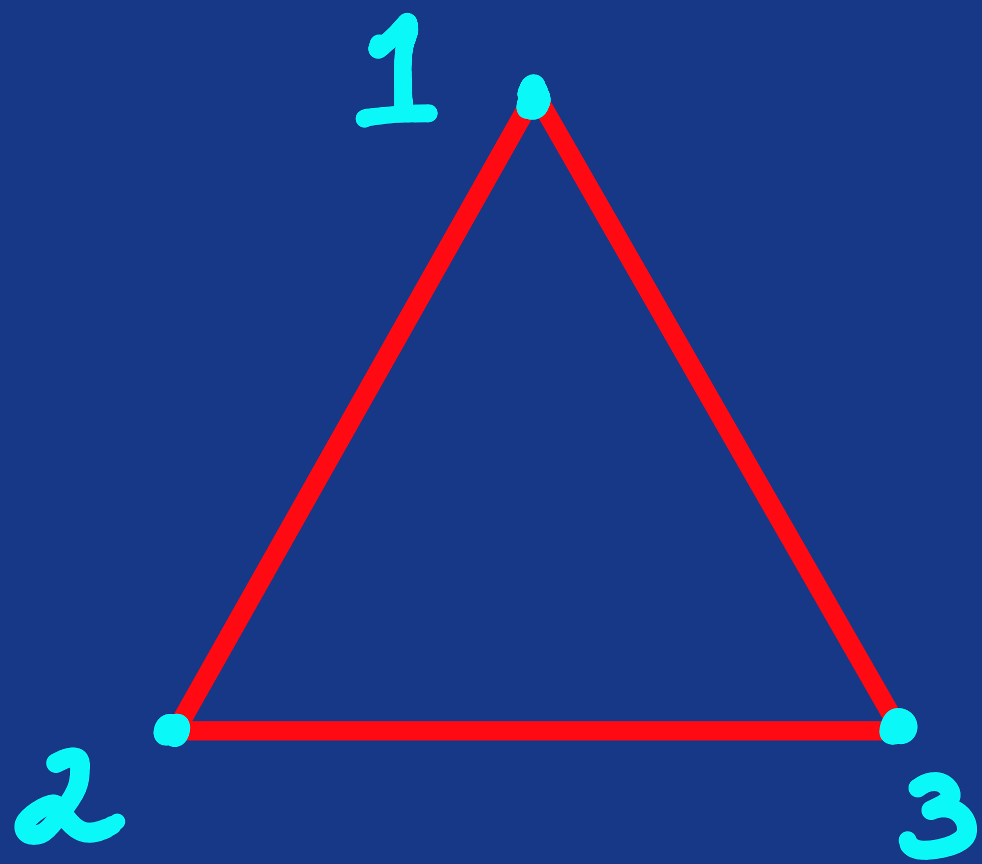
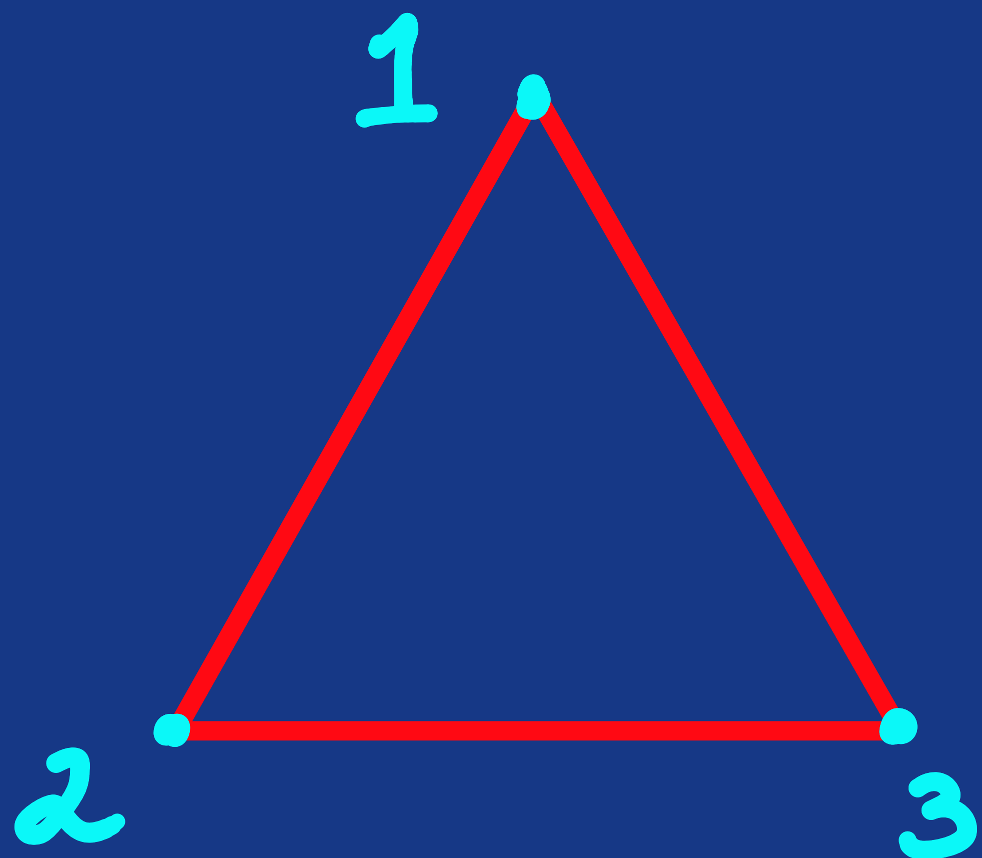
TCJ - CIMAT
Curso de Matemáticas
Ricardo A. Sáenz
18 de enero de 2021

Simetrías discretas

Triángulo equilátero



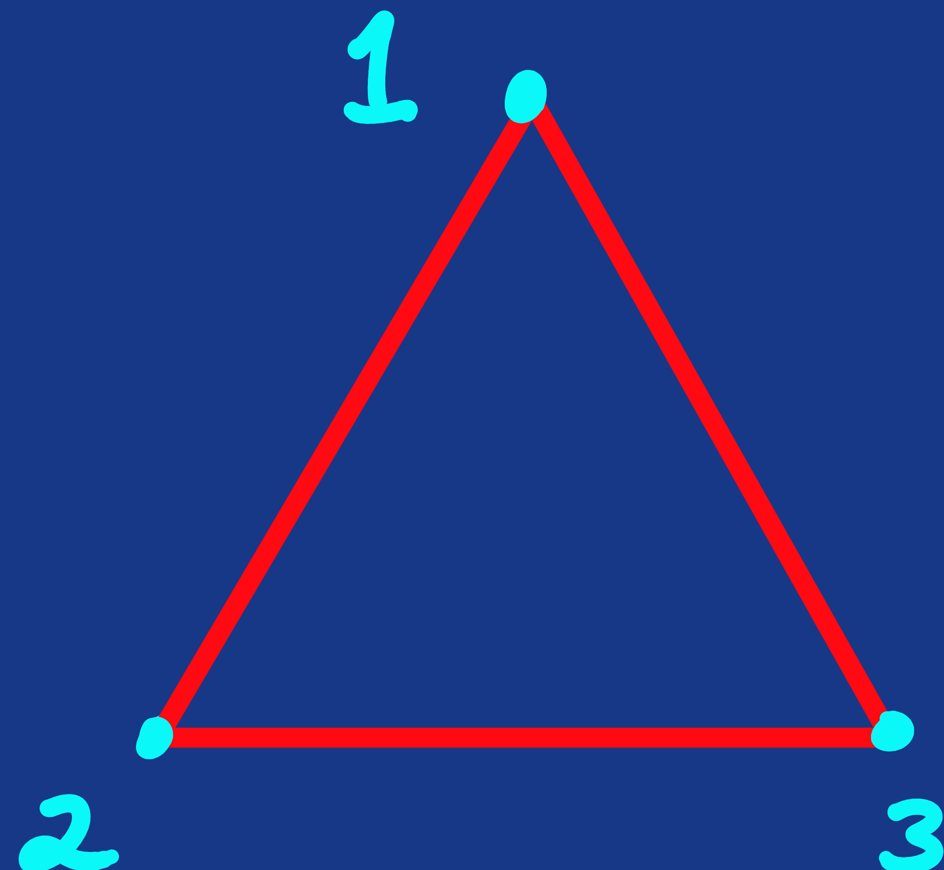
Triángulo equilátero



→ Rotaciones

→ Reflexiones

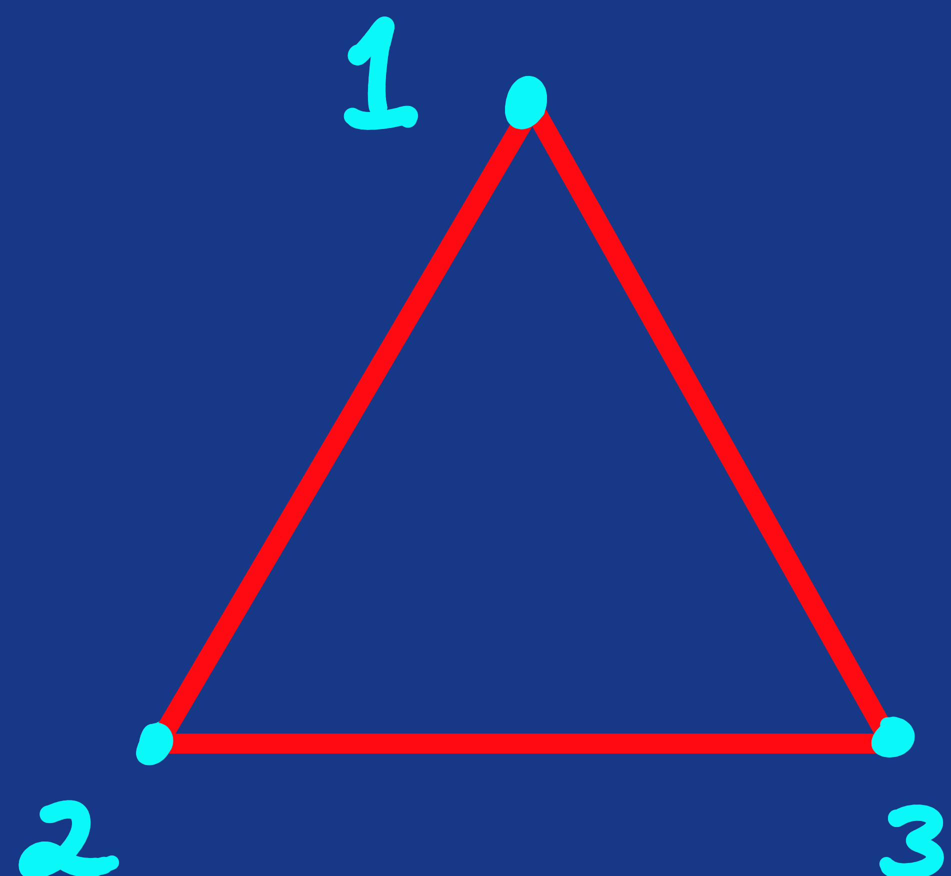
Rotaciones



4 rotacions:

1. Ángulo $2\pi/3$ ↺
2. Ángulo $-2\pi/3$ ↻
3. Ángulo $4\pi/3$ ↺
4. Ángulo $-4\pi/3$ ↻

Rotaciones



4 rotaciones:

1 Ángulo $2\pi/3$ ↺

2 Ángulo $-2\pi/3$ ↻

3 Ángulo $4\pi/3$ ↺

4 Ángulo $-4\pi/3$ ↻

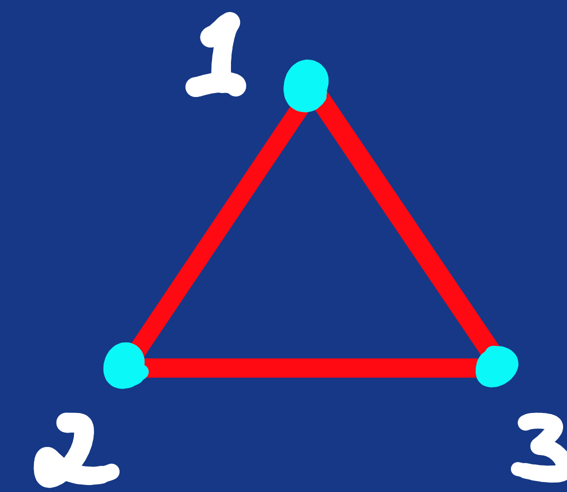
NOTA: 1 = 4 = $1 \to 2 \to 3 \to 1$

2 = 3 = $1 \to 3 \to 2 \to 1$

Rotaciones

$$\sigma = \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 3 \\ 3 \mapsto 1 \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



- σ es una función de $\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$

  $\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1$

- σ es biyectiva

Rotaciones

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Inversa de σ: $\sigma^{-1}(p) = q \iff p = \sigma(q)$

Rotaciones

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Inversa de σ: $\sigma^{-1}(p) = q \iff p = \sigma(q)$

$$\sigma^{-1}(1) = 3, \quad \sigma^{-1}(2) = 1, \quad \sigma^{-1}(3) = 2$$

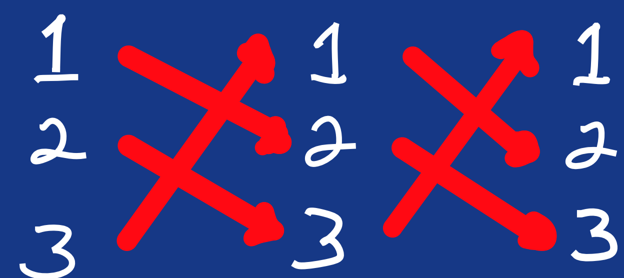
$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Composición

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

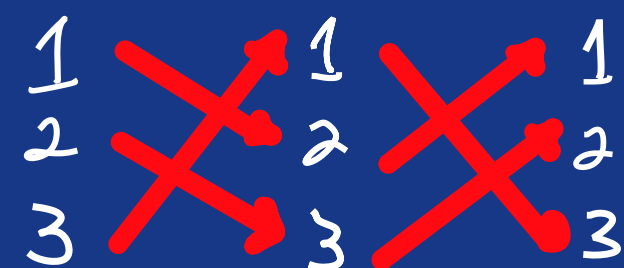
Podemos componer las simetrías anteriores:

$\sigma \circ \sigma$:



$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma^{-1}$$

$\sigma^{-1} \circ \sigma$:



$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{identidad}$$

Tabla de composiciones

$\circ$	id	σ	σ^{-1}
id			
σ		σ^{-1}	id
σ^{-1}			

Tabla de composiciones

$\circ$	id	σ	σ^{-1}
id	id	σ	σ^{-1}
σ	σ	σ^{-1}	id
σ^{-1}	σ^{-1}	id	σ

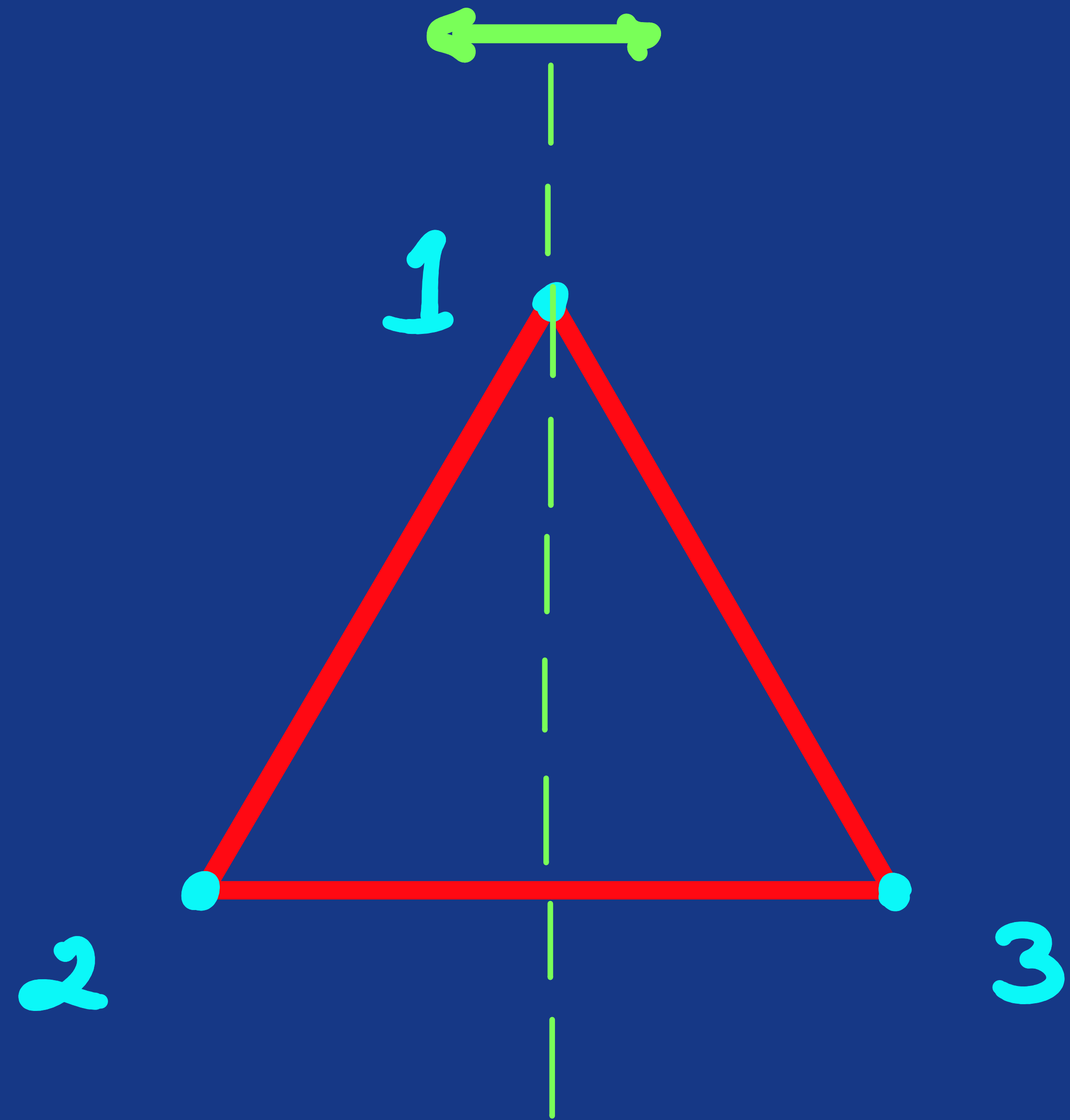
→ $id \circ \alpha = \alpha$ (α = cualquiera)

→ $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = id$

→ $\alpha^3 = \alpha \circ \alpha \circ \alpha = id$

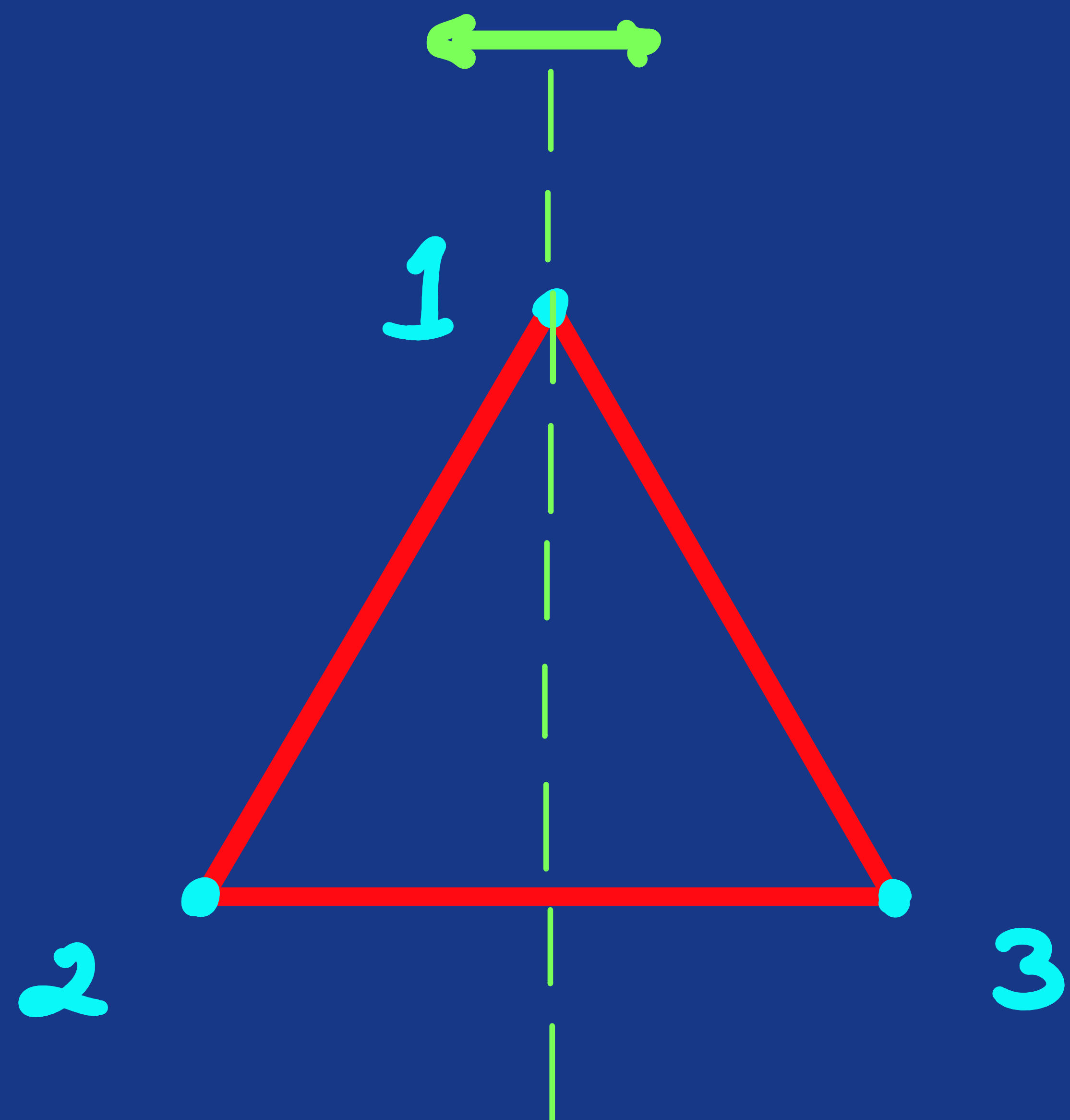
$\{id, \sigma, \sigma^{-1}\}$ forman un grupo cíclico : $\mathbb{Z}_3$

Reflexiones



$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Reflexiones



$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau^{-1} = \tau$$

$$\tau^2 = \tau \circ \tau = id$$

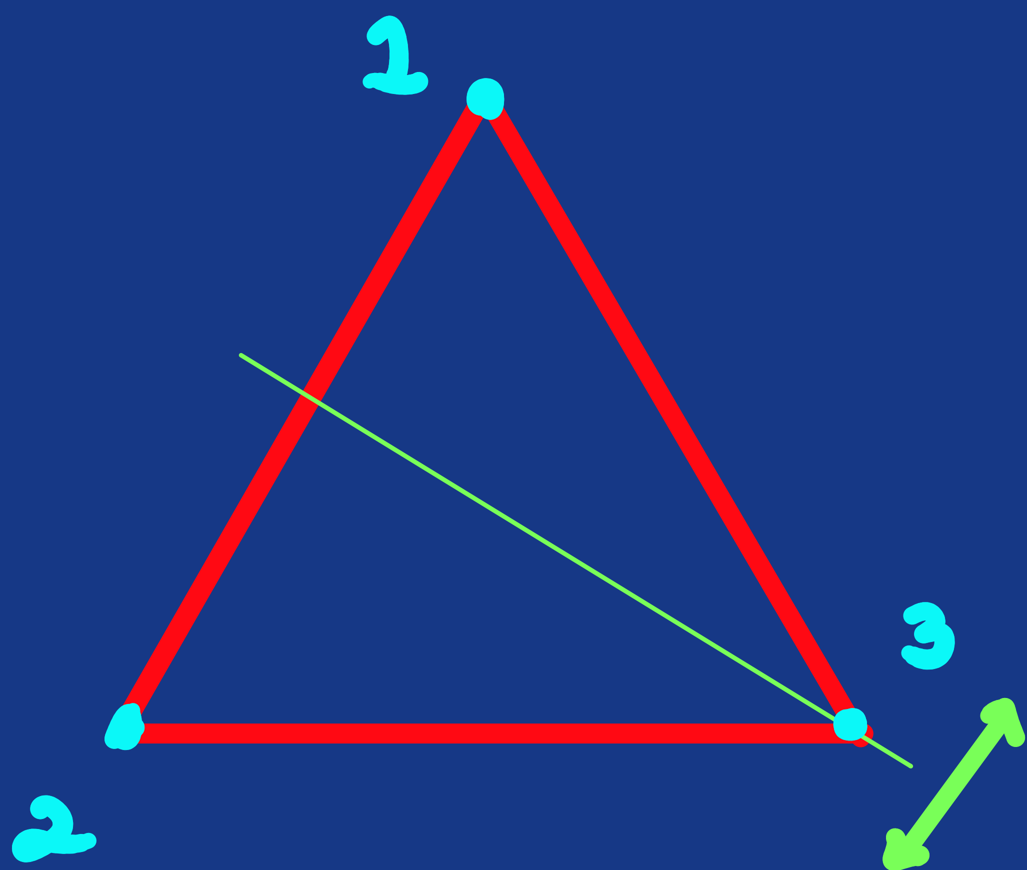
Tabla

$\circ$	id	τ
id	id	τ
τ	τ	id

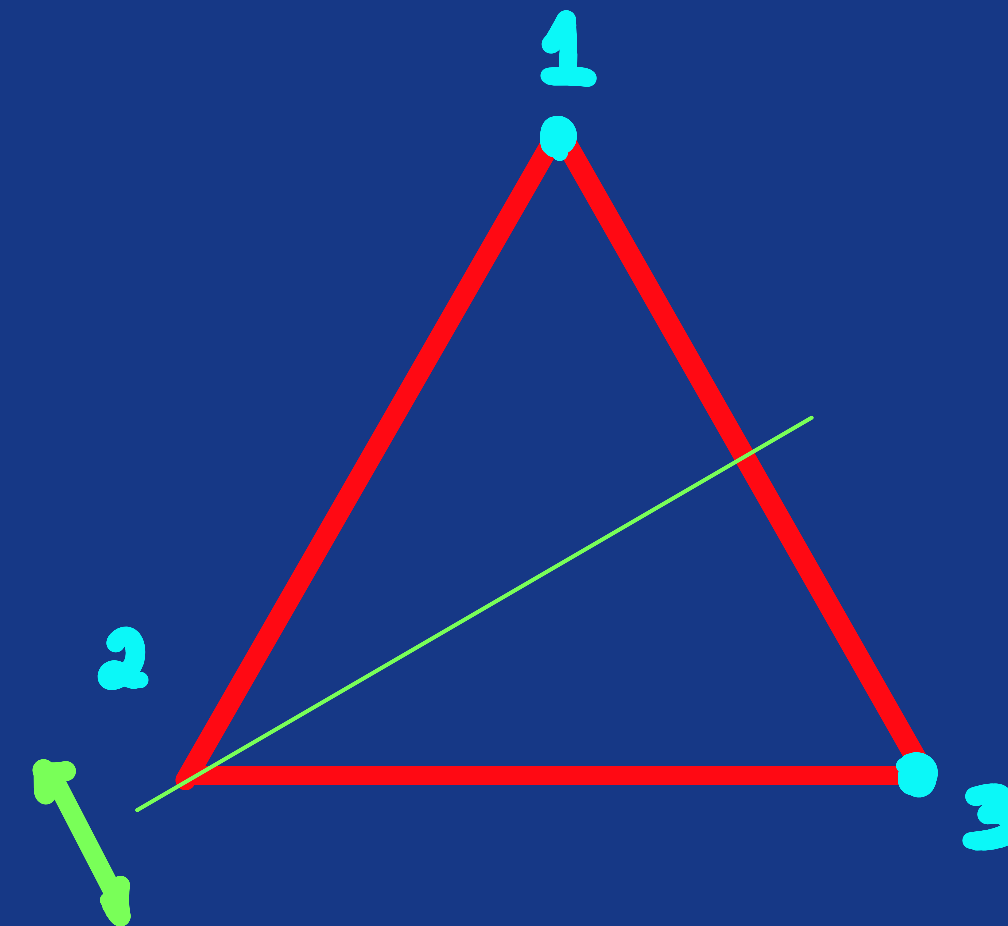
- $id \circ \alpha = \alpha$
- $\tau^2 = id$

$\{id, \tau\}$ forman el grupo cíclico $\mathbb{Z}_2$

Otras reflexiones



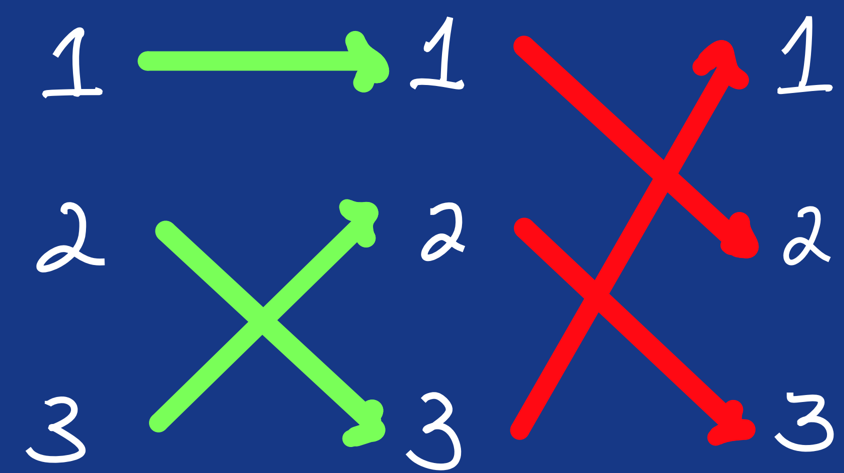
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



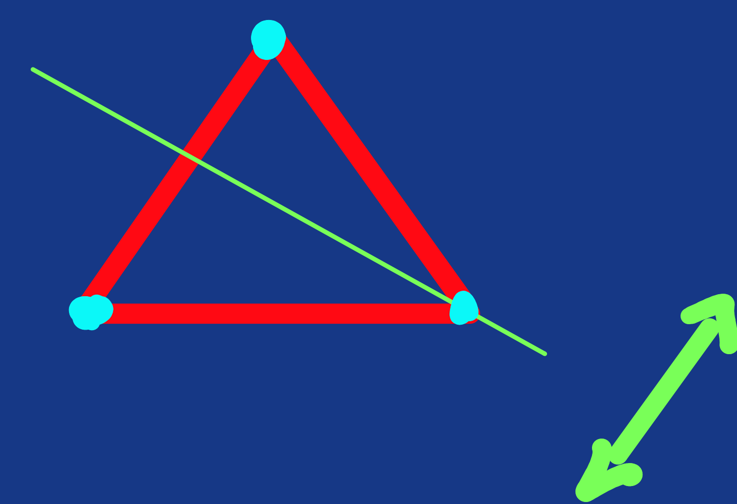
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\sigma \circ \tau$

$\sigma \circ \tau$:

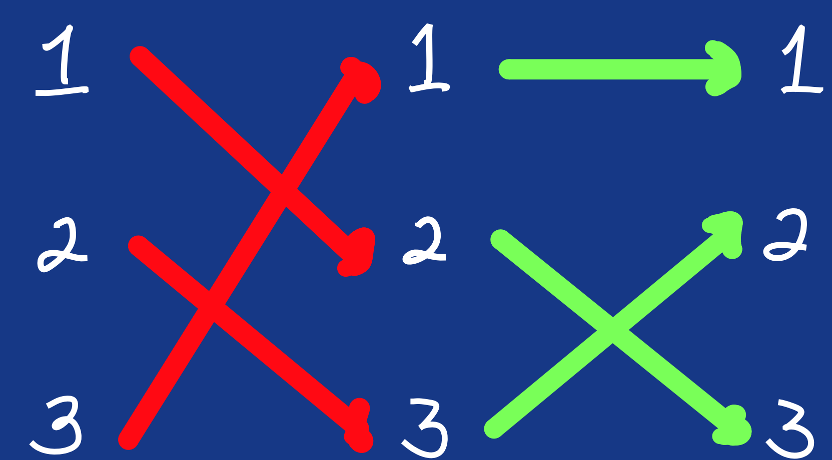


$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

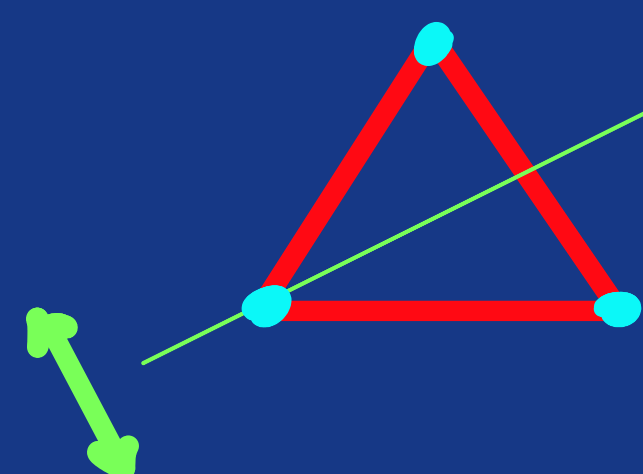


$\tau \circ \sigma$

$\tau \circ \sigma$:



$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Simetrías del $\triangle$

- σ y τ generan todas las demás
- σ genera un ciclo de 3; $\sigma, \sigma^2 = \sigma^{-1}, \sigma^3 = id$
- τ genera un ciclo de 2: $\tau, \tau^2 = id$
- σ y τ no conmutan: $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$

Tabla

$\circ$	id	σ	σ^2	τ	$\sigma\tau$	$\tau\sigma$
id	id	σ	σ^2	τ	$\sigma\tau$	$\tau\sigma$
σ	σ	σ^2	id	$\sigma\tau$	$\tau\sigma$	τ
σ^2	σ^2	id	σ	$\tau\sigma$	τ	$\sigma\tau$
τ	τ	$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	id	σ^2	σ
$\sigma\tau$	$\sigma\tau$	τ	$\tau\sigma$	σ	id	σ^2
$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	τ	σ^2	σ	id

Tabla

$\circ$	id	σ	σ^2	τ	$\sigma\tau$	$\tau\sigma$
id	id	σ	σ^2	τ	$\sigma\tau$	$\tau\sigma$
σ	σ	σ^2	id	$\sigma\tau$	$\tau\sigma$	τ
σ^2	σ^2	id	σ	$\tau\sigma$	τ	$\sigma\tau$
τ	τ	$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	id	σ^2	σ
$\sigma\tau$	$\sigma\tau$	τ	$\tau\sigma$	σ	id	σ^2
$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	τ	σ^2	σ	id

→ Cada renglón (y columna) tiene simetrías distintas

→ <u>No</u> forman un grupo cíclico

S_3 = permutaciones de 3 vértices

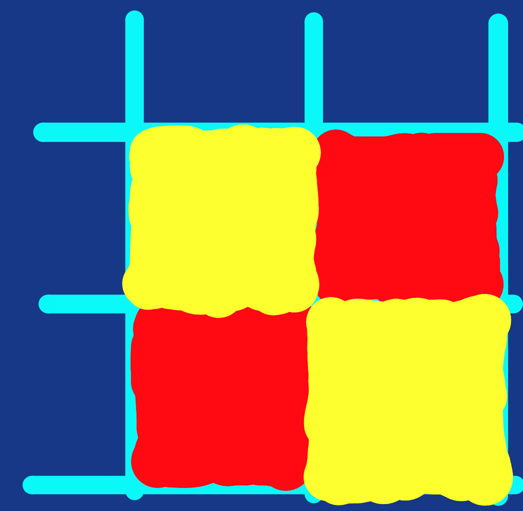
Permutaciones

Una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$ es una biyección $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$

- Composición: $\sigma \circ \tau(k) = \sigma(\tau(k))$
- Inversa: $\sigma^{-1}(k) = l \iff k = \sigma(l)$
- Grupo de permutaciones: S_n

Tabla

$\circ$	id	σ	σ^2	τ	$\sigma\tau$	$\tau\sigma$
id	id	σ	σ^2	τ	$\sigma\tau$	$\tau\sigma$
σ	σ	σ^2	id	$\sigma\tau$	$\tau\sigma$	τ
σ^2	σ^2	id	σ	$\tau\sigma$	τ	$\sigma\tau$
τ	τ	$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	id	σ^2	σ
$\sigma\tau$	$\sigma\tau$	τ	$\tau\sigma$	σ	id	σ^2
$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	$\tau\sigma$	τ	σ^2	σ	id

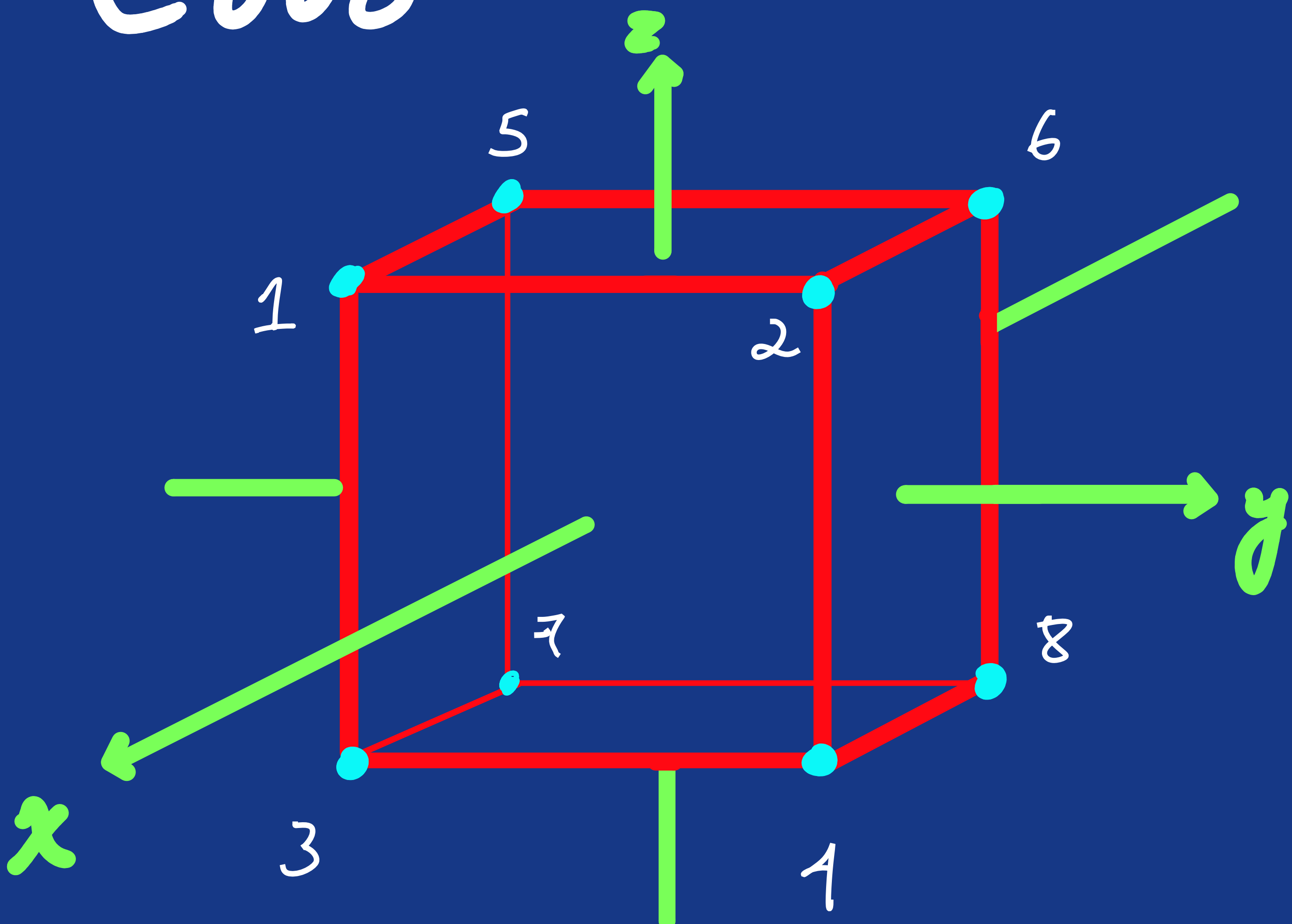


Los bloques $\{id, \sigma, \sigma^2\}$ y $\{\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$ forman un grupo $\mathbb{Z}_2$

Ejercicios (1):

- ¿Los bloques $\{id, \tau\}$, $\{\sigma, \tau\sigma\}$, $\{\sigma^2, \sigma\tau\}$ forman un grupo cíclico? (Sería $\mathbb{Z}_3$)
- ¿Cuántas permutaciones tiene S_n?

Cubo



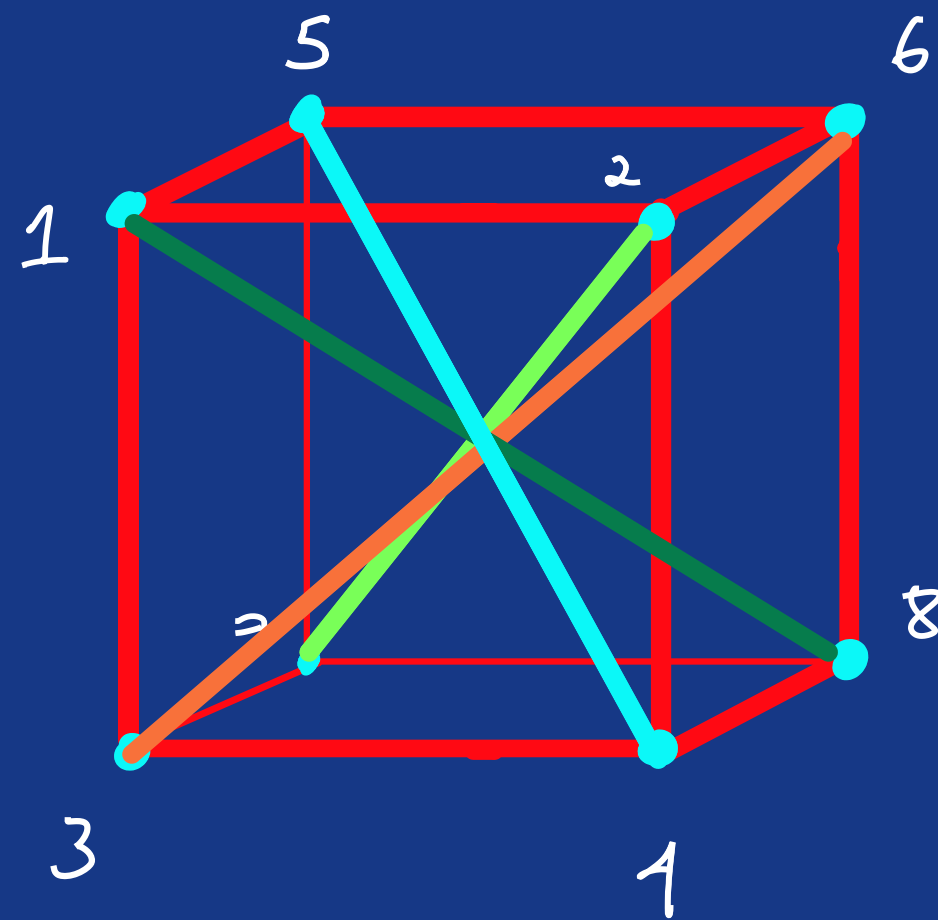
Considera las simetrías rígidas del cubo (rotaciones)

Enumera los vértices $1, 2, \ldots, 8$

Ejercicios (2):

- ¿Cuántas simetrías tiene el cubo?
- ¿A qué permutaciones de los vértices corresponden las rotaciones alrededor del eje x? ¿Del eje y? ¿Del eje z?
- ¿Qué permutaciones dejan fijos los 3 ejes?
- ¿Qué permutaciones intercambian los ejes x-y?
- ¿Qué permutaciones ciclan los ejes: $x \to y \to z \to x$?

Ejercicios (3):



- Considera las preguntas anteriores con respecto a las diagonales:

  $1 \leftrightarrow 8$, $2 \leftrightarrow 7$

  $3 \leftrightarrow 6$, $4 \leftrightarrow 5$

Rotaciones del cubo

- 24 : 4 al ponerlo "sobre" cada cara
- Rotaciones por x:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$ y potencias

- Permutaciones que dejan fijos los ejes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rotaciones del cubo

- Intercambian x-y: rotaciones por z, y después de voltear z
- Ciclan los ejes: $x \to y \to z \to x$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 2 & 4 & 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 8 & 6 & 3 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

→ Cuatro por cada una que fija xyz

Las diagonales son "fieles"

- Solo la identidad fija las diagonales

→ Las rotaciones del cubo corresponden a las permutaciones de las diagonales: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$\alpha: 1 \leftrightarrow 8, \quad \beta: 2 \leftrightarrow 7, \quad \gamma: 3 \leftrightarrow 6, \quad \delta: 4 \leftrightarrow 5$

- Rotaciones alrededor de α: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \delta & \beta & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \gamma & \delta & \beta \end{pmatrix}$

→ Similarmente alrededor de las demás

Diagonales

- Intercambia $\alpha \leftrightarrow \beta$: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

- Ciclo $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \delta \rightarrow \alpha$: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \gamma & \delta & \alpha \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 8 & 1 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

El grupo S_n

Permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$

- $\#S_n = n! = n(n-1)(n-2)\dots(2)(1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ * & * & * & & * & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} n \text{ posibilidads} & (n-1) & (n-2) & & 2 & \text{solo queda } 1 \end{array}$$

Ciclos

- Permutación tal que $a_1 \to a_2 \to \dots \to a_k \to a_1$ y deja fijos a los demás

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow \quad 2 \to 3 \to 5 \to 2$$

La denotamos por $(2\,3\,5)$

En general: $(a_1\, a_2 \dots a_k)$ (k-ciclo)

Productos de ciclos

- Toda permutación es un producto de ciclos (composición):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 8 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (1\,6\,3\,2)(4)(5\,8)(7)$$

→ Un 1-ciclo es la identidad

→ Ciclos disjuntos permutan

Productos de ciclos

- Ciclos no disjuntos no permutan

$$(1\ 2\ 3)(2\ 4) = (2\ 4\ 3\ 1) = (1\ 2\ 4\ 3)$$
$$(2\ 4)(1\ 2\ 3) = (1\ 4\ 2\ 3)$$

$$(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3) \quad \leftarrow \text{Fija a } 2$$
$$(1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3) \quad \leftarrow \text{Fija a } 1$$

Transposiciones

Una transposición es un 2-ciclo: (ab)

- Todo ciclo es un producto de transposiciones:

$$(a_1\, a_2 \dots a_k) = (a_1\, a_k)(a_1\, a_{k-1}) \cdots (a_1\, a_3)(a_1\, a_2)$$

Ejemplo: $(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$

Corolario: Toda permutación es producto de transposiciones.

Transposiciones

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 8 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} = \sigma$

  $\sigma = (1\ 6\ 3\ 2)(5\ 8) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 6)(5\ 8)$

- La expresión no es única:

  $\sigma = (1\ 6)(2\ 6)(3\ 6)(5\ 8)$

  $= (1\ 6)(2\ 3)(3\ 6)(2\ 6)(2\ 3)(5\ 8)$

Paridad

Teorema. Si $\sigma_1, \dots, \sigma_k, \tau_1, \dots, \tau_m$ son transposiciones y $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m$, entonces $k-m$ es par.

→ Todas las expresiones tienen la misma paridad

→ Las permutaciones son clasificadas por su paridad: pares e impares

Paridad

El signo de σ es $+1$ si σ es par, o -1 si σ es impar: $\mathrm{sgn}(\sigma)$

- Si σ es un k-ciclo, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$
- $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$
- $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$
- Las permutaciones pares forman un subgrupo de S_n: A_n

Paridad

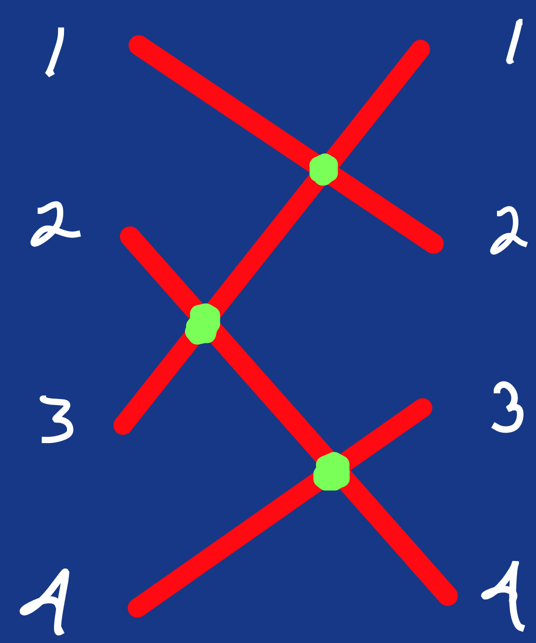
- El signo de σ puede ser calculado como

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - x_j}{x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}}$$

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)}{(x_2 - x_4)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_4 - x_1)(x_4 - x_3)(x_1 - x_3)} = -1$$

Paridad



3 cruces

$\to$ 3 cambios de signo

$\Rightarrow$ impar

Ejercicios (1):

- ¿Cuáles simetrías del $\triangle$ corresponden a las permutaciones pares de sus vértices? Descríbelas geométricamente.
- ¿Cuáles rotaciones del cubo corresponden a las permutaciones pares de S_4 (diagonales)? ¿Cuál es la paridad de las que fijan los ejes? ¿De las rotaciones?

Ejercicios (5):

- Escribe las siguientes permutaciones como producto de ciclos, y como producto de transposiciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & 7 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Determina su paridad