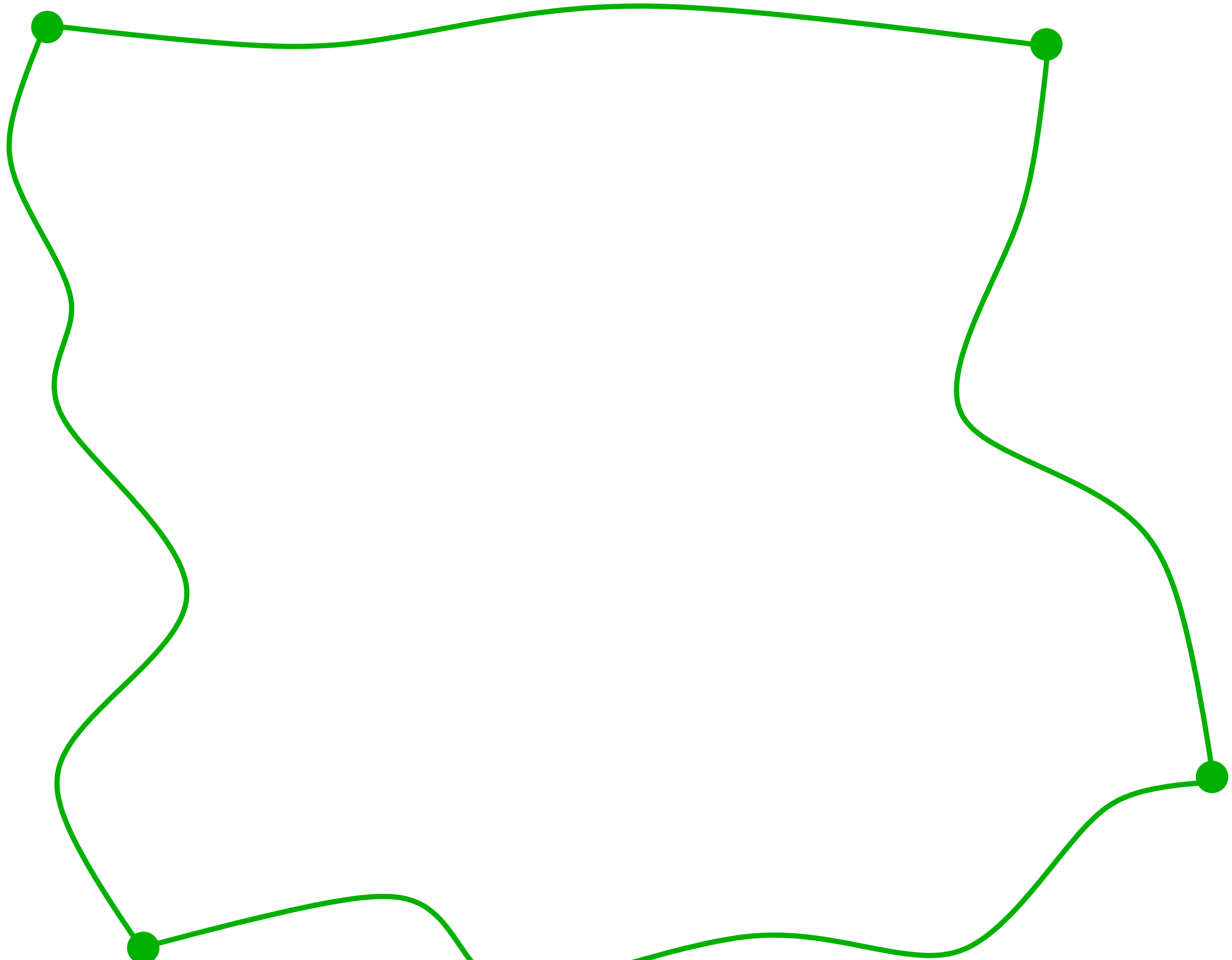
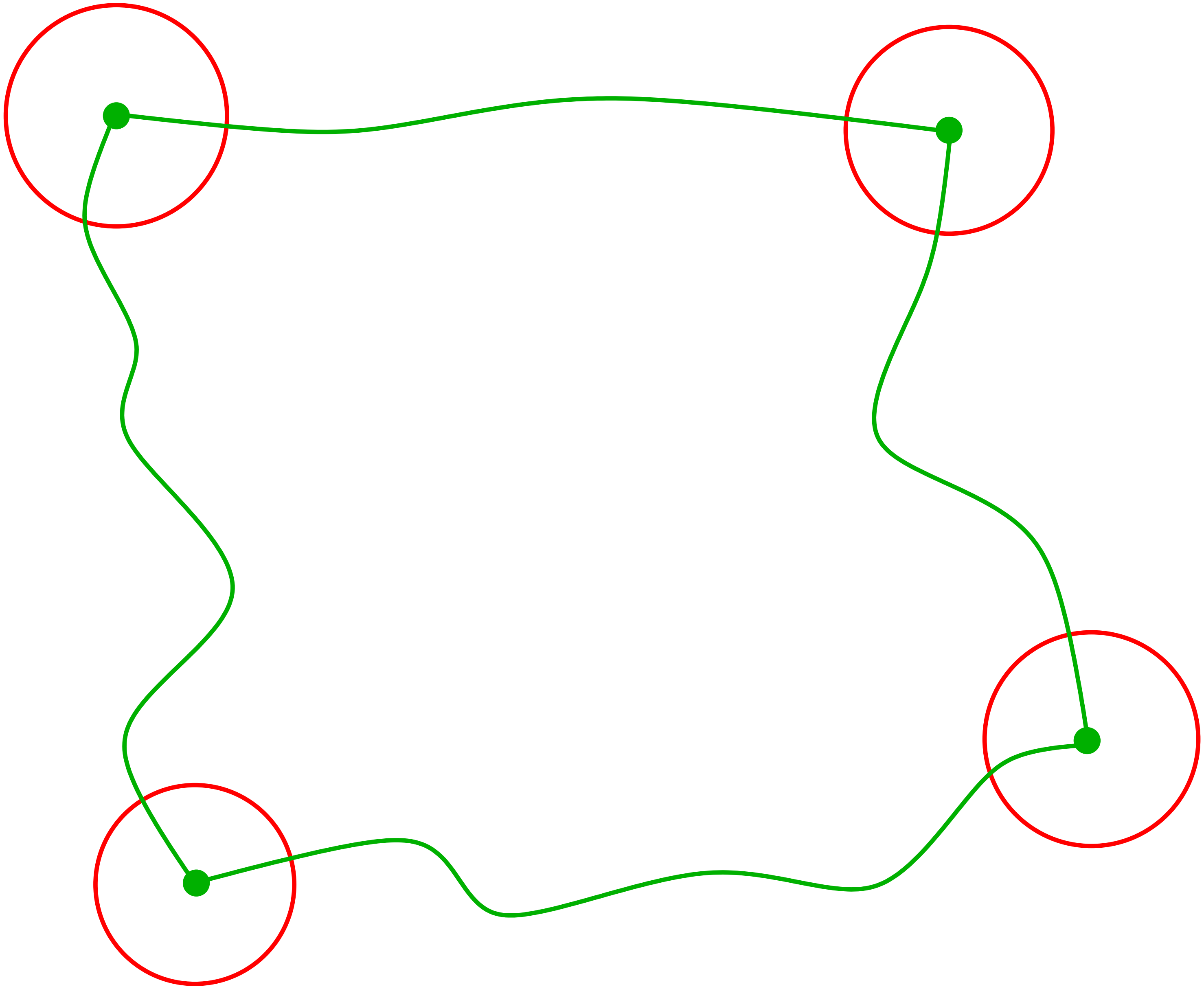
ejemplo

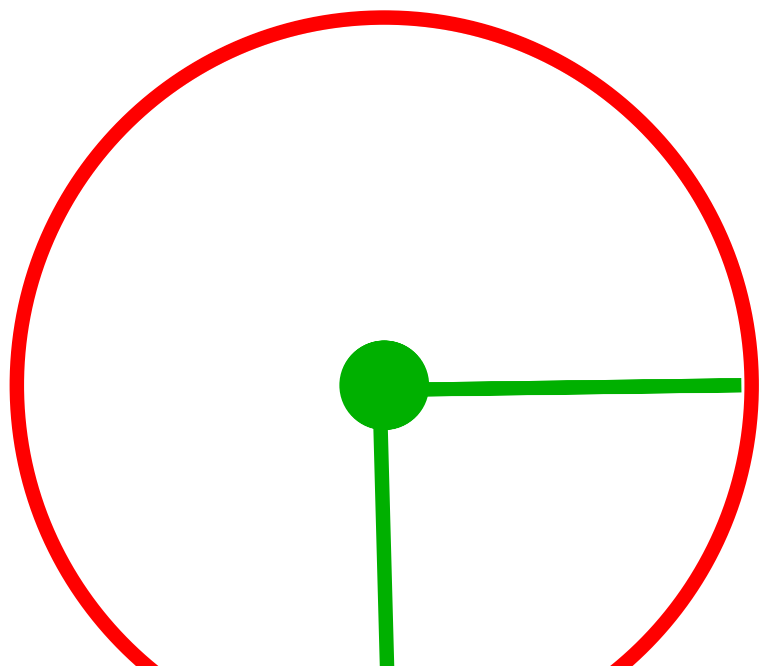
12	1	4	8	10	14	2	16	20	6	22	12	24	18
12	2	4	8	10	14	2	16	20	6	22	24	12	18
12	3	4	8	10	14	2	16	20	6	24	22	12	18
12	4	4	8	10	14	2	18	6	20	22	12	24	16
12	5	4	8	10	14	2	18	6	22	12	24	16	20
12	6	4	8	10	14	2	18	6	22	20	12	24	16
12	7	4	8	10	14	2	18	20	6	22	24	16	12
12	8	4	8	10	14	2	20	6	22	24	12	18	16
12	9	4	8	10	14	2	20	6	24	22	12	18	16
12	10	4	8	10	14	2	20	16	6	22	12	24	18
12	11	4	8	10	14	2	20	16	6	22	24	12	18
12	12	4	8	10	14	2	20	16	6	24	22	12	18
12	13	4	8	10	14	2	20	18	6	22	24	16	12
12	14	4	8	10	14	2	20	22	6	12	24	16	18
12	15	4	8	10	14	2	22	20	6	12	24	16	18

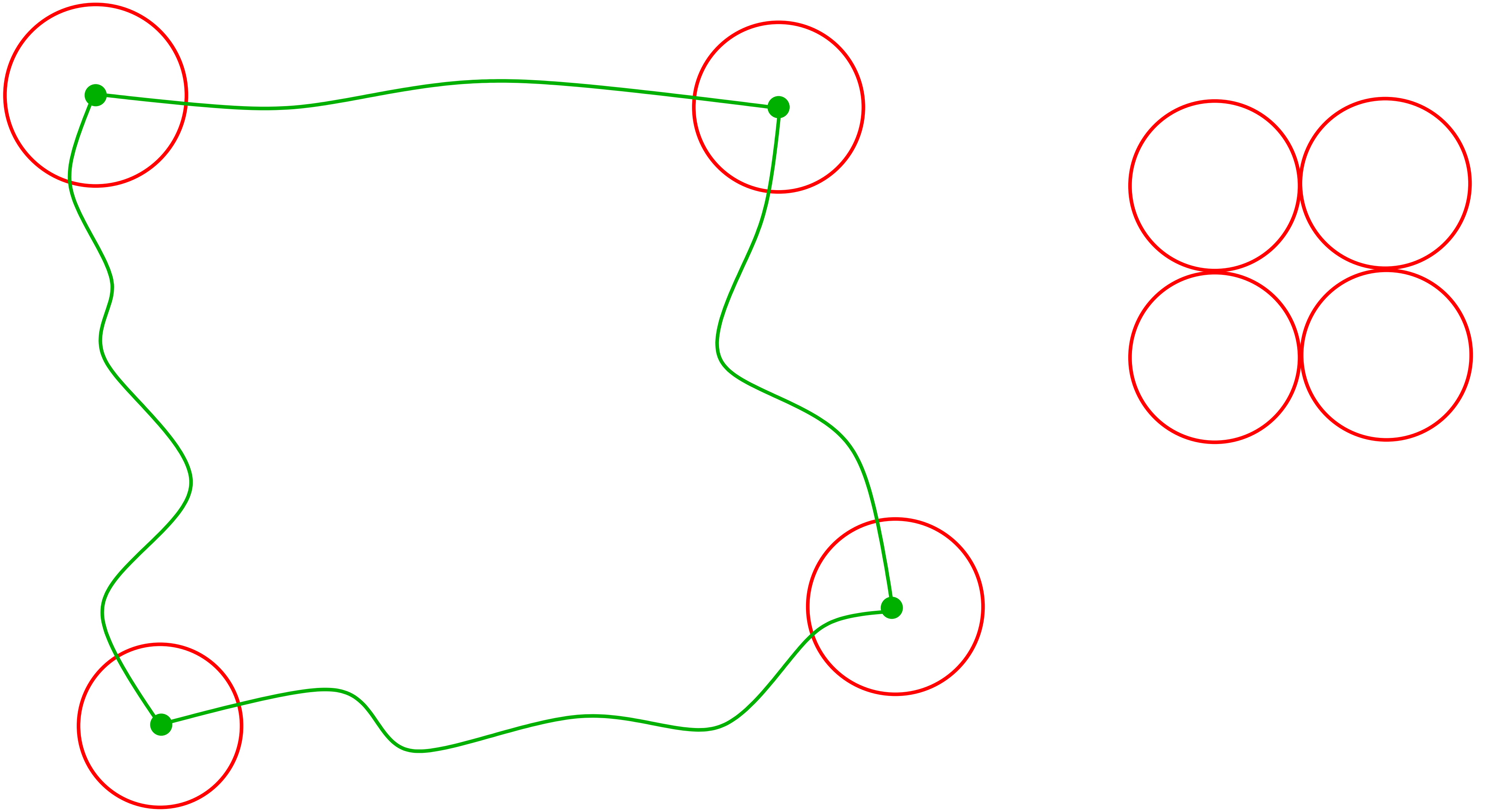
¿Cómo podemos mejorar estos dibujos?

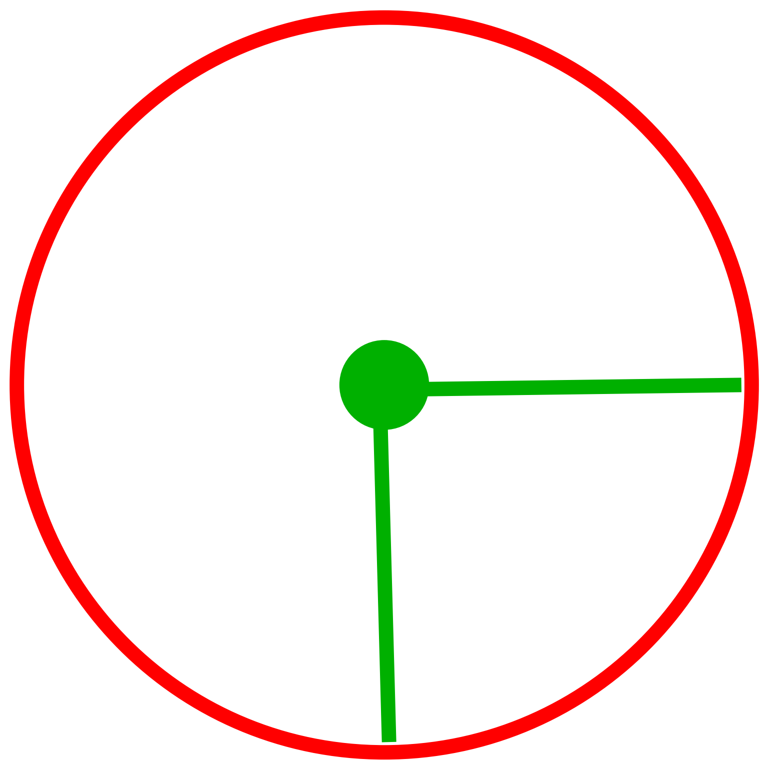
¡Círculos!

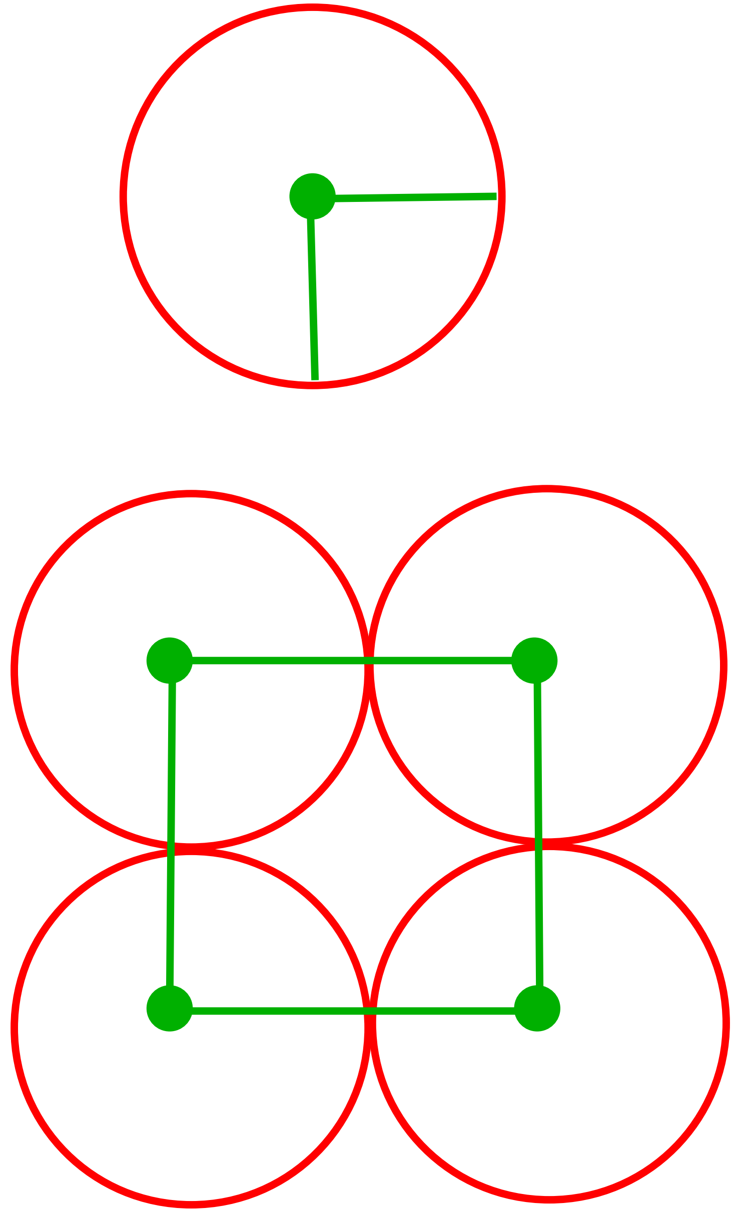






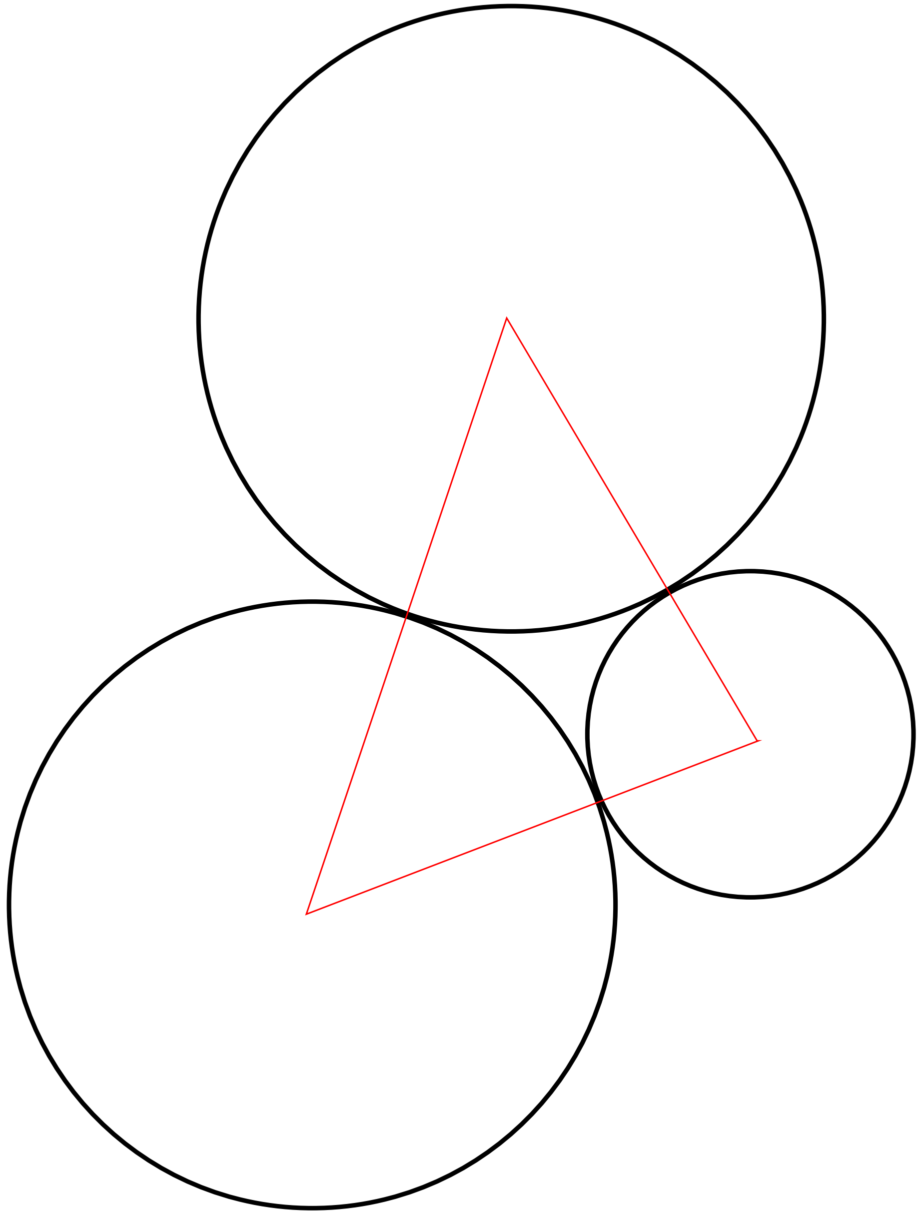




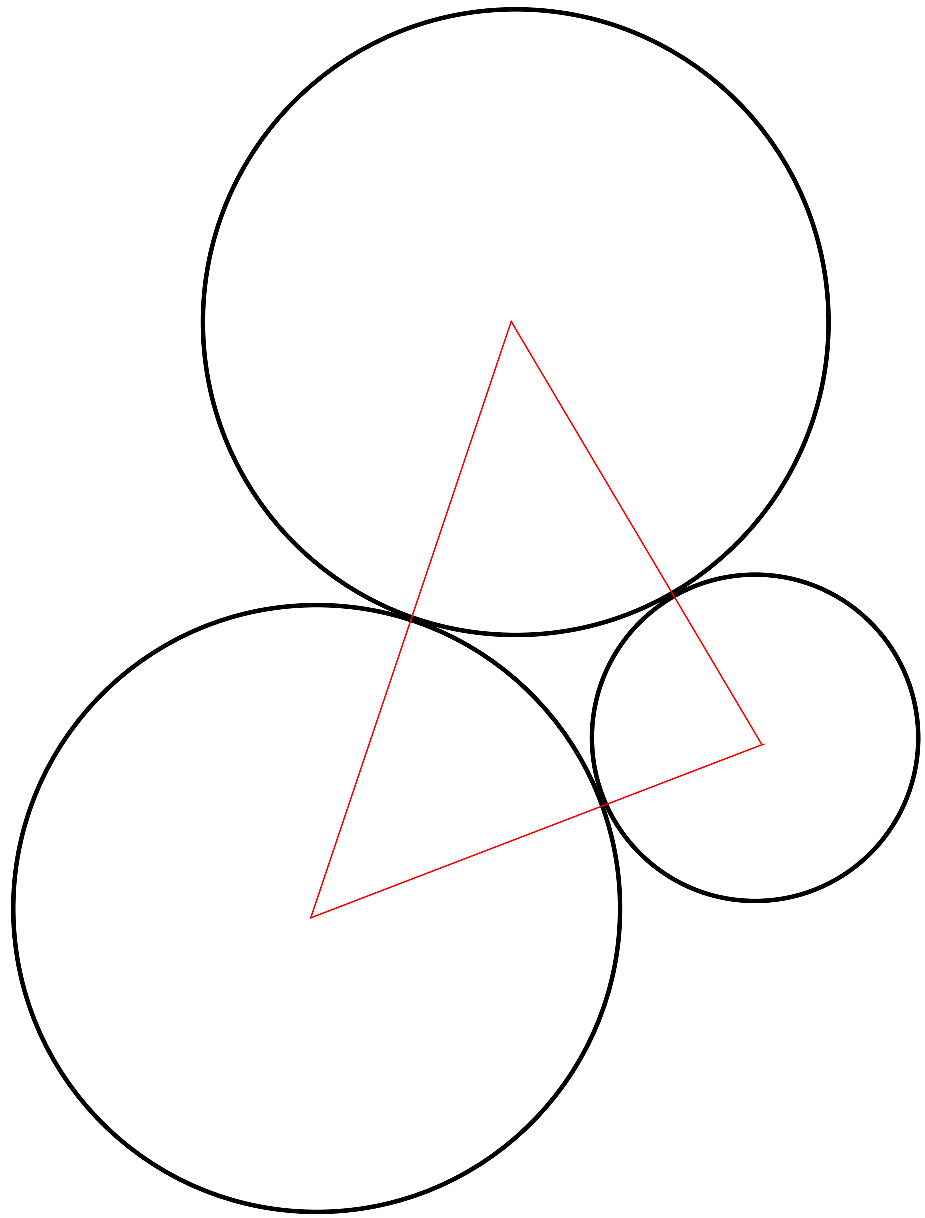


Hay que inflar círculos

(y ponerlos tangentes)

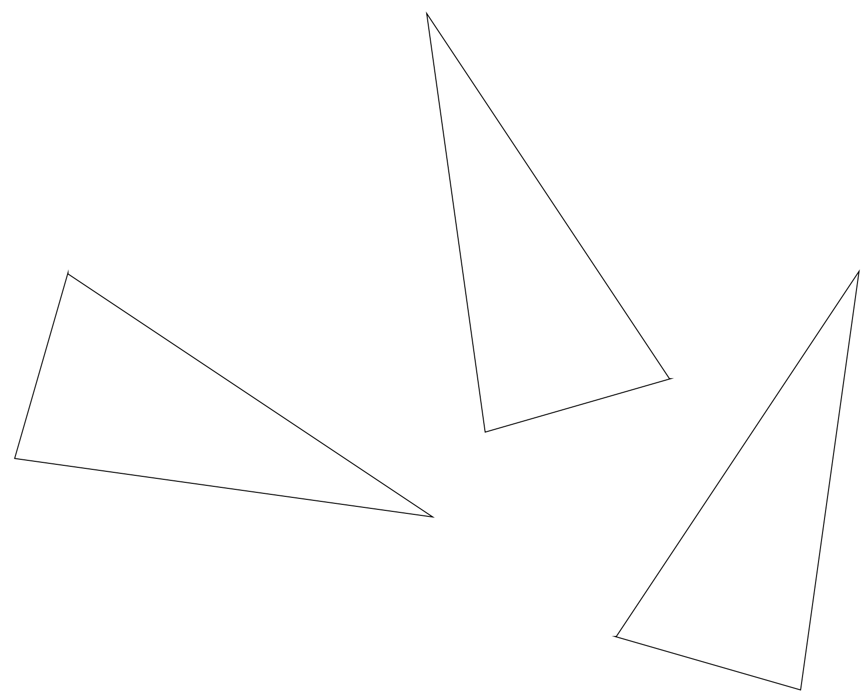


Queremos entender el triángulo que pasa por los centros de los círculos.



¿Qué quiere decir "entender un triángulo"?

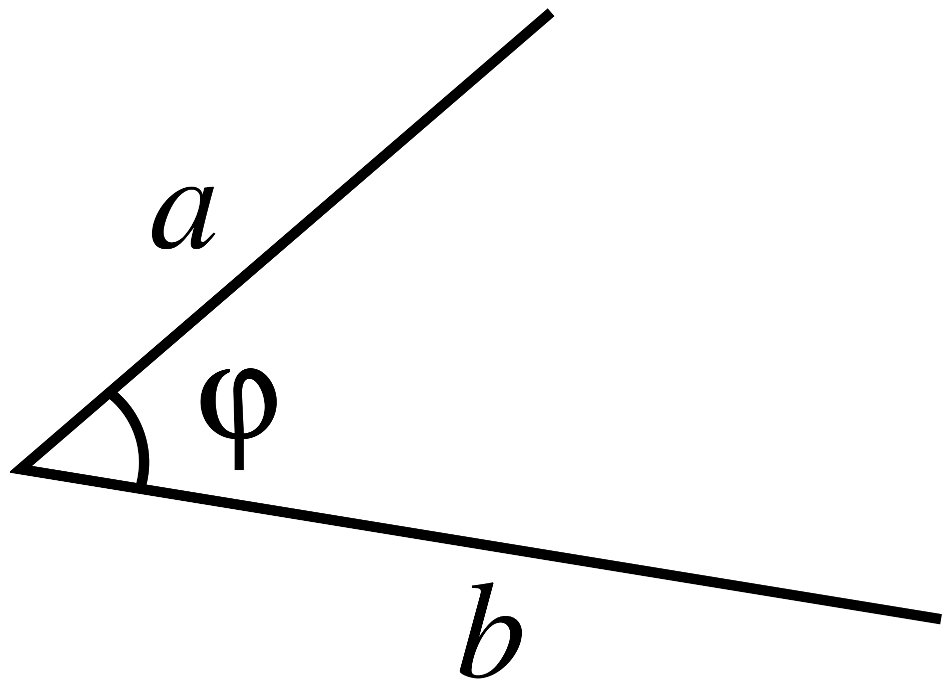
Puedo decir que entiendo un triángulo, si sé cuánto miden sus tres lados y cuánto miden sus tres ángulos.



Pero, ¿de veras necesito saber tánto?

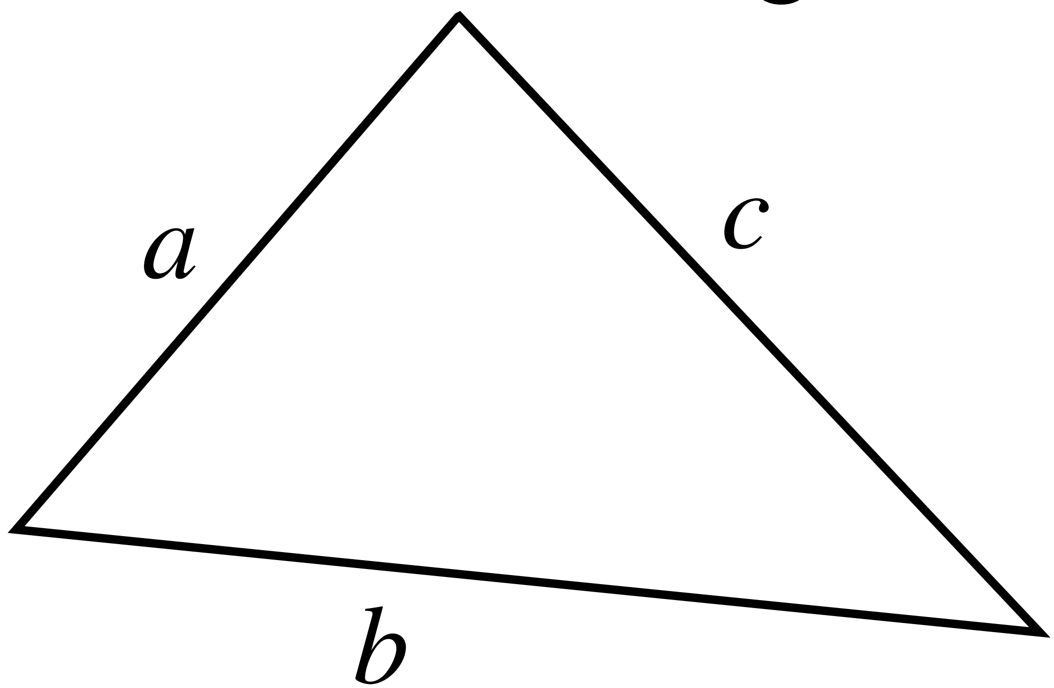
En un triángulo

1) LAL: Si conozco dos de sus lados y el ángulo entre estos lados, entonces puedo concer todo el triángulo.



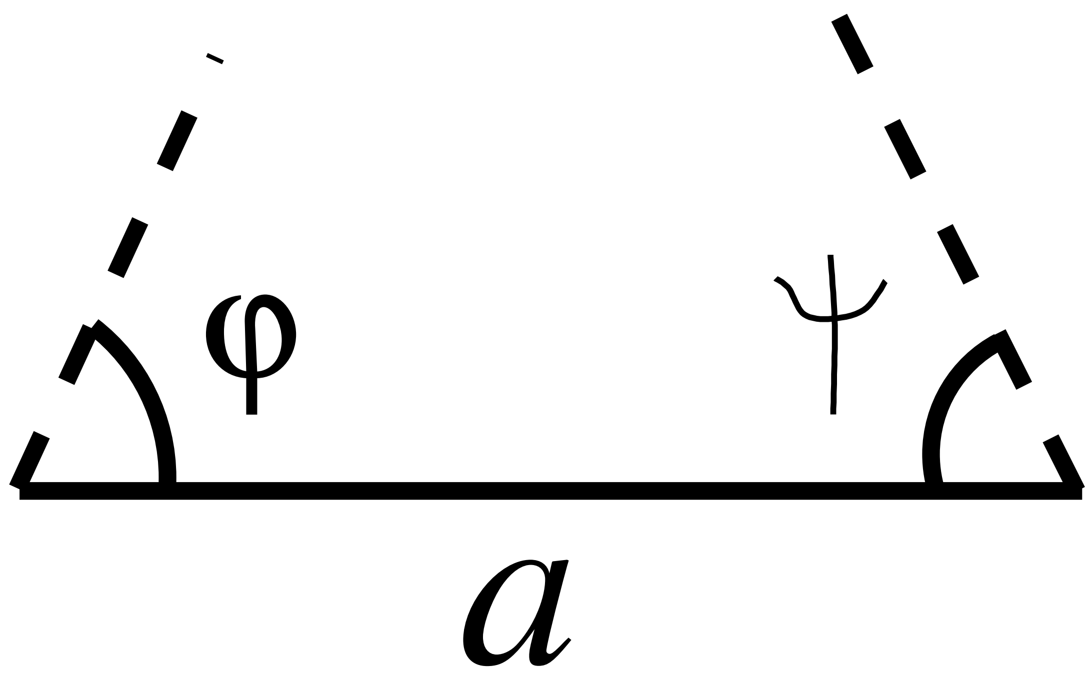
En un triángulo

1) LLL: Si conozco sus tres lados, entonces puedo concer todo el triángulo.



En un triángulo

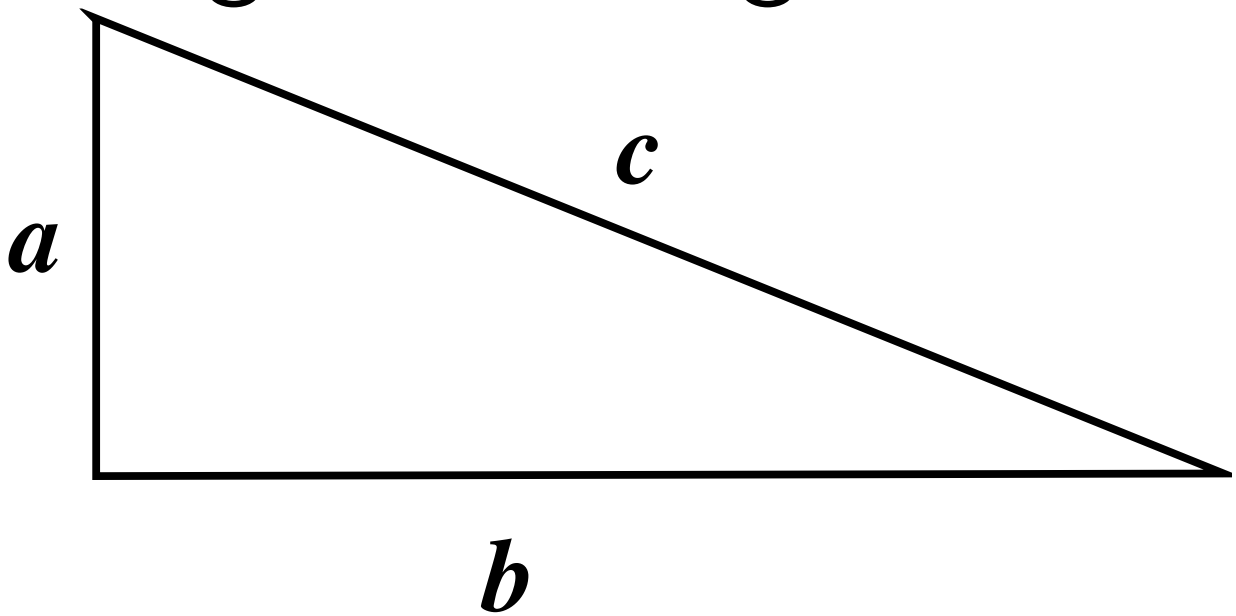
1) LAL: Si conozco dos de sus ángulos y el lado entre estos ángulos, entonces puedo concer todo el triángulo.



Pero, ¿de veras los conozco? (o sea, ¿los puedo calcular?)

Este,... Pues vamos a ver:

En un triángulo rectángulo,

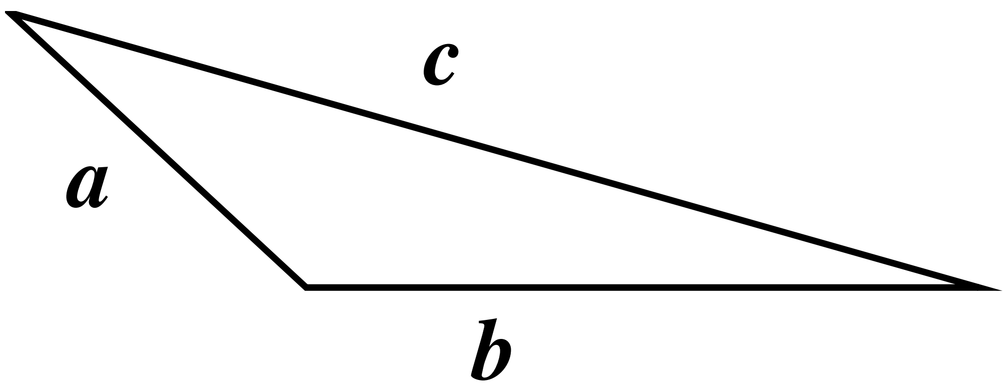


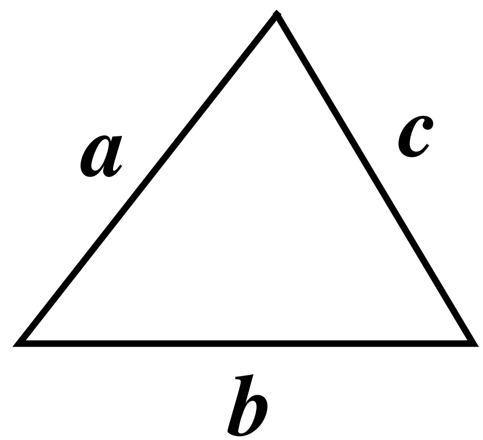
Se cumple $c^2 = a^2 + b^2$.

Tengo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \sqrt{b^2 - c^2}$ y $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

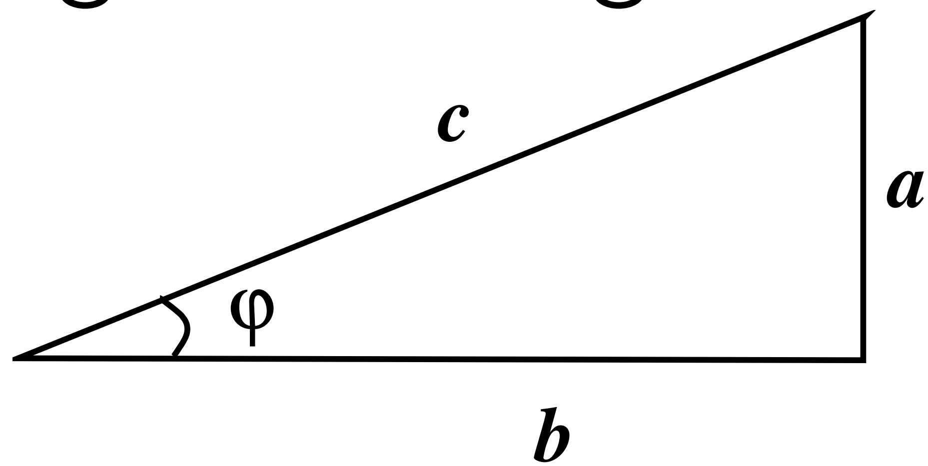
(También se vale el regreso:
si en un triángulo de lados a, b y c se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$, entonces el triángulo es rectángulo.)

Si tenemos un triángulo que no es rectángulo, ¿qué podemos decir?



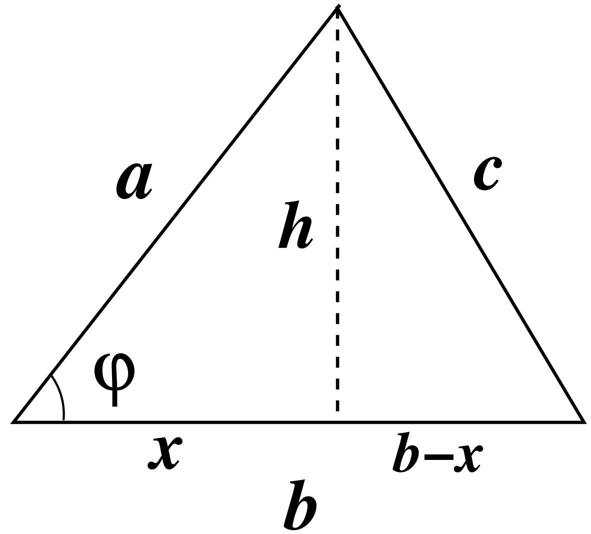


En un triángulo rectángulo



$$\cos\varphi = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

Trazamos una altura h:



$\cos\varphi = \frac{x}{a}$, o sea $x = a\cos\varphi$

$a^2 = x^2 + h^2$, o sea, $h^2 = a^2 - x^2$.

$c^2 = h^2 + (b-x)^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2$

Sustituimos: $c^2 = (a^2 - x^2) + b^2 - 2bx + x^2 = a^2 + b^2 - 2bx$

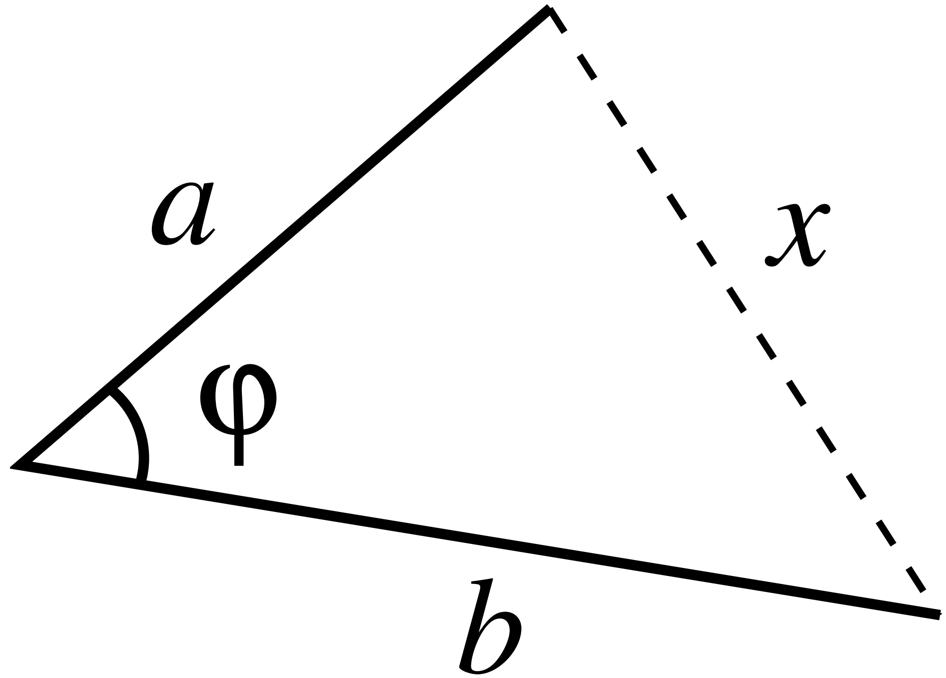
Cambiamos el valor de $x = a\cos\varphi$ y

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$$

En un triángulo con lados a, b y c y ángulo φ, opuesto a c, se cumple

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$$

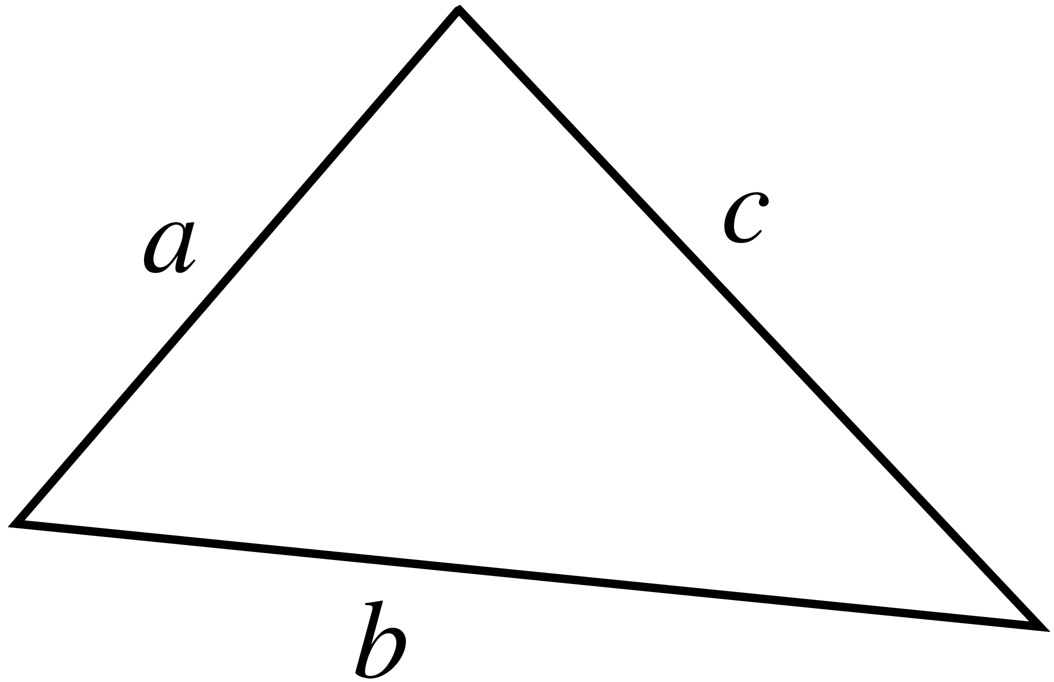
LAL:



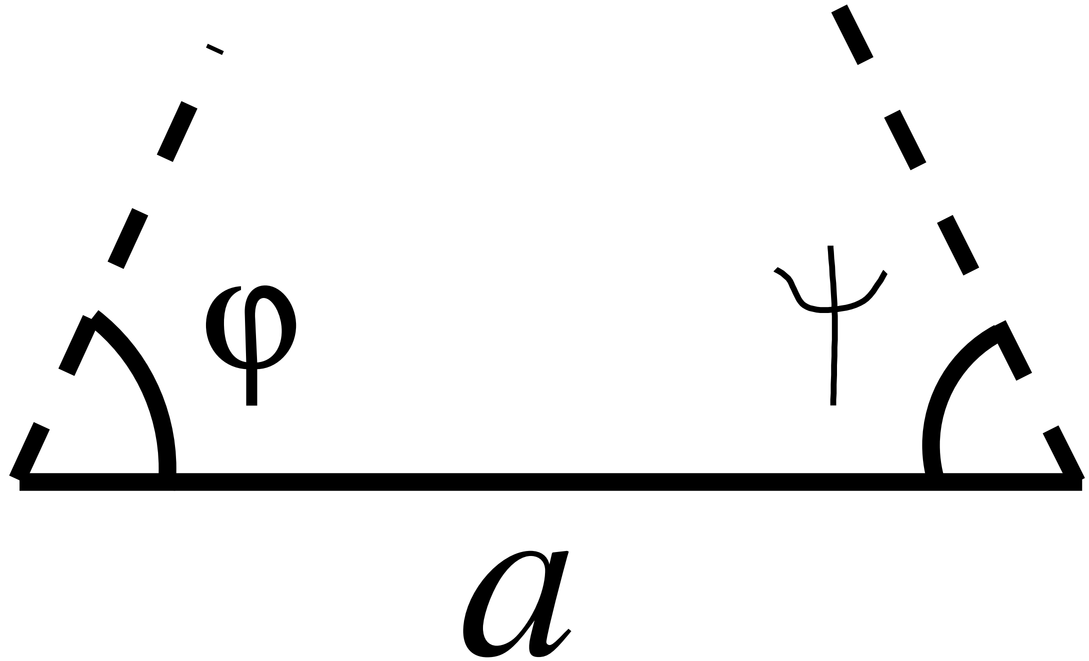
Tenemos $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$

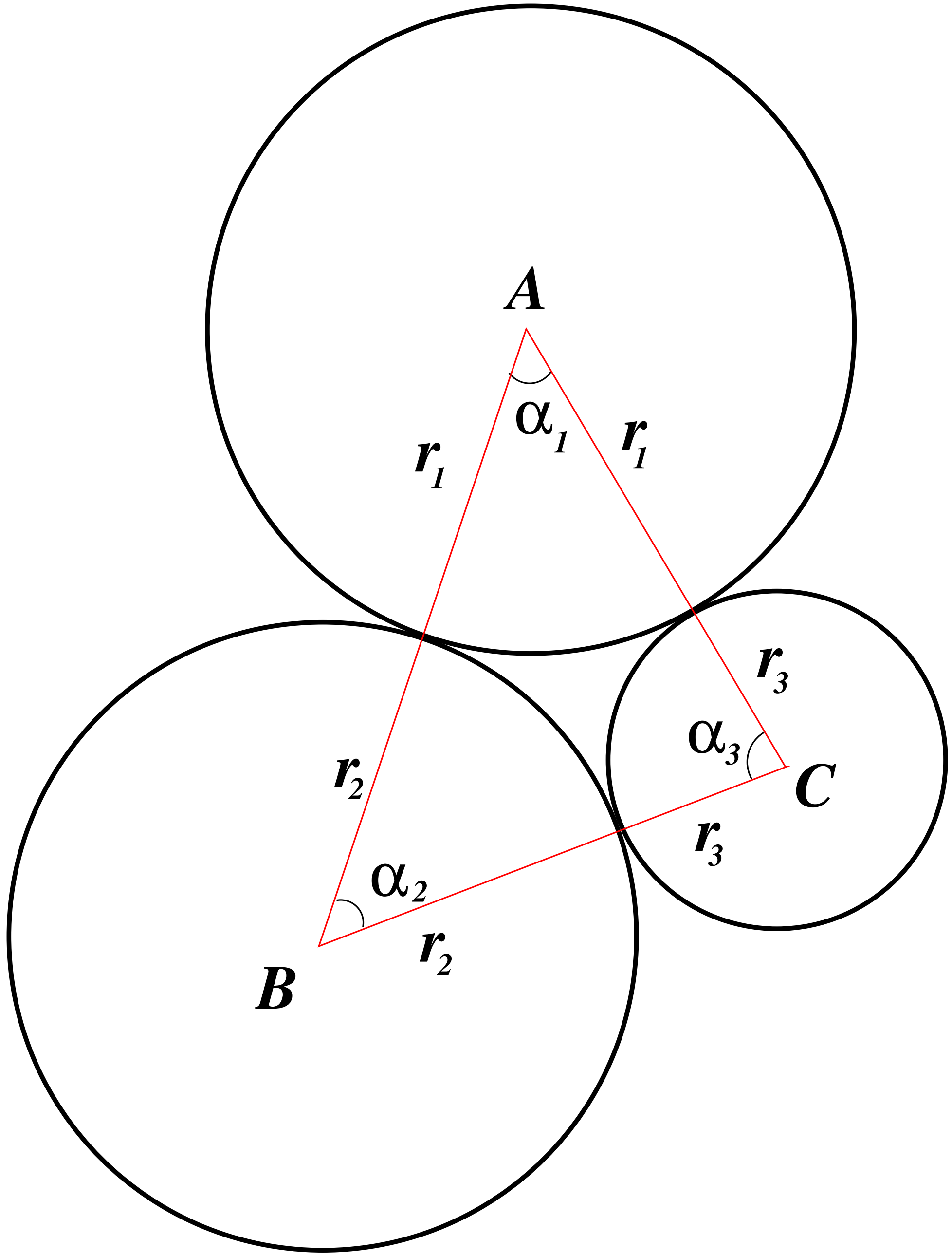
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}$$

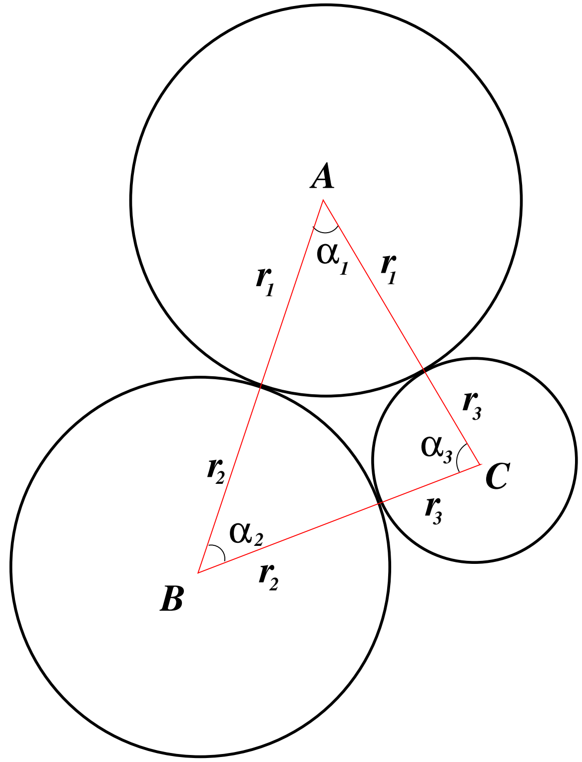
LLL:



ALA:




A
B
C
α1
α2
α3
r1
r1
r2
r2
r3
r3



Ley de los Cosenos: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2(\overline{AB})(\overline{AC})\cos\alpha_1$

o sea, $(r_2+r_3)^2 = (r_1+r_2)^2 + (r_1+r_3)^2 - 2(r_1+r_2)(r_1+r_3)\cos\alpha_1$

o bien, $\cos\alpha_1 = \frac{(r_2+r_3)^2-(r_1+r_2)^2-(r_1+r_3)^2}{-2(r_1+r_2)(r_1+r_3)} = \frac{(r_1+r_2)^2(r_1+r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r_1+r_2)(r_1+r_3)}$

$$\cos\alpha_1 = \frac{(r_1+r_2)^2+(r_1+r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r_1+r_2)(r_1+r_3)}$$

“Despejamos”

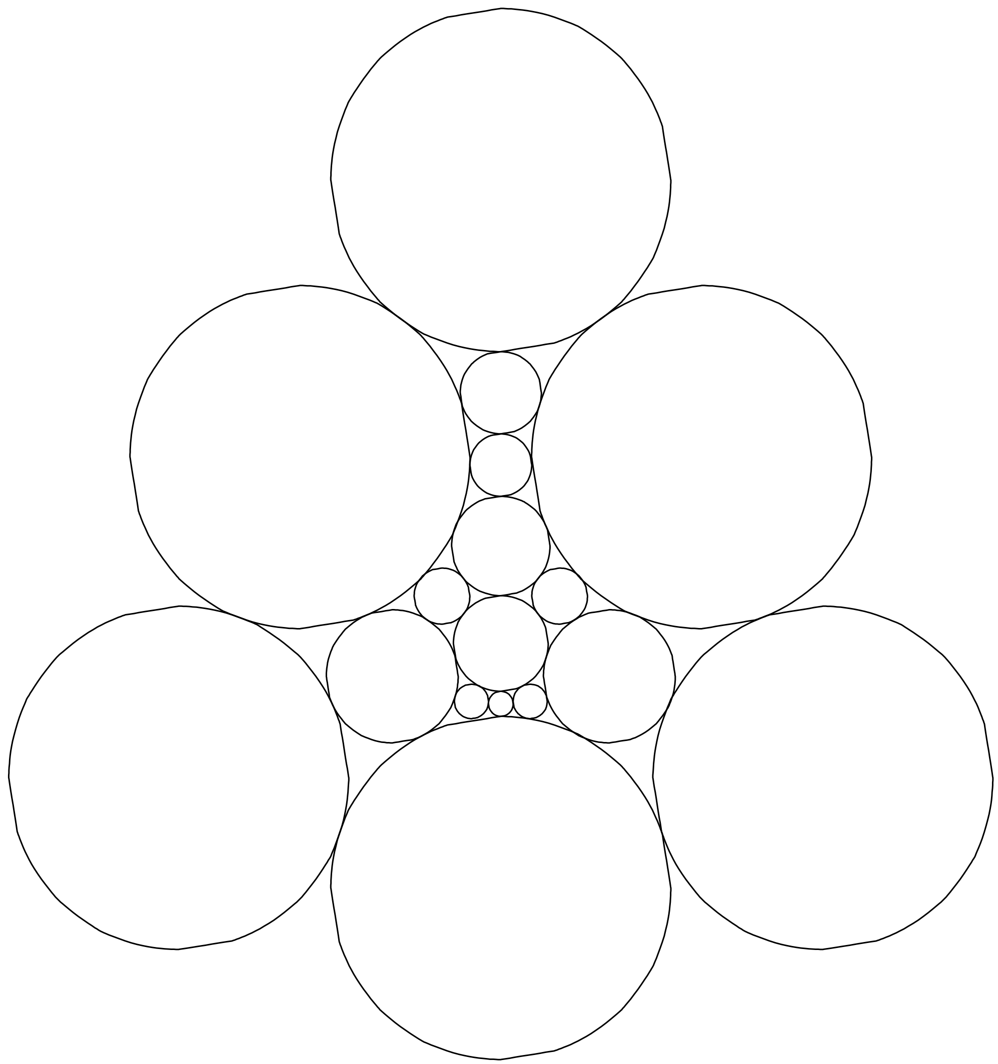
$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{(r_1+r_2)^2+(r_1+r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r_1+r_2)(r_1+r_3)}\right).$$

De manera similar

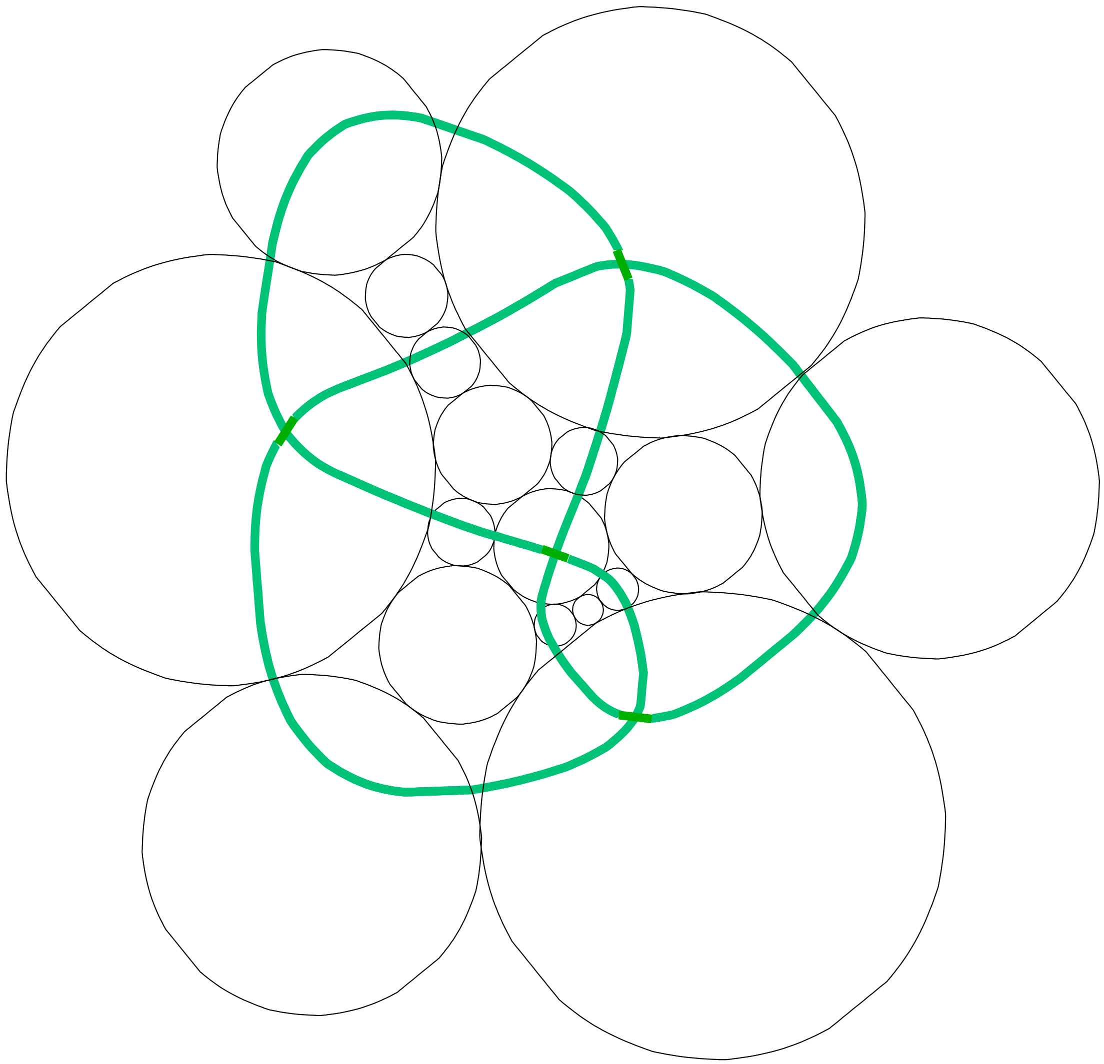
$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{(r_2+r_1)^2+(r_2+r_3)^2-(r_1+r_3)^2}{2(r_2+r_1)(r_2+r_3)}\right),$$

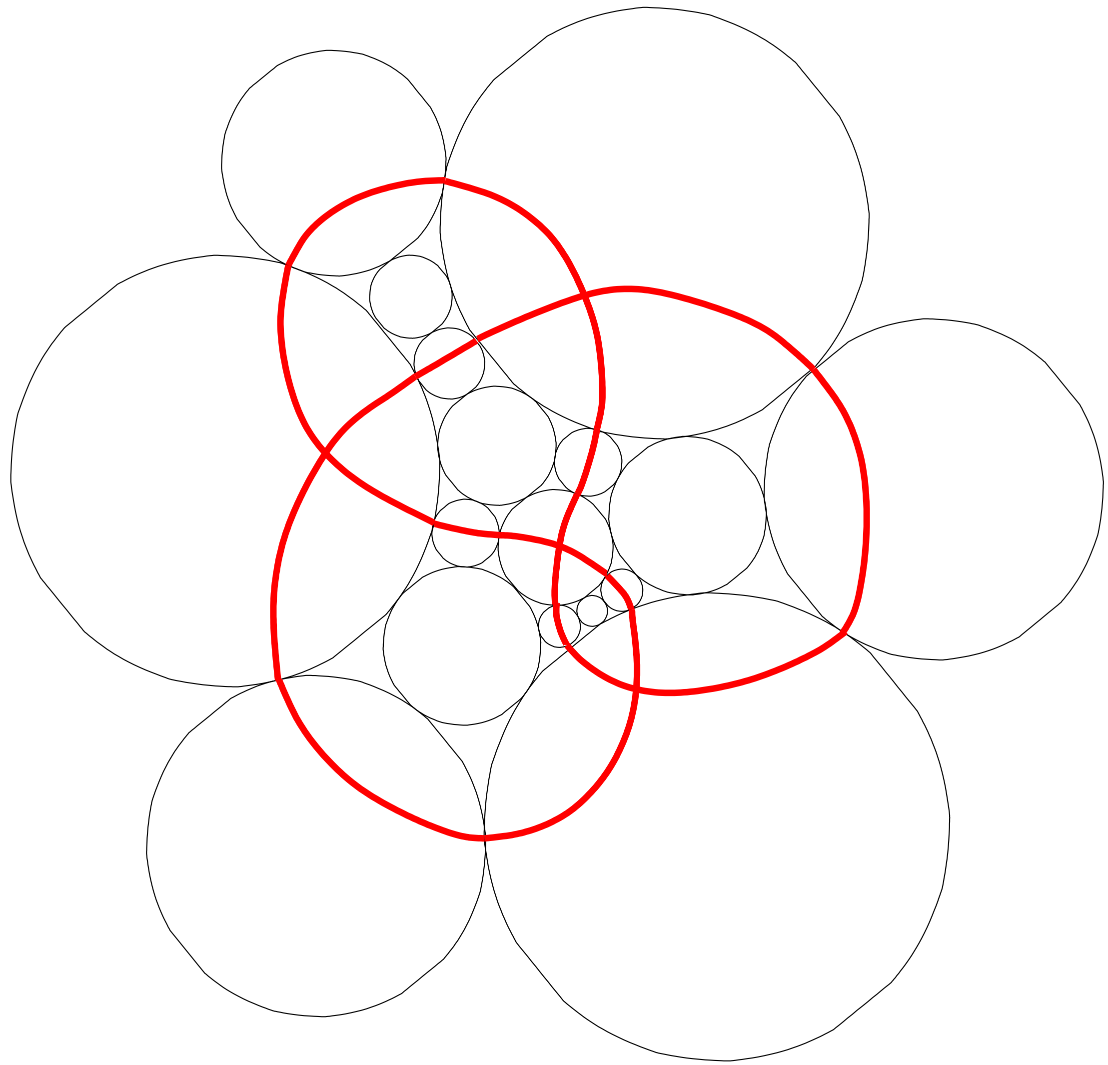
$$\alpha_3 = \arccos\left(\frac{(r_3+r_2)^2+(r_3+r_1)^2-(r_1+r_2)^2}{2(r_3+r_2)(r_3+r_1)}\right).$$

Estamos buscando cosas así:

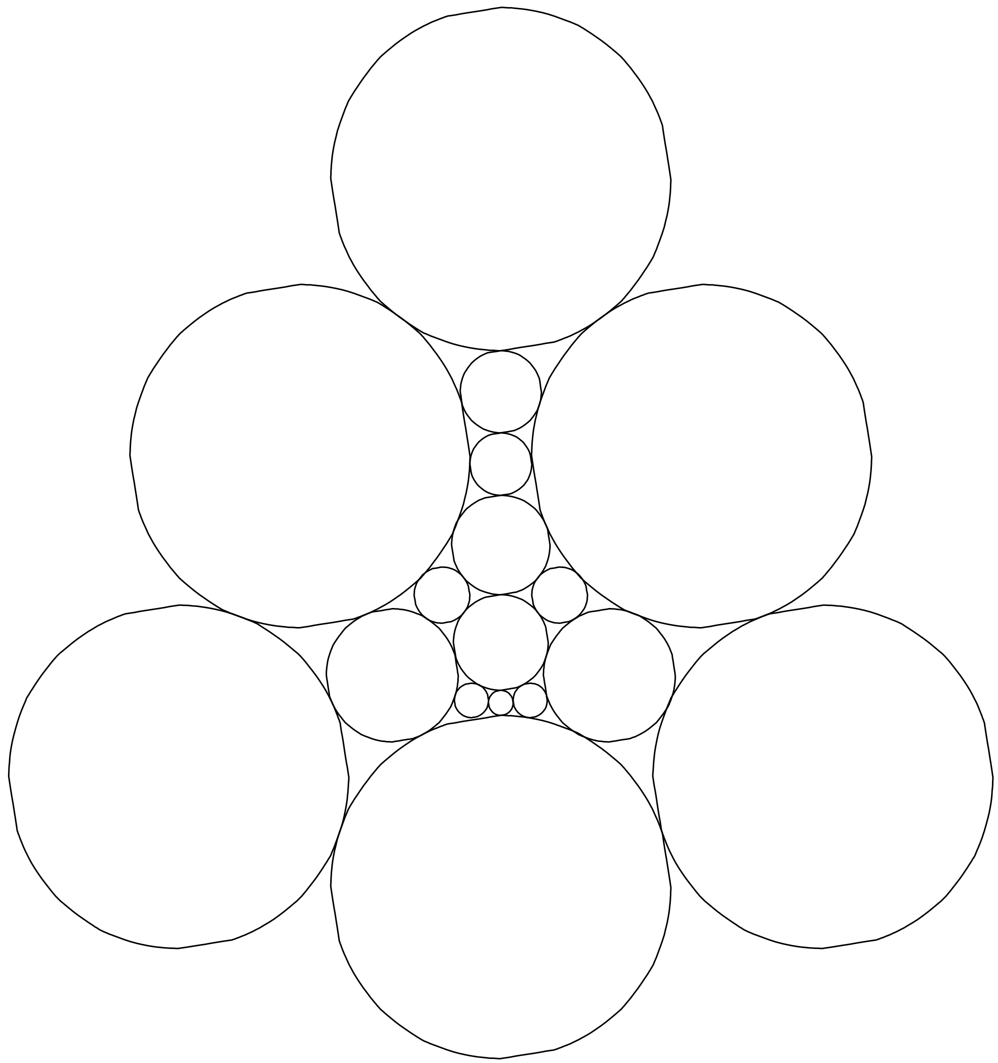


O cosas así:

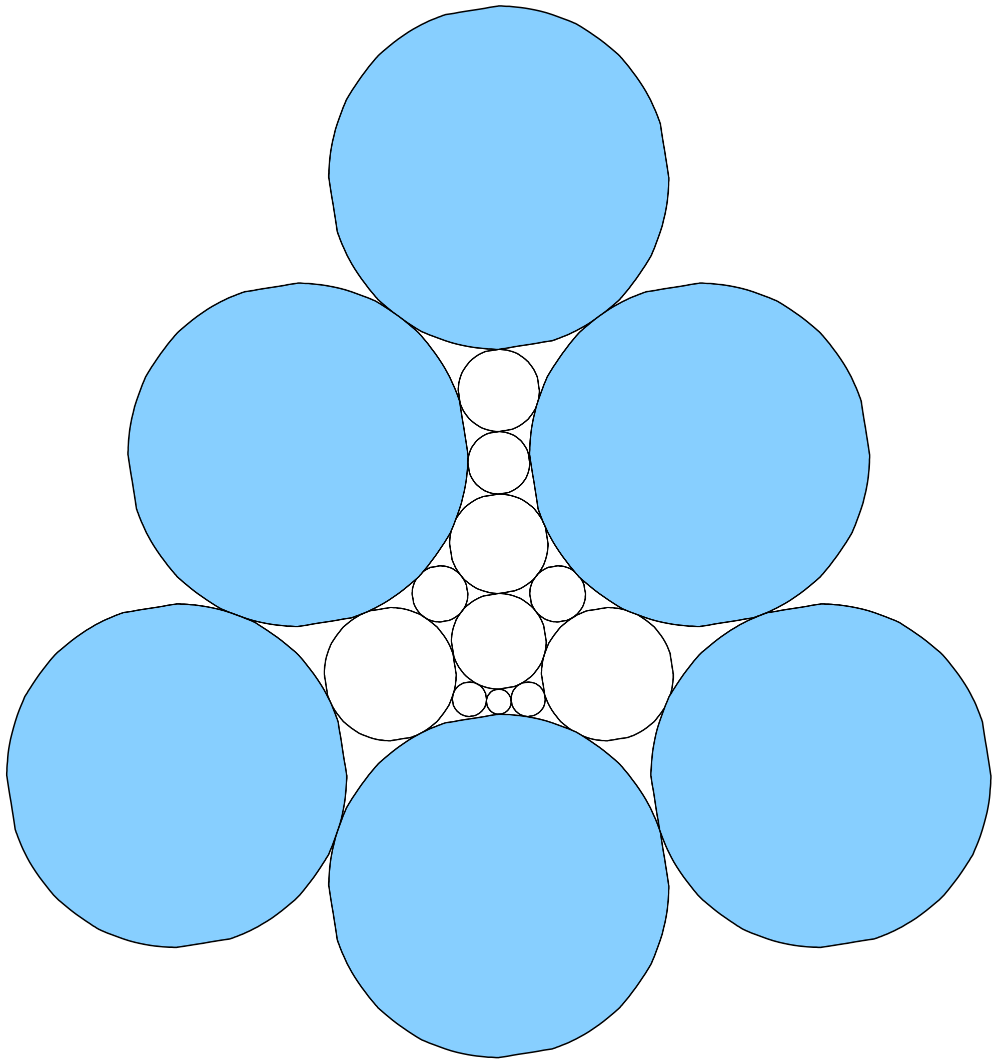




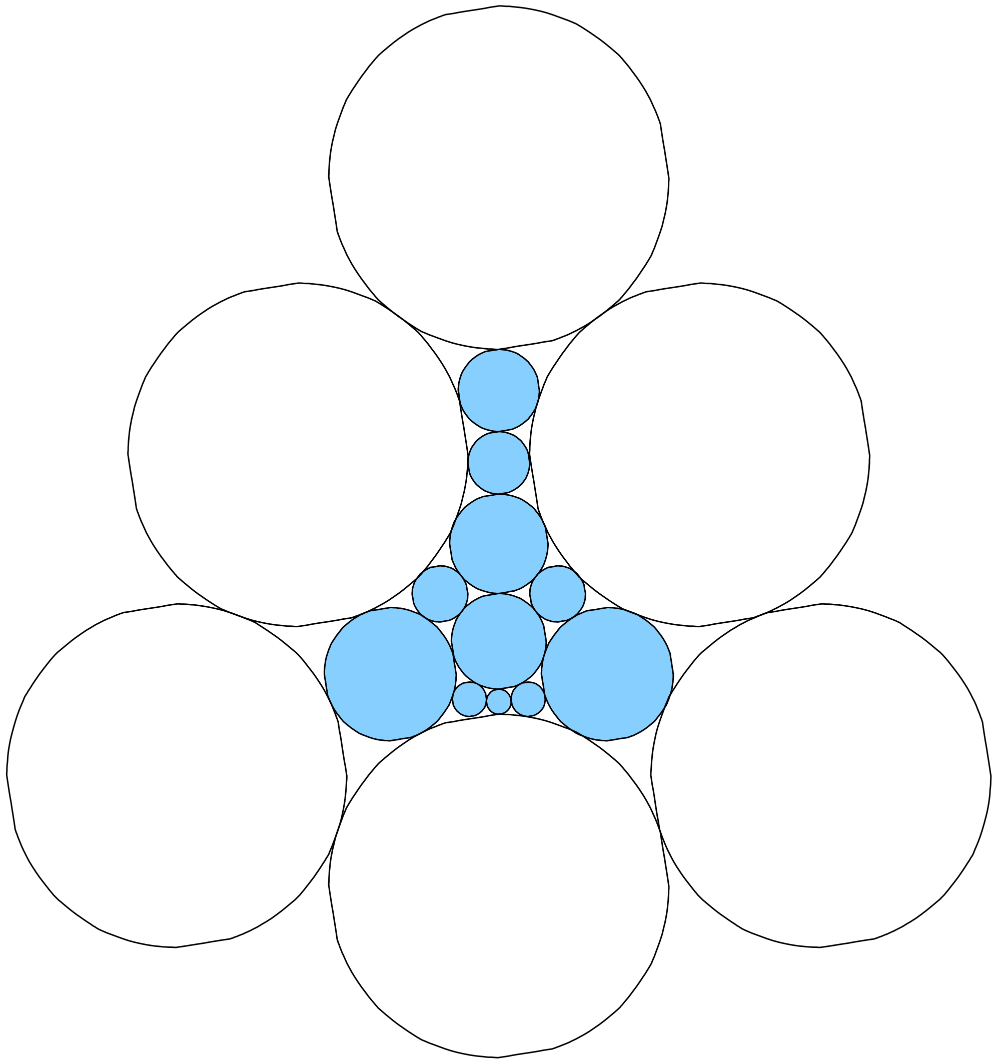
Bueno. Estamos buscando cosas así:



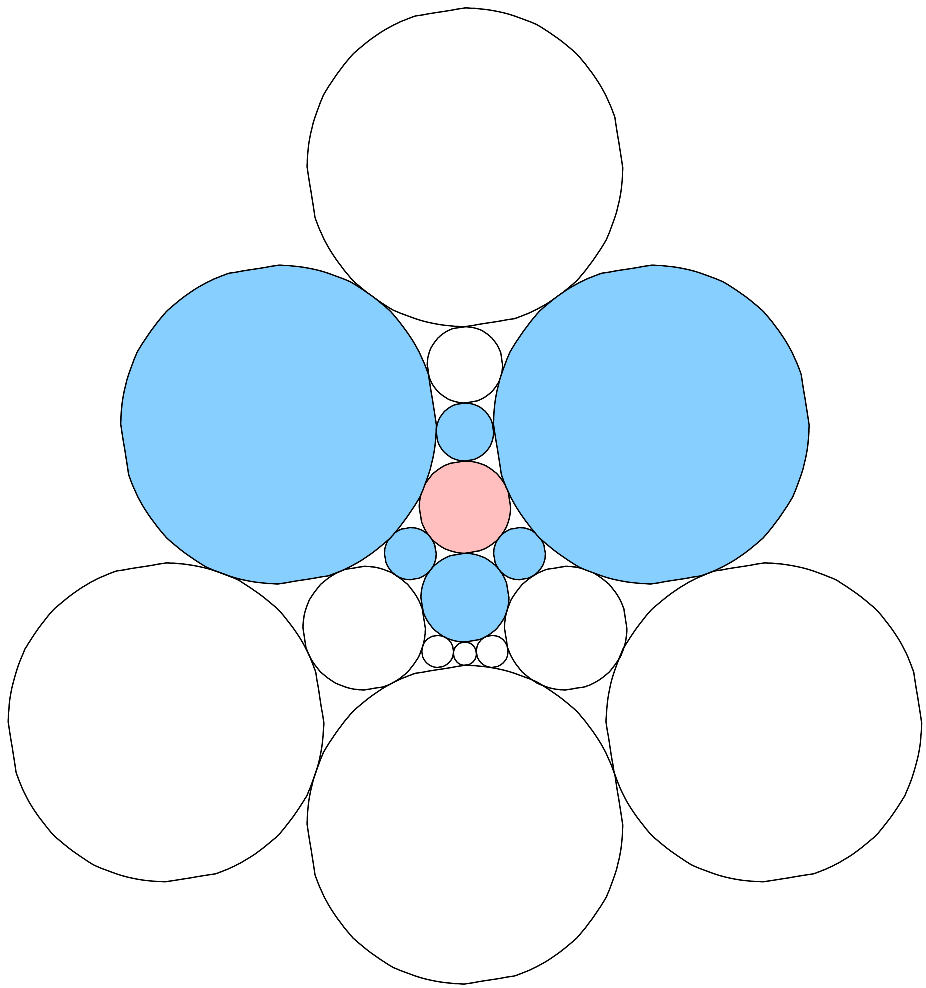
Tenemos círculos en la orilla:

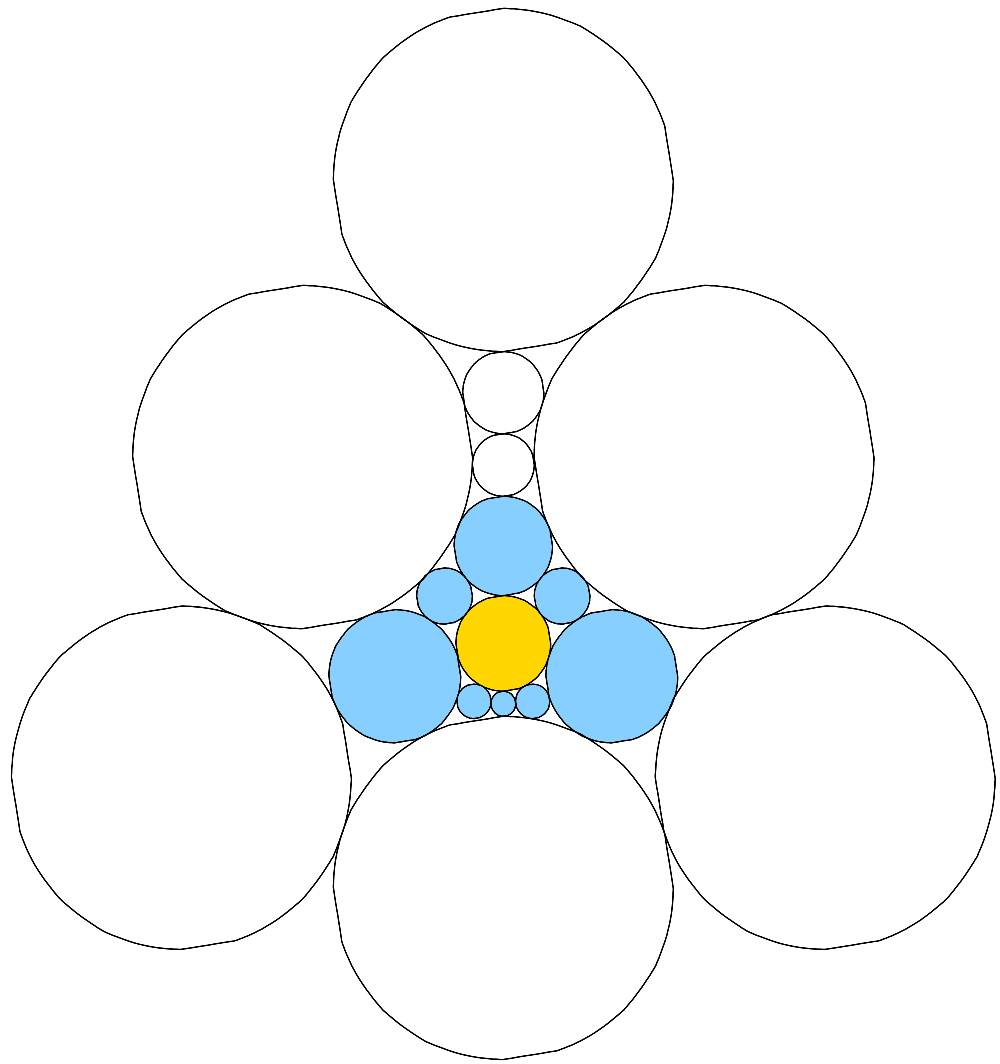


Y tenemos círculos interiores:

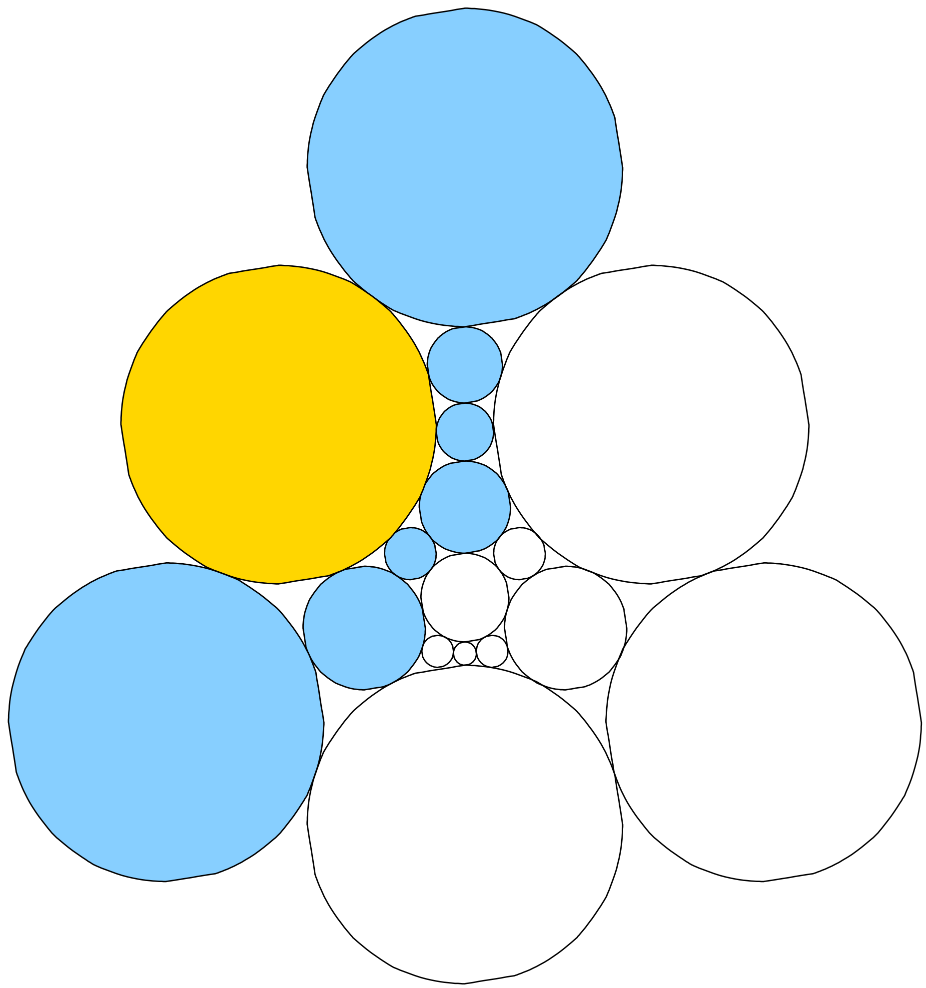


Un círculo interior, junto con todos los círculos que lo tocan forman una “flor”:

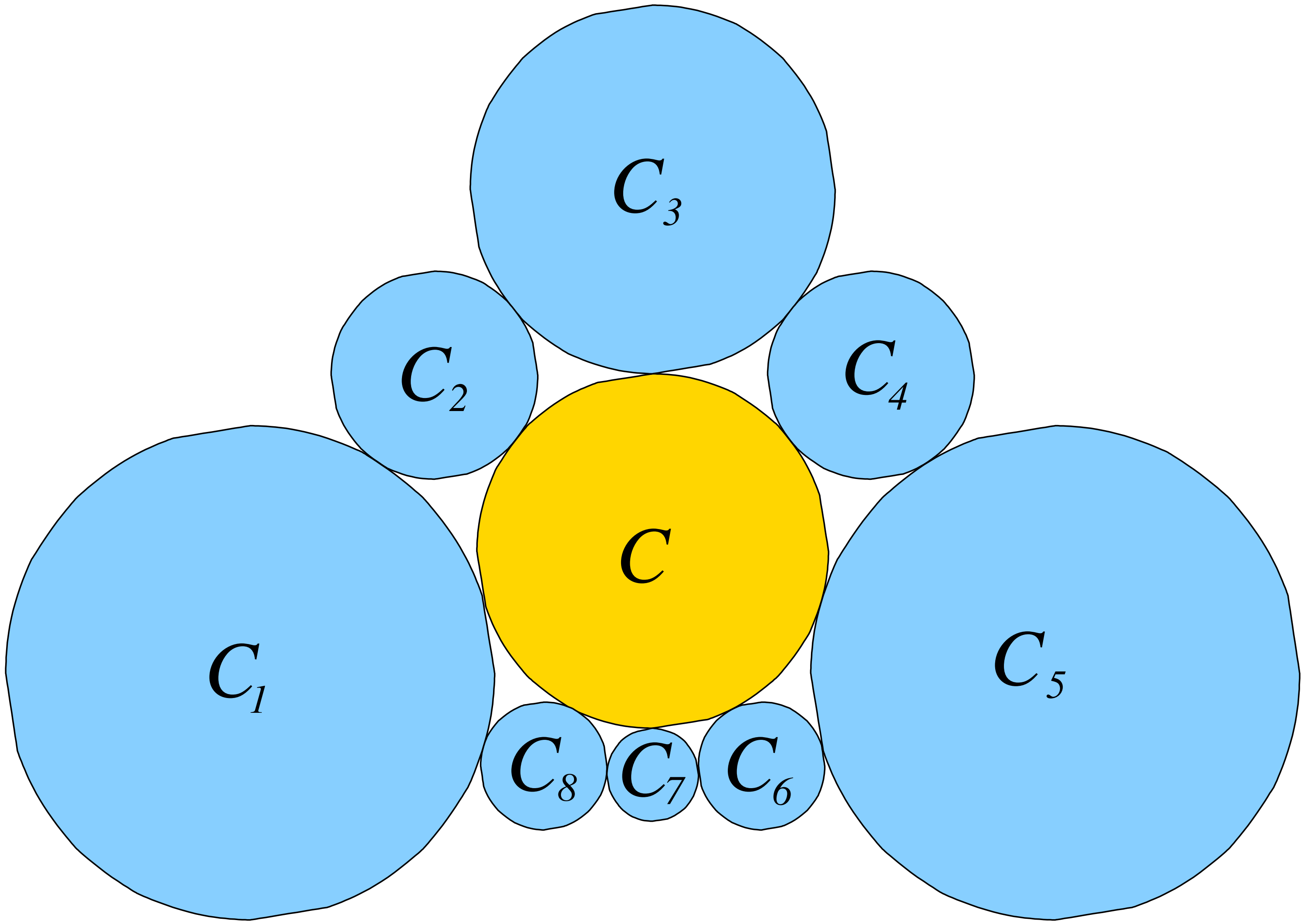




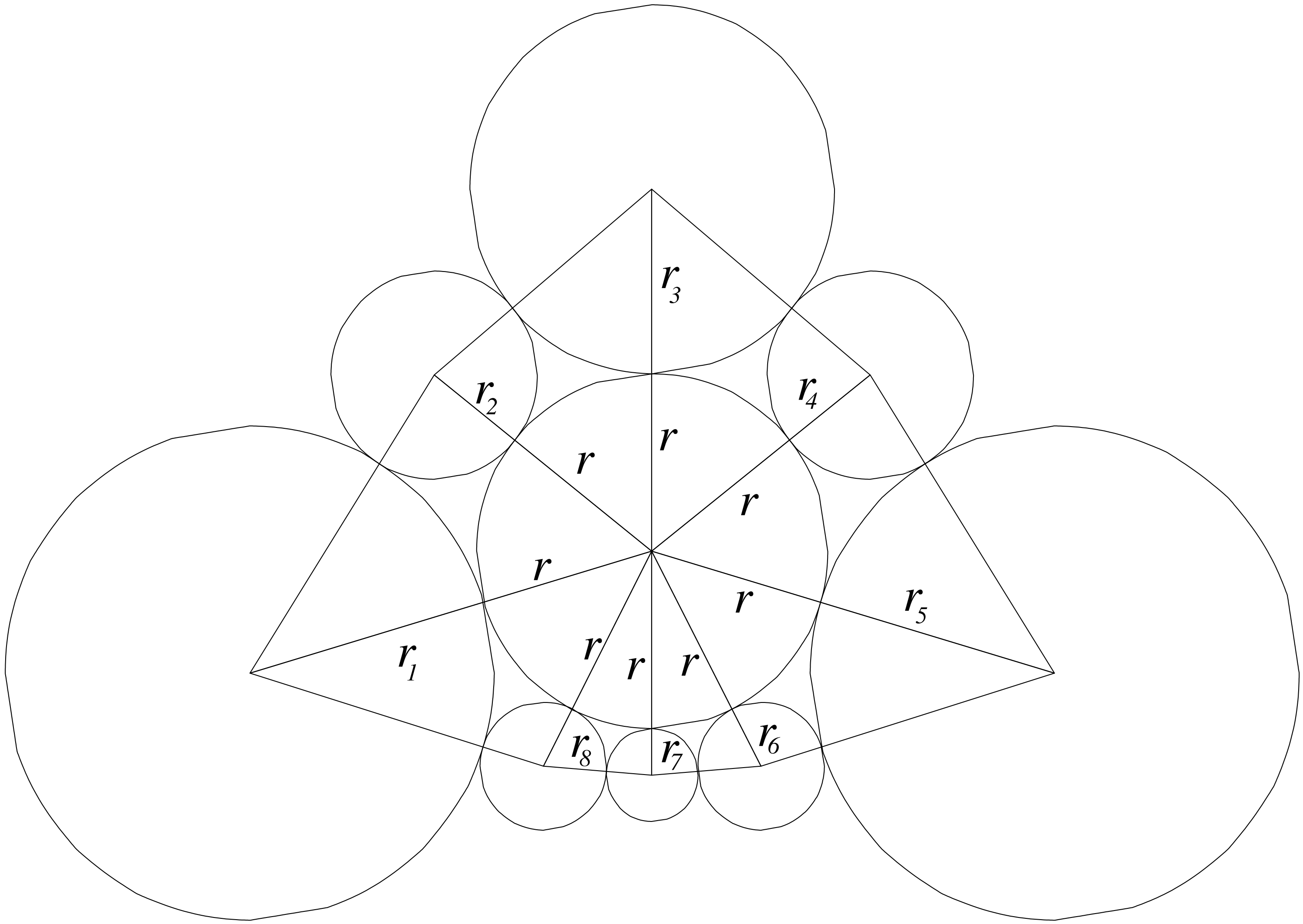
En la orilla también se forman flores, pero mochas.



En una flor tenemos el círculo central, C, y n círculos que lo acompañan, $C_1, C_2, \ldots, C_n$:



Aquí aparecen n triángulos:

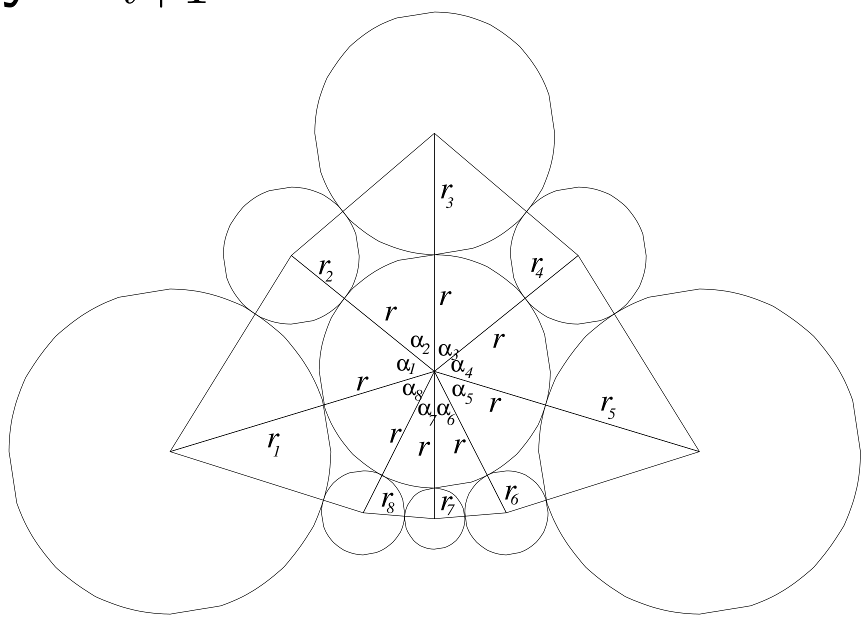


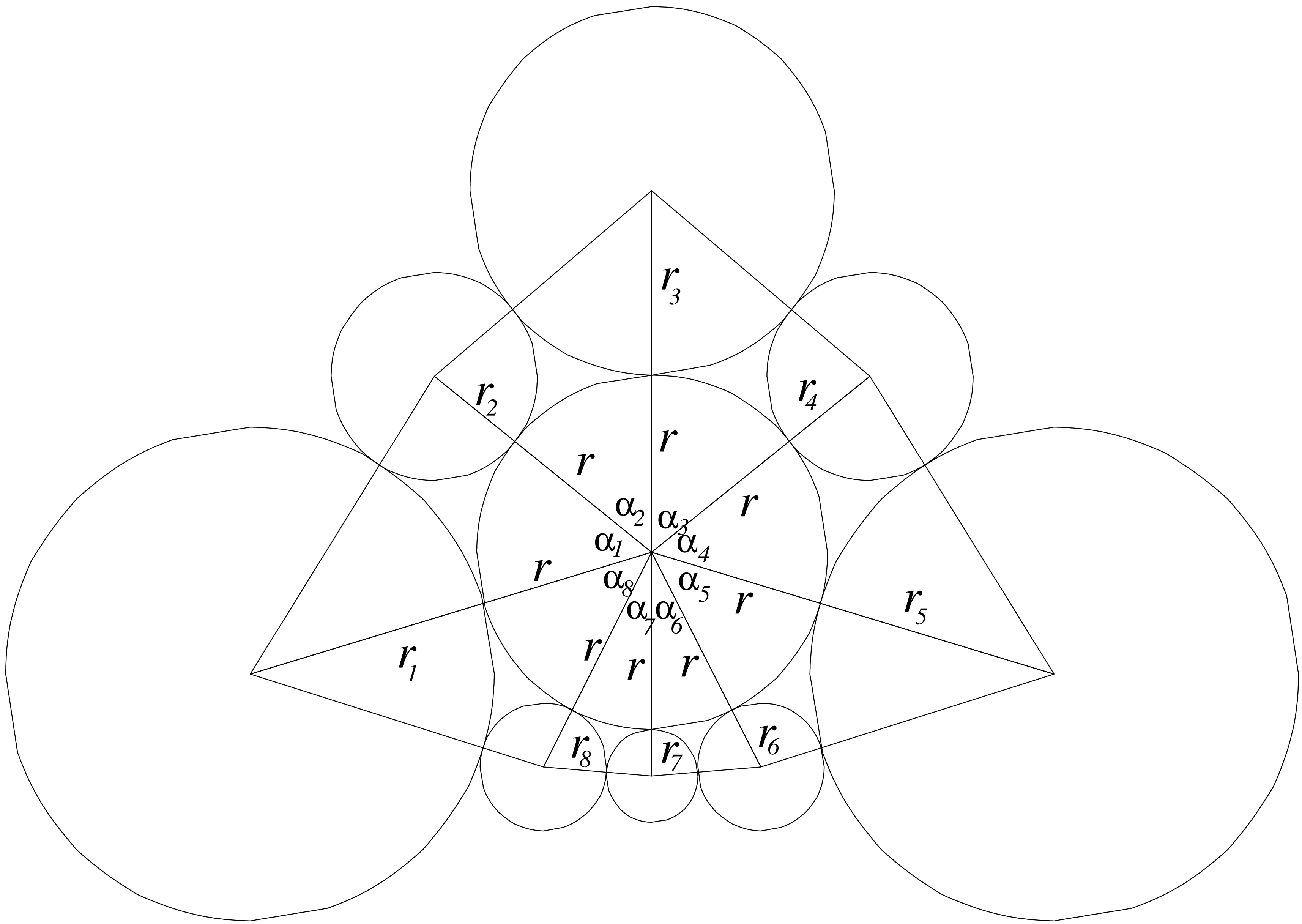
$r =$ radio de C; $r_i =$ radio de C_i.

En cada triángulo se debe cumplir

$$\alpha_i = \arccos\left(\frac{(r+r_i)^2 + (r+r_{i+1})^2 - (r_i+r_{i+1})^2}{2(r+r_i)(r+r_{i+1})}\right)$$

donde α_i es el ángulo en el centro de C del triángulo de los círculos C, C_i y C_{i+1}.





r_3
r_2
r_4
r
r
r
α_2
α_3
α_1
α_4
r
α_8
α_5
r
r_5
α_7
α_6
r_1
r
r
r
r_8
r_7
r_6

Se debe cumplir entonces que

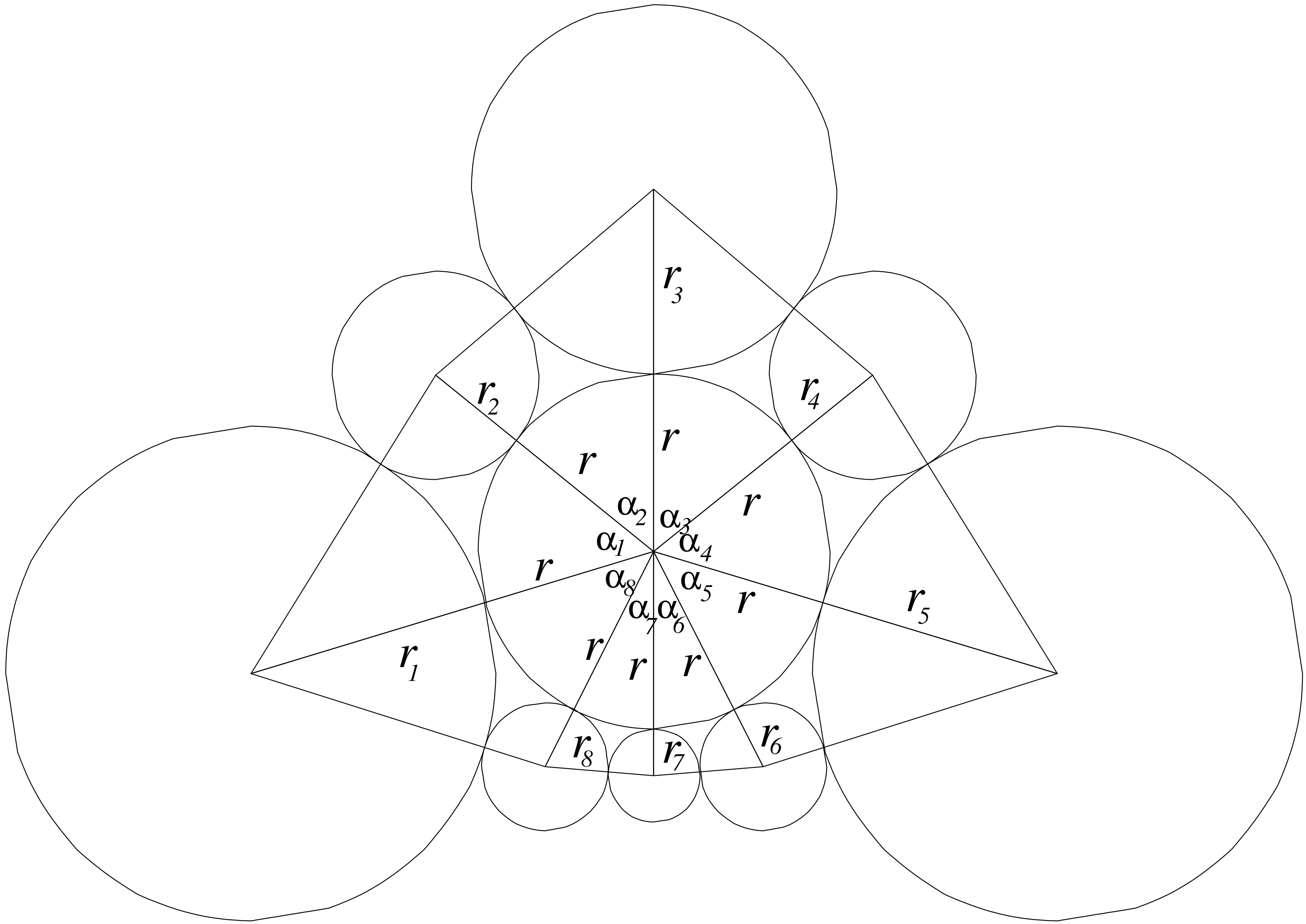
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 360^\circ$$

O sea,

$$\arccos\left(\frac{(r+r_1)^2+(r+r_2)^2-(r_1+r_2)^2}{2(r+r_1)(r+r_2)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_2)^2+(r+r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r+r_2)(r+r_3)}\right)$$

$$+\cdots+\arccos\left(\frac{(r+r_n)^2+(r+r_1)^2-(r_n+r_1)^2}{2(r+r_n)(r+r_1)}\right)=360^\circ$$

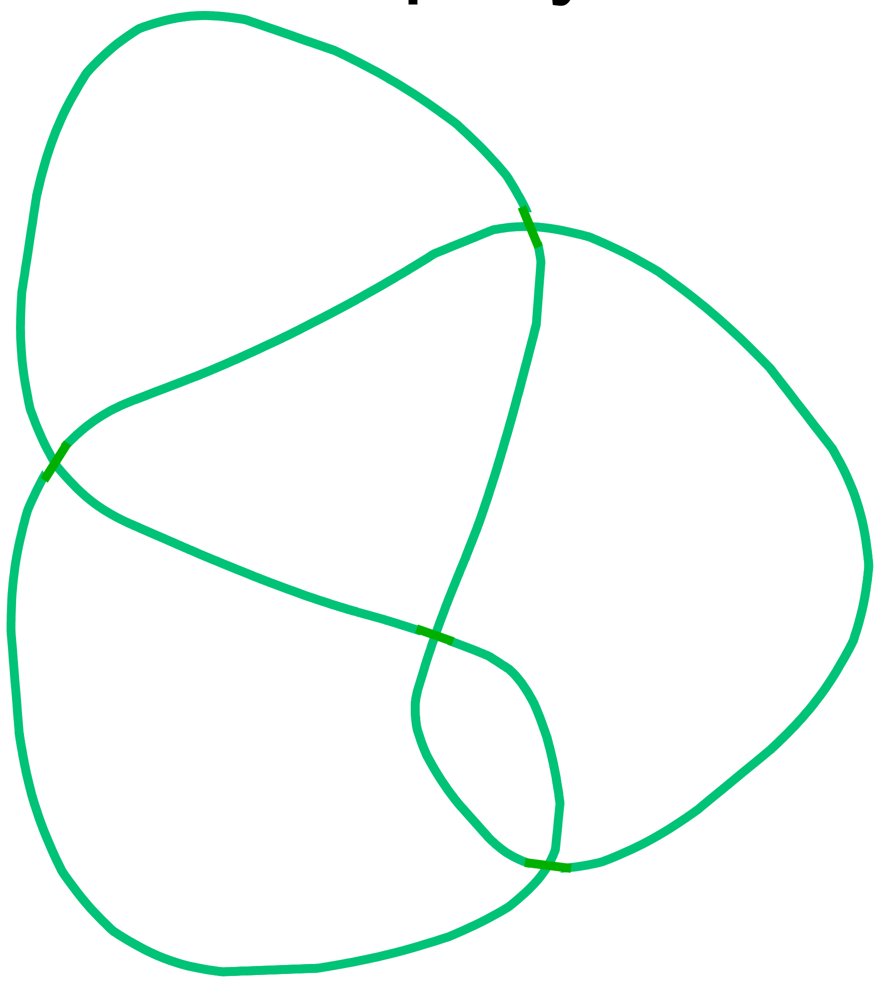
Uff! Vamos a escribir $\theta(C) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.



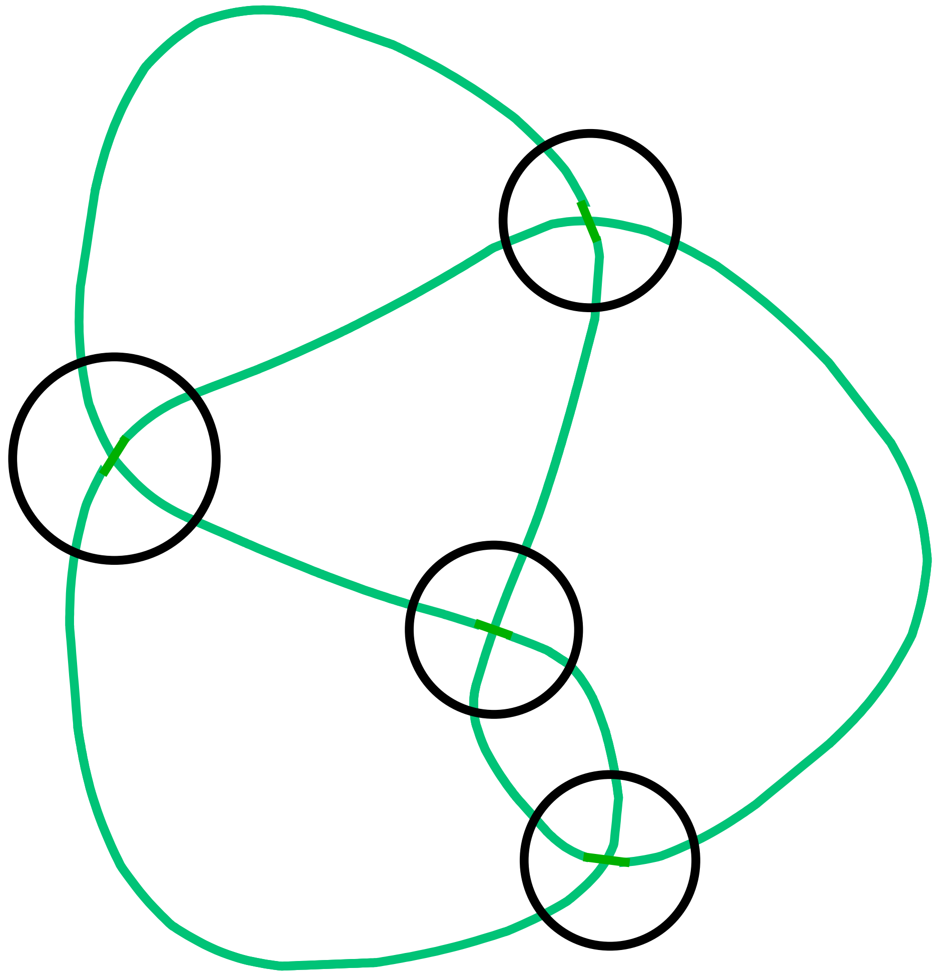
r_3
r_2
r_4
r
r
r
α_2
α_3
α_1
α_4
r
α_8
α_5
r
r_5
α_7
α_6
r_1
r
r
r
r_8
r_7
r_6

Regresamos a nuestro problema.

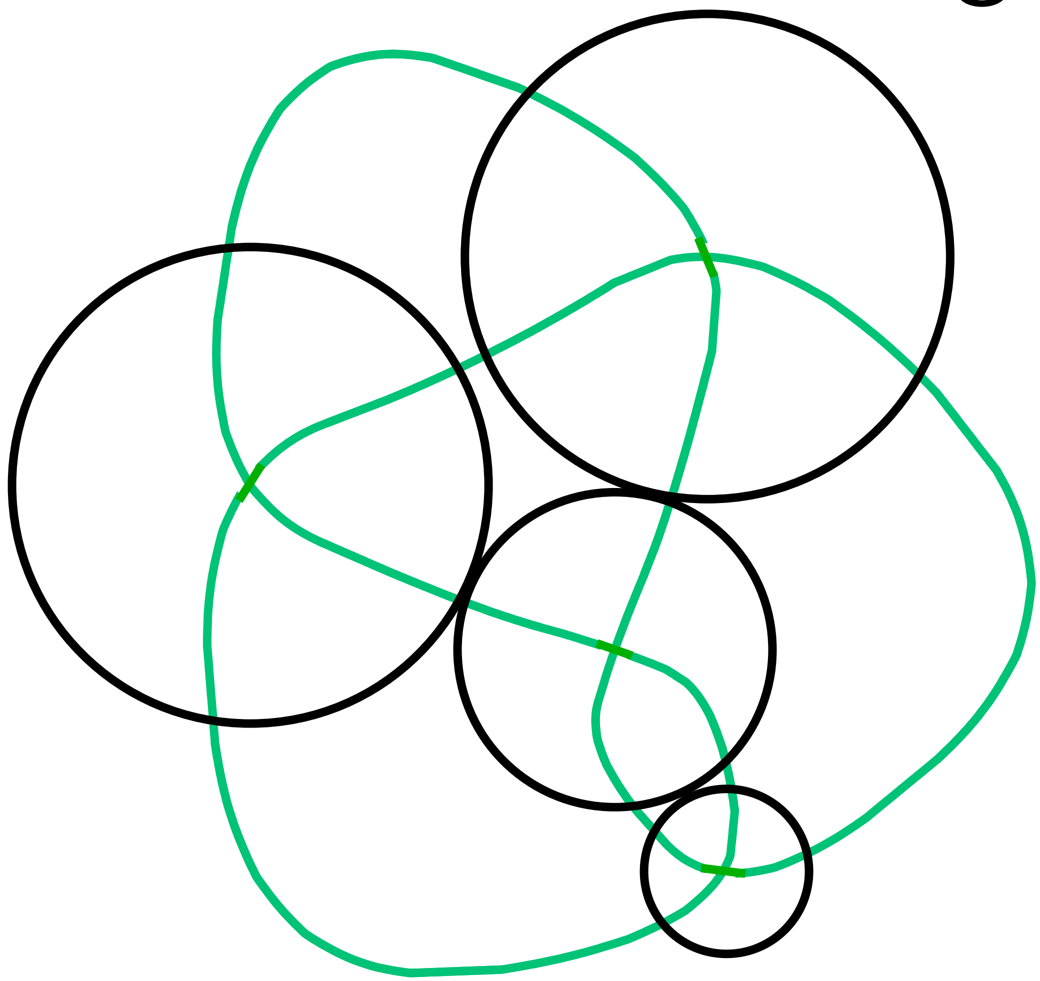
Comienzo con una proyección:



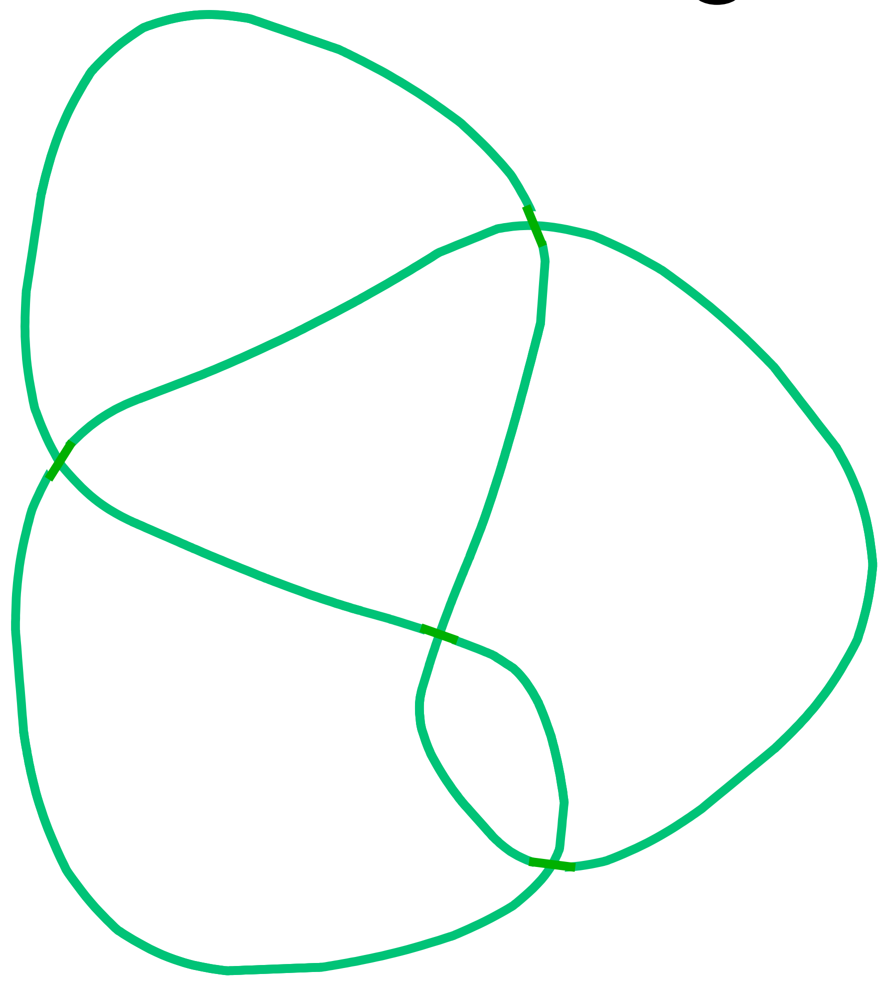
Quiero poner círculos en los puntos de cruce (vértices):



Y quiero encontrar radios adecuados para que todos los círculos sean tangentes:

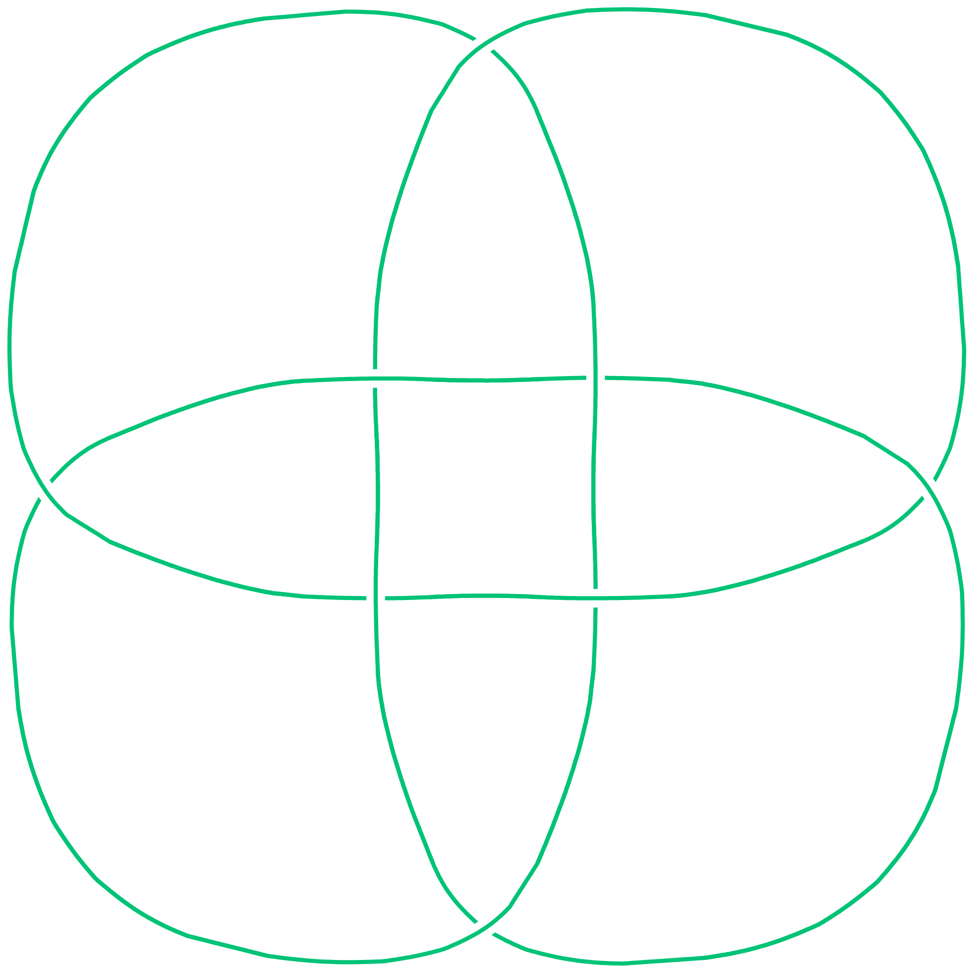


Un primer problema es que las regiones que se forman no son triángulos:

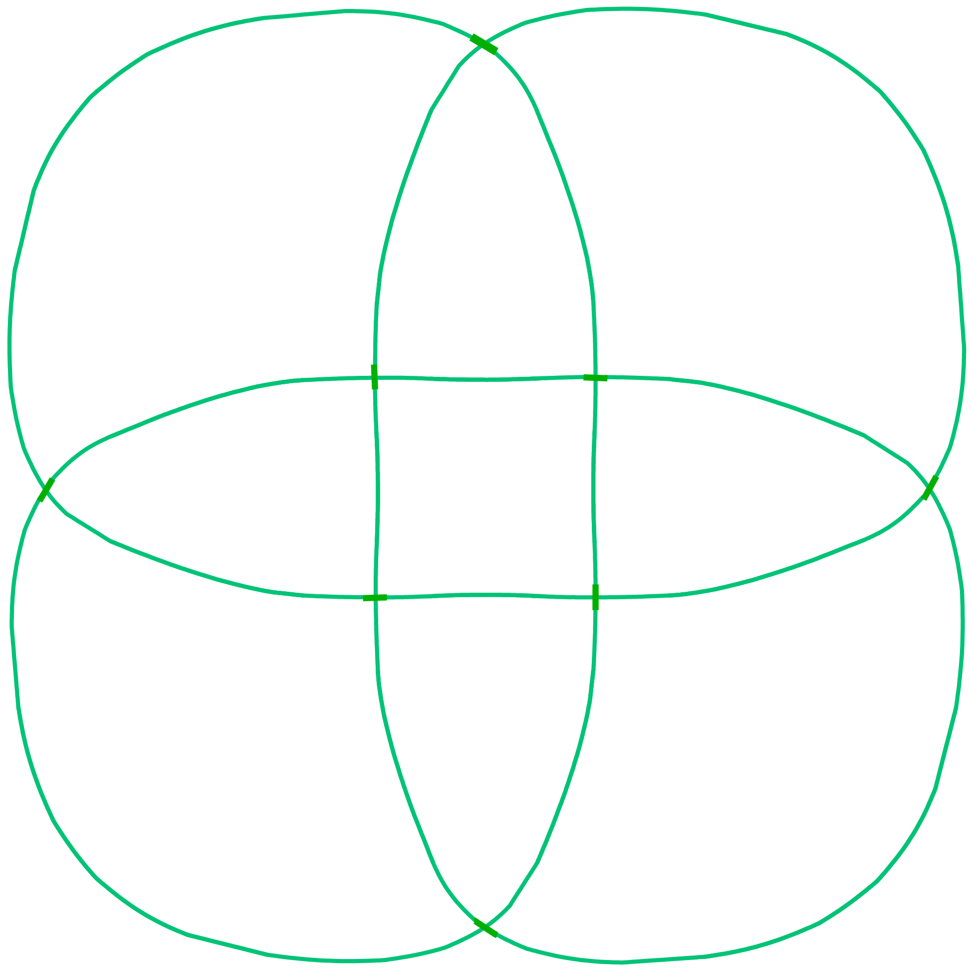


¡Pues vamos a hacer triángulos!

Un ejemplo “fácil”:

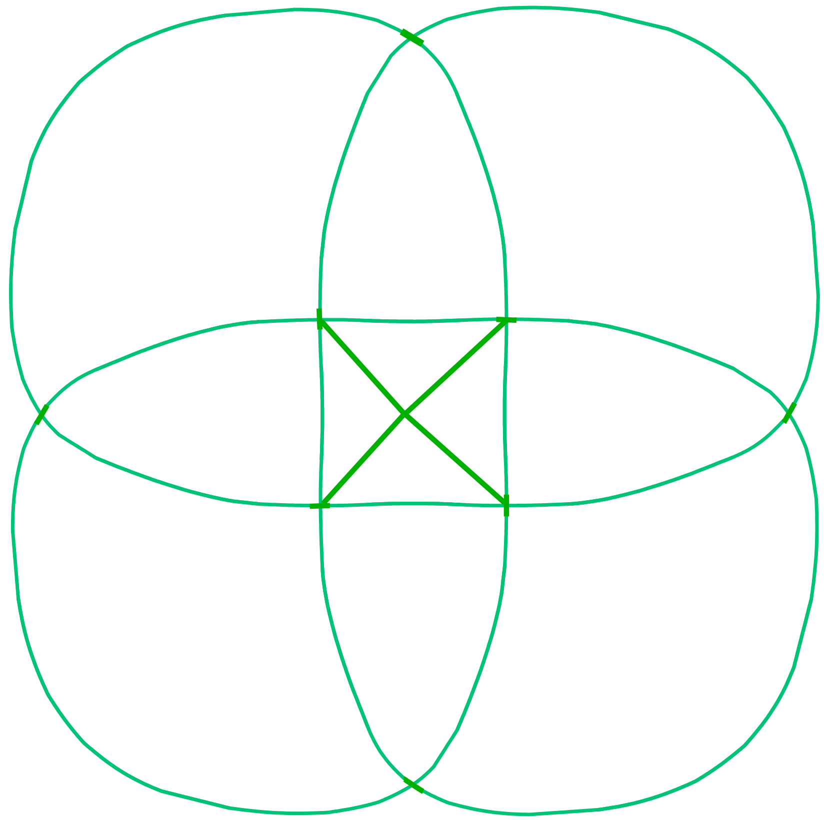


En la proyección

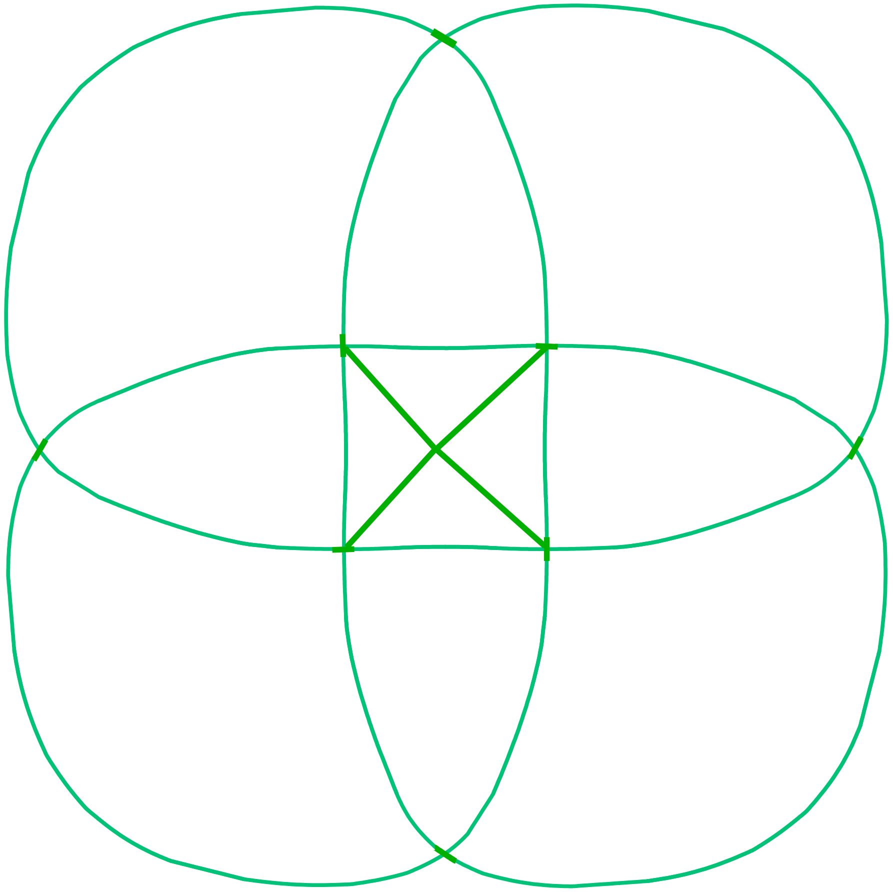


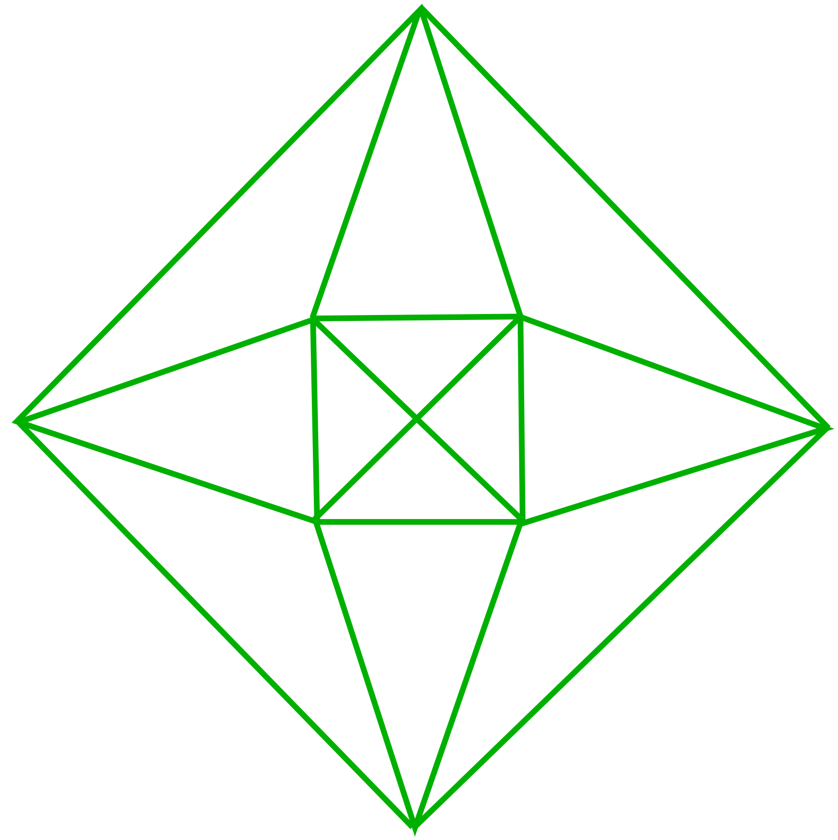
tenemos “triángulos” y “cuadrados”.

Los triángulos están bien, pero el cuadrado... lo triangulamos:

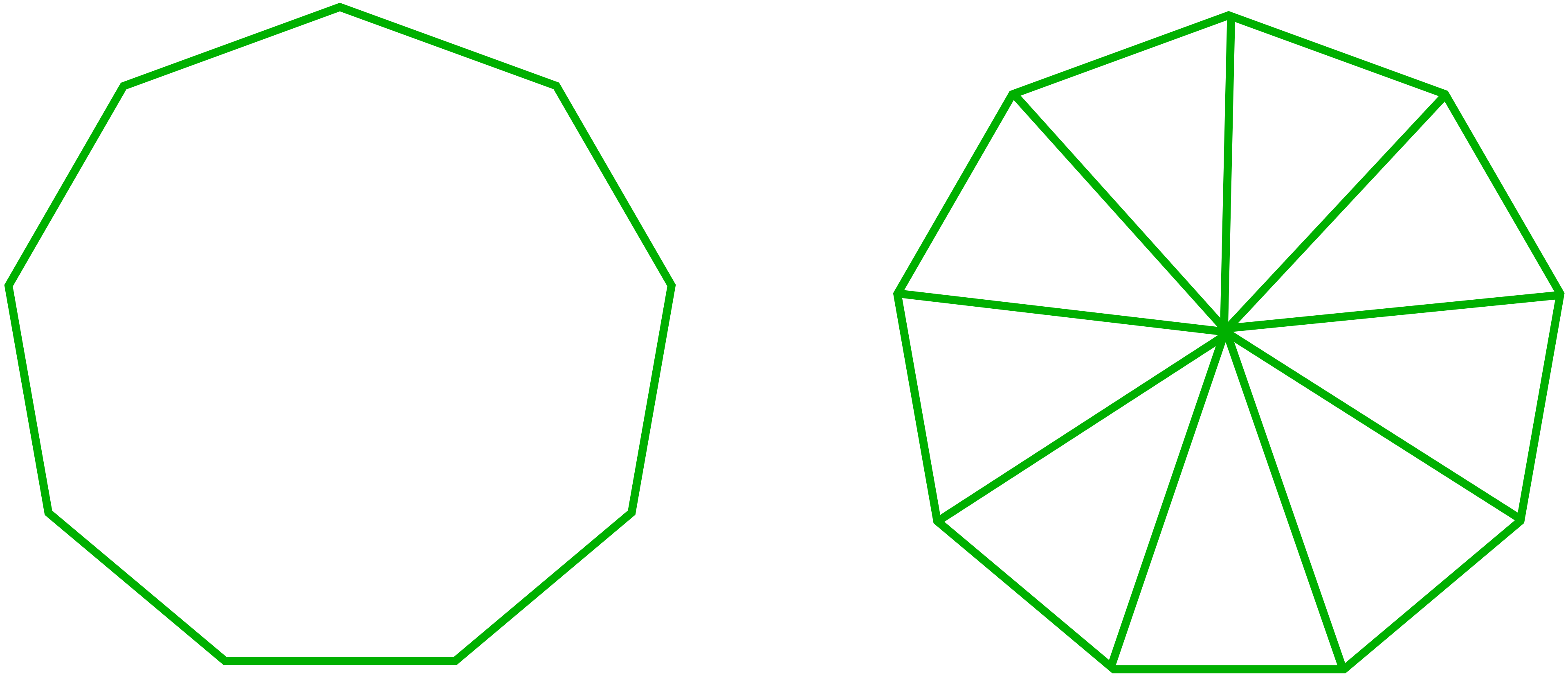


(¡lo estrellamos!)

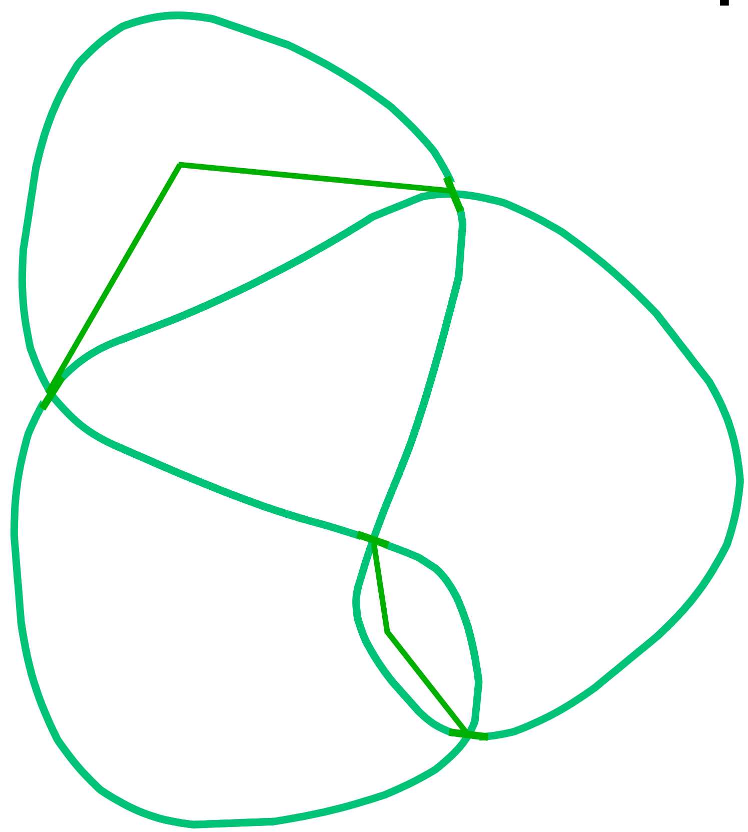




Un polígono plano siempre se puede estrellar:



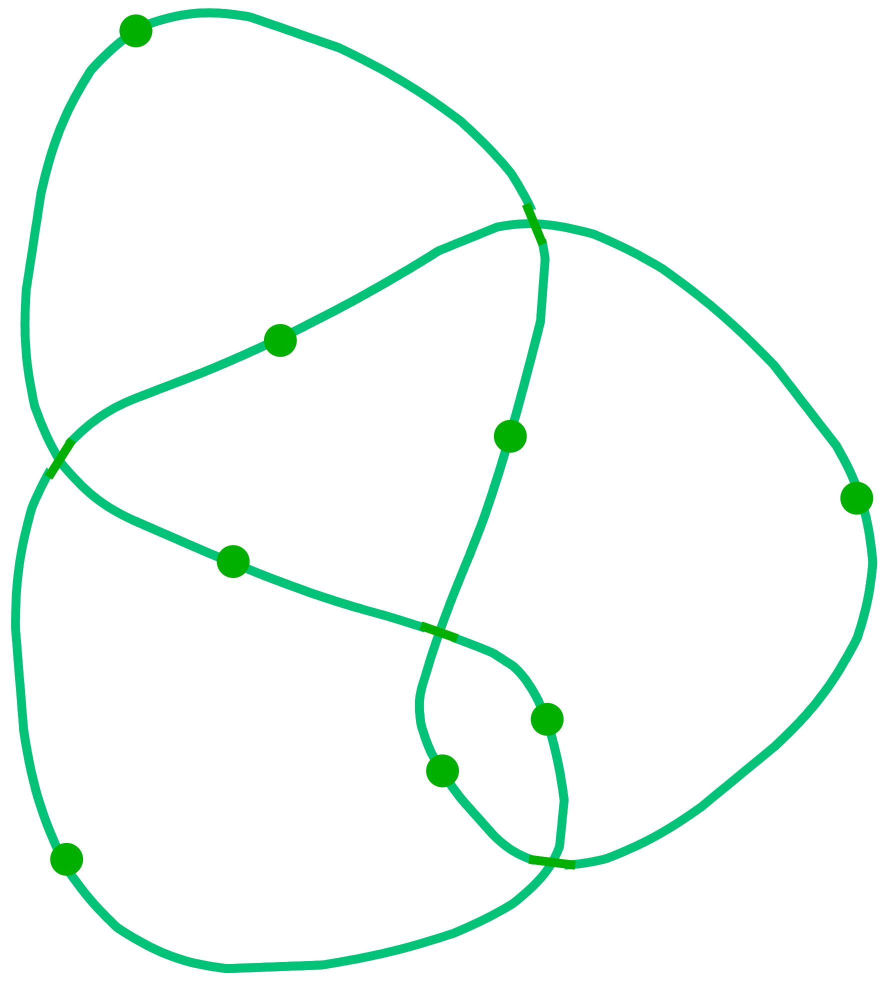
Pero esto no funciona siempre bien:



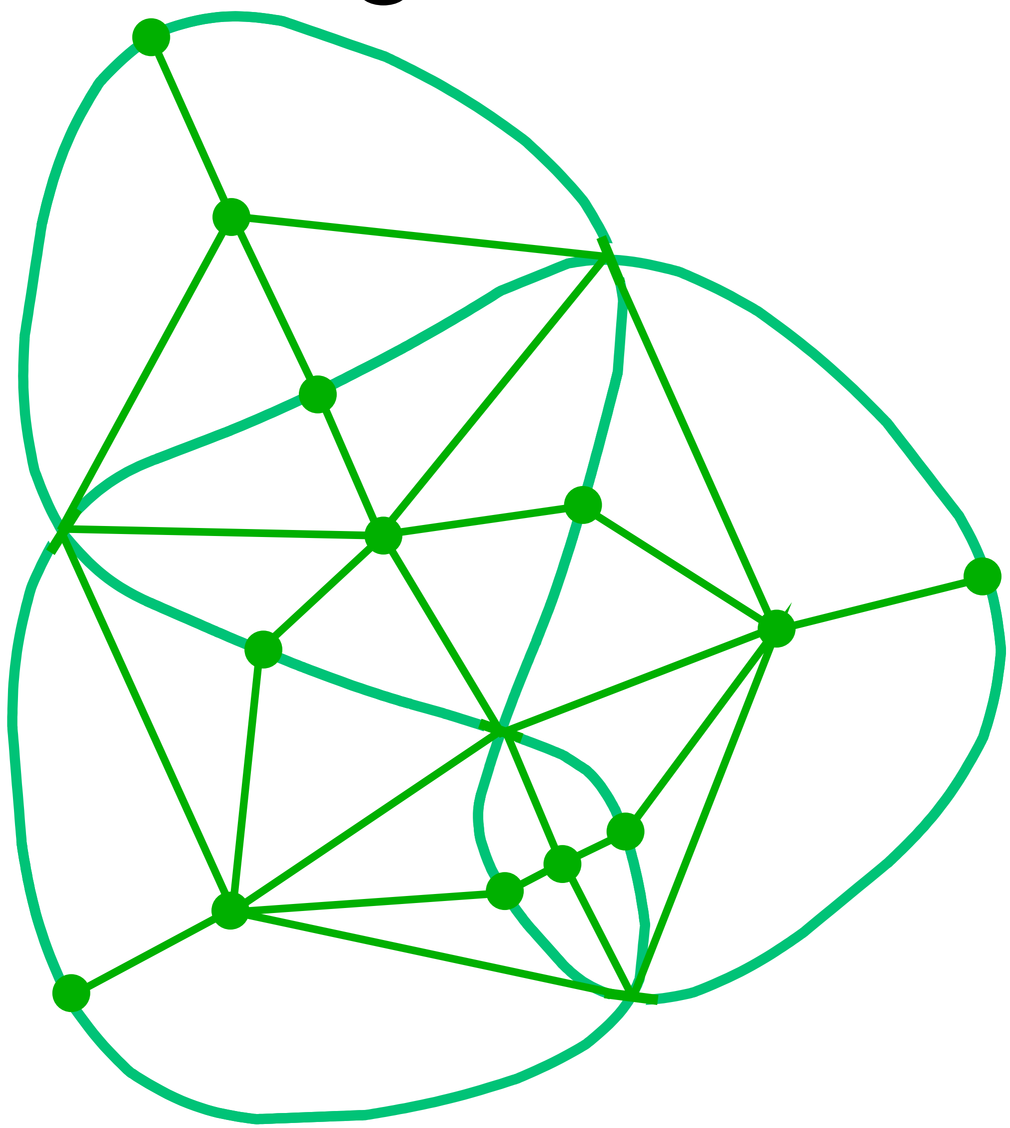
(en las proyecciones hay “polígonos” de dos lados)

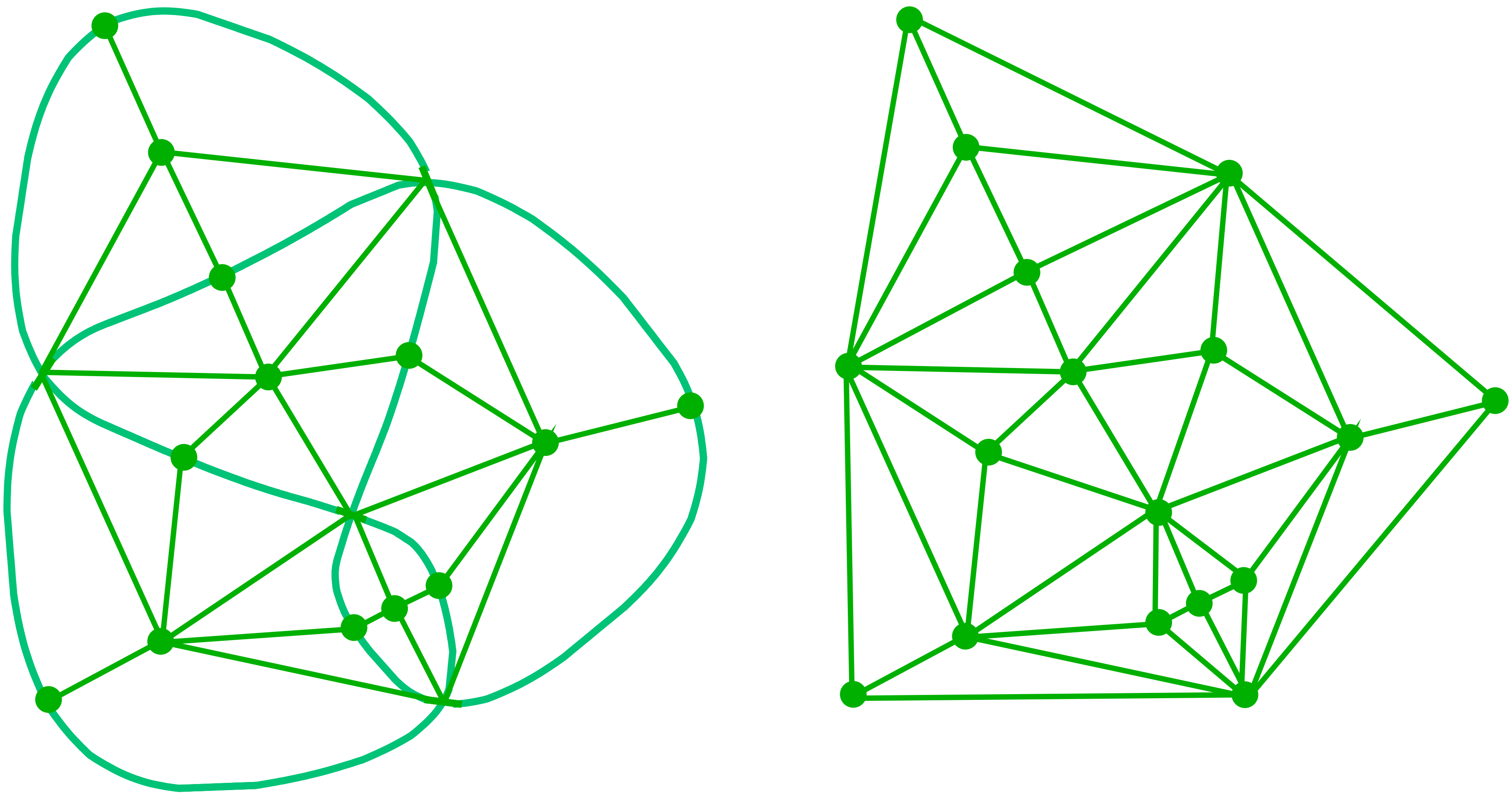
Vamos a añadir vértices falsos para poder garantizar que las regiones tienen al menos cuatro lados.

A cada arista de la proyección la partimos en dos:



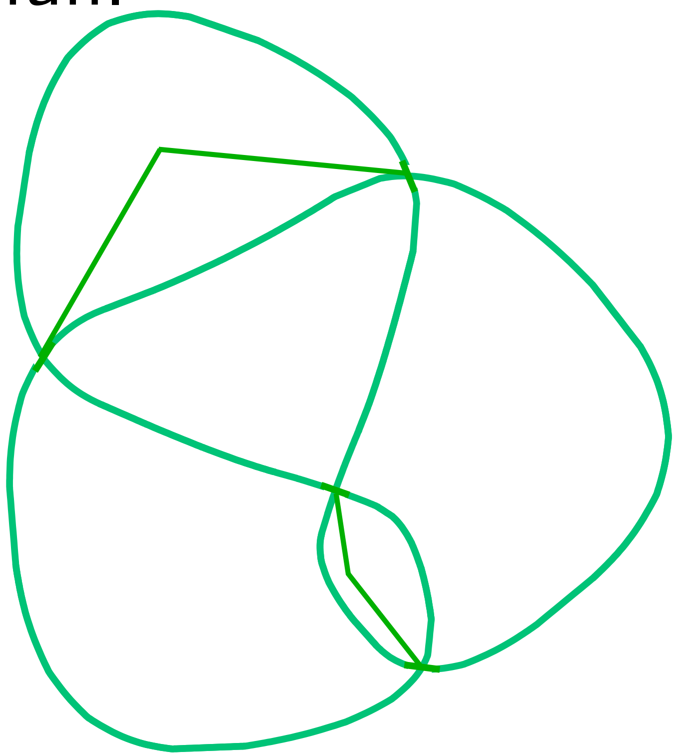
Y, ahora sí, triangulamos

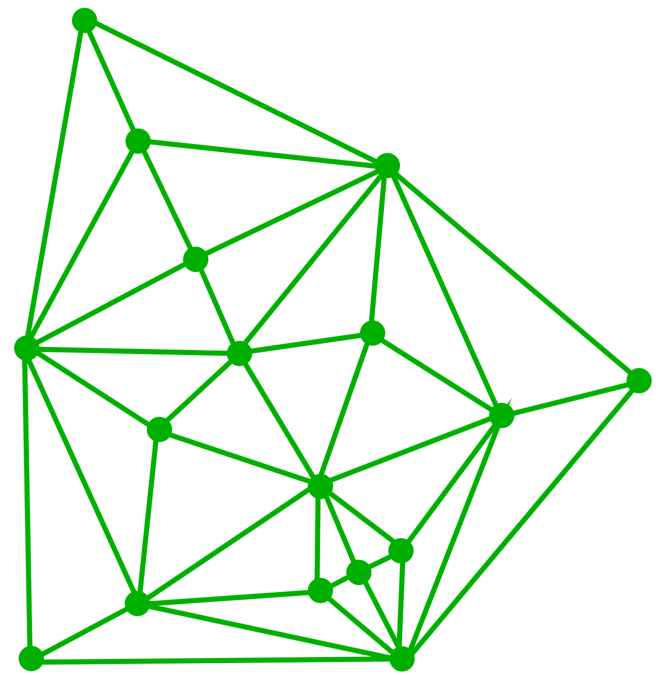


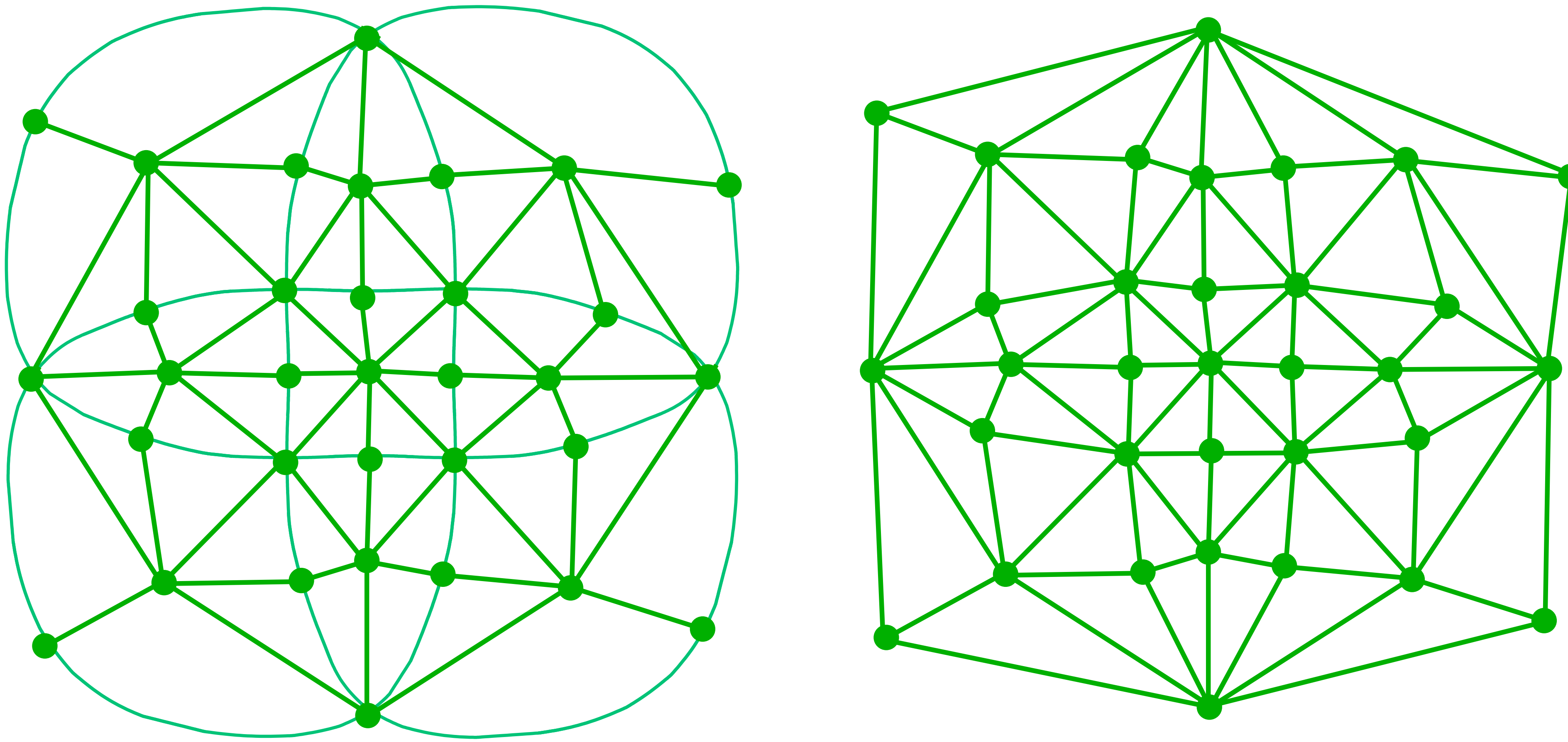


Estos objetos satisfacen lo siguiente:

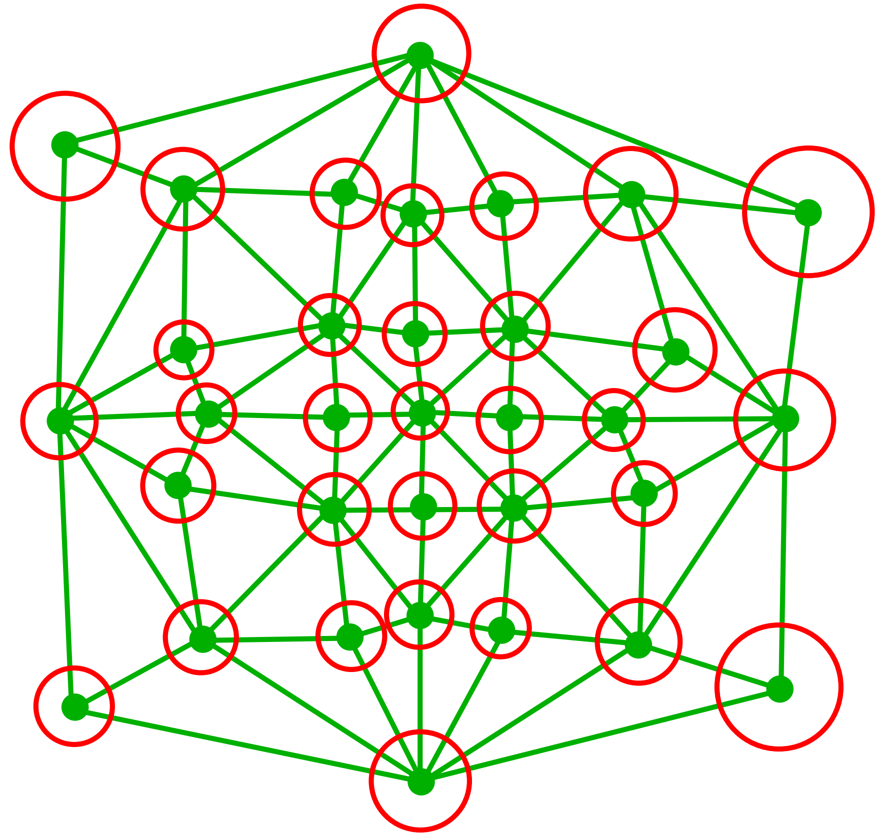
Definición. Un complejo K es una colección de vértices, aristas y triángulos (en el plano) de tal manera que la intersección de dos triángulos de K es, o bien vacía (no se tocan), o bien es exactamente un vértice común, o bien es exactamente una arista común.



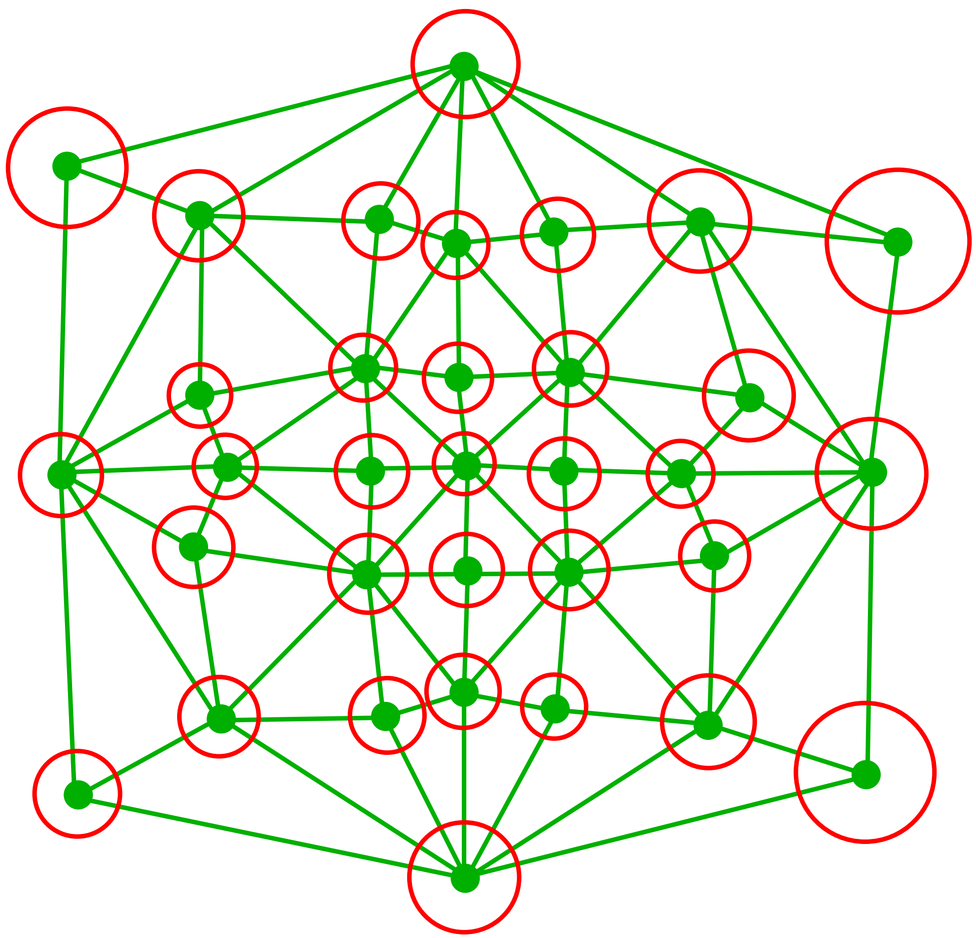


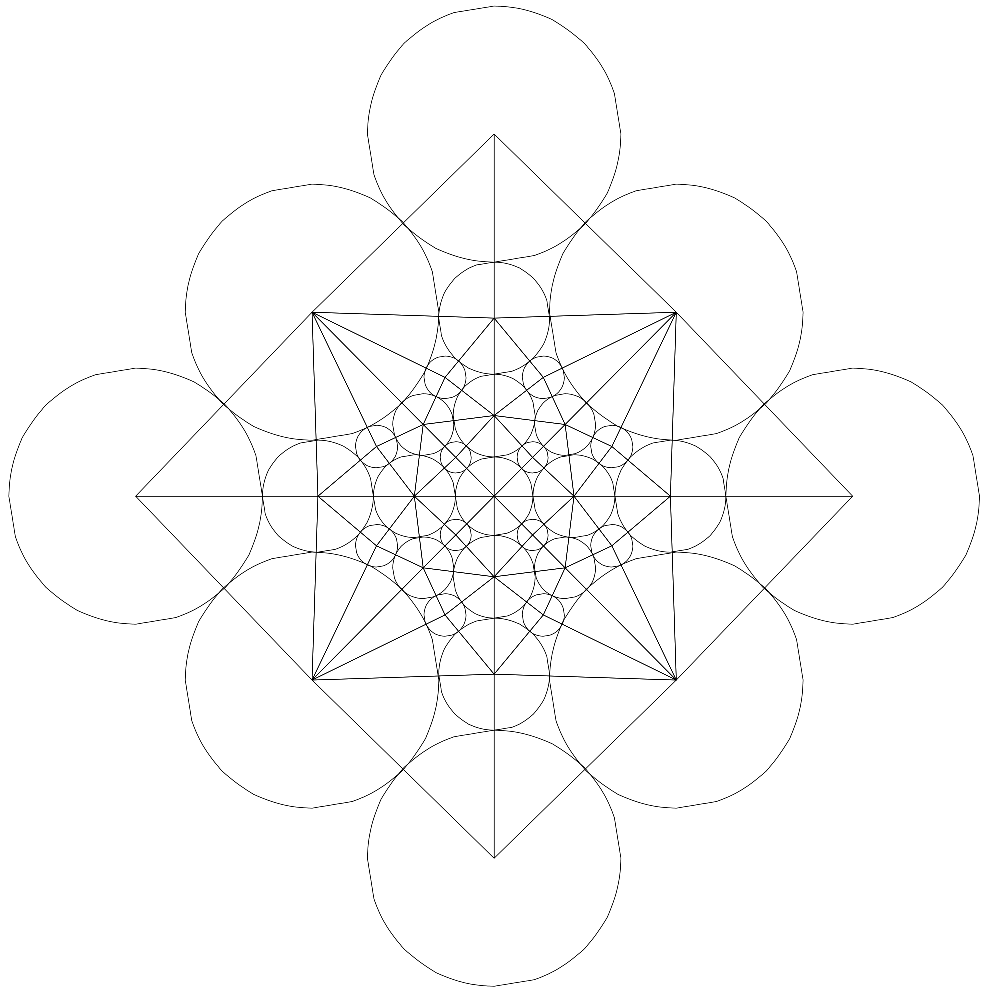


Queremos poner un círculo en cada vértice



y luego queremos inflar (o desinflar) cada círculo para que, si dos vértices están conectados por una arista, los círculos correspondientes sean tangentes.



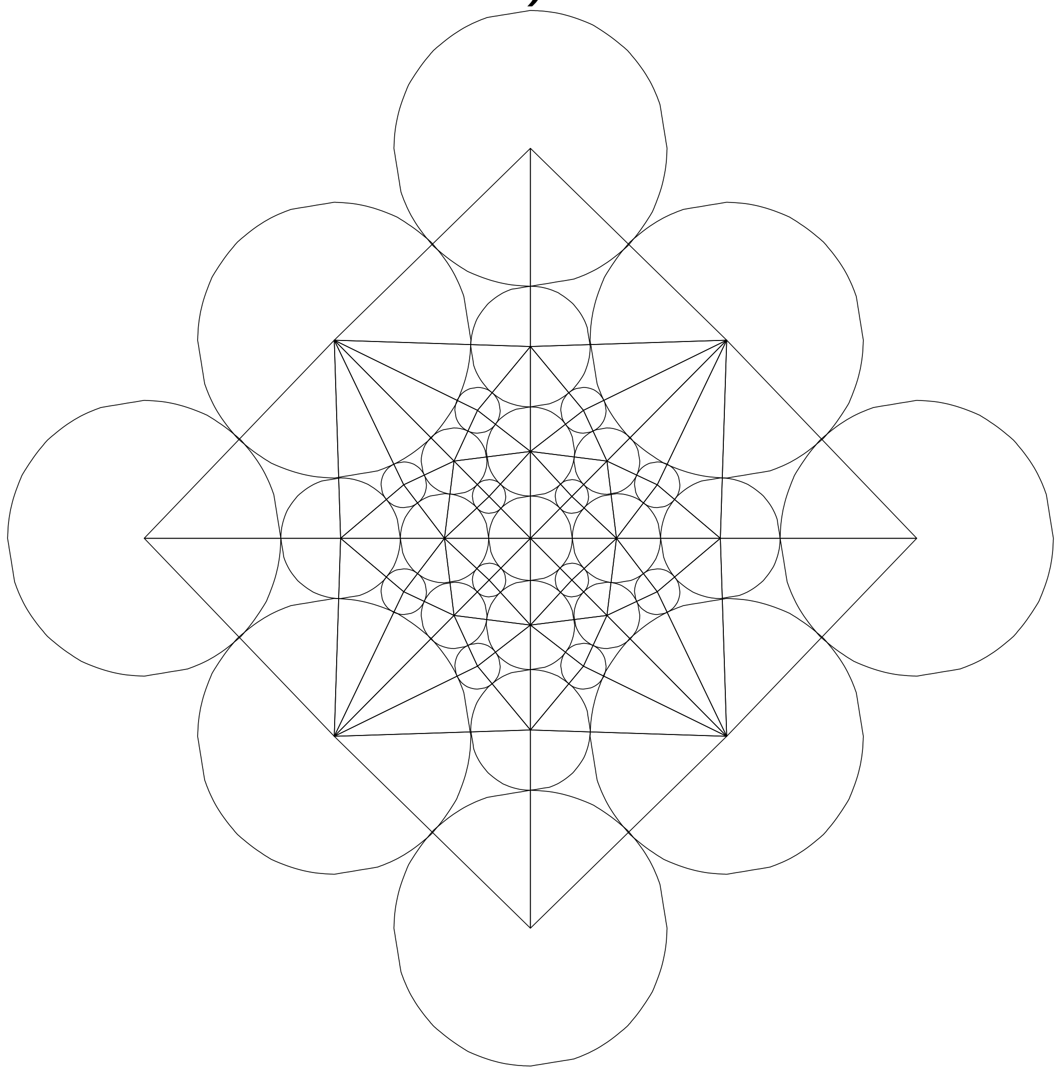


En este proceso, los centros de los círculos no pueden estar fijos; los debemos poder mover libremente.

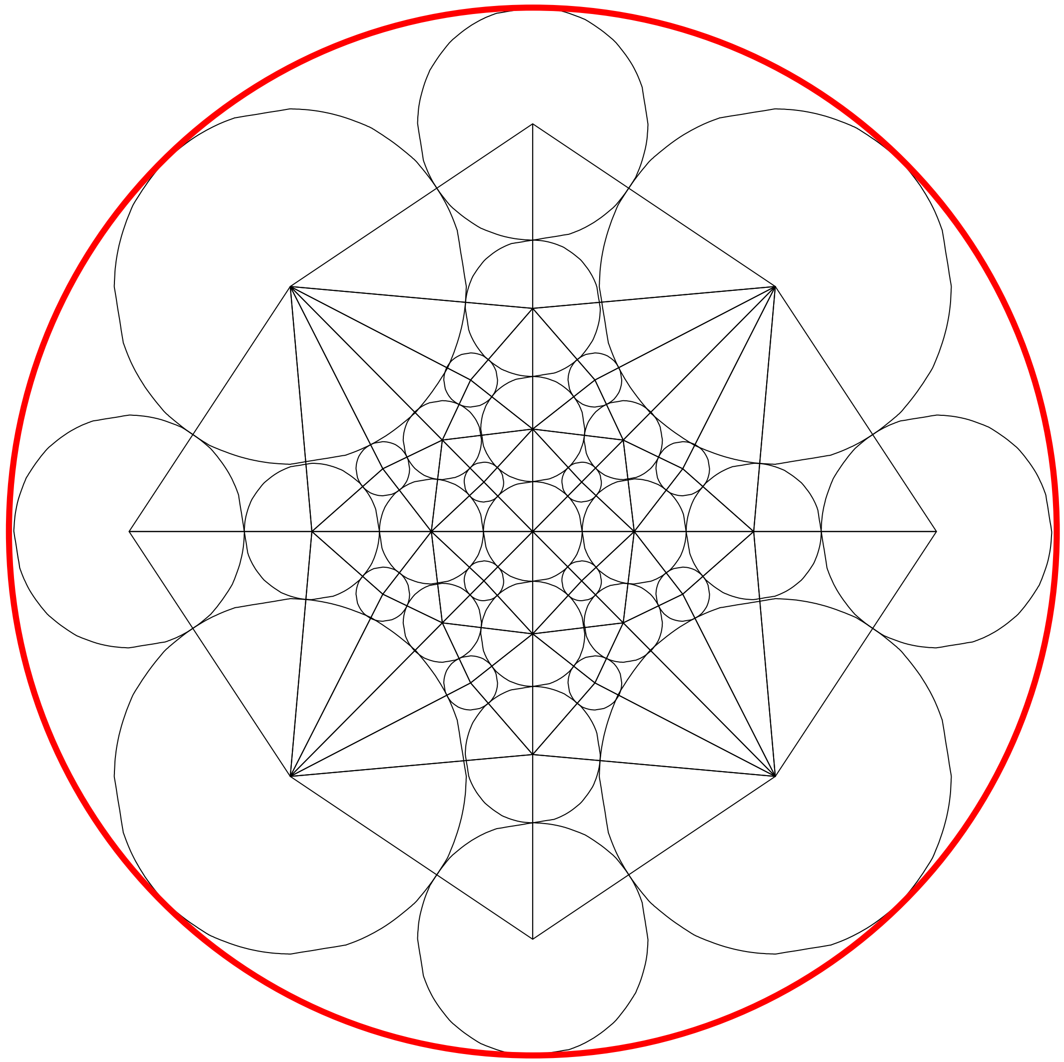
Entonces esto no funciona: ¡los círculos de la orilla se pueden ir muy lejos!

Para “fijar” a los círculos de la orilla podemos hacer dos cosas:

1) Declarar que los círculos de la orilla tienen un radio fijo (digamos, todos son de radio 1)



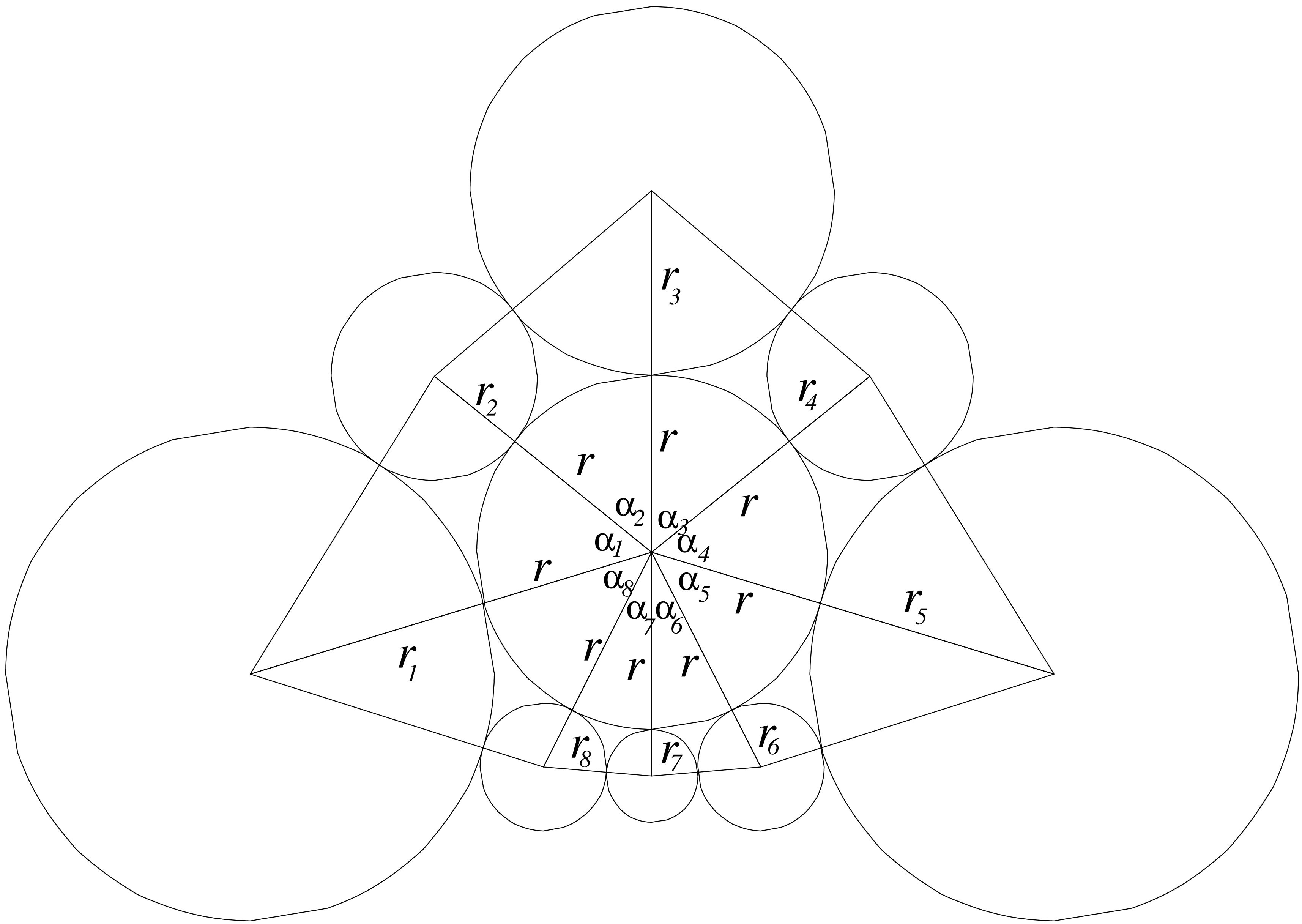
2) Declarar que los círculos de la orilla deben ser tangentes (por dentro) a un circulototote



Declaramos que los círculos de la orilla tienen un radio fijo
(digamos, todos son de radio 1)

Entonces debemos calcular los radios de los círculos que nos interesan.

Y ya sabemos mucho acerca de los radios, ¿no?



r_3
r_2
r_4
r
r
r
α_2
α_3
α_1
α_4
r
α_8
α_5
r
r_5
α_7
α_6
r_1
r
r
r
r_8
r_7
r_6

Se debe cumplir entonces que

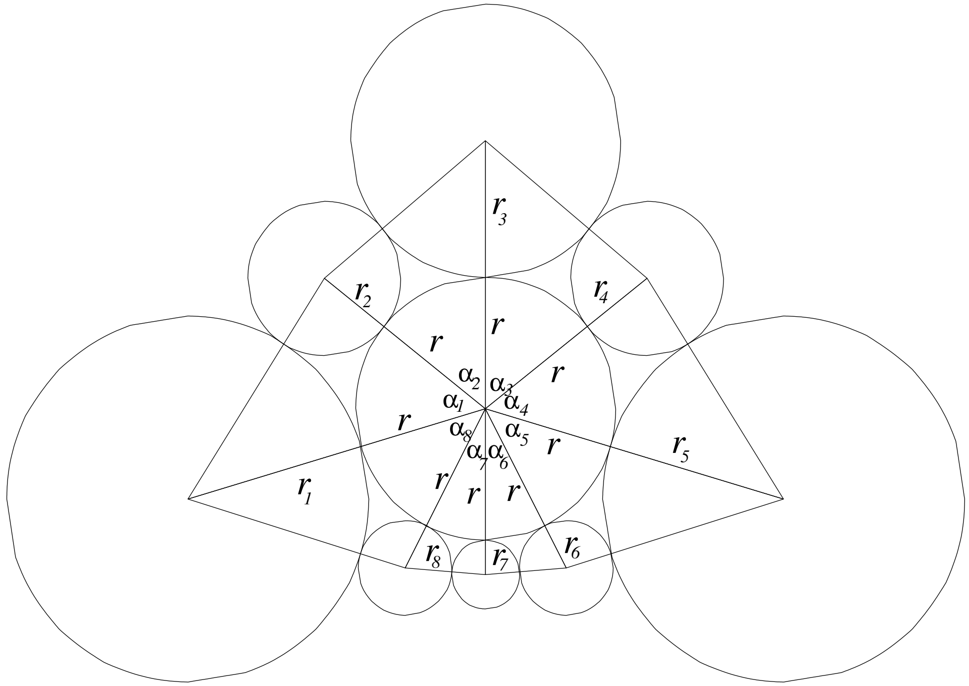
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 360^\circ$$

O sea,

$$\arccos\left(\frac{(r+r_1)^2+(r+r_2)^2-(r_1+r_2)^2}{2(r+r_1)(r+r_2)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_2)^2+(r+r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r+r_2)(r+r_3)}\right)$$

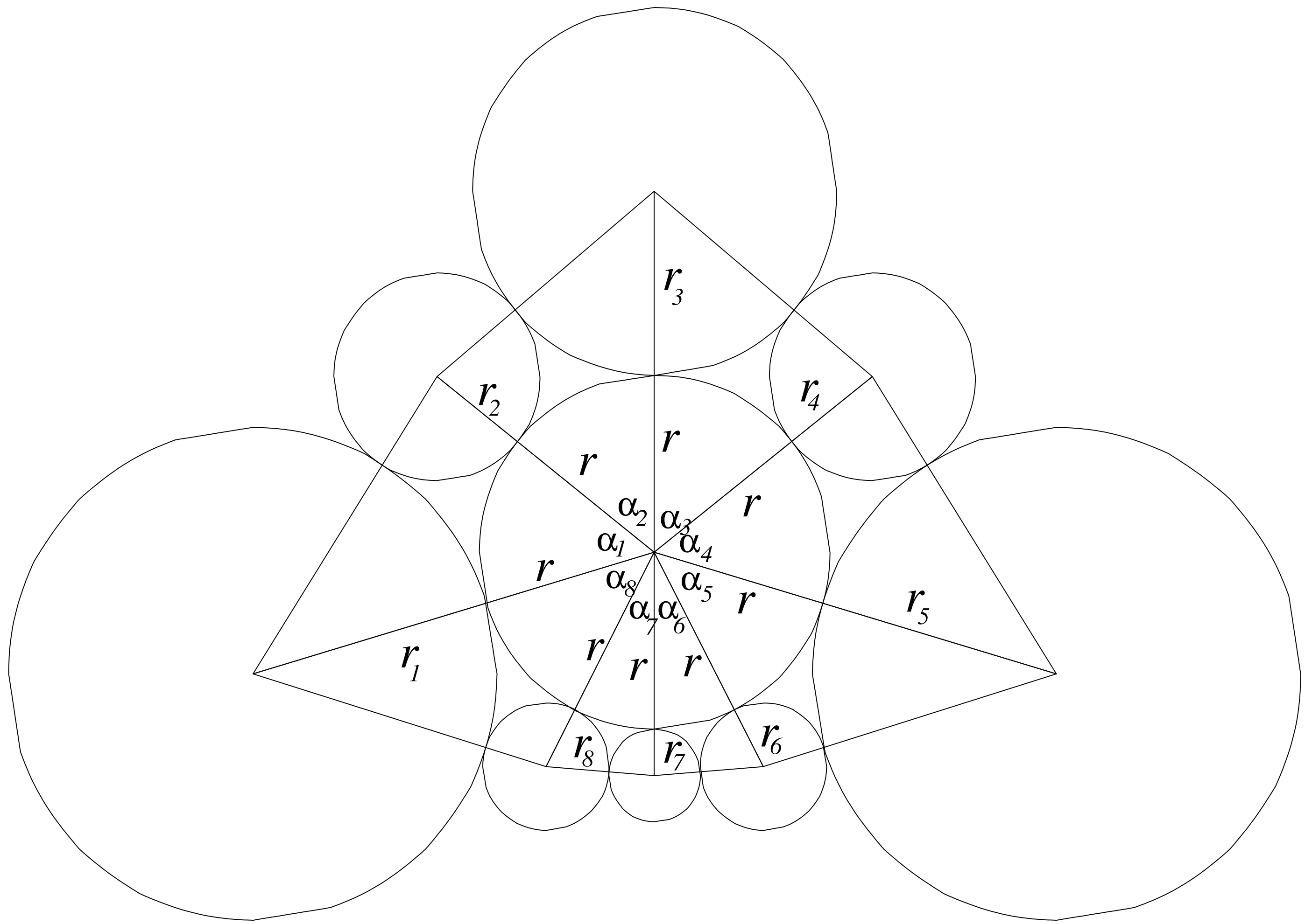
$$+\cdots+\arccos\left(\frac{(r+r_n)^2+(r+r_1)^2-(r_n+r_1)^2}{2(r+r_n)(r+r_1)}\right)=360^\circ$$

Vamos a escribir $\theta(C) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.



$$\arccos\left(\frac{(r+r_1)^2+(r+r_2)^2-(r_1+r_2)^2}{2(r+r_1)(r+r_2)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_2)^2+(r+r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r+r_2)(r+r_3)}\right)+$$
$$\arccos\left(\frac{(r+r_3)^2+(r+r_4)^2-(r_3+r_4)^2}{2(r+r_3)(r+r_4)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_4)^2+(r+r_5)^2-(r_4+r_5)^2}{2(r+r_4)(r+r_5)}\right)+$$
$$\arccos\left(\frac{(r+r_5)^2+(r+r_6)^2-(r_5+r_6)^2}{2(r+r_5)(r+r_6)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_6)^2+(r+r_7)^2-(r_6+r_7)^2}{2(r+r_6)(r+r_7)}\right)+$$
$$\arccos\left(\frac{(r+r_7)^2+(r+r_8)^2-(r_7+r_8)^2}{2(r+r_7)(r+r_8)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_8)^2+(r+r_1)^2-(r_8+r_1)^2}{2(r+r_8)(r+r_1)}\right)$$

$$= 360^\circ$$



O sea

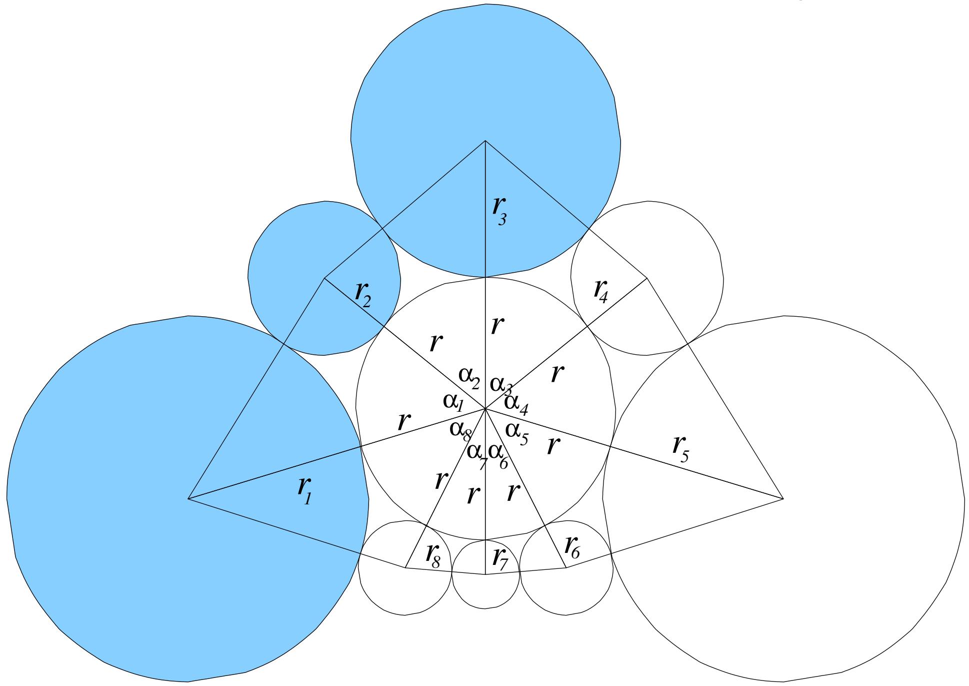
$$\theta(C) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 360^\circ$$

Pero, la ecuación es ésta:

$$\arccos\left(\frac{(r+r_1)^2+(r+r_2)^2-(r_1+r_2)^2}{2(r+r_1)(r+r_2)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_2)^2+(r+r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r+r_2)(r+r_3)}\right)+$$
$$\arccos\left(\frac{(r+r_3)^2+(r+r_4)^2-(r_3+r_4)^2}{2(r+r_3)(r+r_4)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_4)^2+(r+r_5)^2-(r_4+r_5)^2}{2(r+r_4)(r+r_5)}\right)+$$
$$\arccos\left(\frac{(r+r_5)^2+(r+r_6)^2-(r_5+r_6)^2}{2(r+r_5)(r+r_6)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_6)^2+(r+r_7)^2-(r_6+r_7)^2}{2(r+r_6)(r+r_7)}\right)+$$
$$\arccos\left(\frac{(r+r_7)^2+(r+r_8)^2-(r_7+r_8)^2}{2(r+r_7)(r+r_8)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_8)^2+(r+r_1)^2-(r_8+r_1)^2}{2(r+r_8)(r+r_1)}\right)$$

$$=360^\circ$$

Si algunos de los círculos están en la orilla, por ejemplo,



los radios correspondientes son 1; y la ecuación es

$$\arccos\left(\frac{(r+1)^2+(r+1)^2-(1+1)^2}{2(r+1)(r+1)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+1)^2+(r+1)^2-(1+1)^2}{2(r+1)(r+1)}\right)+$$
$$\arccos\left(\frac{(r+1)^2+(r+r_4)^2-(1+r_4)^2}{2(r+1)(r+1)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_4)^2+(r+r_5)^2-(r_4+r_5)^2}{2(r+r_4)(r+r_5)}\right)+$$
$$\arccos\left(\frac{(r+r_5)^2+(r+r_6)^2-(r_5+r_6)^2}{2(r+r_5)(r+r_6)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_6)^2+(r+r_7)^2-(r_6+r_7)^2}{2(r+r_6)(r+r_7)}\right)+$$
$$\arccos\left(\frac{(r+r_7)^2+(r+r_8)^2-(r_7+r_8)^2}{2(r+r_7)(r+r_8)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_8)^2+(r+1)^2-(r_8+1)^2}{2(r+r_8)(r+1)}\right)$$

$$=360^\circ$$

Si tenemos un complejo K con m vértices, entonces queremos encontrar m círculos $C_1, C_2, \ldots, C_m$ que se acomoden bonito.

Pero, de hecho, nos basta encontrar los radios de los círculos (porque, si sabemos los radios, es fácil acomodar los círculos que sigan el "esquema" que nos marca el complejo.)

Entonces debemos resolver las ecuaciones para las flores

$$\begin{cases} \theta(C_1) & = 360^\circ \\ \theta(C_2) & = 360^\circ \\ \theta(C_3) & = 360^\circ \\ \quad \cdots & \\ \theta(C_m) & = 360^\circ \end{cases}$$

(más o menos m ecuaciones con m incógnitas)

Eso está muy difícil.

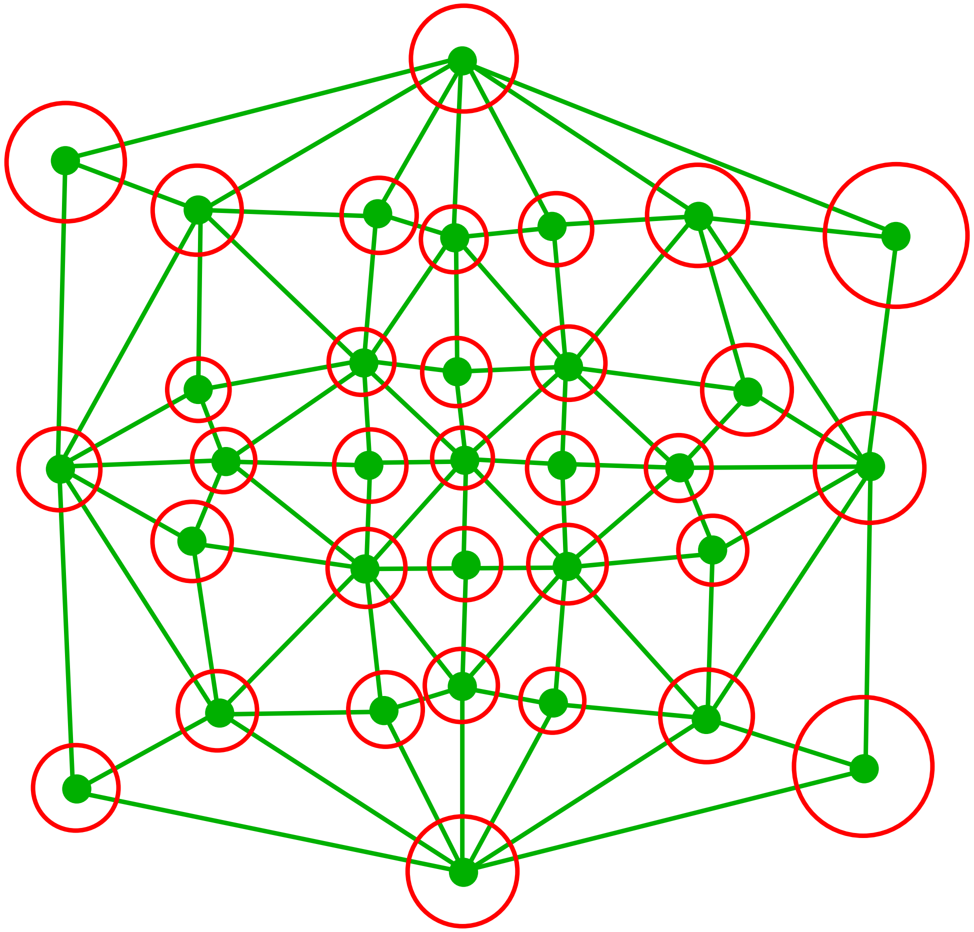
Pero se puede probar que el sistema

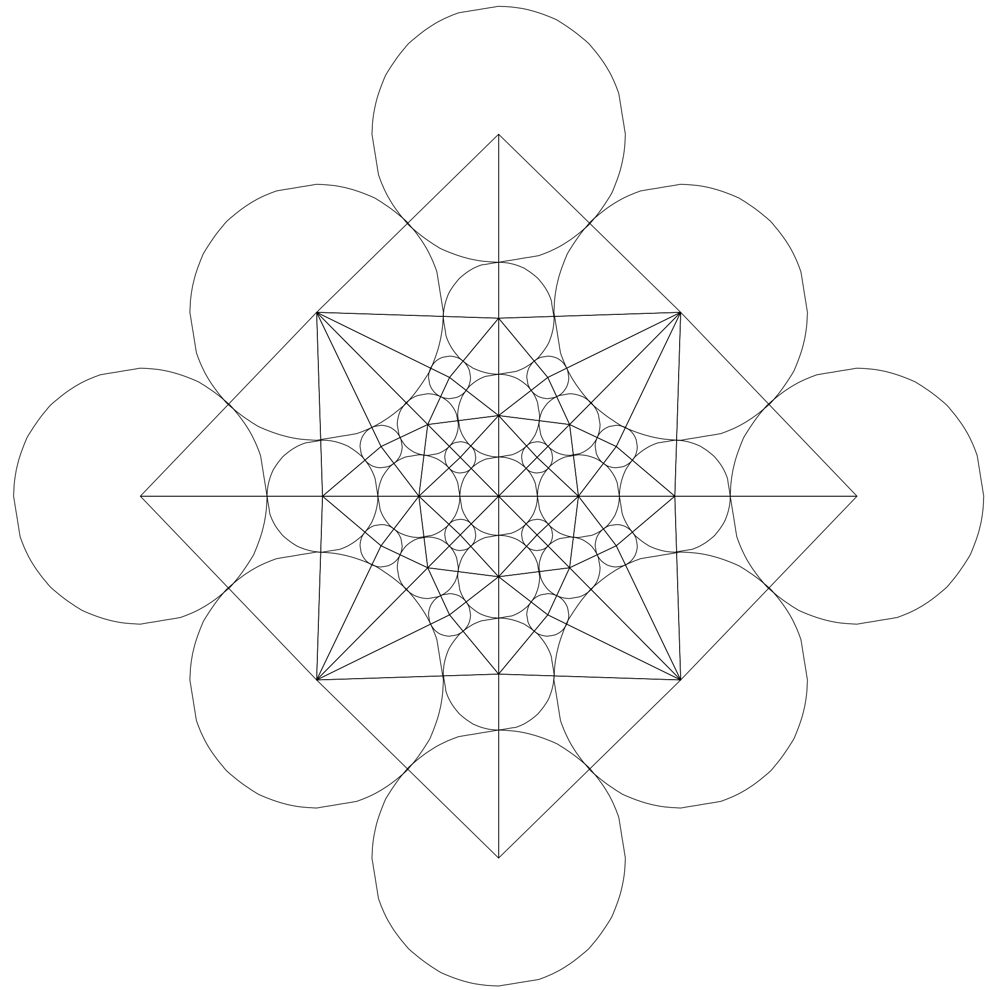
$$\begin{cases} \theta(C_1) & = 360^\circ \\ \theta(C_2) & = 360^\circ \\ \theta(C_3) & = 360^\circ \\ \quad \cdots & \\ \theta(C_m) & = 360^\circ \end{cases}$$

efectivamente tiene solución (Teorema de Thurston)

Aunque Thurston no nos dice cuál es la solución.

(esto es frecuente en matemáticas)





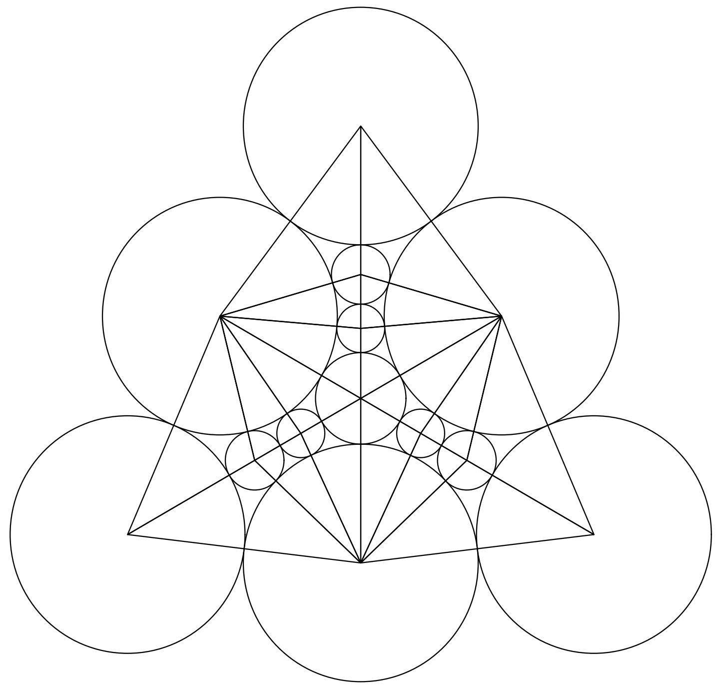
para las flores

$$\arccos\left(\frac{(r+r_1)^2+(r+r_2)^2-(r_1+r_2)^2}{2(r+r_1)(r+r_2)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_2)^2+(r+r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r+r_2)(r+r_3)}\right)+$$
$$\arccos\left(\frac{(r+r_3)^2+(r+r_4)^2-(r_3+r_4)^2}{2(r+r_3)(r+r_4)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_4)^2+(r+r_5)^2-(r_4+r_5)^2}{2(r+r_4)(r+r_5)}\right)+$$
$$\arccos\left(\frac{(r+r_5)^2+(r+r_6)^2-(r_5+r_6)^2}{2(r+r_5)(r+r_6)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_6)^2+(r+r_7)^2-(r_6+r_7)^2}{2(r+r_6)(r+r_7)}\right)+$$
$$\arccos\left(\frac{(r+r_7)^2+(r+r_8)^2-(r_7+r_8)^2}{2(r+r_7)(r+r_8)}\right)+\arccos\left(\frac{(r+r_8)^2+(r+r_1)^2-(r_8+r_1)^2}{2(r+r_8)(r+r_1)}\right)$$

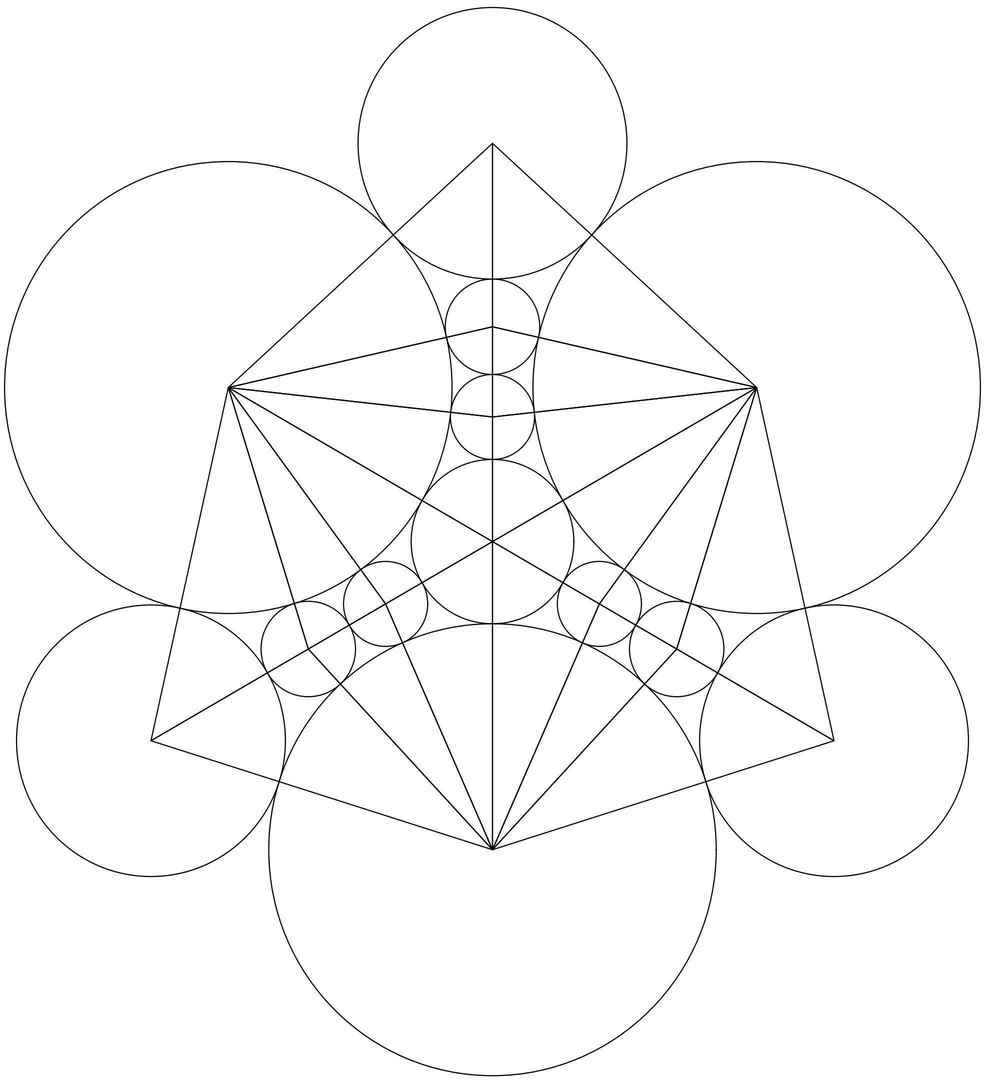
$$= 360^\circ$$

(¿…?)

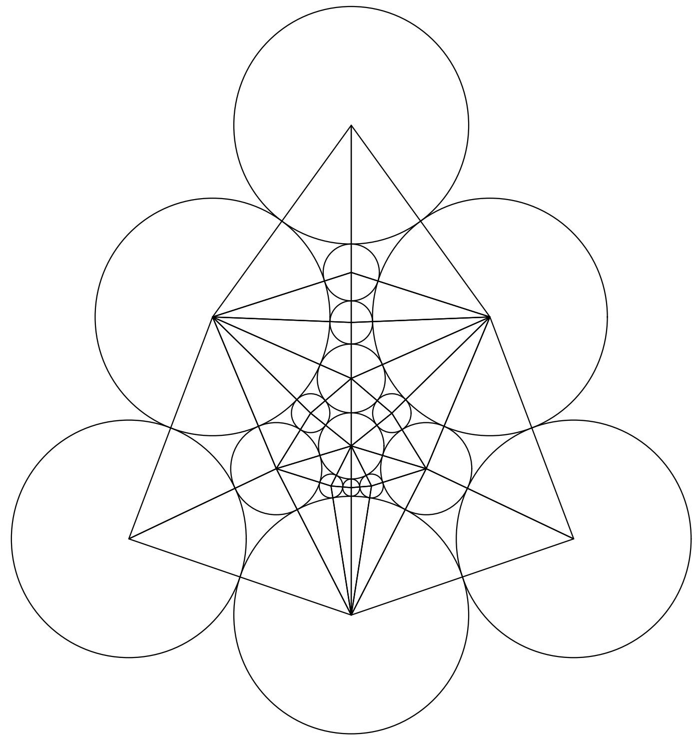
trebol



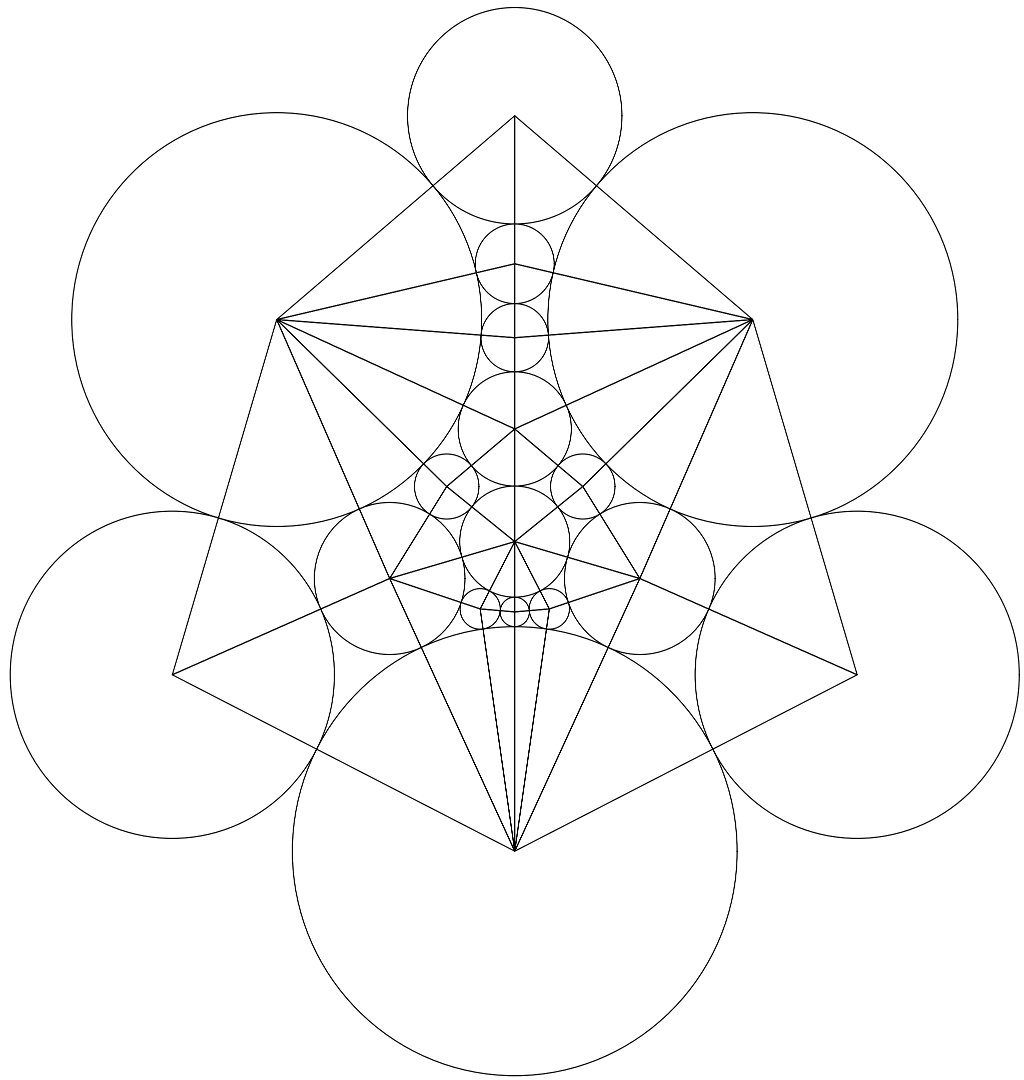
trebol



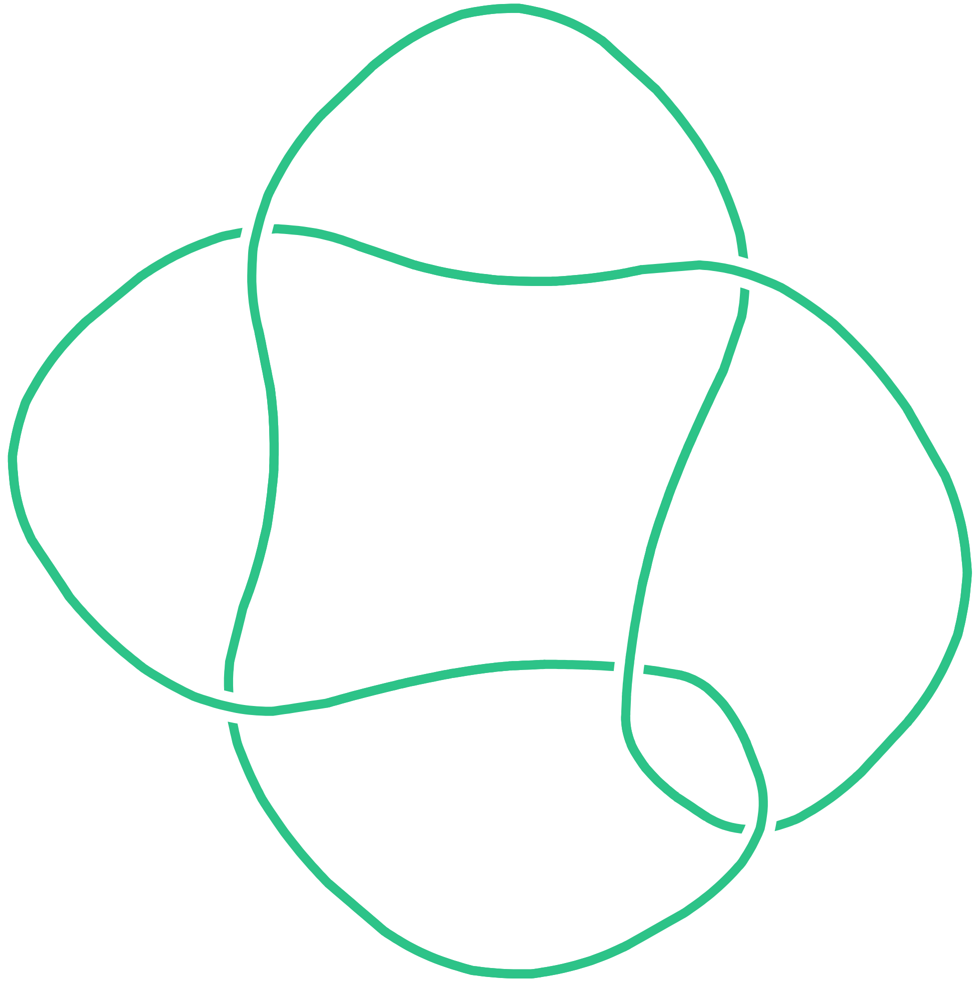
ocho



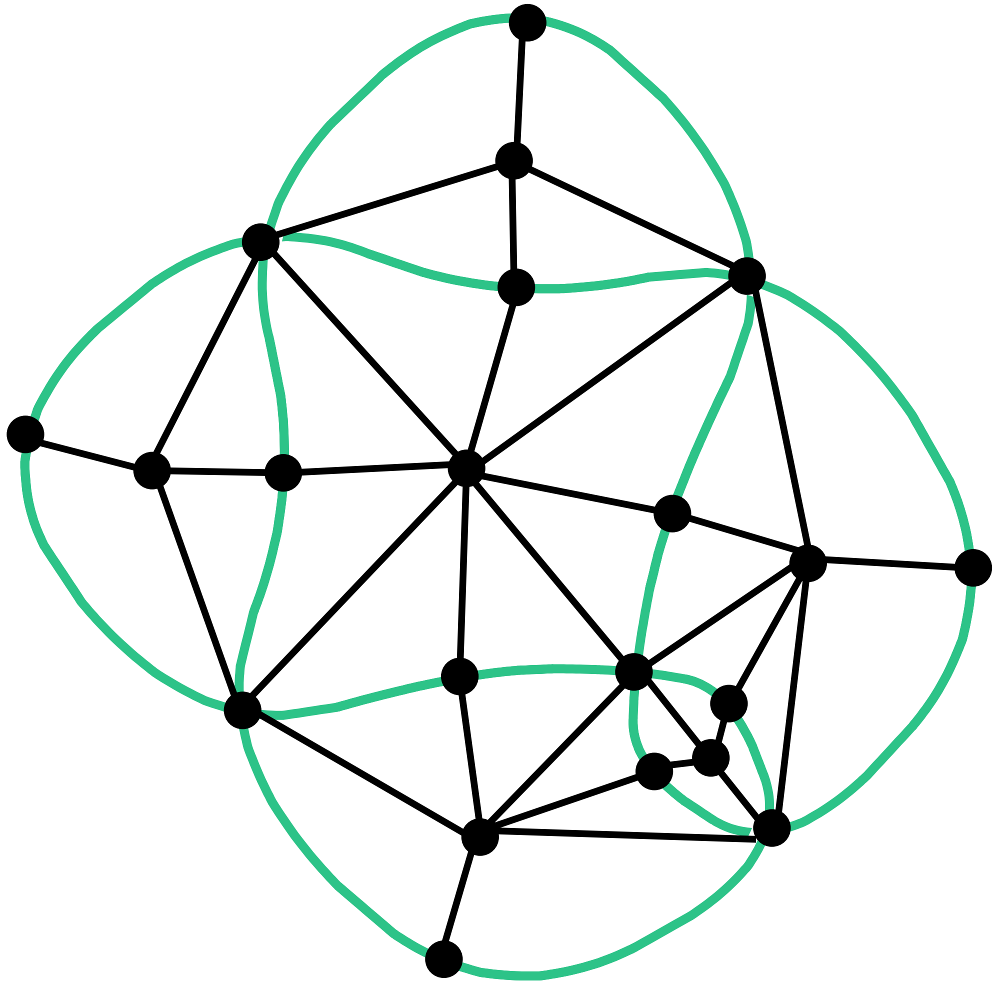
ocho



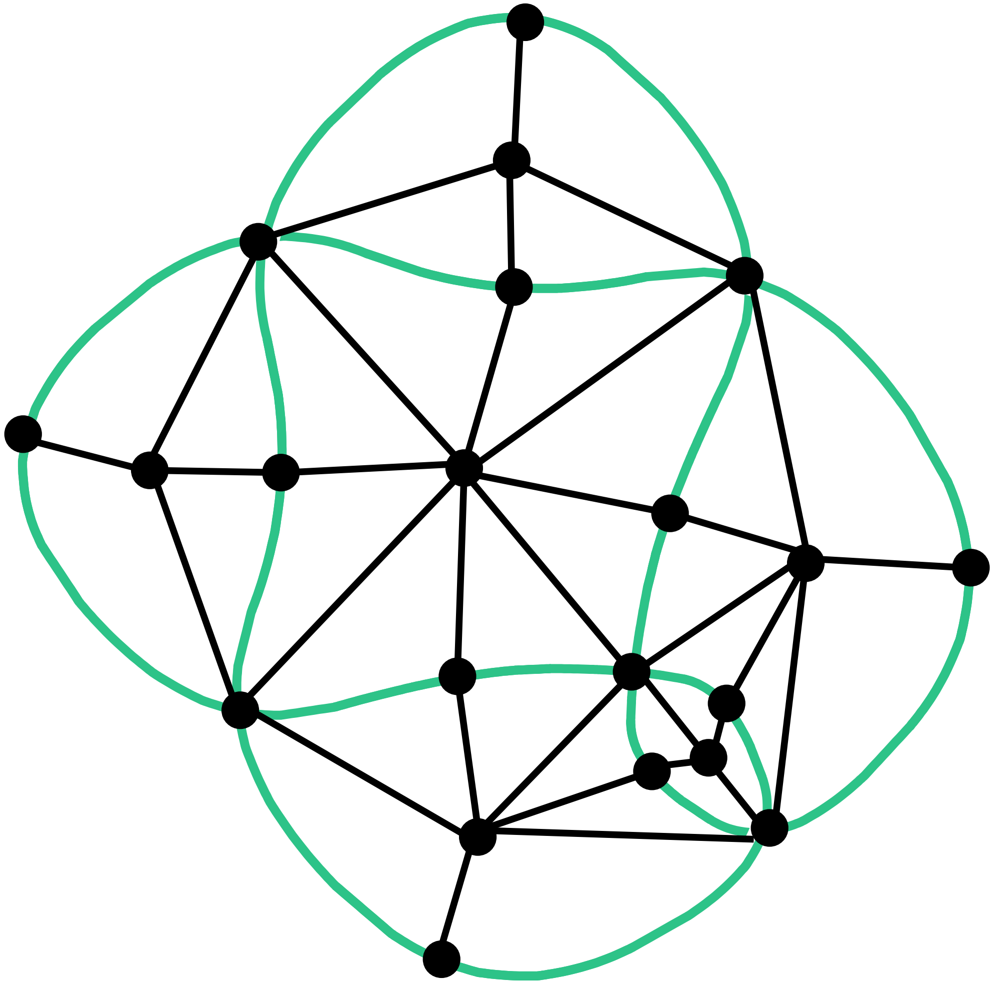
5a1

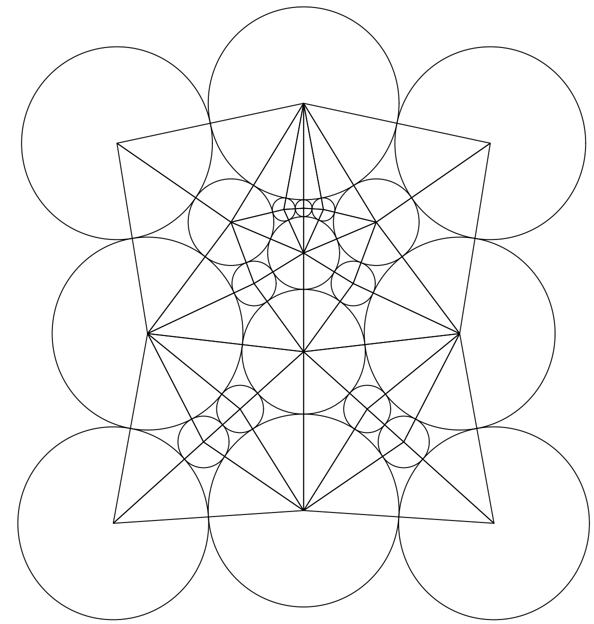


5a1

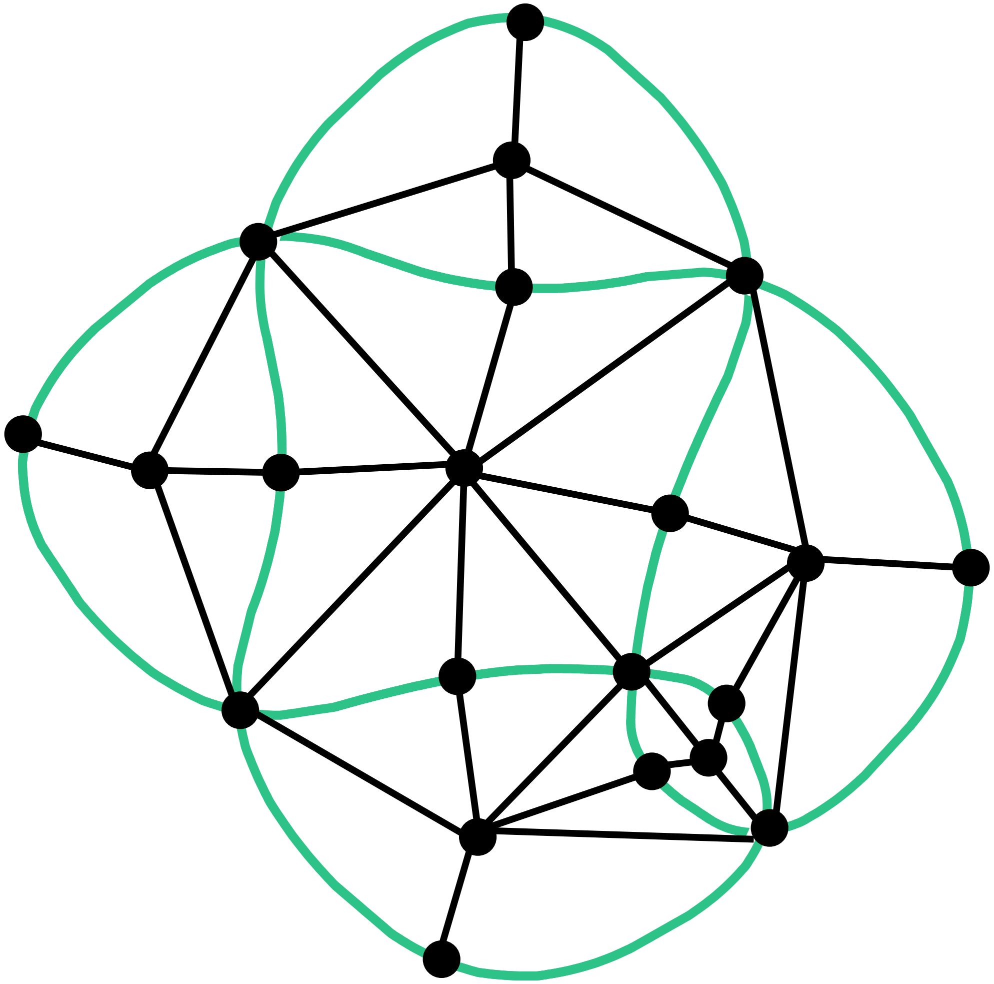


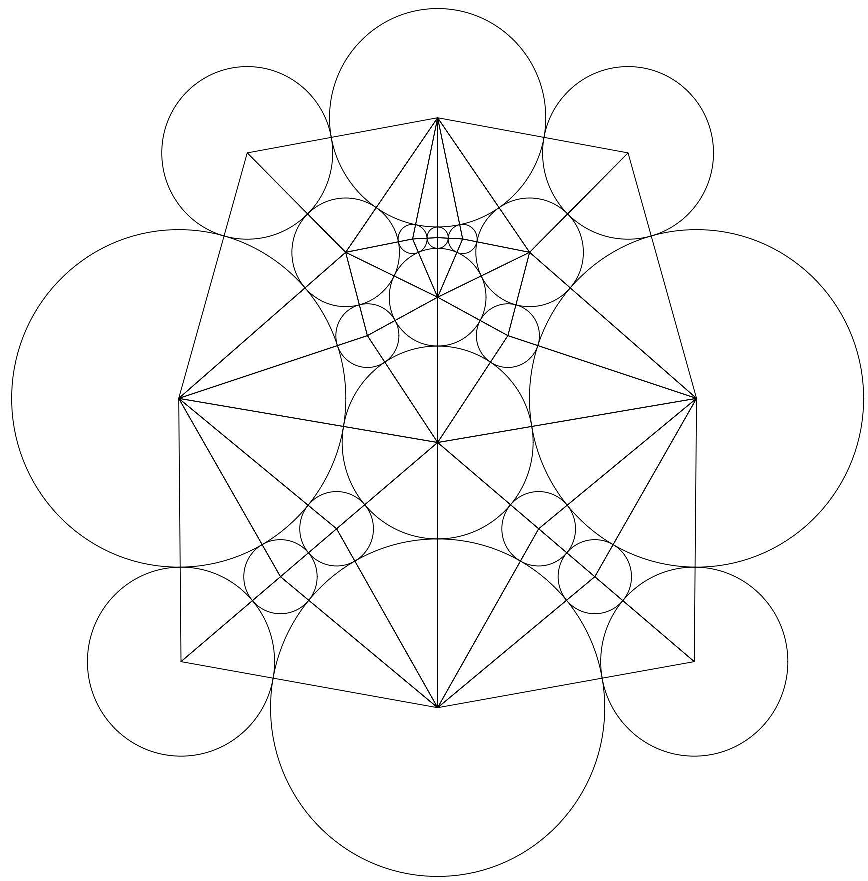
5a1



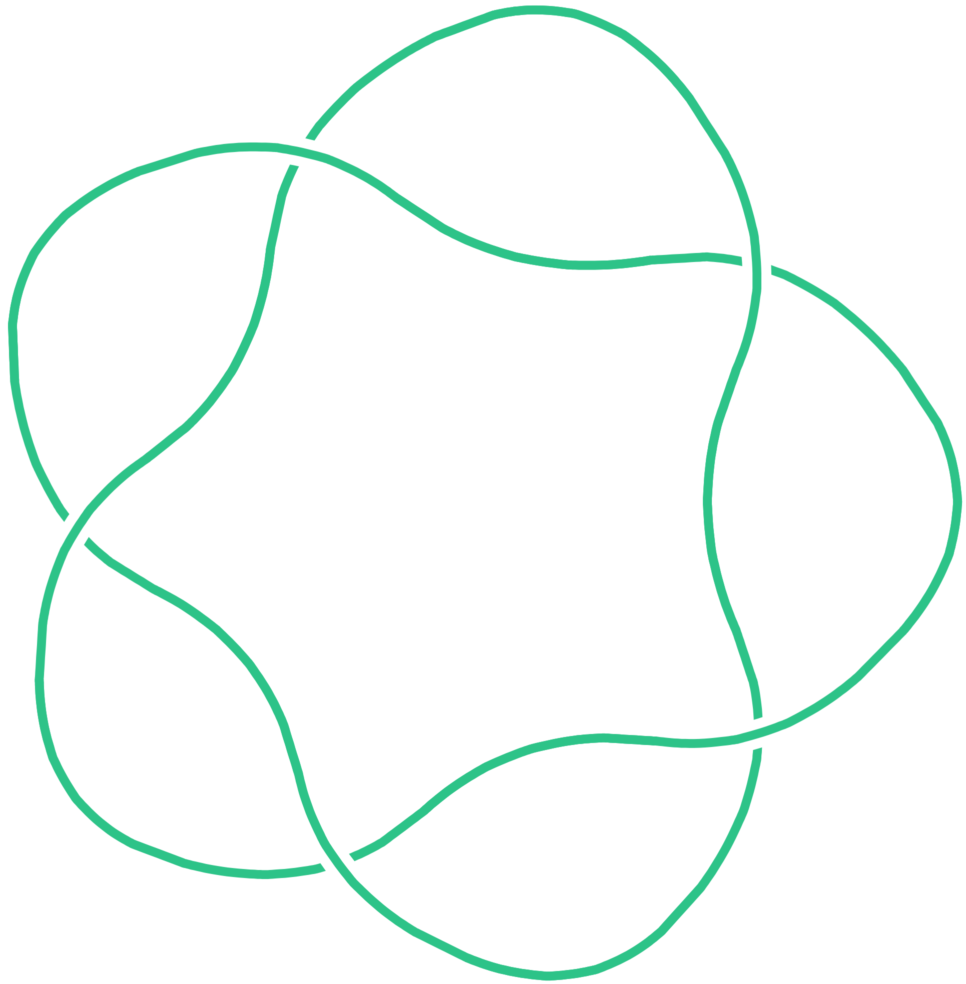


5a1

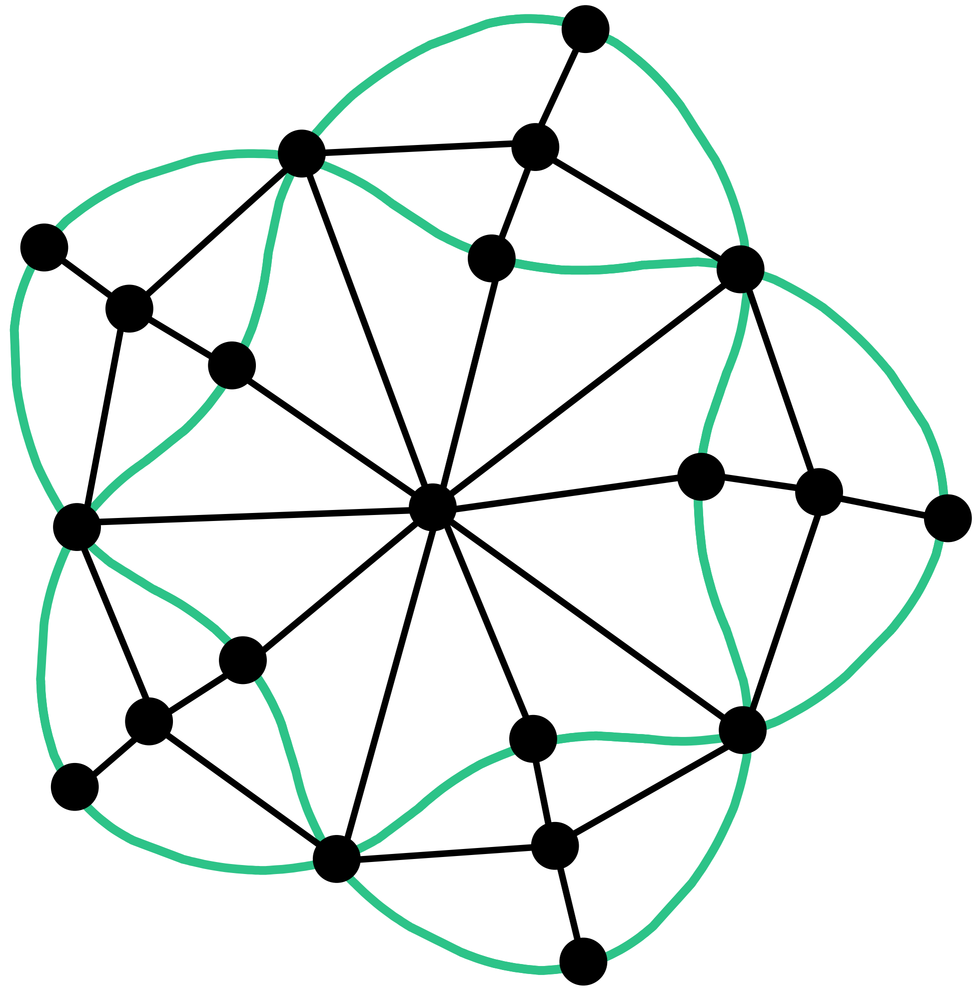




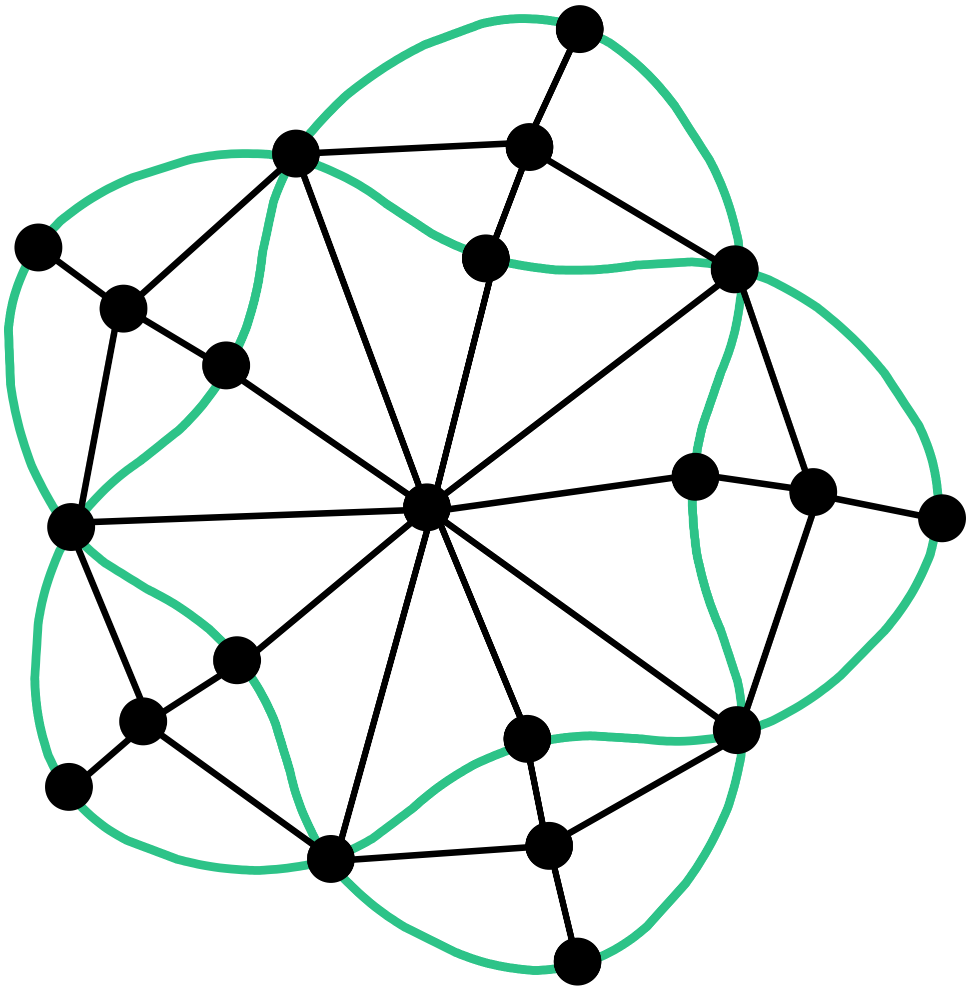
5a2

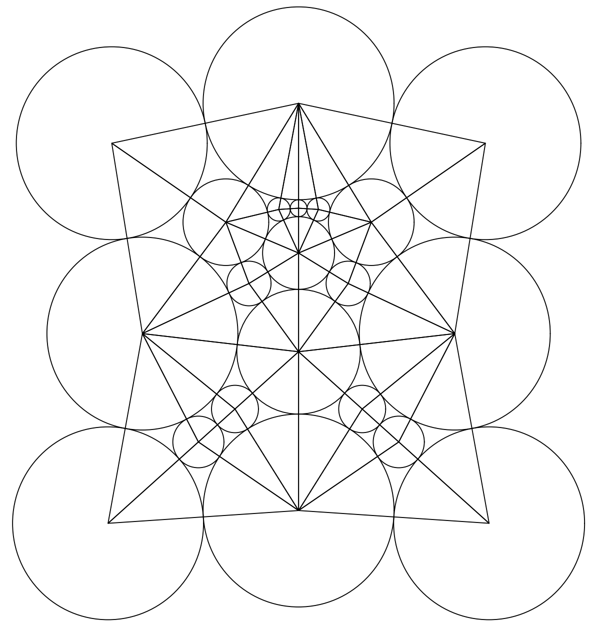


5a2

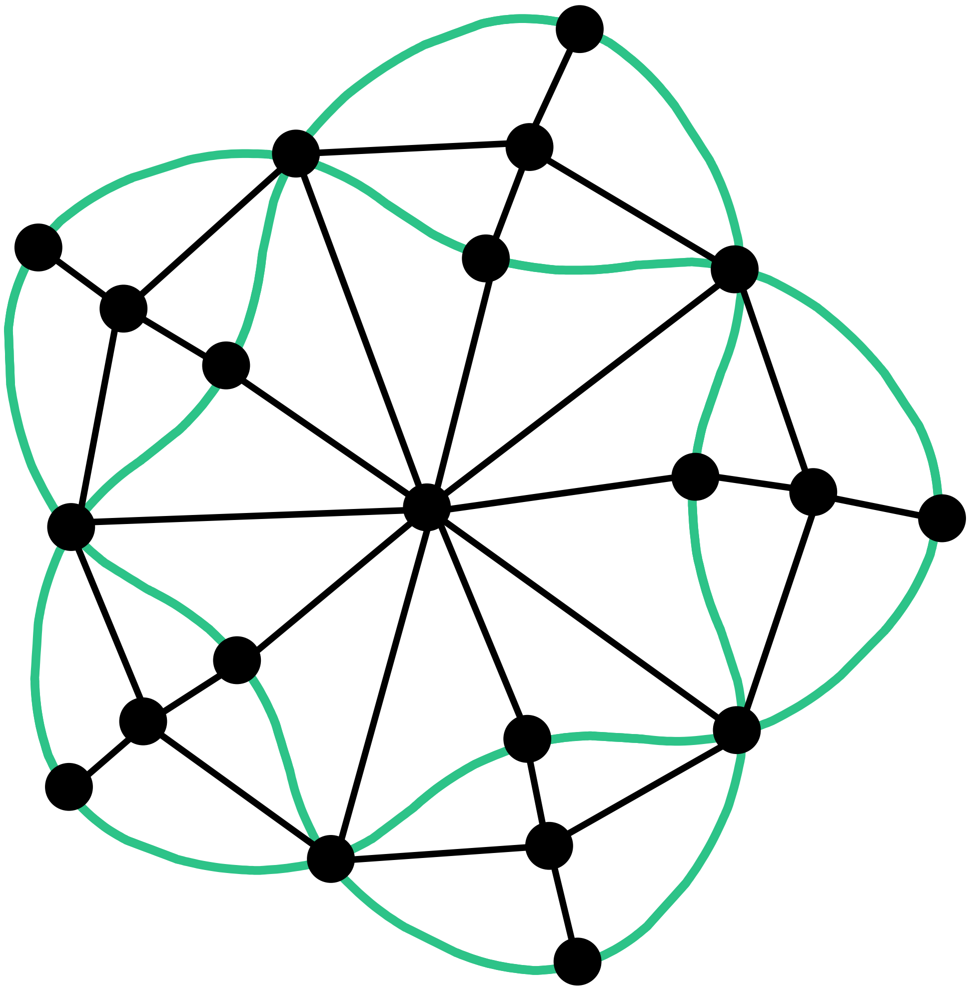


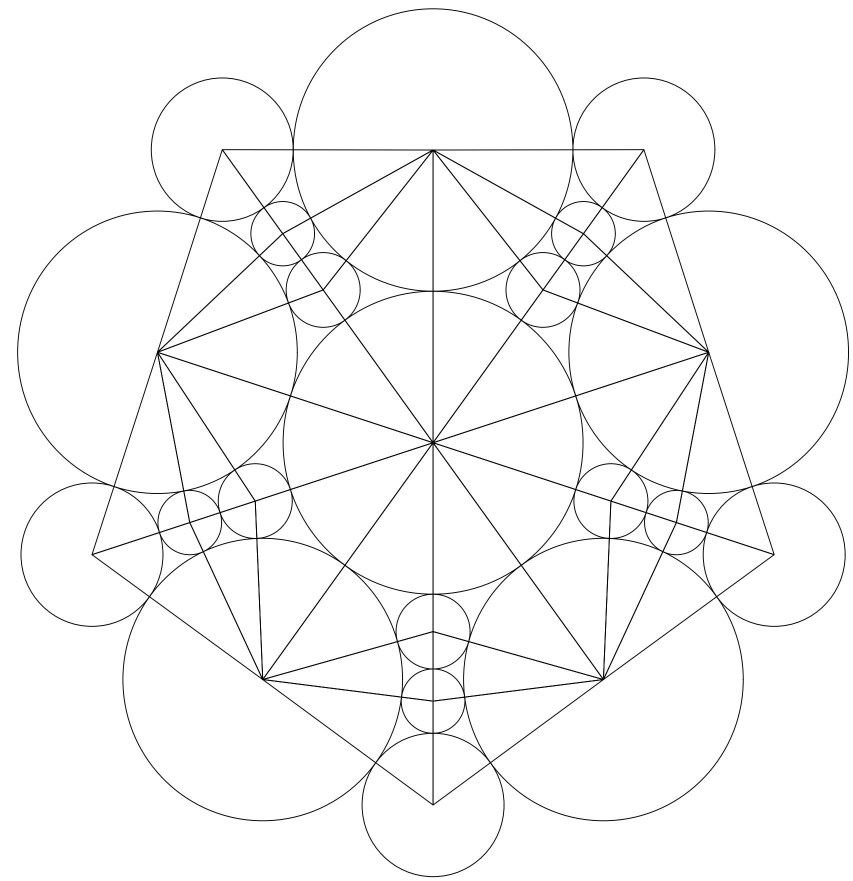
5a2



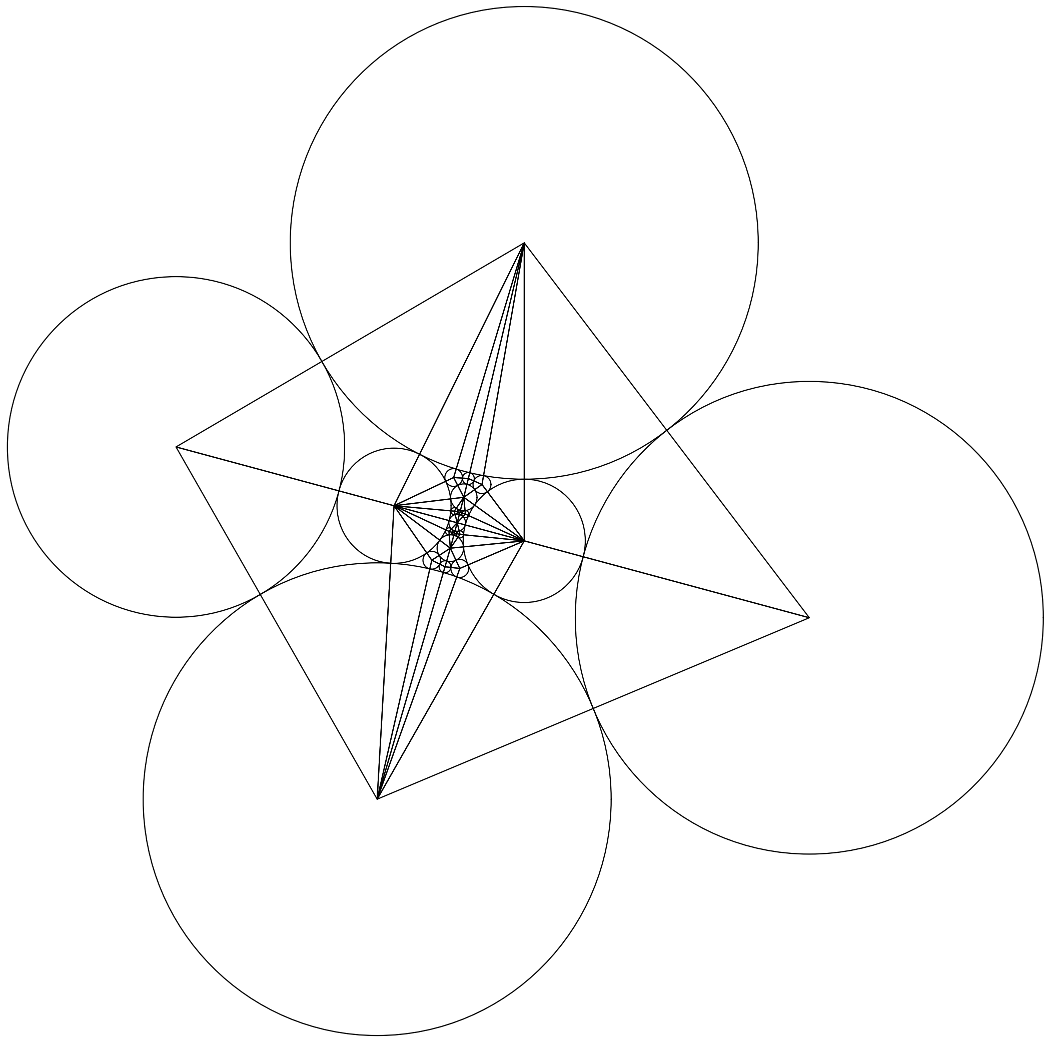


5a2

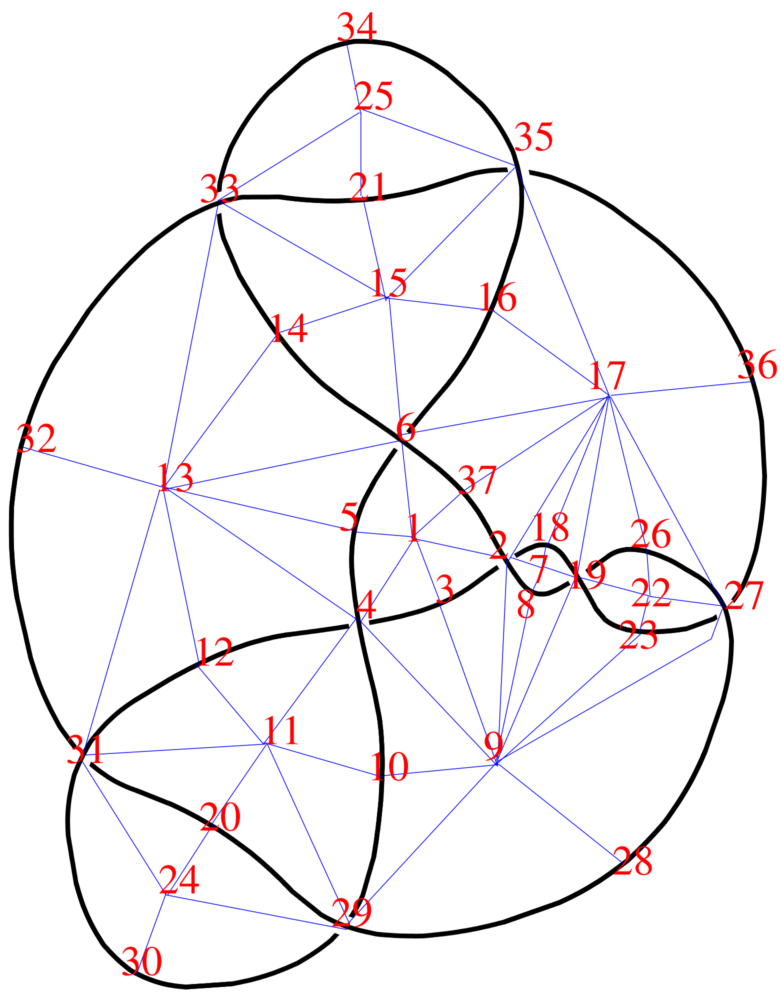




5a2

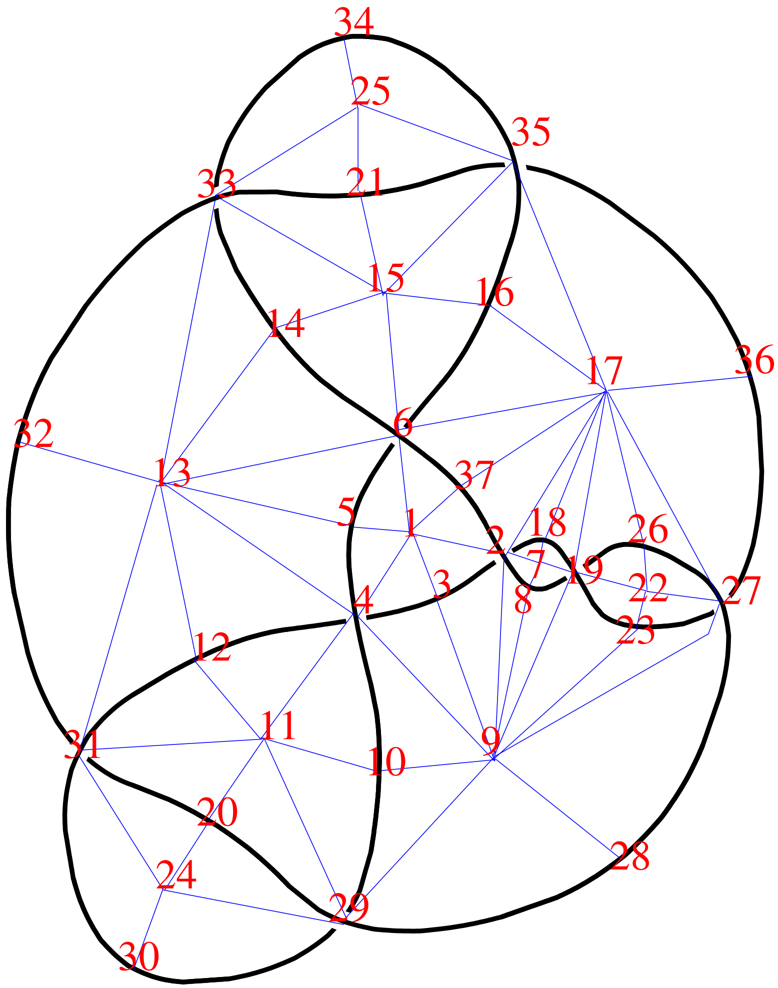


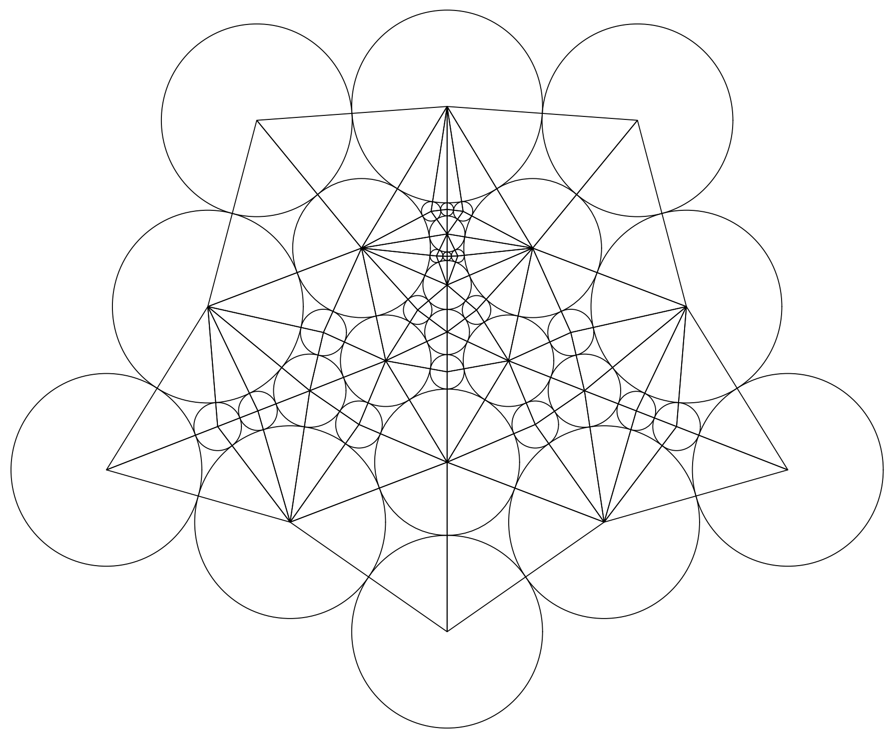
9a48



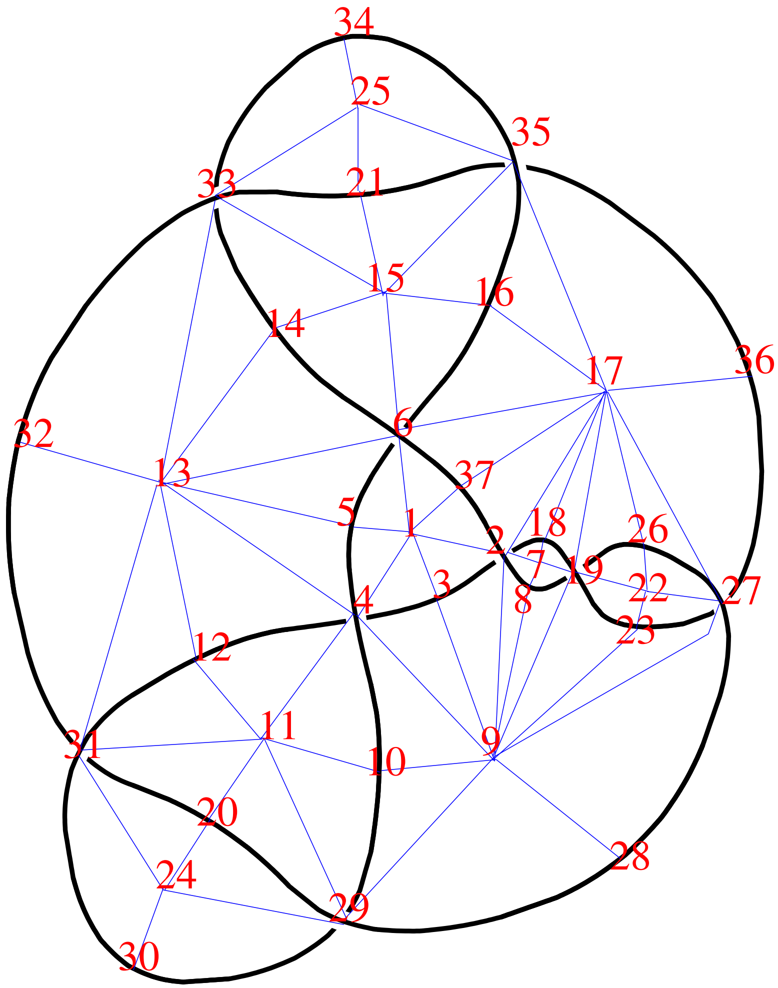
34
25
35
33
21
15
16
14
17
36
6
32
13
37
5
1
2
18
7
19
26
22
27
3
8
4
23
12
11
31
9
10
20
28
24
29
30

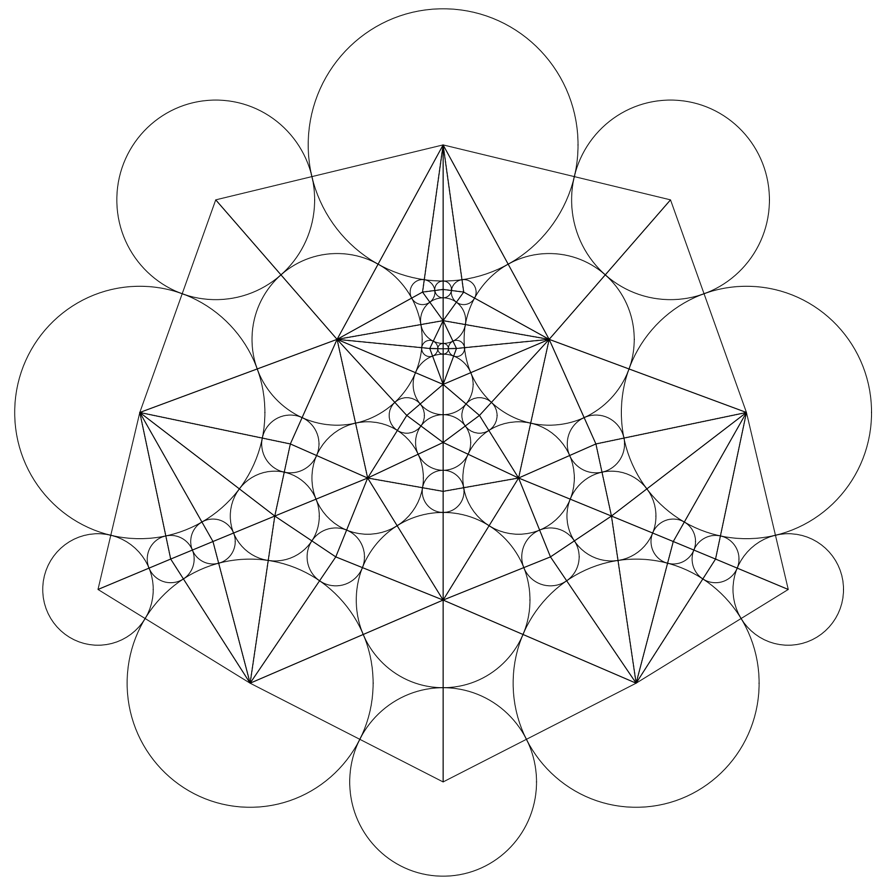
9a48


34
25
35
33
21
15
16
14
17
36
32
6
13
37
5
1
18
26
2
7
19
22
27
3
8
4
23
12
11
9
31
10
20
28
24
29
30

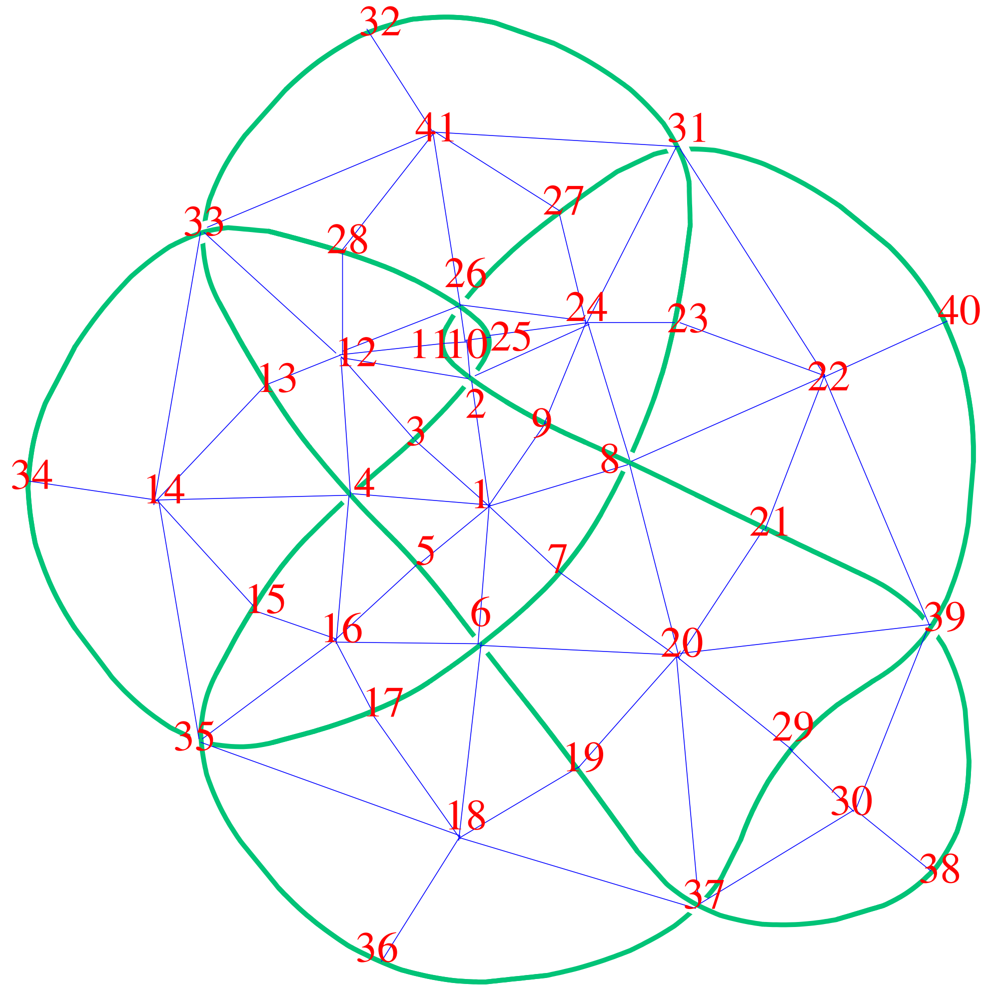


9a48


34
25
35
33
21
15
16
14
17
36
6
32
13
37
5
1
2
18
26
7
19
3
22
27
8
4
23
12
11
9
31
10
20
28
24
29
30

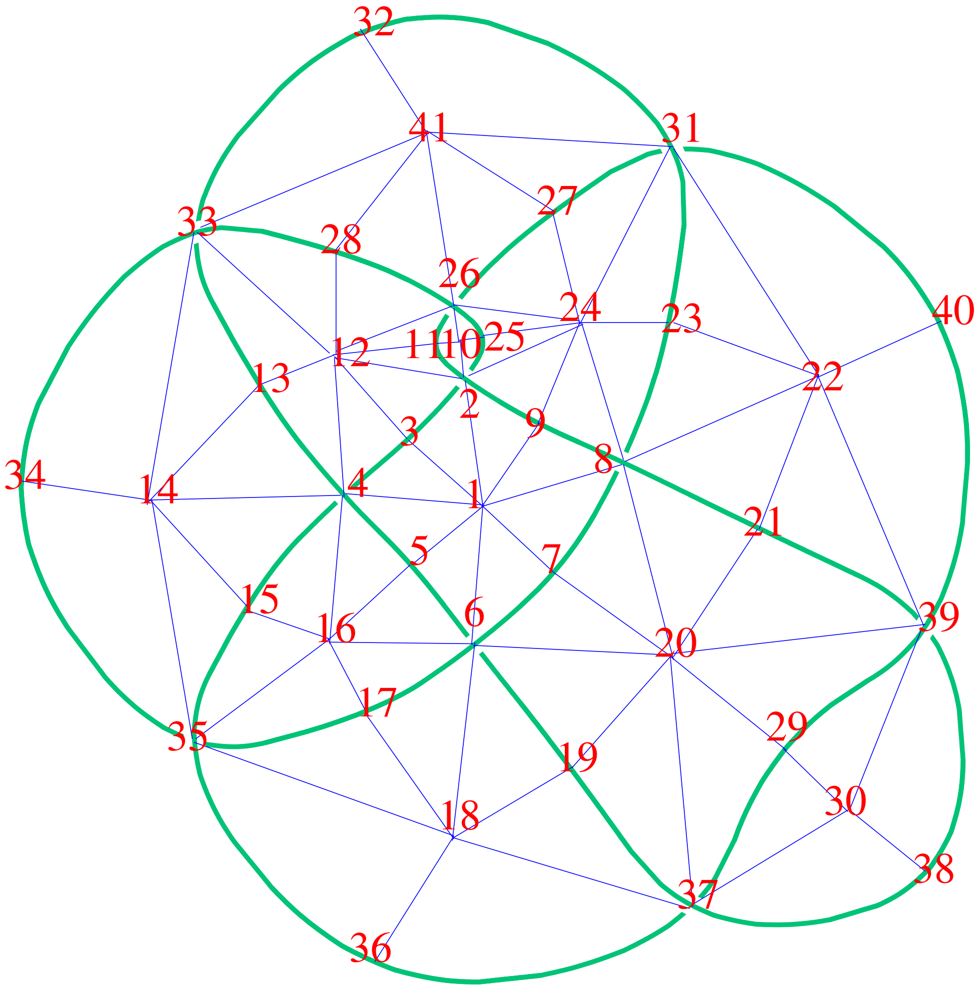


10a166

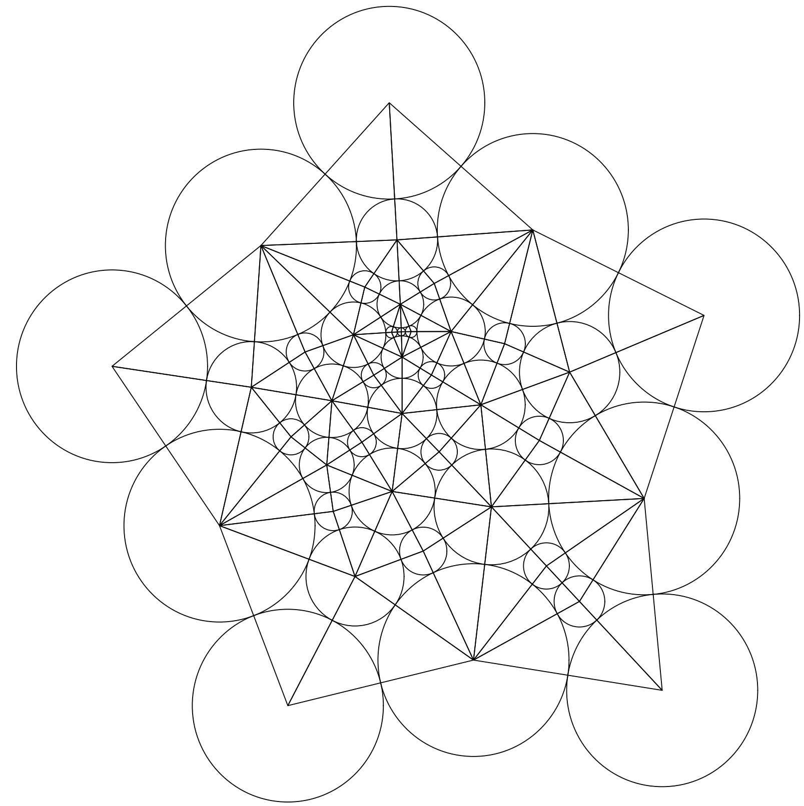


32
41
31
27
33
28
26
24
23
40
12
11
10
25
13
22
2
9
3
8
34
14
4
1
21
5
7
15
6
39
16
20
17
29
35
19
30
18
38
37
36

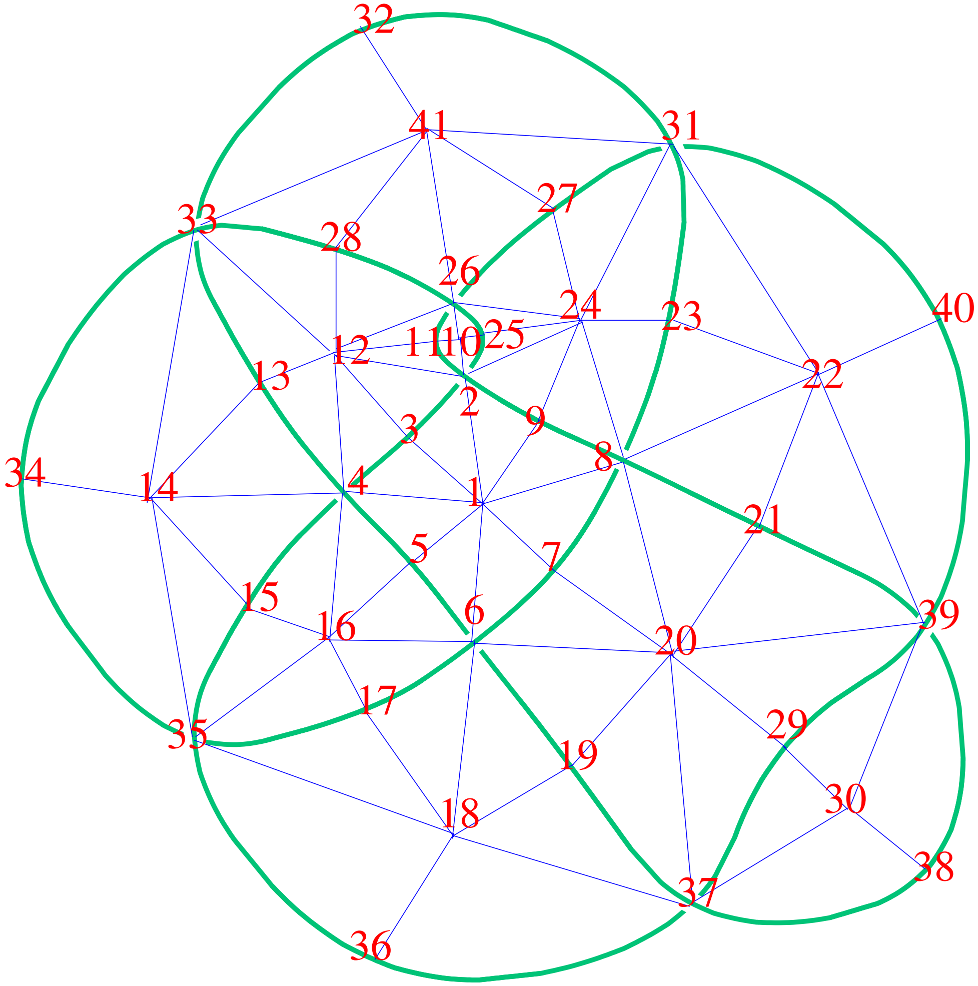
10a166



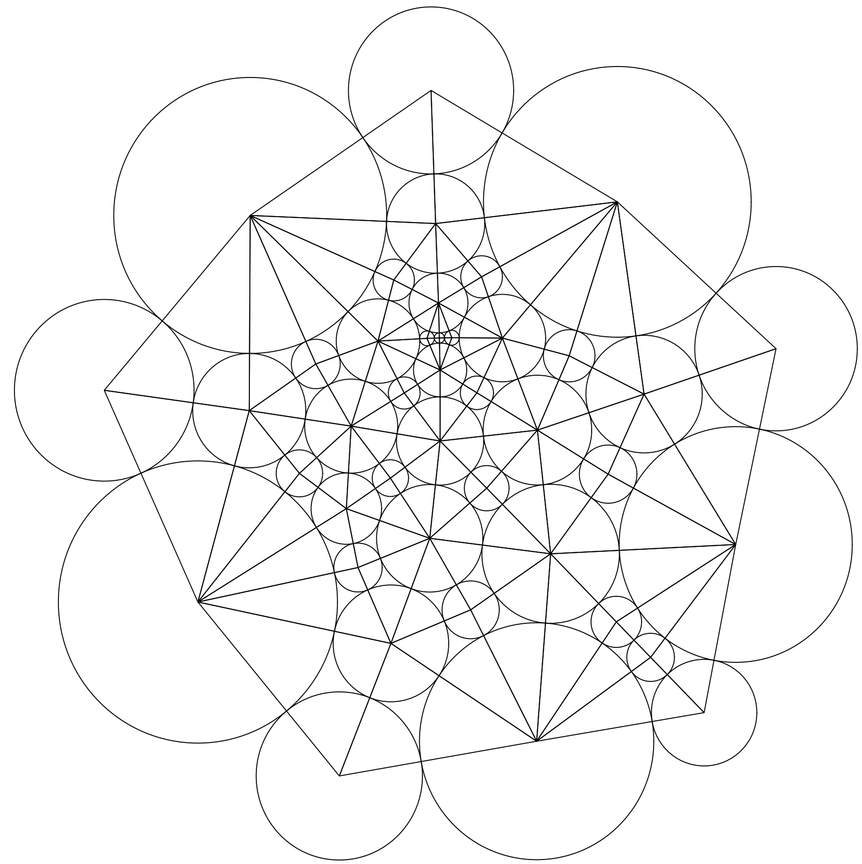
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41

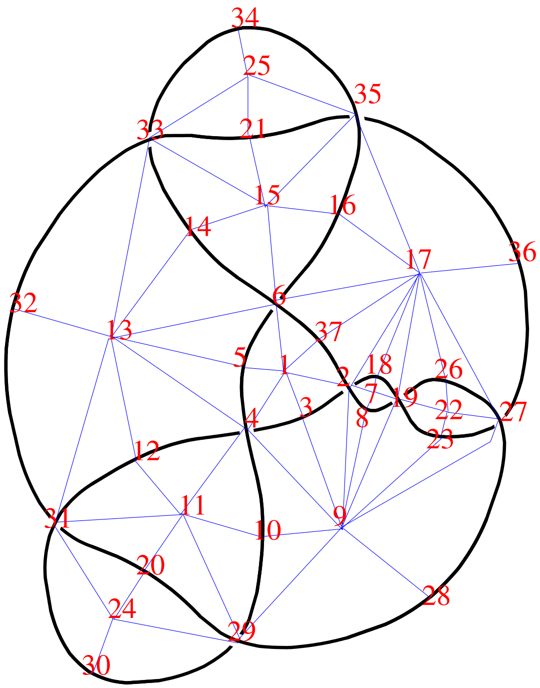


10a166



32
41
31
27
33
28
26
24
23
40
11
10
25
12
13
22
2
9
3
8
34
14
4
1
21
5
7
15
6
39
16
20
17
29
35
19
30
18
38
37
36





NODECOUNT: 37

GEOMETRY: hyperbolic

ALPHA/BETA/GAMMA: 1 2 2

FLOWERS:

1 6 2 3 4 5 6 37 2

2 8 1 37 17 18 7 8 9 3 1

3 4 1 2 9 4 1

4 8 1 3 9 10 11 12 13 5 1

5 4 1 4 13 6 1

6 8 1 5 13 14 15 16 17 37 1
7 4 2 18 19 8 2
8 4 2 7 19 9 2
9 10 2 8 19 23 27 28 29 10 4 3 2
10 4 4 9 29 11 4
11 6 4 10 29 20 31 12 4
12 4 4 11 31 13 4
13 8 4 12 31 32 33 14 6 5 4
14 4 6 13 33 15 6
15 6 6 14 33 21 35 16 6
16 4 6 15 35 17 6
17 10 2 37 6 16 35 36 27 26 19 18 2
18 4 2 17 19 7 2
19 8 7 18 17 26 22 23 9 8 7
20 4 11 29 24 31 11
21 4 15 33 25 35 15
22 4 19 26 27 23 19
23 4 9 19 22 27 9
24 4 20 29 30 31 20
25 4 21 33 34 35 21
26 4 17 27 22 19 17
27 6 28 9 23 22 26 17 36
28 2 29 9 27
29 6 30 24 20 11 10 9 28
30 2 31 24 29

```
31 6 32 13 12 11 20 24 30
32 2 33 13 31
33 6 34 25 21 15 14 13 32
34 2 35 25 33
35 6 36 17 16 15 21 25 34
36 2 27 17 35
37 4 1 6 17 2 1
END
```