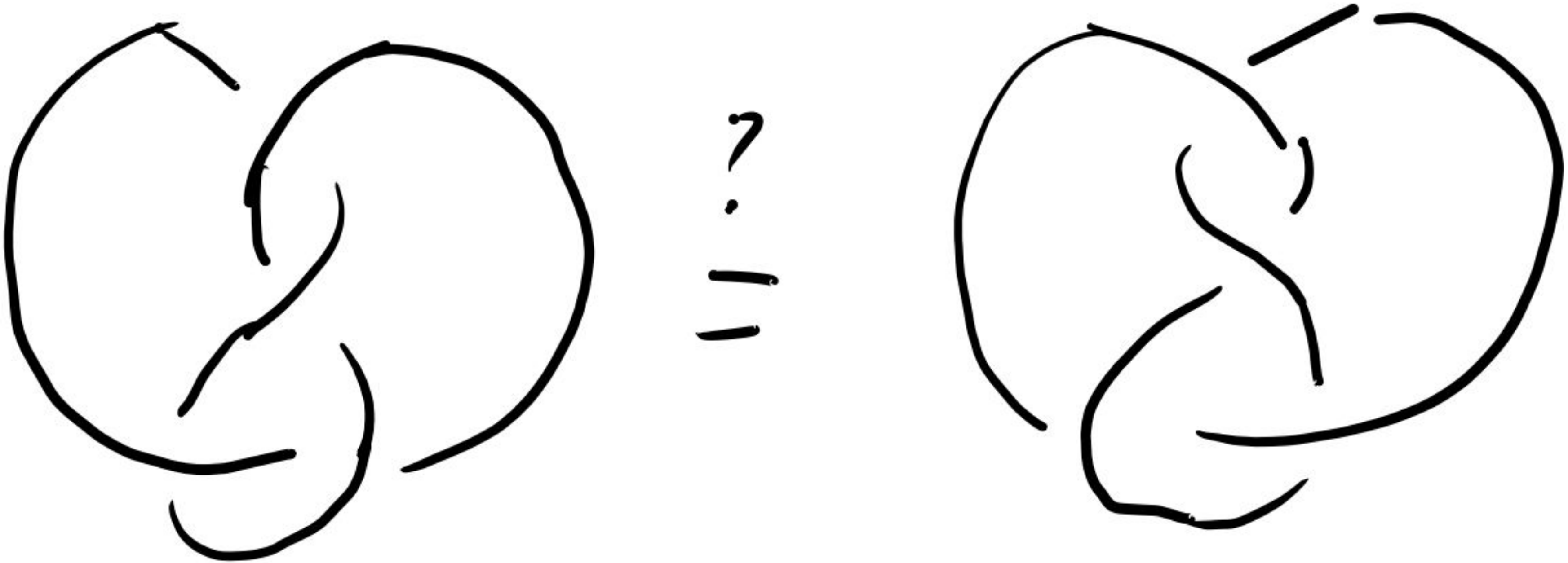
Definición
Un *nudo es primo* si no se puede descomponer en dos sumandos.

Observación:
Las tablas de nudos sólo contienen nudos primos

Descomposición única en nudos primos



Quiralidad



Quiralidad

≠

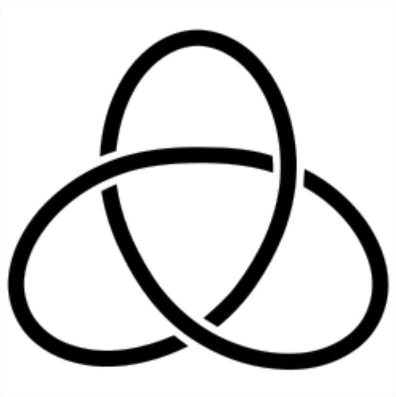
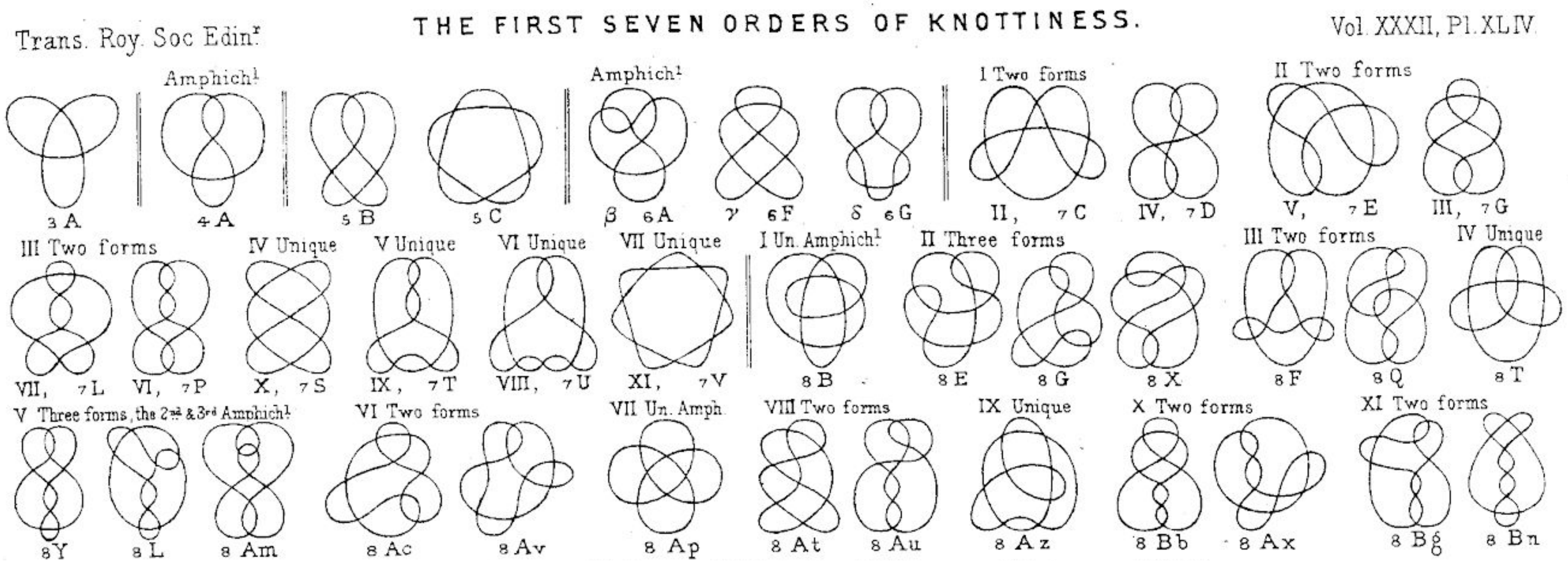


Tabla de Tait

- Son sólo primos
- Se marca Quiralidad

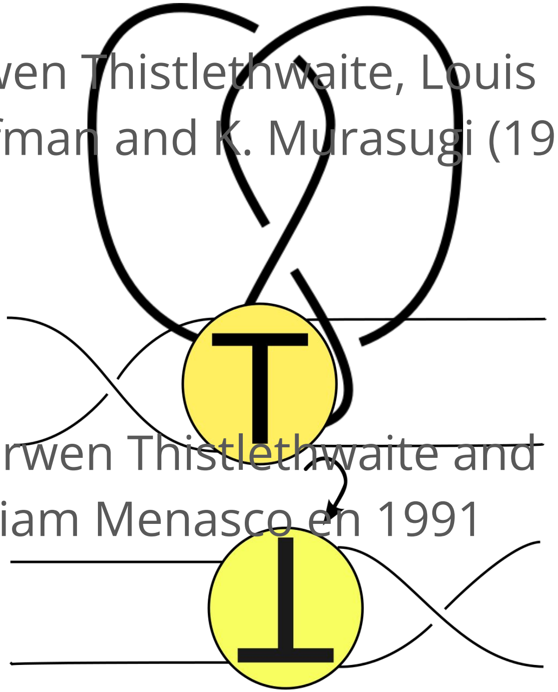


Las conjeturas de Tait

Conjetura 1. Cualquier diagrama reducido de un *nudo alternante* tiene el mínimo número de cruces.

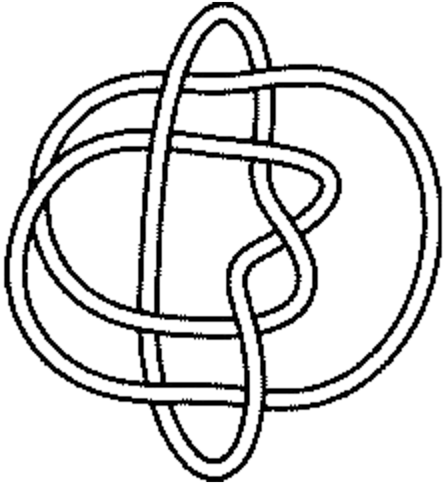
Morwen Thistlethwaite, Louis Kauffman and K. Murasugi (1987)

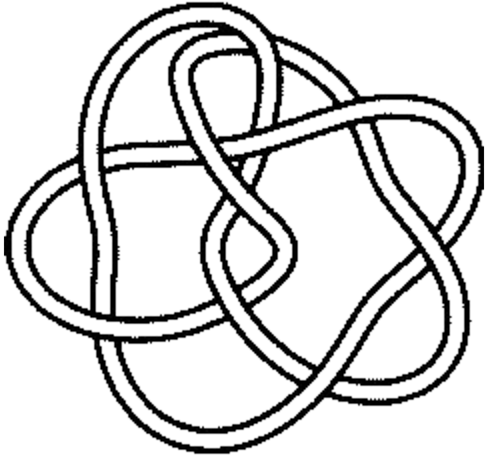
Conjetura 2. Dado dos diagramas alternantes reducidos D1 and D2 de nudo primo, D1 se puede transformar a D2 por una secuencias de movidas llamadas *flypes*.



Morwen Thistlethwaite and William Menasco en 1991

¿Error en la tabla de Tait?





Los invariantes de nudos

¿Cómo asegurar de que dos nudos son distintos?

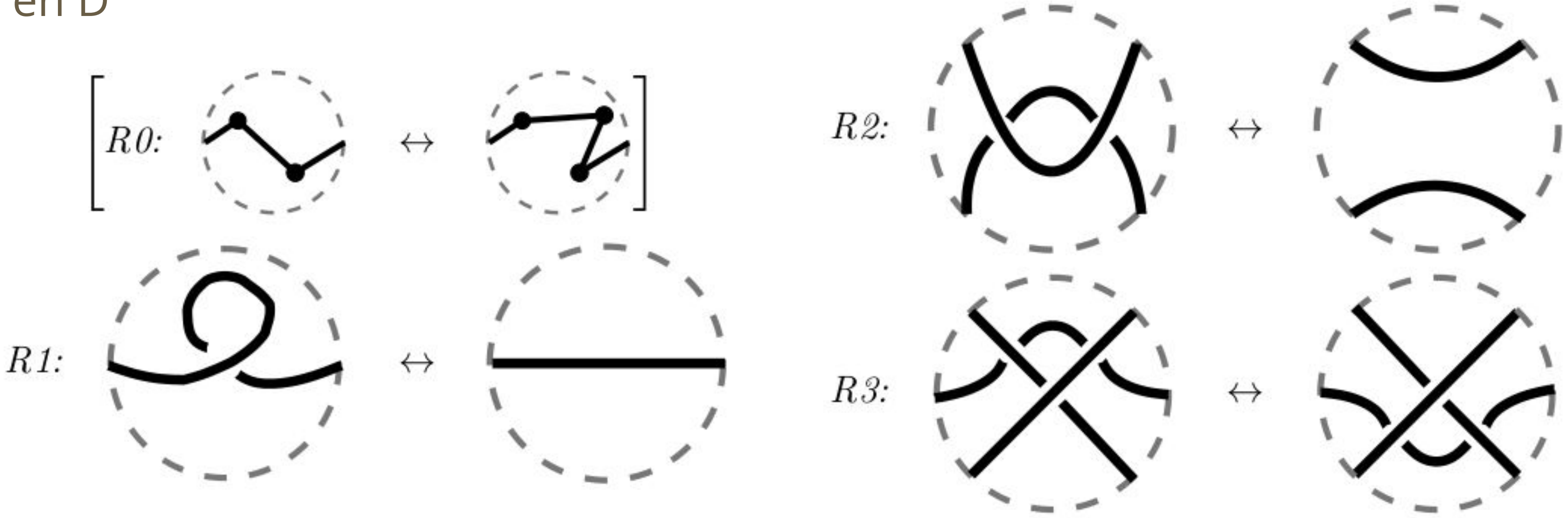
¿Como saber si no estamos repitiendo nudos?

Para eso usamos invariantes… es decir, que no cambian aunque cambiemos la proyección

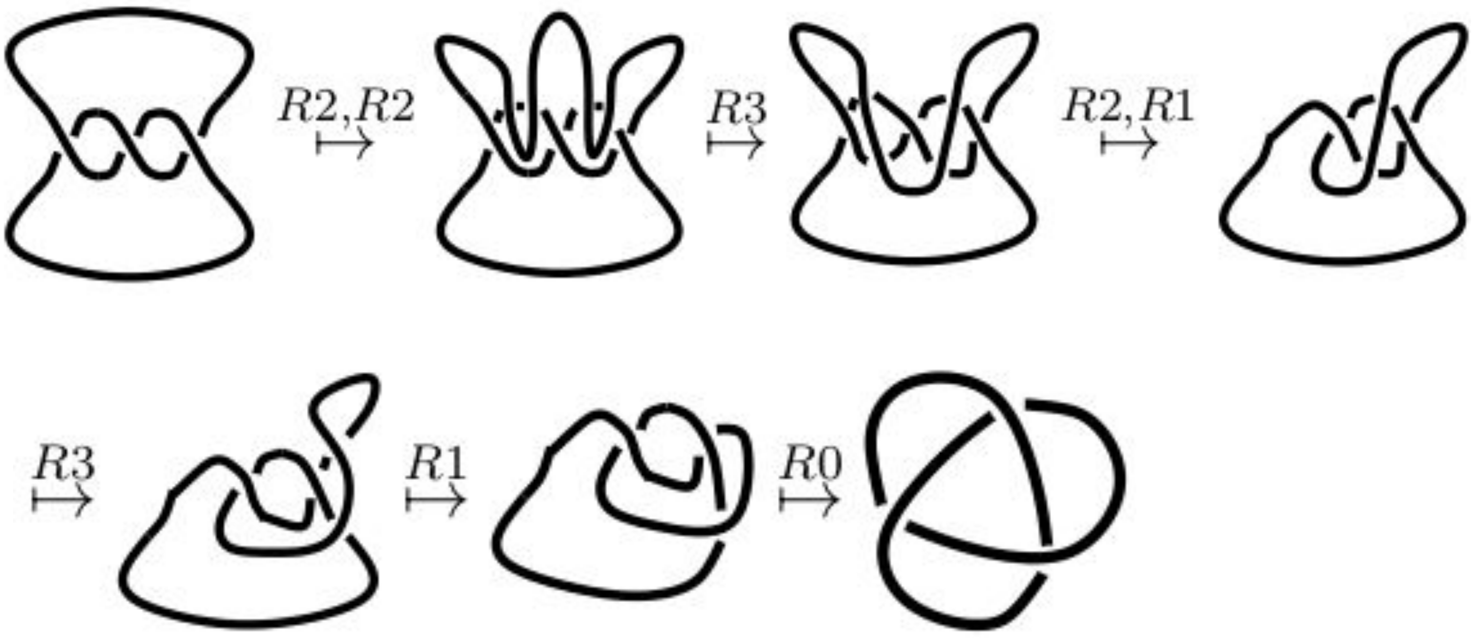
¿Pero cómo podemos asegurar que algo no va cambiar aunque cambiamos la proyección?

Movidas de Reidemeister

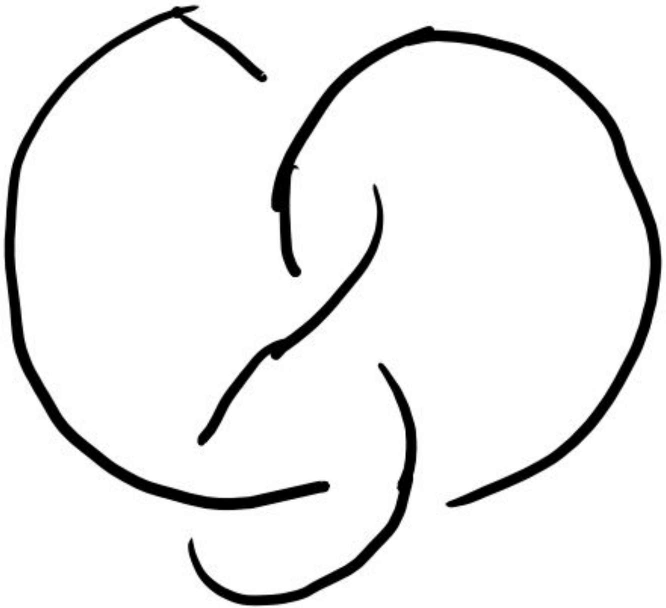
Teorema (1927). Dos diagramas D y D’ representan el mismo nudo si y sólo si existe una sucesión finitas de movidas locales R0, R1, R2 o R3 que mandan D en D’



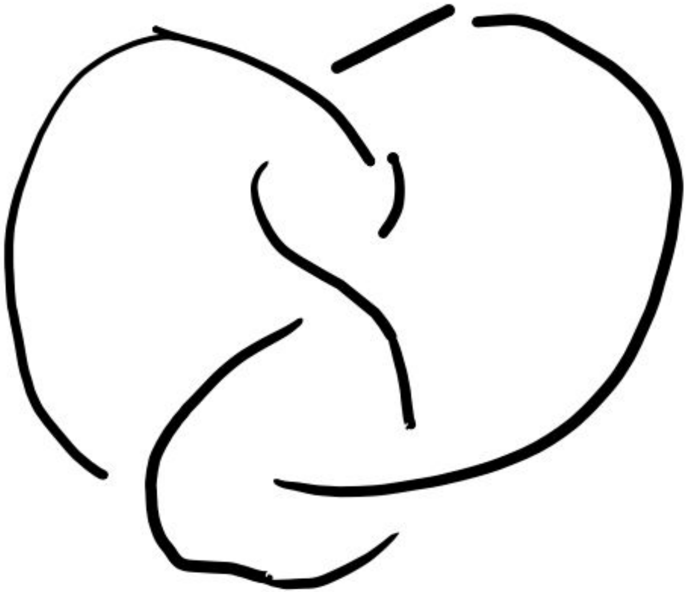
Ejemplo



¿Cuántas movidas de Reidemeister se necesitan?



$\stackrel{?}{=}$



Las movidas de Reideimeister nos dejan ver cómo cambian los diagramas de nudos : paso a paso…

¿Pero cómo usamos esto para construir invariantes?

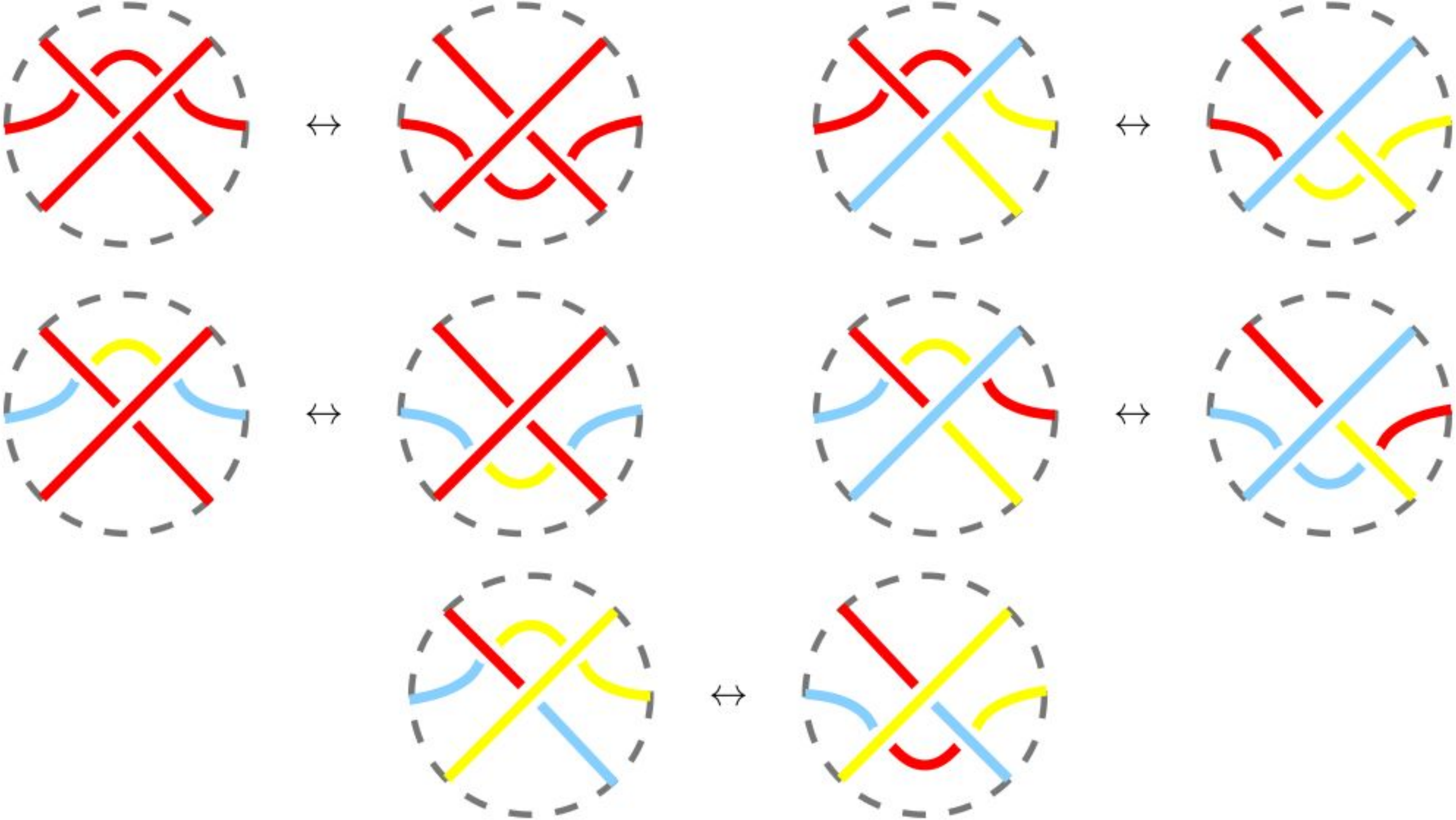
3-coloreabilidad

Un diagrama es 3-coloreable si se pueden pintar sus arcos con 3-colores de tal manera que:

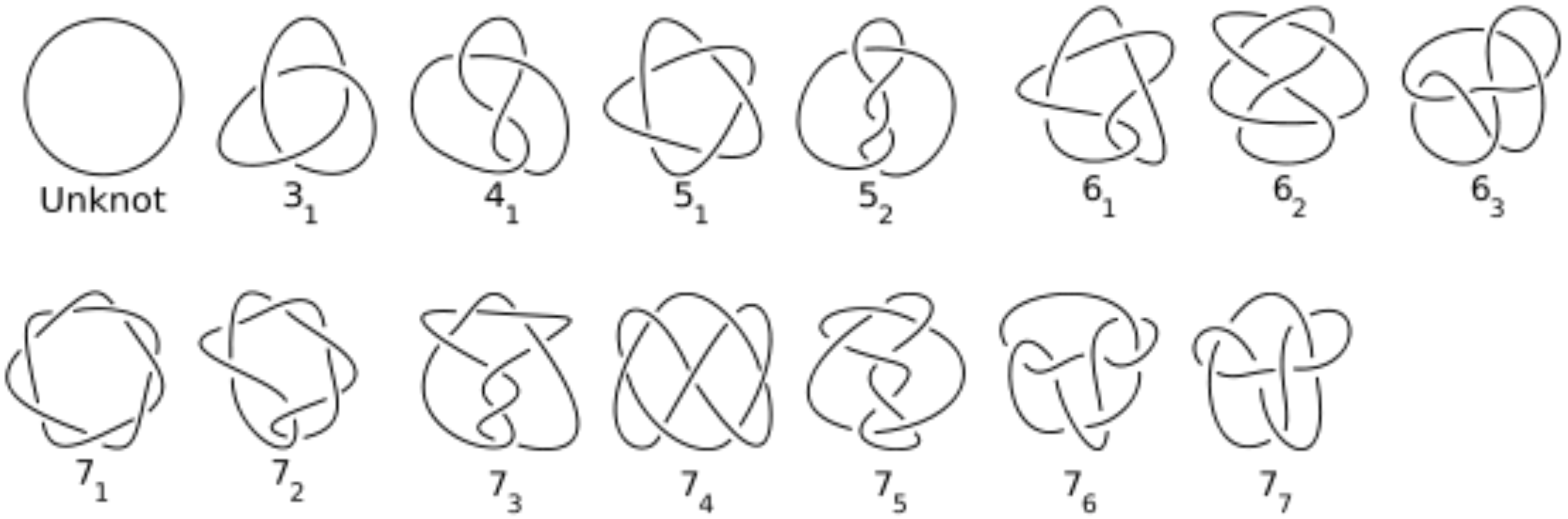
1. En cada cruce aparezca sólo uno o los tres colores.
2. Se use más de un color.

Teorema: La propiedad de 3-coloreabilidad es un invariante del nudo

Observación: Este teorema demuestra que el trébol es distinto del nudo 8 y el nudo trivial.



¿Cuáles de los siguientes nudos son 3-coloreables?

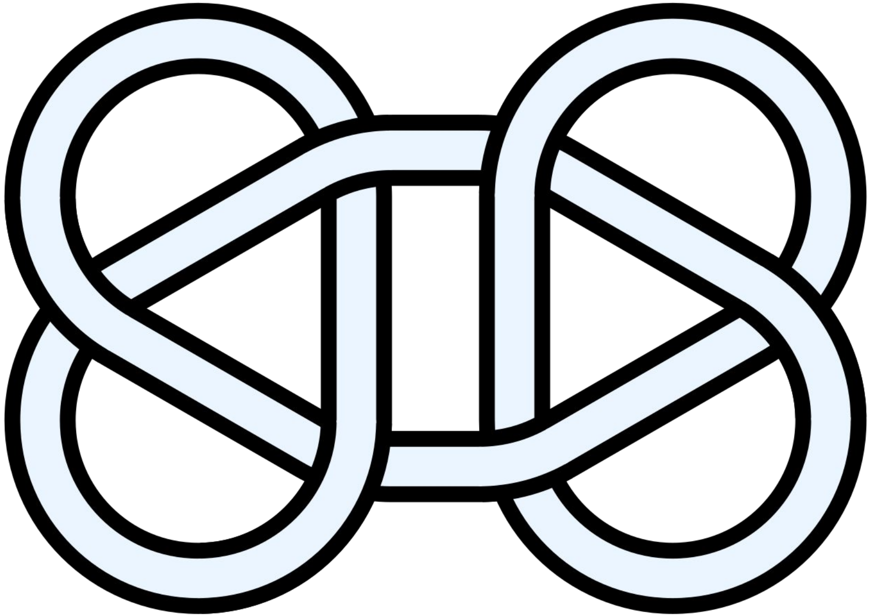


Número de 3-coloraciones

Definición. El número de 3-coloraciones de un diagrama D es el número de formas diferentes con las que se puede 3-colorear el diagrama; contando también como 3-coloraciones las de un sólo color. Denotamos como τ(D)

Teorema. Dos diagrama D y D’ del mismo nudo, entonces τ(D) = τ(D’)

Encuentra t(D)

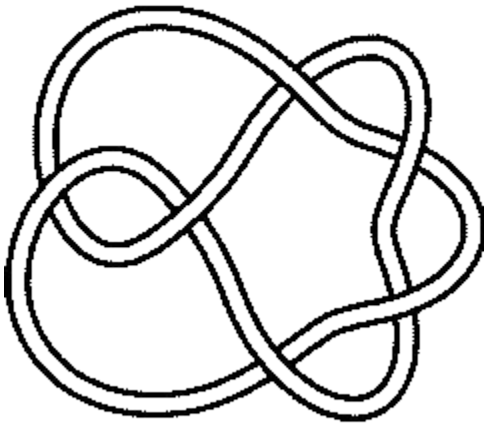


Sesión 3: Continuamos Coloración

3-coloraciones y sumas

$$\tau(K_1 \# K_2) = \tau(K_1)\tau(K_2)/3$$

Encuentra t(K) para el nudo 6.1

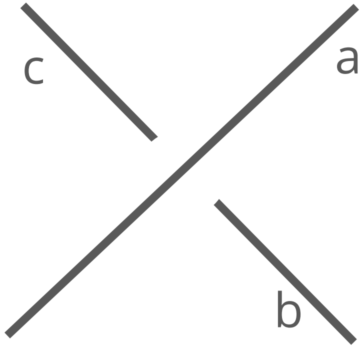


Conversación:

¿Cómo podemos definir n-coloración para que sea invariante de nudos?

N-coloraciones

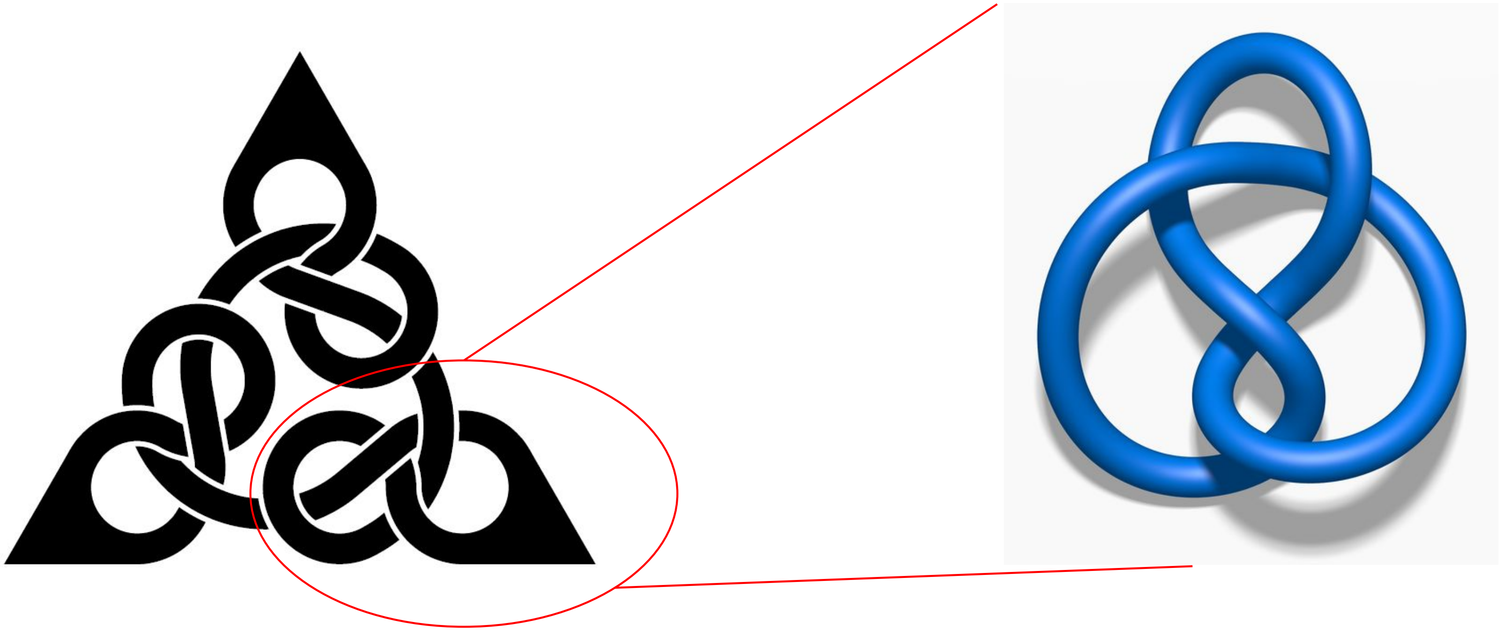
Este concepto se puede generalizar usando números de $\mathbb{Z}_n$ y en cada cruce los números de abajo suman los dos de arriba.



$2a = b + c$

Ejemplo, el nudo figura 8

Encontremos para qué valor es coloreable el nudo figura 8-



Nudos y sus determinantes (coloraciones):

3_1	3
4_1	5
5_1	5
5_2	7
6_1	9
6_2	11
6_3	13
7_1	7
7_2	11
7_3	13
7_4	15
7_5	17
7_6	19
7_7	21

Nuevo Invariante

El Polinomio de Johns

Historia

1928 J. Alexander es el primer polinomio invariante encontrado para nudos.

Y su invariante fue de los más usados por casi 60 años.

Historia del Polinomio de Jones

Fue descubierto por el Matemático de Neozelandés Vaughan Jones en 1984.

Álgebra de Operadores

Ganó medalla Fields en 1990

A pesar de su importancia, era un invariante que no se entendía bien, topológicamente hablando.

Historia del Polinomio de Jones

Edward Witten en 1989 construyó una explicación de la naturaleza del polinomio de Jones usando la “Informal” **Integral de Feynman**. Que está relacionado con Física

Historia del Polinomio de Jones

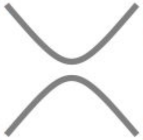
En 1984 Lou Kauffman dio una forma sencilla de calcularlo,

The Kauffman bracket

Dado un diagrama D, construimos $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ con las siguientes reglas:

1. $\left\langle \bigcirc \right\rangle = 1$

2. $\left\langle L \cup \bigcirc \right\rangle = (-A^2 - A^{-2})\langle L \rangle$

3. $\Big\langle$  $\Big\rangle = A \Big\langle$  $\Big\rangle + A^{-1} \Big\langle$  $\Big\rangle$

Definimos el Writhe (El retorcimiento)

Definición. El writhe de un diagrama orientado D es la suma de los signos en todos los cruces. Se denot con w(D).

Por fin, un invariante

Teorema. La siguiente función es invariante para todo diagrama D de un enlace o nudo orientado L.

$$f_D(A) = (-A^3)^{-w(D)}\langle D\rangle$$

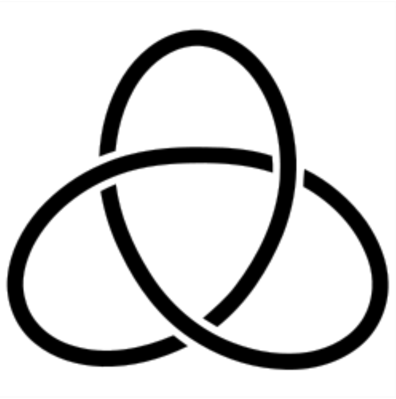
¿Y el polinomio de Jones?

Definición. El polinomio de Jones de un enlace orientado L es el resultado de sustituir A por $t^{-1/4}$.

$$V_L(t)$$

Ejercicio: Calcular el polinomio del nudo trébol izquierdo

Derecho



izquierdo

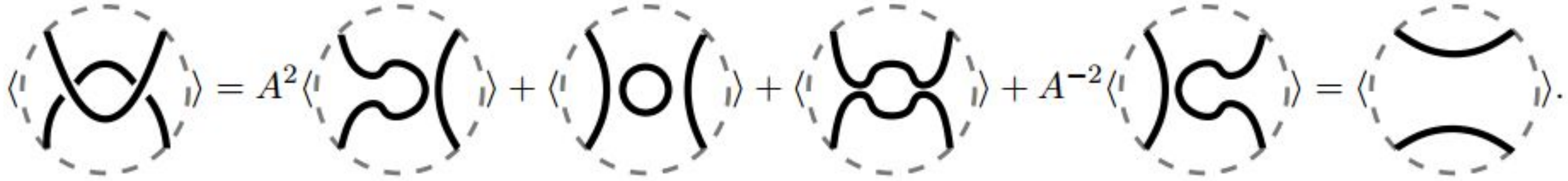
Los polinomios

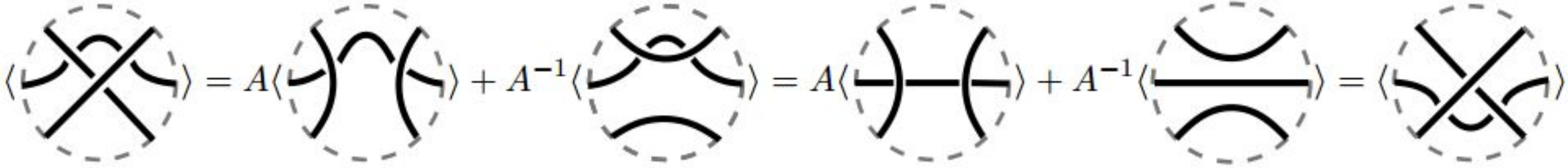
3_1	t+ t^3-t^4
4_1	t^(-2)-t^(-1)+ 1-t+ t^2
5_1	t^2+ t^4-t^5+ t^6-t^7
5_2	t-t^2+ 2*t^3-t^4+ t^5-t^6
6_1	t^(-2)-t^(-1)+ 2-2*t+ t^2-t^3+ t^4
6_2	t^(-1)-1+ 2*t-2*t^2+ 2*t^3-2*t^4+ t^5
6_3	-t^(-3)+ 2*t^(-2)-2*t^(-1)+ 3-2*t+ 2*t^2-t^3
7_1	t^3+ t^5-t^6+ t^7-t^8+ t^9-t^10
7_2	t-t^2+ 2*t^3-2*t^4+ 2*t^5-t^6+ t^7-t^8
7_3	t^2-t^3+ 2*t^4-2*t^5+ 3*t^6-2*t^7+ t^8-t^9
7_4	t-2*t^2+ 3*t^3-2*t^4+ 3*t^5-2*t^6+ t^7-t^8
7_5	t^2-t^3+ 3*t^4-3*t^5+ 3*t^6-3*t^7+ 2*t^8-t^9
7_6	t^(-1)-2+ 3*t-3*t^2+ 4*t^3-3*t^4+ 2*t^5-t^6
7_7	t^(-4)-2*t^(-3)+ 3*t^(-2)-4*t^(-1)+ 4-3*t+ 3*t^2-t^3

¿Y la prueba de que es invariante?

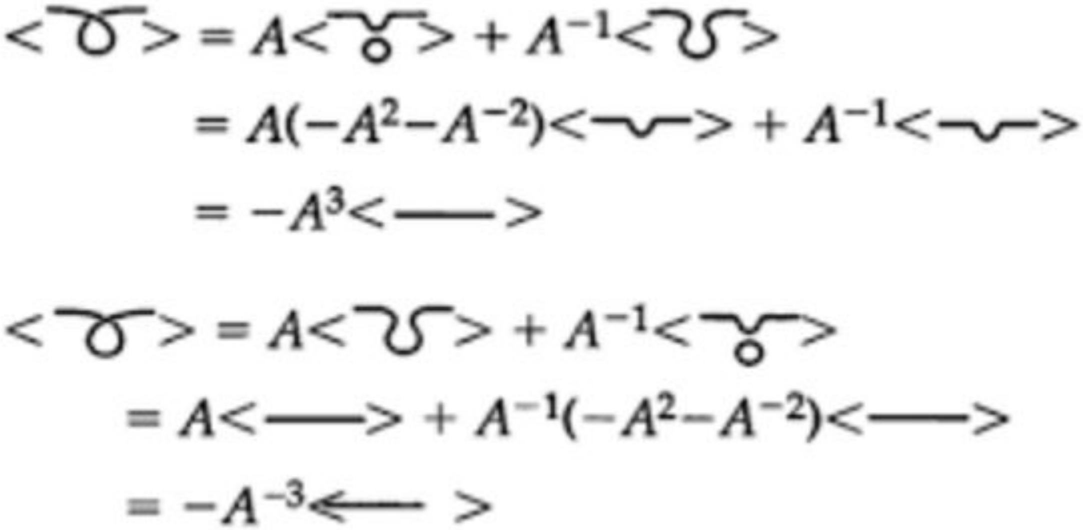
Invariancia del Bracket de Kauffman

Teorema. El Bracket de Kauffman es invariante bajo las Movidas __________ de Reidemeister.





La primera movida



Corrigiendo con al polinomio Bracket

Definición. El writhe de un diagrama orientado D es la suma de los signos en todos los cruces. Se denot con w(D).

Teorema. El writhe es invariante bajo las movidas _________ de Reidemeister..

Gracias

Mañana profundizaremos en las matemáticas