CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

El Teorema de Green y El Planímetro

Taller de Ciencia para Jóvenes

20-27 jul, 2024 (21-28 jul, 2024)

max@cimat.mx

¿Qué dice la convocatoria?

Matemáticas e ingeniería: el Teorema de Green y el Planímetro

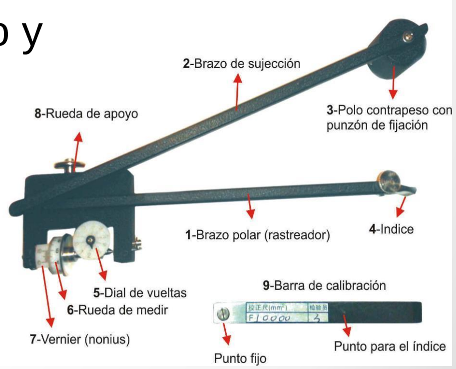
Un ejemplo de aplicación práctica de una teoría matemática es la aplicación del Teorema de Green a la construcción de un Planímetro.

$$\oint_{\partial D} M\,dx + N\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

donde $C = \partial D$.

En este curso-taller veremos:

- La evolución y desarrollo del Teorema de Green.
- La evolución e invención del planímetro.
- Una comparación de ambos desarrollos en un marco histórico, geográfico y lógico.
- Construcción de un planímetro; haremos mediciones y desarrollaremos ecuaciones, para demostrar, ilustrar, comprender y evidenciar que el instrumento y las ecuaciones son las dos caras de la misma moneda, dos gotas de la misma agua.
- Enfrentaremos y conoceremos algunos de los retos de ingeniería para la construcción del planímetro con nuestras manos y nuestra cabeza, así como la demostración del Teorema de Green.



¿Qué vamos a hacer?

Temario:

- Sesión 1. Definiciones
- Sesión 2. Explicación geométrica
- Sesión 3. Fabricación y construcción de piezas 2D
- Sesión 4. Fabricación y construcción de piezas 3D
- Sesión 5. Ejercicios y mediciones

$$\oint_{\partial D} M\,dx + N\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

donde $C = \partial D$.

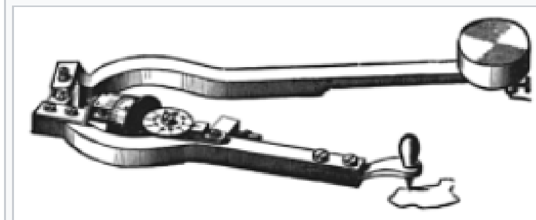
Comencemos por una Definición

Planímetro

Este artículo o sección necesita referencias que aparezcan en una publicación acreditada.
Este aviso fue puesto el 9 de diciembre de 2015.

WIKIPEDIA
La enciclopedia libre

El **planímetro** es un aparato de medición utilizado para el cálculo de áreas irregulares. Este modelo se obtiene con base en la teoría de integrales de línea o de recorrido.


Un planímetro (1908) midiendo el área indicada por trazado de su perímetro.

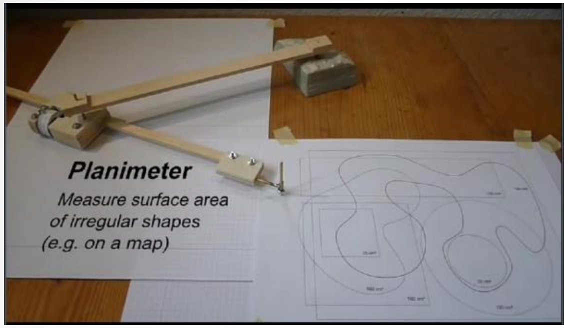
Índice [ocultar]

Contexto [editar]

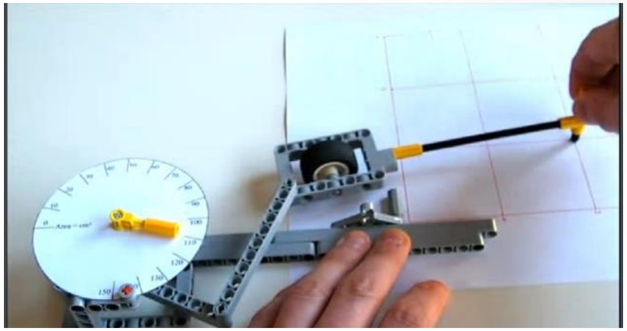
Para los casos en los que se necesita calcular superficies irregulares o en perspectiva, como mapas o manchas la geometría clásica o incluso la geometría analítica no son suficientes y no prestan mayor utilidad. Por ello es necesario recurrir a una herramienta de medición específica para tal fin, el planímetro es una buena y fácil alternativa.

https://en.wikipedia.org/wiki/Planimeter

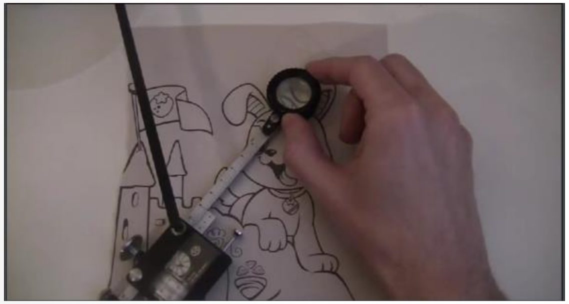
Veamos unos videos del Planímetro



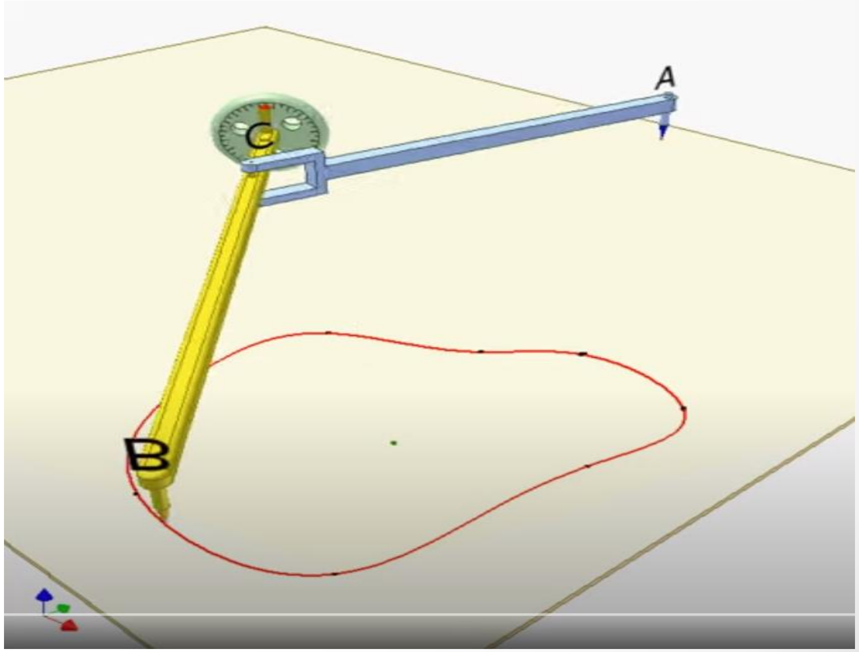
Hecho en casa
https://www.youtube.com/watch?v=WHpiAKMe3MA



Con Legos
https://www.youtube.com/watch?v=7R07IWiXV1g

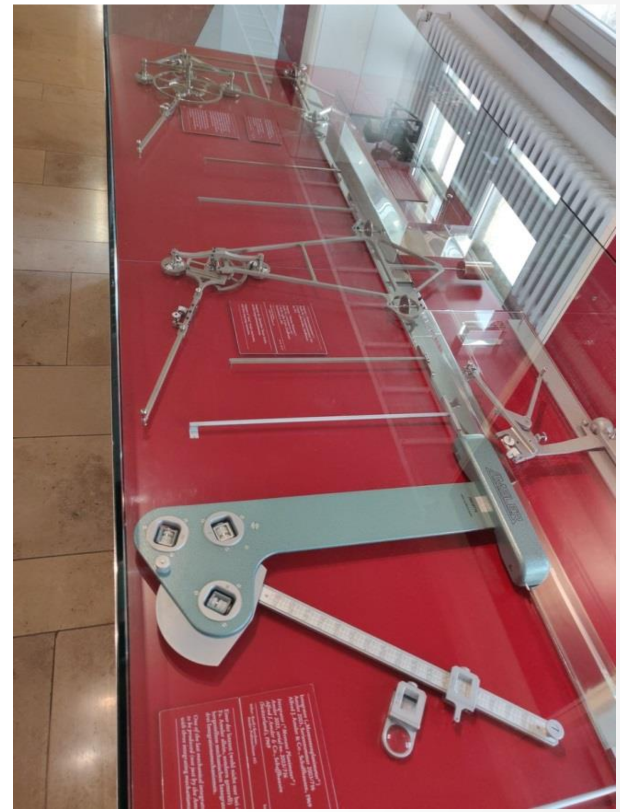


Uno profesional
https://www.youtube.com/watch?v=jMvEOmpy8Kw



Una simulación
https://www.youtube.com/watch?v=kdxPEZnv-U0

Un poco más del Planímetro



Múltiples diseños

Estructura

http://www.gisiberica.com/Plan%EDmetros/planimetro%20medicion.htm

Definición

Teorema de Green

Para otros usos, véase Teorema de la divergencia.

En física y matemáticas, el **teorema de Green** da la relación entre una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple C y una integral doble sobre la región plana D limitada por C. El teorema de Green se llama así por el científico británico George Green, y resulta ser un caso especial del más general teorema de Stokes.

Teorema [editar]

Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ una región simple cuya frontera es una curva C suave a trozos orientada en sentido positivo, si $\mathbf{F} = (M, N) : D \to \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial con derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a D entonces

$$\oint_{\partial D} M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

donde $C = \partial D$.

https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Green

Un poco mas del teorema de Green

El teorema de Green dice que podemos calcular una integral doble sobre la región *D* basándonos únicamente en la información sobre el borde de *D*.

También dice que podemos calcular una integral de línea sobre una curva simple cerrada *C* basándonos únicamente en la información sobre la región que encierra *C*.

En particular, el teorema de Green conecta una integral doble sobre la región *D* con una integral de línea alrededor del borde de *D*.

Correlación histórica

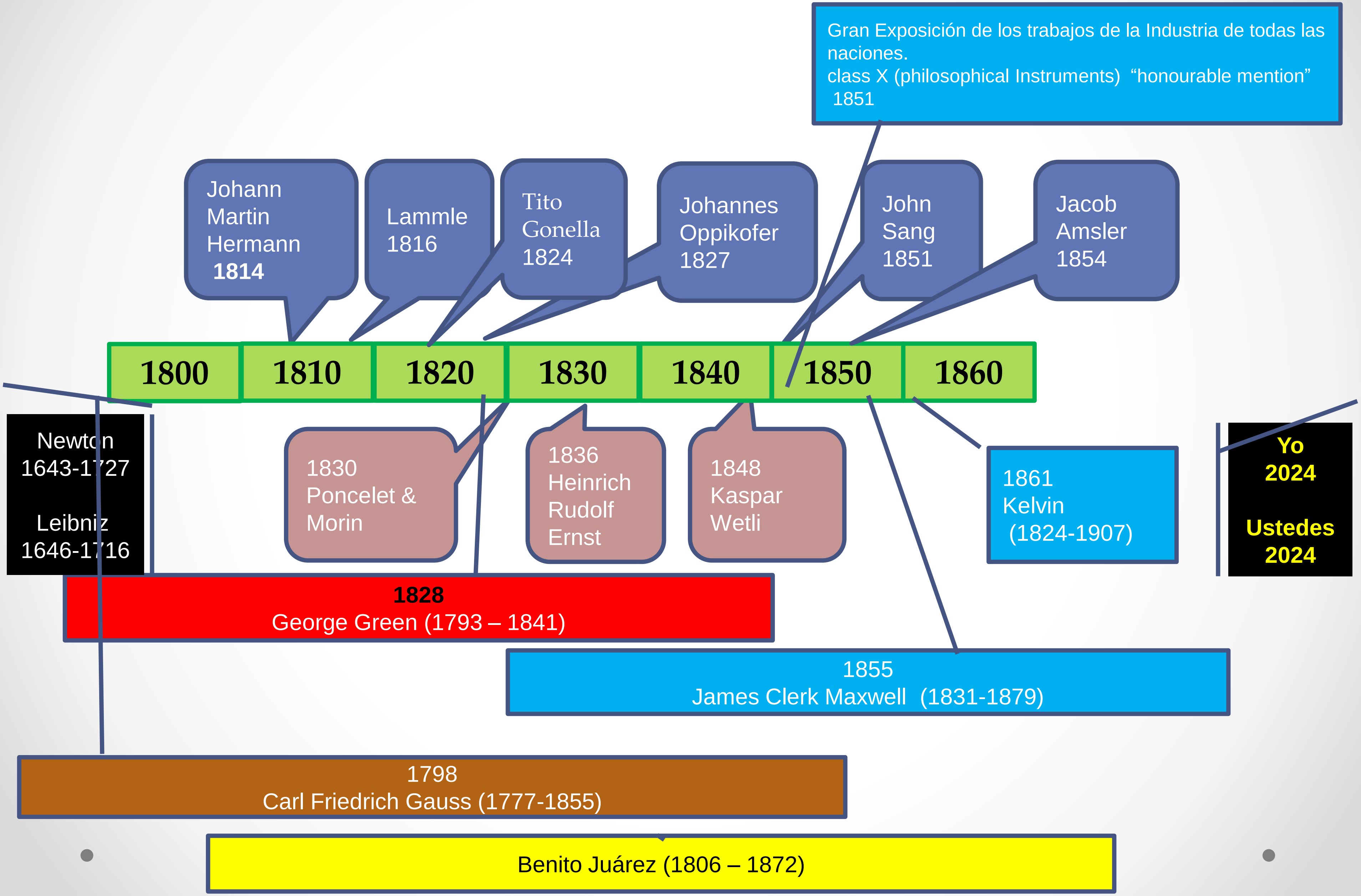
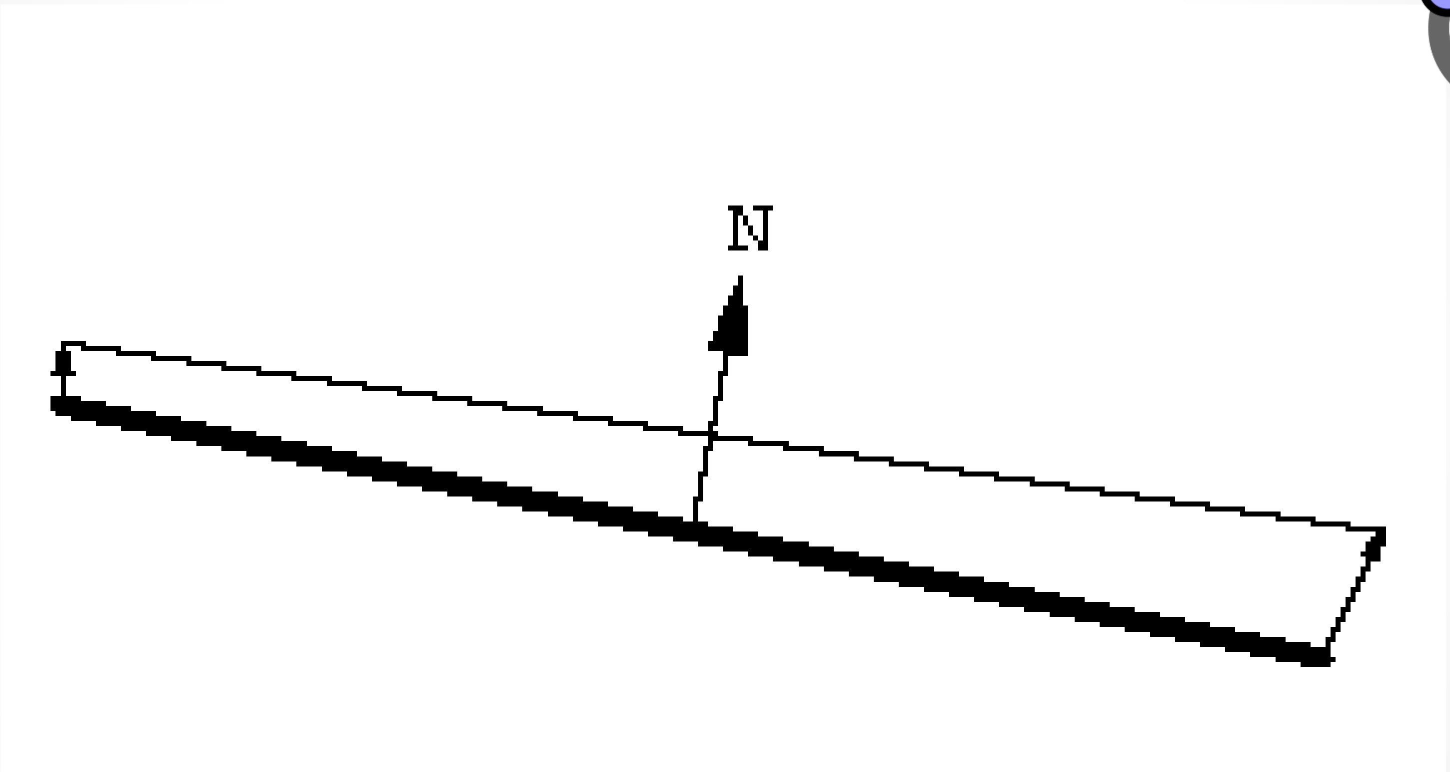


Ilustración geométrica



Una segmento de recta o barra que se mueve cubre una Área

How Planimeters Work (wabash.edu)

Robert Foote

Ilustración geométrica

Utilizaremos Geogebra

Geogebra

- Puntos líneas círculos
- Edición, color formato
- Funciones, líneas cuadráticas y cubicas
- Triangulo equilátero
- Centro de un triangulo
- Teorema de Mascheroni.

El teorema de Mascheroni, publicado en la *Geometria del compasso* dice lo siguiente:

Teorema de Mascheroni: Si sobre los tres lados de un triángulo cualquiera ABC se construyen tres triángulos equiláteros exteriores (respectivamente, interiores), los centros de estos tres triángulos equiláteros forman un nuevo triángulo *RST*, que es equilátero, al que se denomina triángulo exterior (respectivamente, interior) de Napoleón. (Según se muestra en la figura)

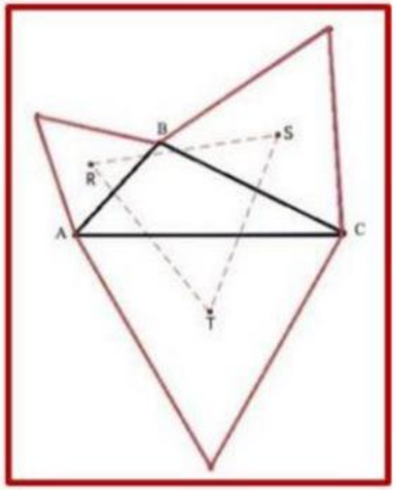
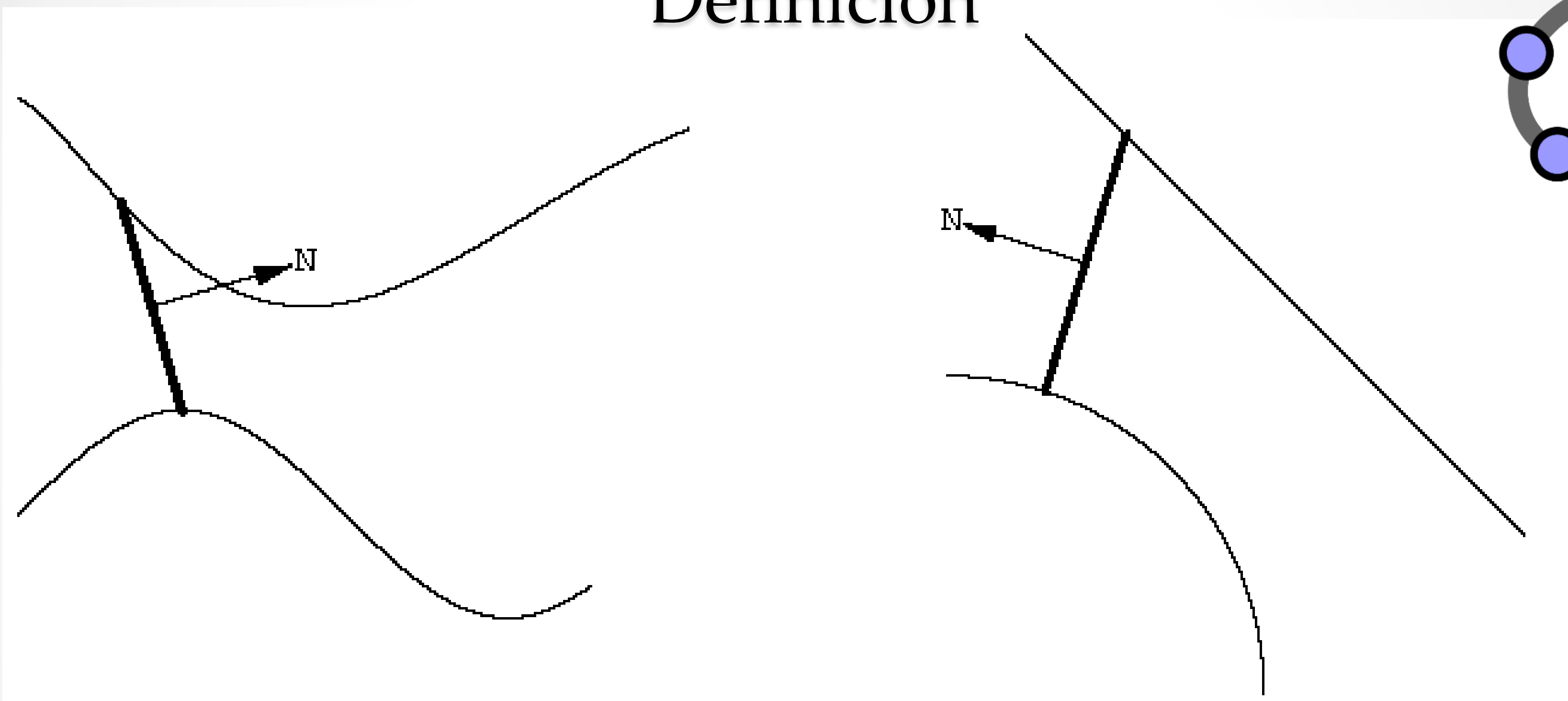


Ilustración geométrica

Definición

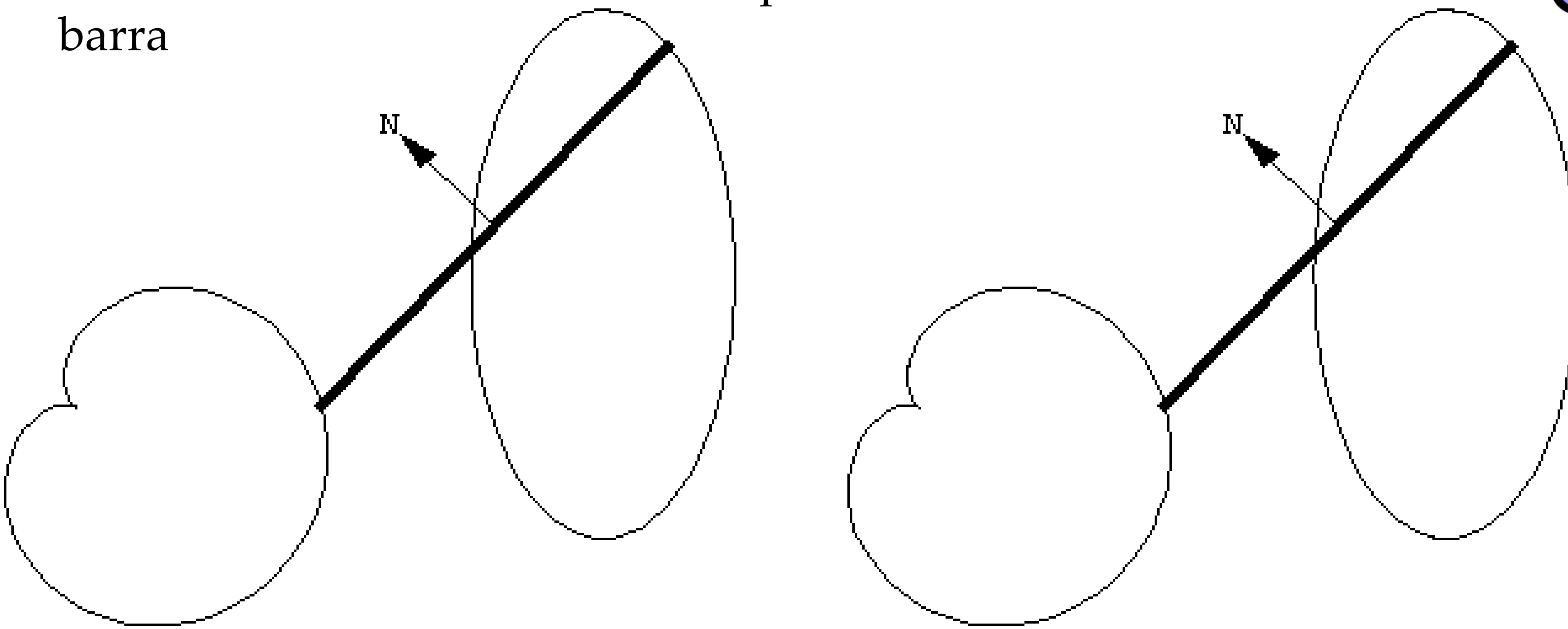


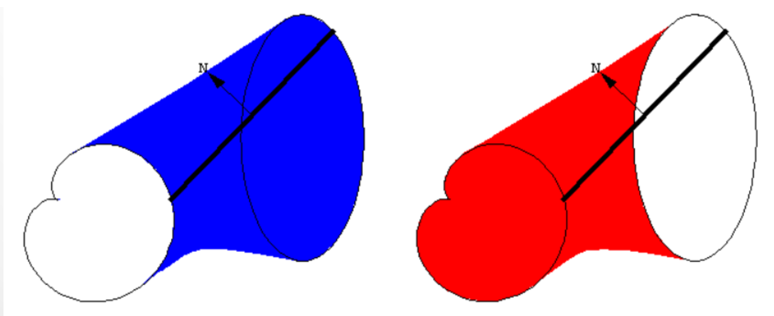
Área es POSITIVA si la recta se mueve en la dirección donde apunta el vector normal

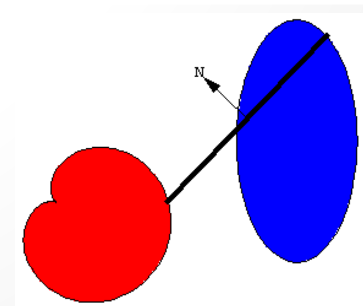
Área es NEGATIVA si la recta se mueve en la dirección contraria a donde apunta el vector normal

Teorema de la diferencia de Áreas

El área total que cubre una barra que se mueve es igual a la diferencia de áreas de las curvas que describen los extremos de la barra





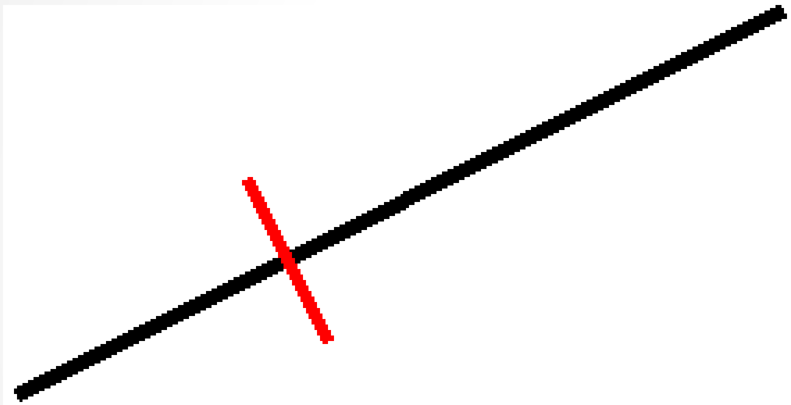


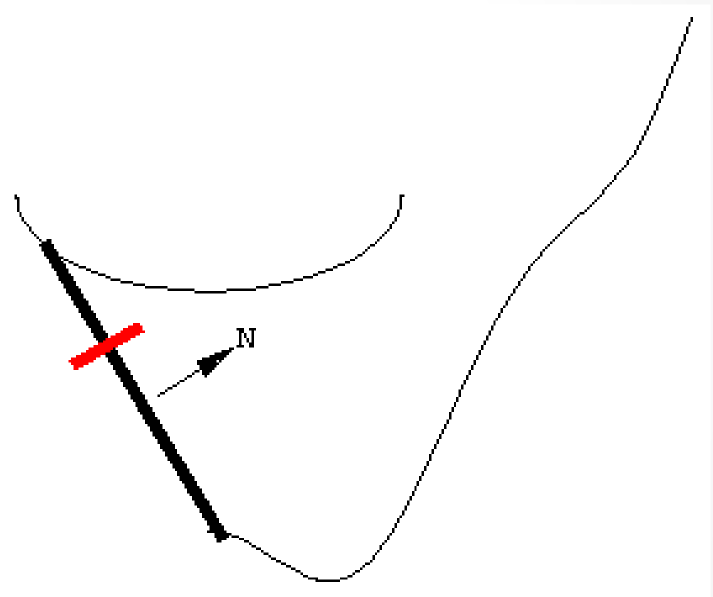
Termina sesión 1

De 2 horas

Lunes

Comencemos con una recta con una Rueda



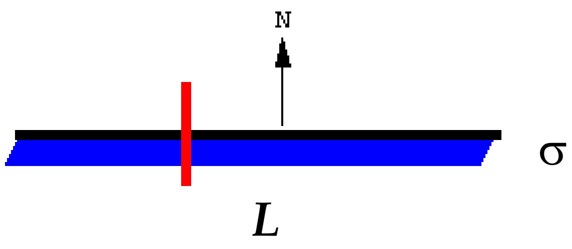


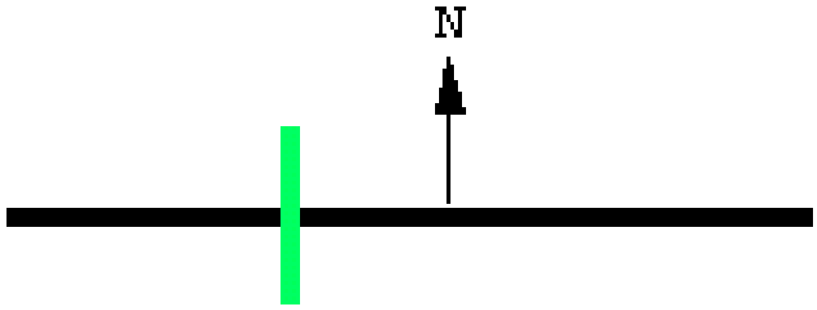
Ponemos una rueda en la barra en dirección normal.
La rueda gira lo que se mueve la barra en la dirección de N

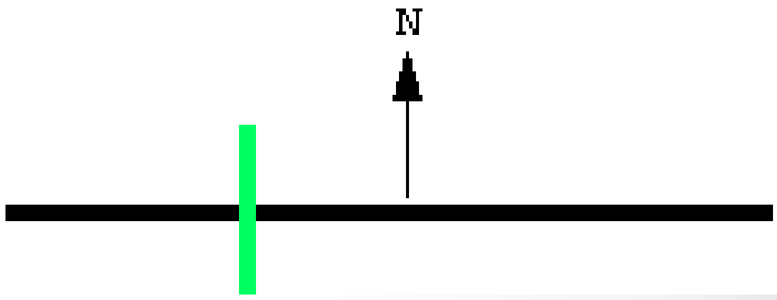
Moviendo la barra entre dos curvas

Movimiento 1 traslación

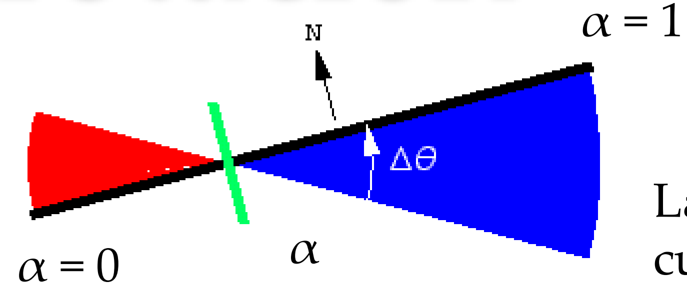
La barra mide longitud
L se desplaza por la
normal **N** cubriendo un
área $A1 = L\,\sigma$
(con signo)





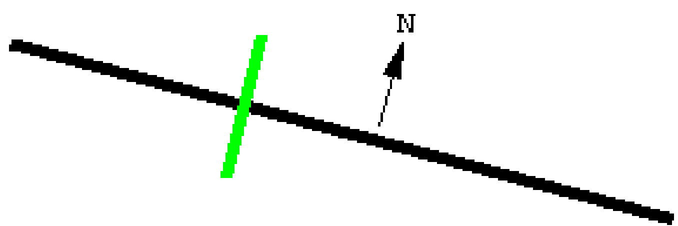


Movimiento 2 rotación



A2 = área positiva
– área negativa

La rueda se coloca en cualquier punto de la barra ***L***

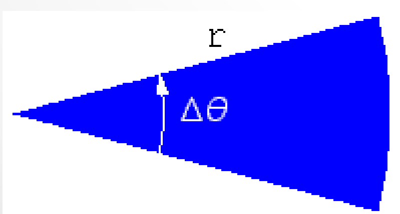


La barra gira un Δ de θ

α entre [0,1]

Área de sector circular

$A = {}^{1}/_{2}\, r^2 \Delta\theta$



$\boldsymbol{r1} = \alpha\, \boldsymbol{L}$

sector 1 = ½ $(\alpha \text{ L})^2\, \Delta\theta$

$\boldsymbol{r2} = (1 - \alpha)\, \boldsymbol{L}$

sector 2 = ½ $((1\text{-}\alpha) \text{ L})^2\, \Delta\theta$

A2 = sector 1 - sector2 = ½ $(2\alpha - 1)\, \text{L}^2\, \Delta\theta$

Sumando

$A1 = L\,\sigma$

$A2 = \frac{1}{2}\,(2\alpha - 1)\,L^2\,\Delta\theta$

La barra cubre un área total = A1 + A2

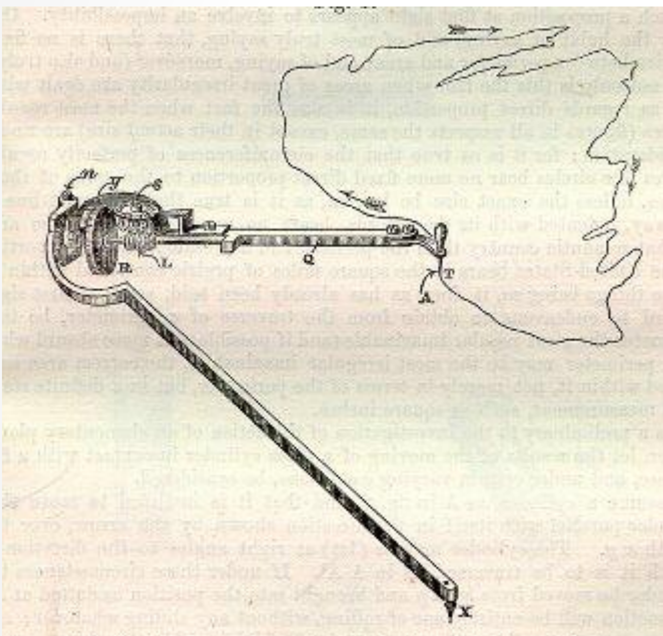
el $\Delta\theta = 0$ porque inicia en un punto y termina su recorrido en el mismo punto entonces el ángulo es el mismo y el incremento es 0

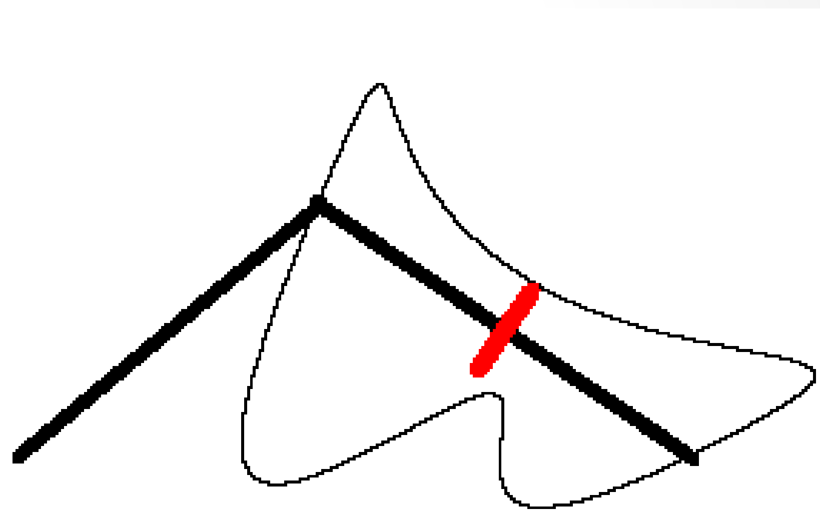
El área que cubre la barra solo es $A1 = L\,\sigma$

Y α o la posición de la rueda es irrelevante, donde pongo la rueda

El área solo depende de cuanto giro la rueda y la longitud de la barra

Construcción del planímetro polar





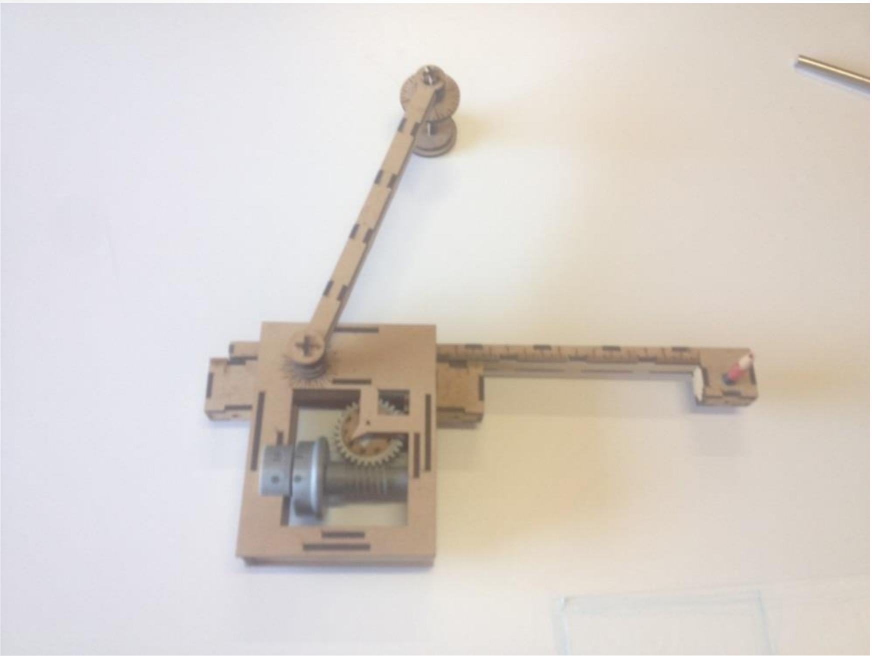
Termina sesión 2

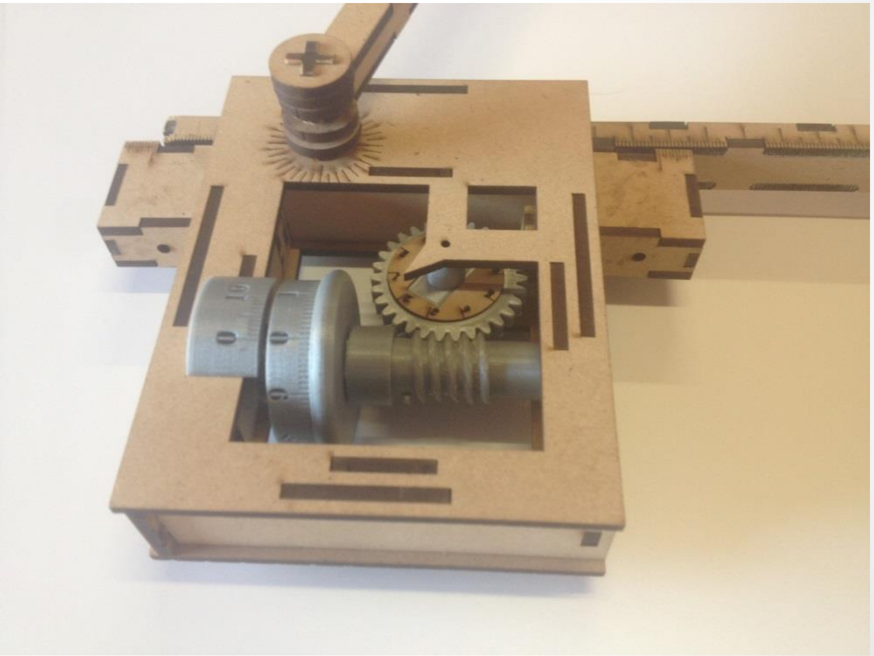
De 2 horas

Martes

El mío

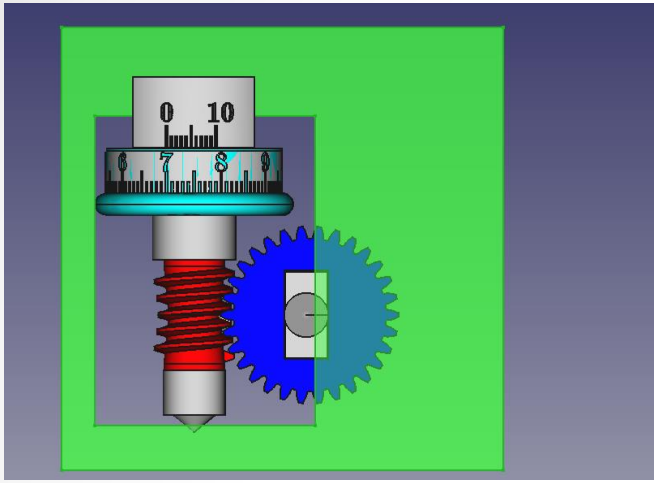
yo ya construí uno

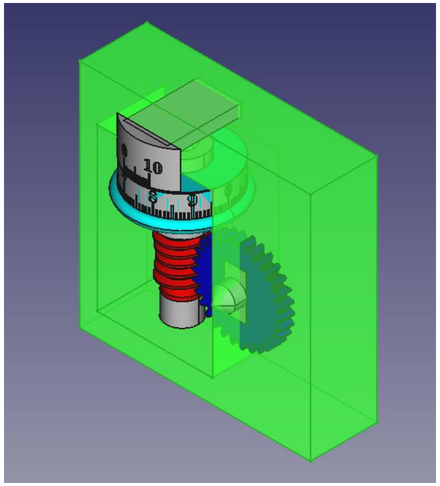


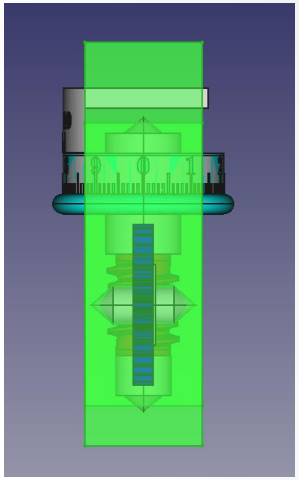


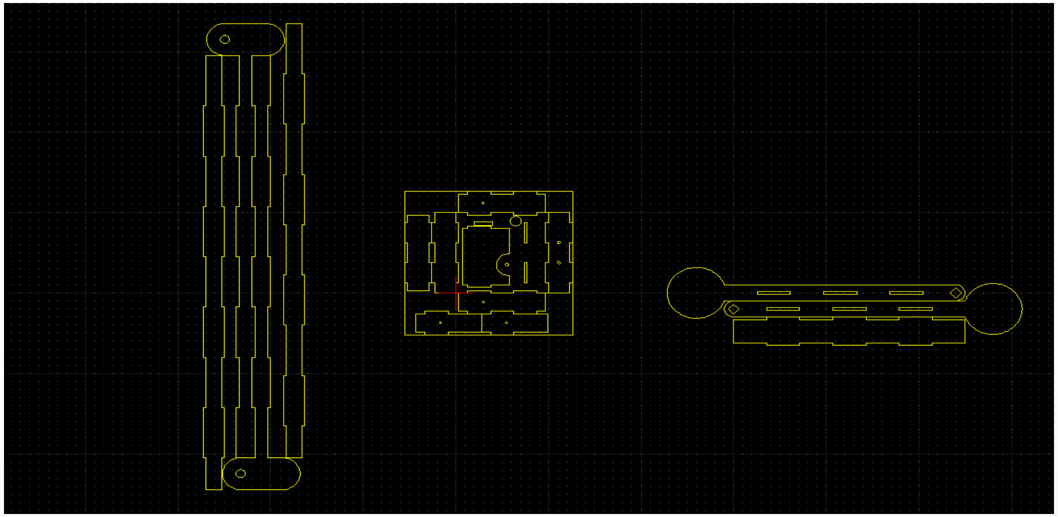
Prototipo Modelo 01

El mío Continuación





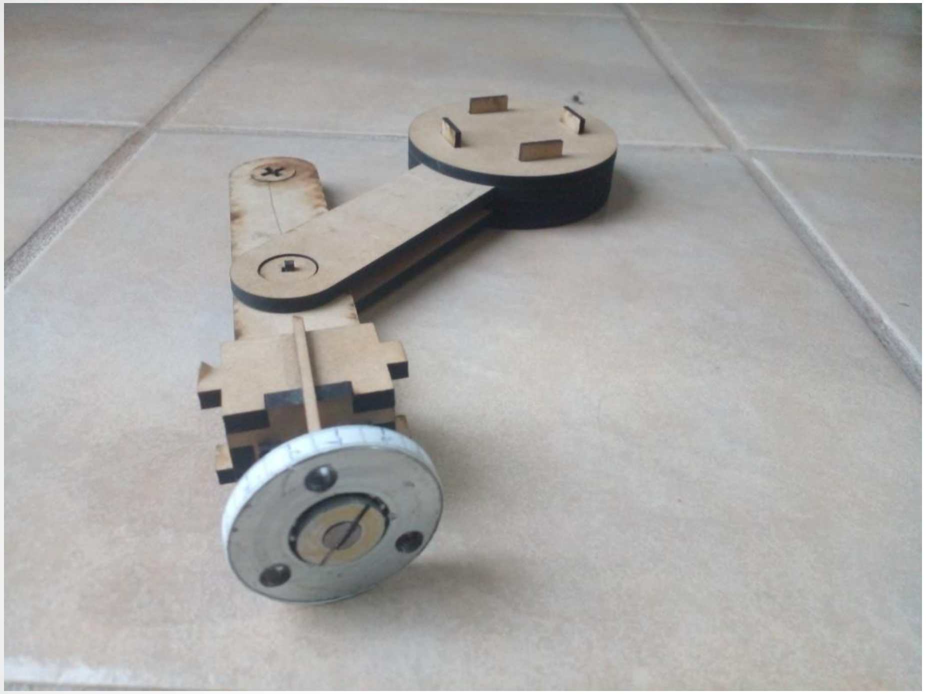


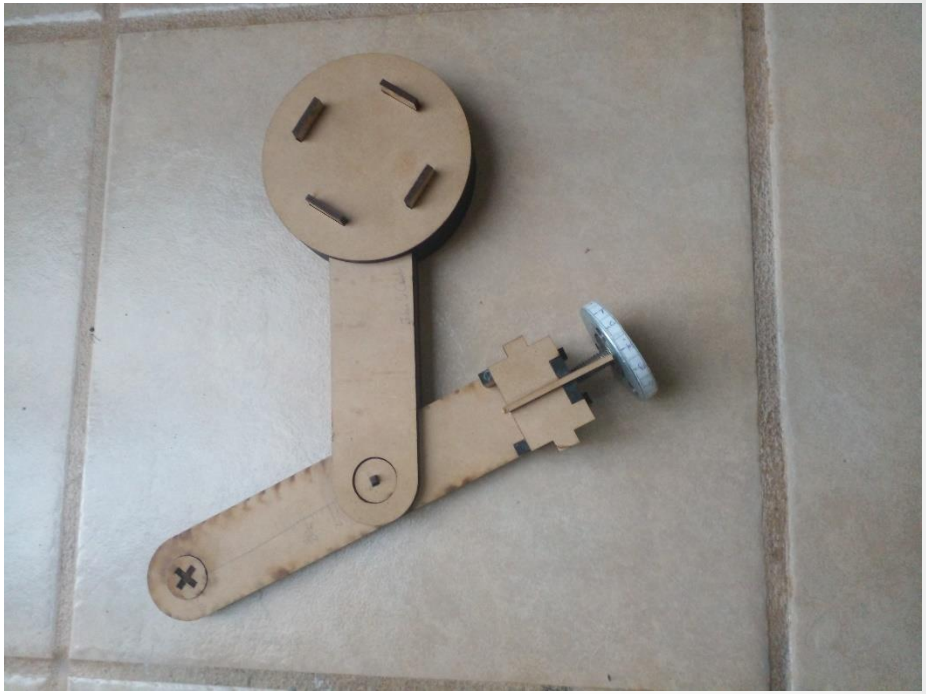


Prototipo Modelo 01

Joshua S. González

construyó el suyo

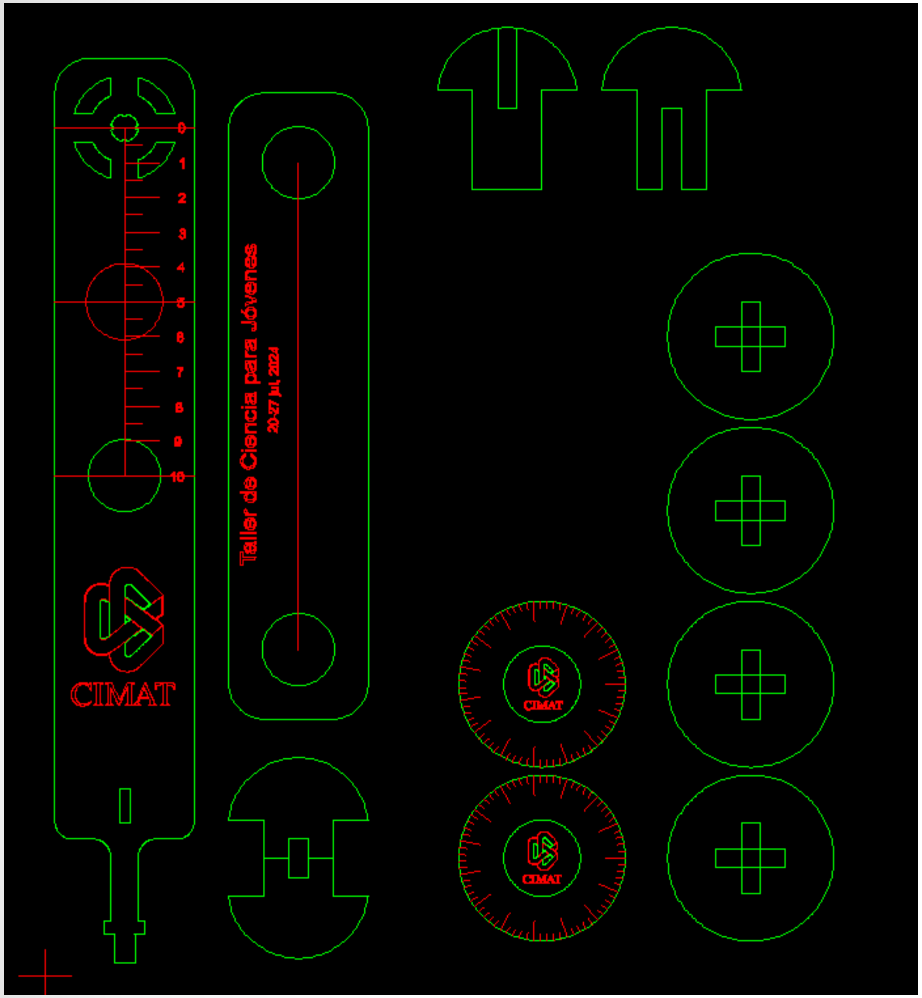




Lo construyó después que asistió al taller y
esta mejor que el mío

Prototipo Modelo 02

El de este taller

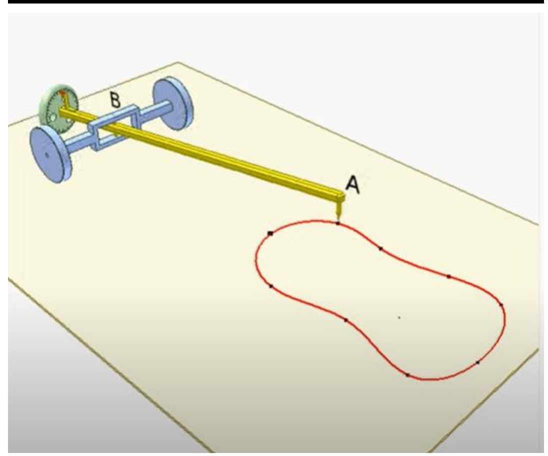


Prototipo Modelo 03 (me pirateé el de Joshua)

Yo hago mediciones de áreas con MI PLANIMETRO

Y no se los presto

¿Y el de ustedes?



https://www.youtube.com/watch?v=qThV6gTaYMI

¿Uno lineal?

¿Uno electrónico?

¿Ustedes hacen todo?

Yo les ayudo

¿Qué se necesita?

¿Tienen todo para fabricarlo?

¿Quién se apunta?

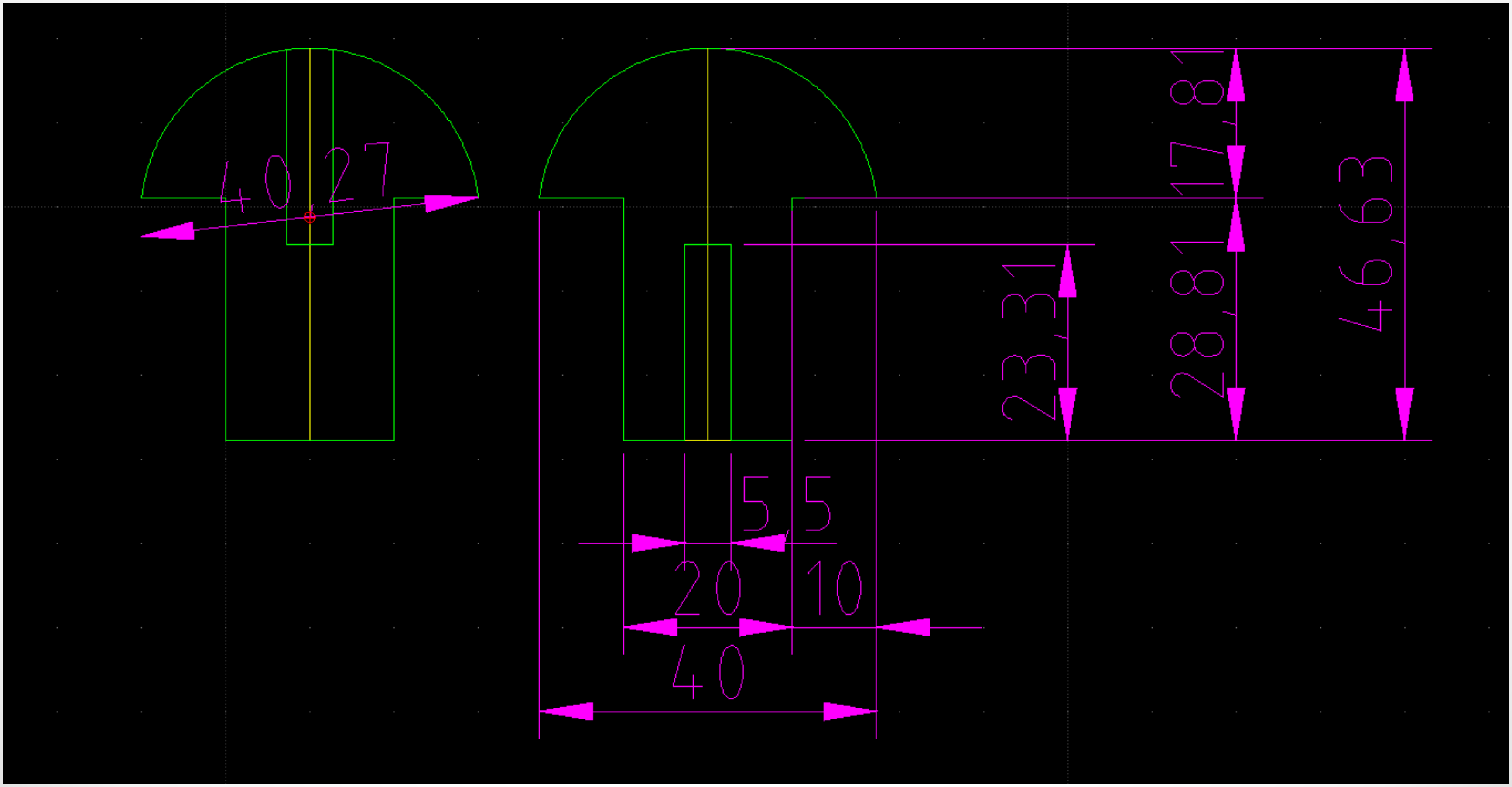
¿Por que lo construirían?

¿En cuanto sale?

Vamos a construir un nuevo diseño mejorado

Piezas en 2D

Geogebra y cortadora láser



¿Qué vamos a utilizar?

[Video 1](#) (2.20 min.)

[Video 2](#) (4.20 min.)

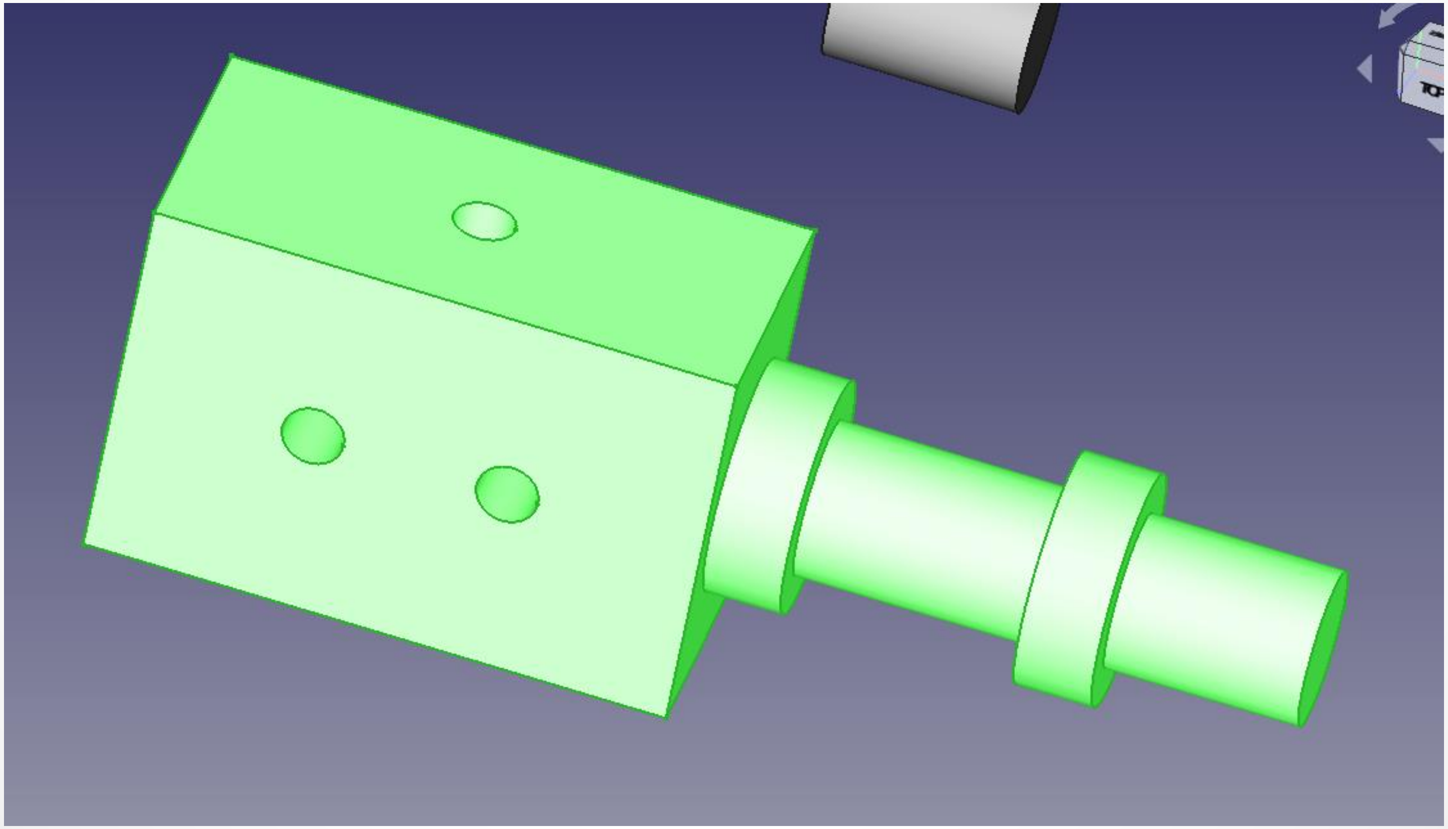
Yo tengo una de estas maquinas y se las presto (es de CIMAT, pero igual se las presto)

Termina sesión 3

De 3 horas
Miércoles

Hagamos mejoras con Piezas en 3D

Construyamos esta pieza, para colocar el balero y unirse a la parte de las barras

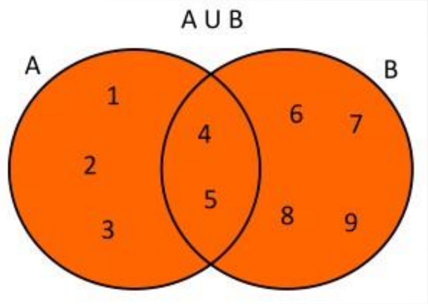


¿Qué vamos a utilizar?

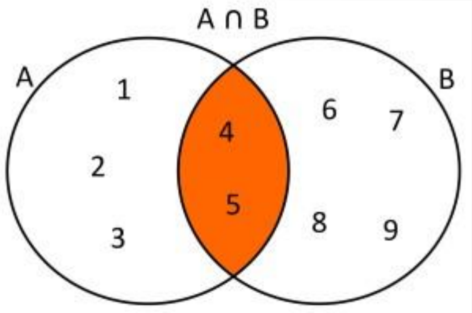
- **Yoda** http://www.youtube.com/watch?v=8_vloWVgf0o
- **MakerBot Replicator 2** http://www.youtube.com/watch?v=nRtuX-3ACxU
- **Ejemplos del cubo soma** 1, 2, 3

Conjuntos y Operaciones

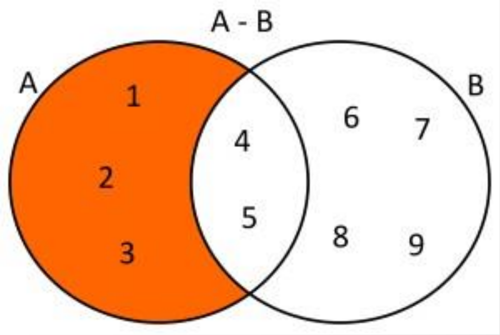
Dados dos conjuntos A={1,2,3,4,5} y B={4,5,6,7,8,9} la UNION de estos conjuntos será A∪B={1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:



Dados dos conjuntos A={1,2,3,4,5} y B={4,5,6,7,8,9} la INTERSECCION de estos conjuntos será A∩B={4,5}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:

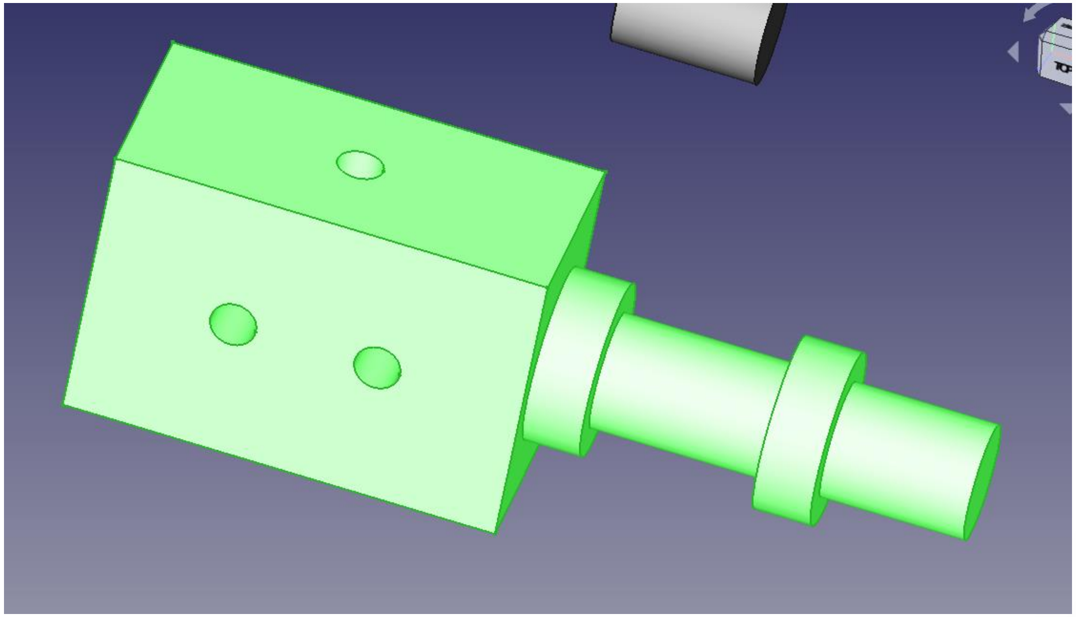


Dados dos conjuntos A={1,2,3,4,5} y B={4,5,6,7,8,9} la DIFERENCIA de estos conjuntos será A-B={1,2,3}. Usando diagramas de Venn se tendría lo siguiente:



Piezas en 3D

Construyamos esta pieza, para colocar el balero y unirse a la parte de las barras

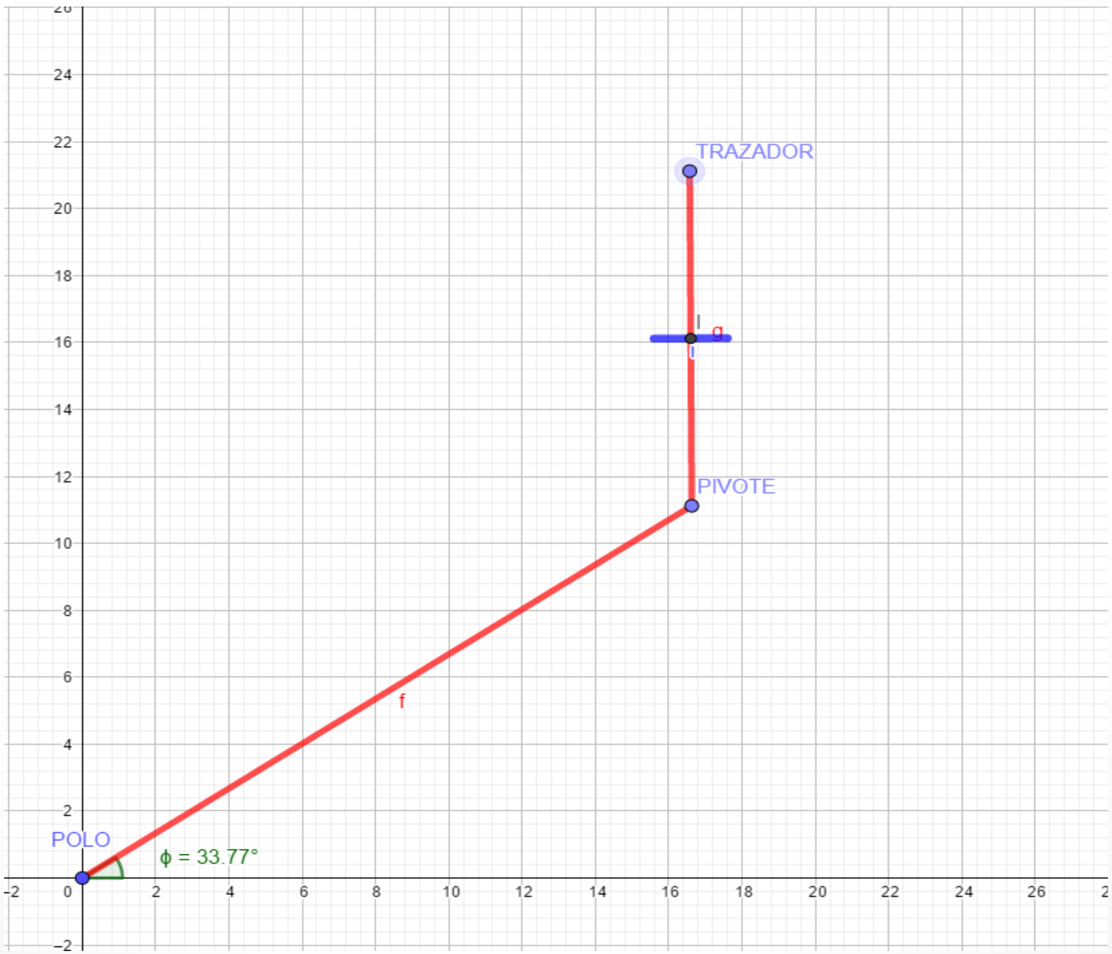


- El paralelepípedo mide 30 x 20 x 15 mm
- El eje es longitud de 30 mm para un balero de 8m
- Las perforaciones están centradas y equiespaciadas y son para tornillos de 1/8 de pulgada
- Los topes, usted ajústelos

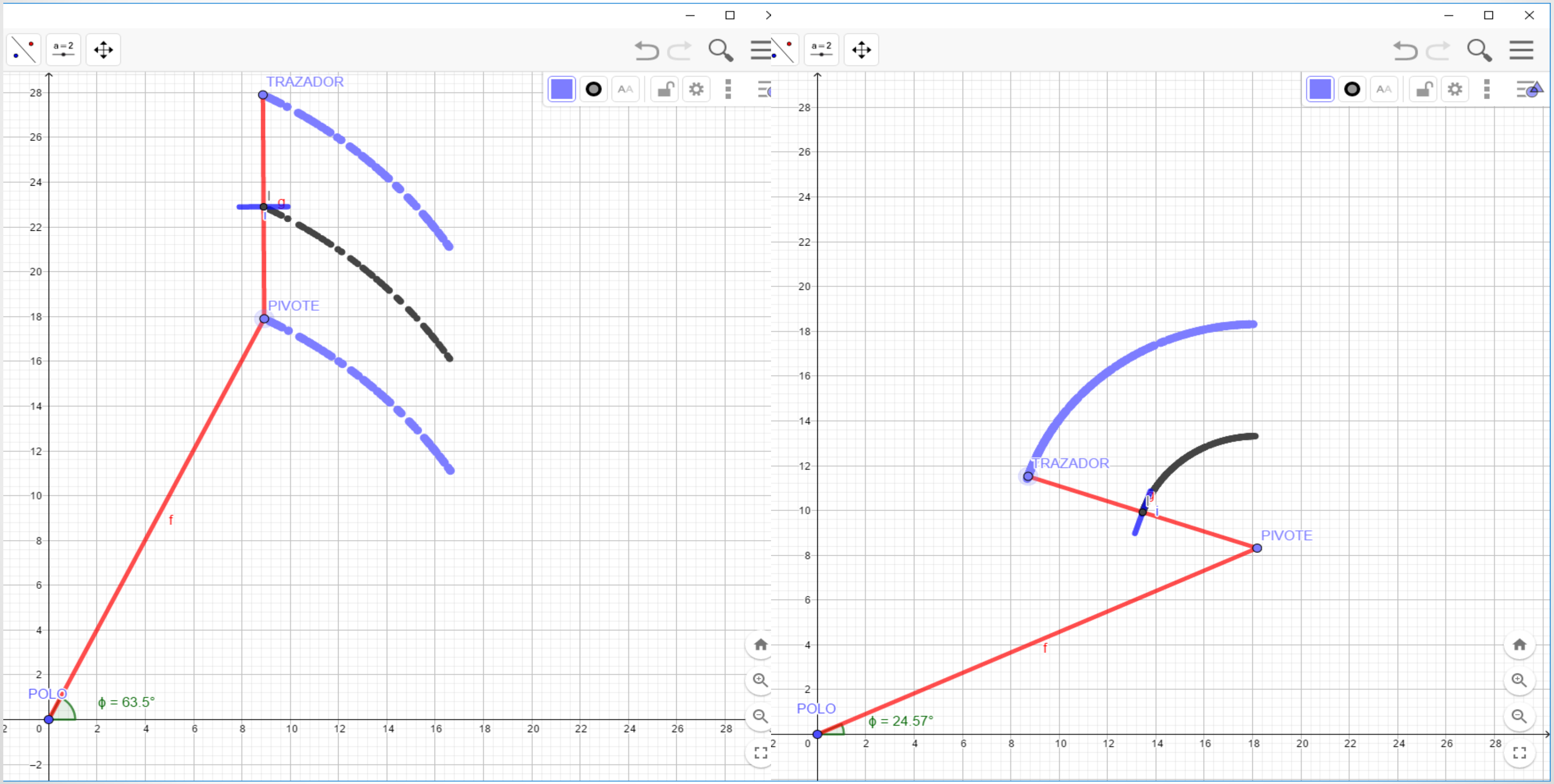
Termina sesión 4

De 3 horas
Jueves

Modelo conceptual



Dos movimientos



Desarrollo

dos movimientos

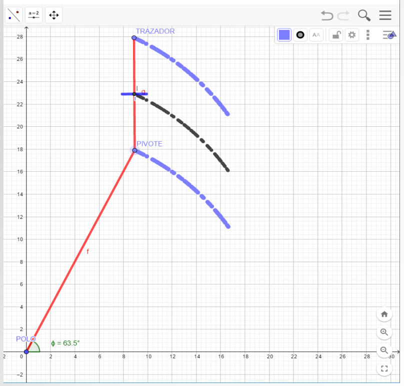
$S_{1\ \text{distancia que se mueve la rueda}} = V_{\text{desplazamiento}} \cdot V_{\text{normalBrazo}}$

La rueda solo gira cuando se mueve normal al brazo

a = distancia del pivote a la rueda

$S_{2\ \text{distancia que se mueve la rueda}} =$ $a\ d\theta$

Arco = radio * angulo en radianes



Desarrollo

$S_{1\ \text{distancia que se mueve la rueda}} = V_{\text{desplazamiento}} \cdot V_{\text{normalBrazo}}$

$V_{\text{desplazamiento}} = P_2 - P_1$

Distancia entre dos puntos vectorial

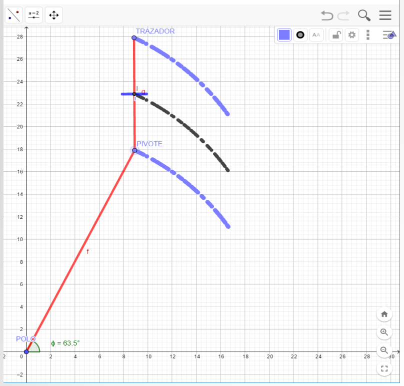
$P_1 = (b\cos\phi, b\sin\phi)$

P1 + un diferencial de P1

P_2 $(b\cos(\phi) - b\sin(\phi)d\phi, b\sin(\phi) + b\cos(\phi)d\phi)$

P2 –P1 vectorial

$V_{\text{desplazamiento}} = \langle -b\sin\phi, b\cos\phi\rangle d\phi$



Desarrollo

$V_{\text{normalBrazo}}$

$B = P_2 - P_1$

vectorial

P_1 $\quad (b \cos \phi, b \sin \phi)$

P_2 $\quad (x, y)$

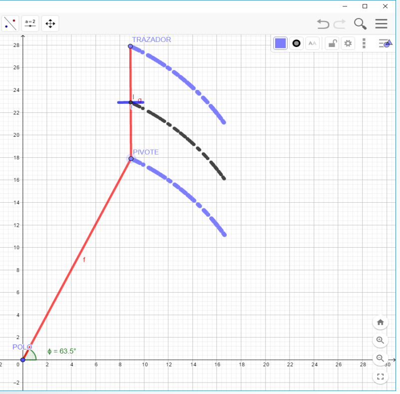
$V \cdot B = 0$

$|V| = 1$

El vector debe cumplir

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$V_{\text{normalBrazo}} = \frac{1}{L} \langle b \sin \phi - y, x - b \cos \phi \rangle$$



Desarrollo

$S_{1 \text{ distancia que se mueve la rueda}} = V_{\text{desplazamiento}} \cdot V_{\text{normalBrazo}}$

$$\frac{1}{L}\langle b\sin\phi - y, x - b\cos\phi\rangle \cdot \langle -b\sin\phi, b\cos\phi\rangle d\phi$$

Distancia Movimiento uno

$$\frac{b}{L}(x\cos\phi + y\sin\phi - b)d\phi$$

Desarrollando

$S_{2 \text{ distancia que se mueve la rueda}} = \quad a\ d\theta$

Distancia Movimiento dos

$(S_1 + S_2)$

Distancia Movimiento TOTAL de un diferencial

Desarrollo

Giro total de la rueda = $\oint_C (S_1 + S_2)$

Distancia
En toda la curva, la suma de todos los pedazos

$$= \oint_C \frac{b}{L}(x\cos\phi + y\sin\phi - b)d\phi + a\ d\theta$$

Considerar que es una es una curva cerrada y llega a la posición inicial

$$= \frac{b}{L}\oint_C (x\cos\phi + y\sin\phi)\ d\phi$$

Desarrollo

Giro total de la rueda = $\frac{b}{L}\oint_C (x\cos\phi + y\sin\phi)\, d\phi.$

$x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$

Giro total de la rueda = $\frac{b}{L}\oint_{C'} r\cos(\theta-\phi)\, d\phi$

$$(x-b\cos\phi)^2+(y-b\sin\phi)^2 = L^2$$

$$r\cos(\theta-\phi) = \frac{r^2+b^2-L^2}{2b}$$

$$d\phi = d\theta + \frac{r^2-b^2+L^2}{r\sqrt{4b^2r^2-(r^2+b^2-L^2)^2}}dr.$$

Cambio de variable

Cambio de variable

Despejando y derivando parcialmente

Desarrollo

Giro total de la rueda = $\frac{b}{L}\oint_{C'} \frac{r^2+b^2-L^2}{2b}\left(d\theta + \frac{r^2-b^2+L^2}{r\sqrt{4b^2r^2-(r^2+b^2-L^2)^2}}dr\right)$

Ahora

Q $= \frac{r^2+b^2-L^2}{2b}$

P = $\frac{r^2-b^2+L^2}{r\sqrt{4b^2r^2-(r^2+b^2-L^2)^2}}dr.$

Cambio de variable

Giro total de la rueda = $\frac{b}{L}\oint_{C'}$ P dr + Q $d\theta$

Ahora

Desarrollo

Giro total de la rueda = $\frac{b}{L}\oint_{C'} P\ dr + Q\ d\theta$

Aquí vamos

$$\oint_{\partial D} M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

donde $C = \partial D$.

Teorema de Green

Giro total de la rueda $= \frac{b}{L}\iint_R \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{r^2+b^2-L^2}{2b}\right] dr d\theta$

Aplicando el teorema

$= \frac{1}{L}\iint_R r\ dr d\theta$

Simplificando

Giro total de la rueda $= \frac{1}{L} \cdot \text{Area of the region } R.$

Hagamos mediciones

En una hoja cuadriculada, realicen mediciones de un cuadrado de 10 cm de lado

7mm cuadricula grande

- Estimar el porcentaje de error
- Tabular y graficar 10 mediciones de una misma área en Excel

Preguntas y Conclusiones

¿Qué relación hay entre el teorema de Green y el Planímetro?

¿Qué fue primero? ¿el huevo o la gallina?

¿El curso-taller es del **teorema de Green** o del **planímetro**?

¿El curso-taller es de **matemáticas** o de **ingeniería**?

¿El curso-taller es de **ciencia** o de **tecnología**?

¿El curso-taller es **teórico** o **práctico**?

Preguntas y Conclusiones

¿Qée opino del Curso-Taller?

¿Me gustó?

¿ME SIRVIÓ?

¿Soy el mismo cuando llegué a CIMAT y ahora que me voy?

¿Qué cambié?

Desarrollo

[As the Planimeter's Wheel Turns: Planimeter Proofs for Calculus Class]

Tanya Leise
September 4, 2006
Tanya Leise (tleise@amherst.edu) received her Ph.D. from Texas A&M University and is captivated by applied mathematics in many contexts, from accelerating cracks to biological clocks. Of particular interest to her recently has been the mathematics of mechanical devices such as astrolabes and planimeters, which are also great fun to collect.
When not doing math, she enjoys cycling and sewing stuffed dragons for her daughter.

Maximino Tapia García
Ingeniero en Electrónica.
Universidad de Guanajuato

Desarrolló todas las cuentas del articulo de Tanya

https://www3.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/Doc/Planimeter.pdf

Bibliografía y Video alternativos

- [Illustrating the History of the Planimeter Charles Care 0107553 Supervisor: Dr Steve Russ 2003-2004 Copy II]

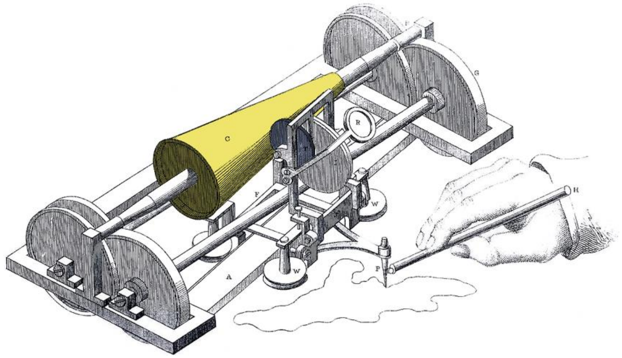
- https://www.youtube.com/watch?v=TGI9cJRj3o0
- https://www.youtube.com/watch?v=9dZYAfxcjZs
- https://www.youtube.com/watch?v=OD9bOUHgK8o

Gracias a

George Green (1793 - 1841)

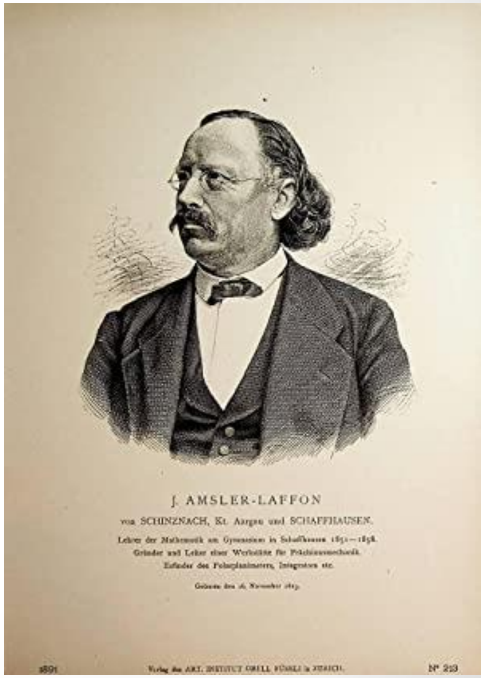
https://www.ecured.cu/George_Green

Johann Martin Hermann



https://www.researchgate.net/figure/Sangs-platometer-San52-modied_fig7_257930030

Jakob Amsler (1823 - 1912)



https://www.abebooks.com/art-prints/AMSLER-Jakob-Amsler-Laffon-1823-1912-Schweizer-Mathematiker/30291751581/bd