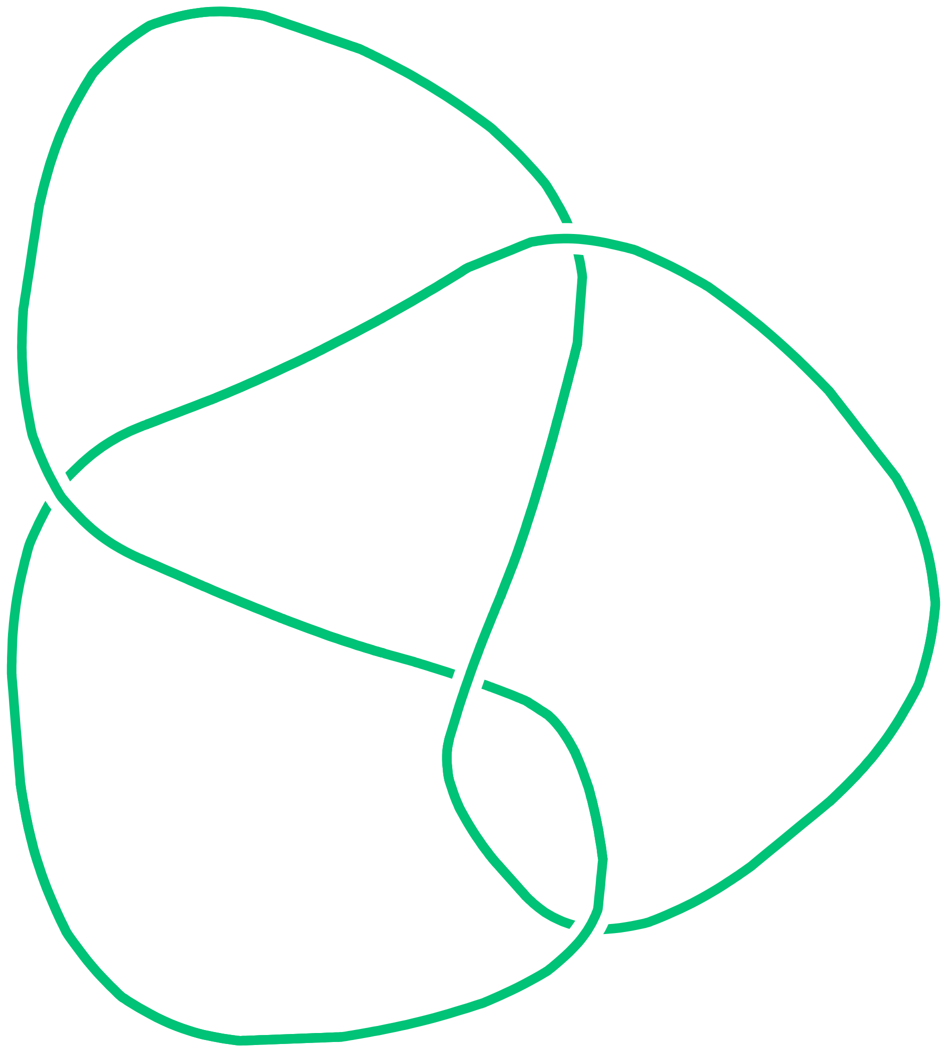
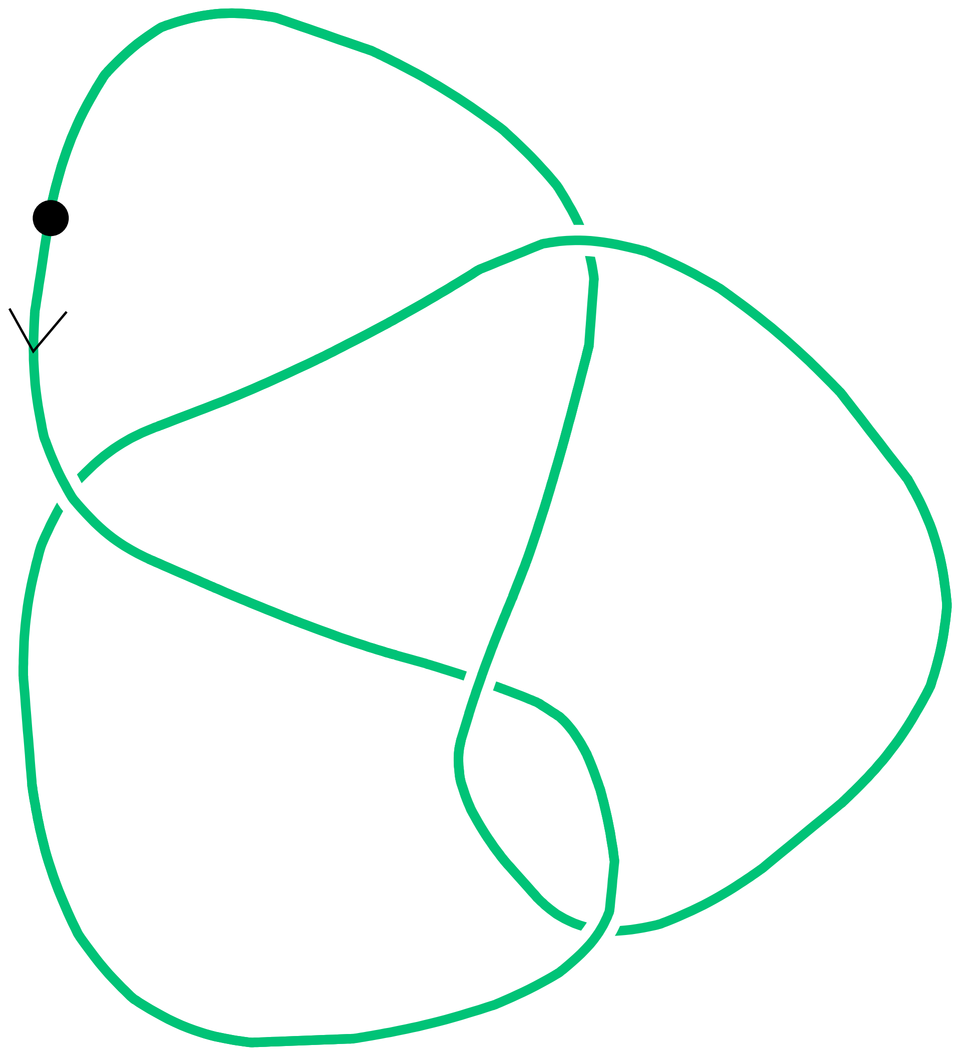
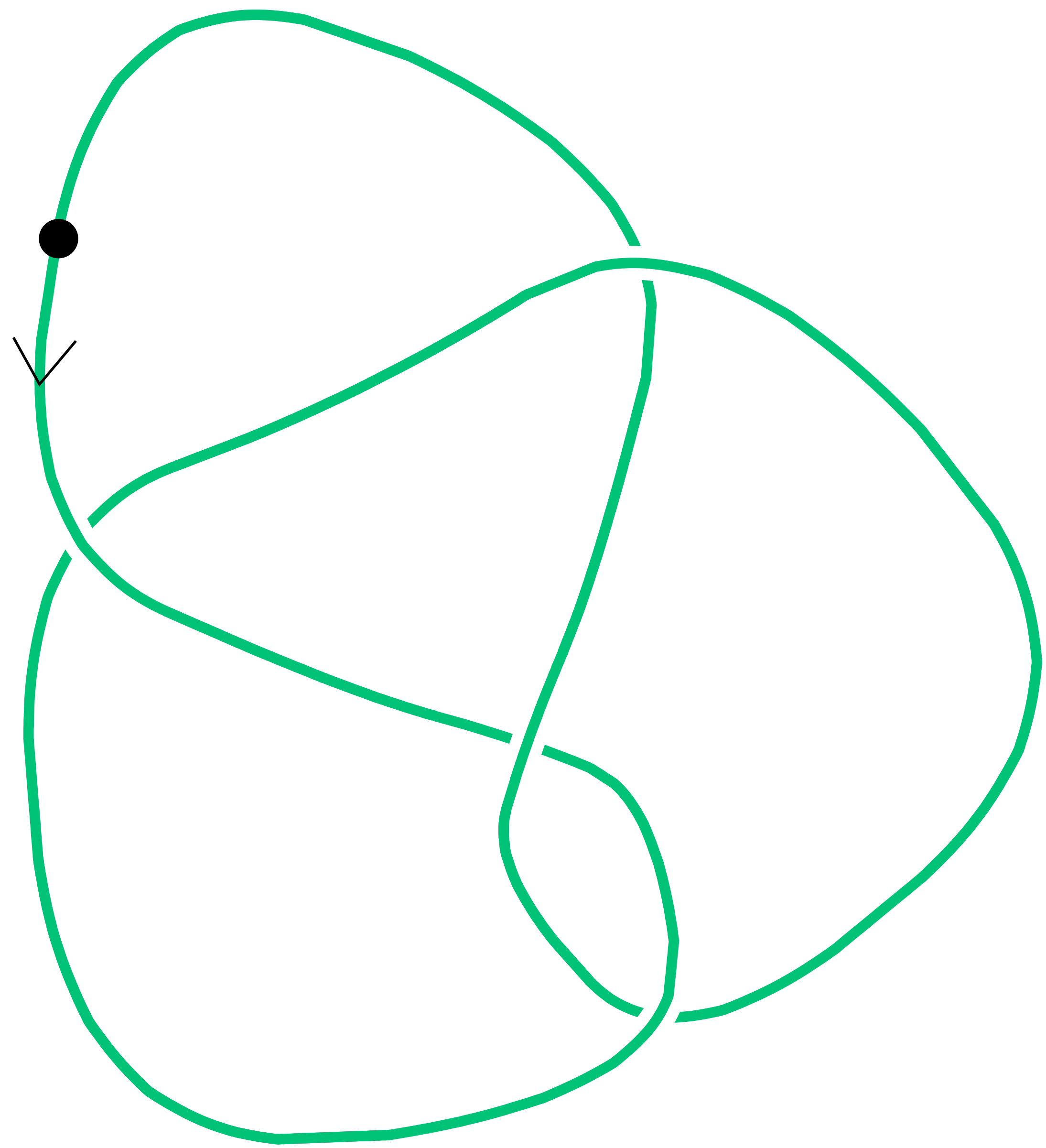
Comenzamos con un diagrama de un nudo.

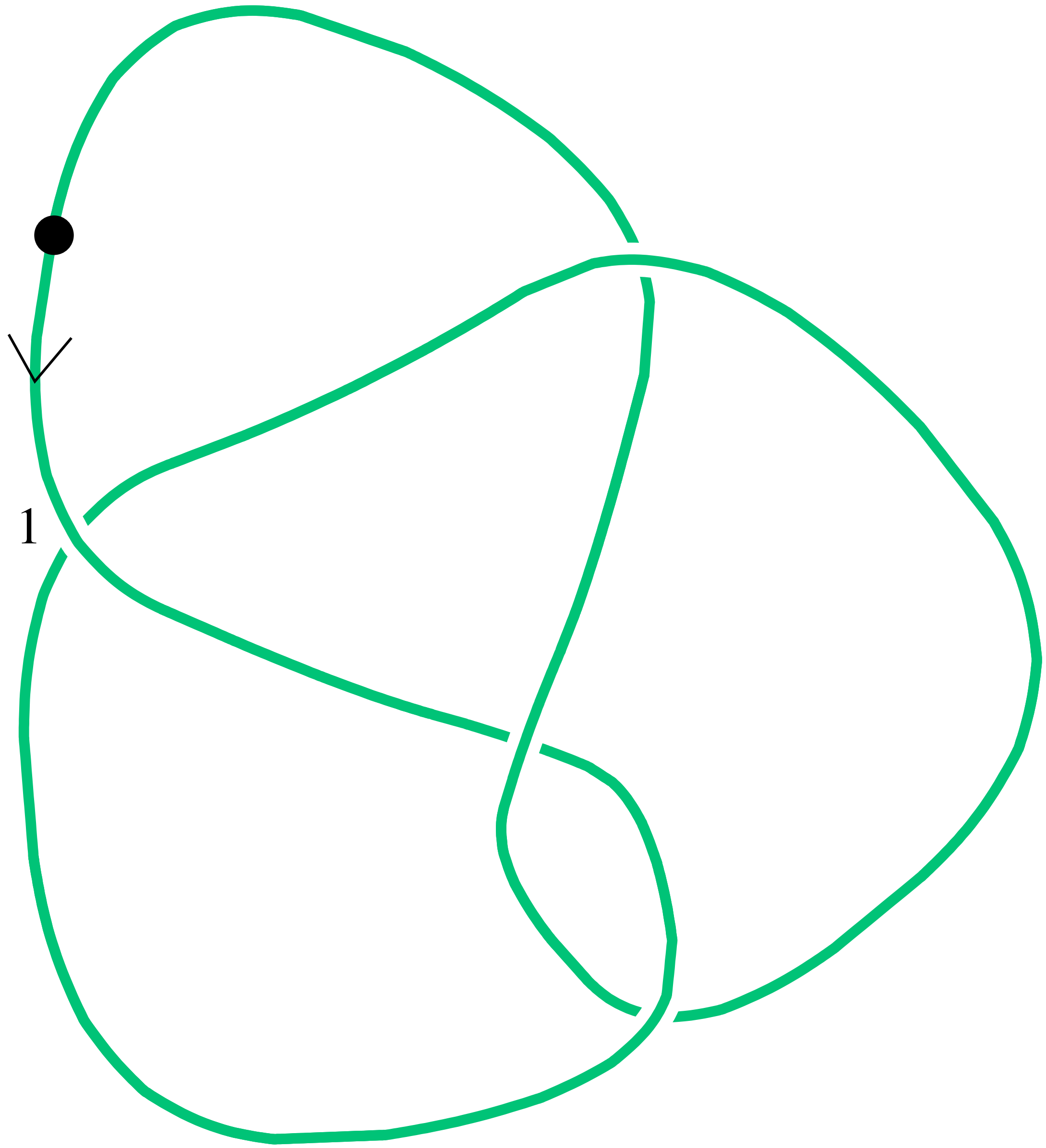


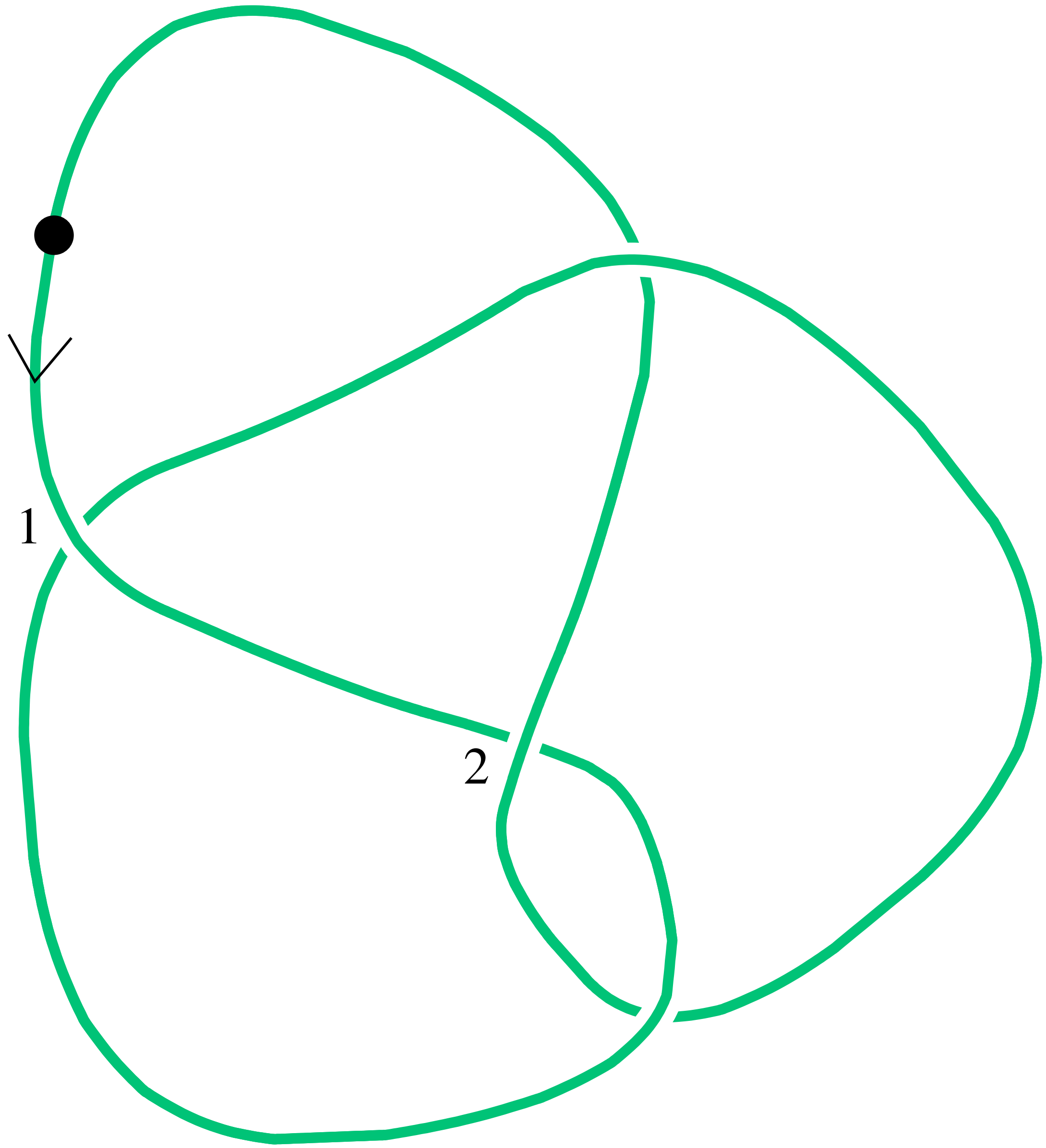
Marcamos un punto de inicio y una dirección sobre el nudo

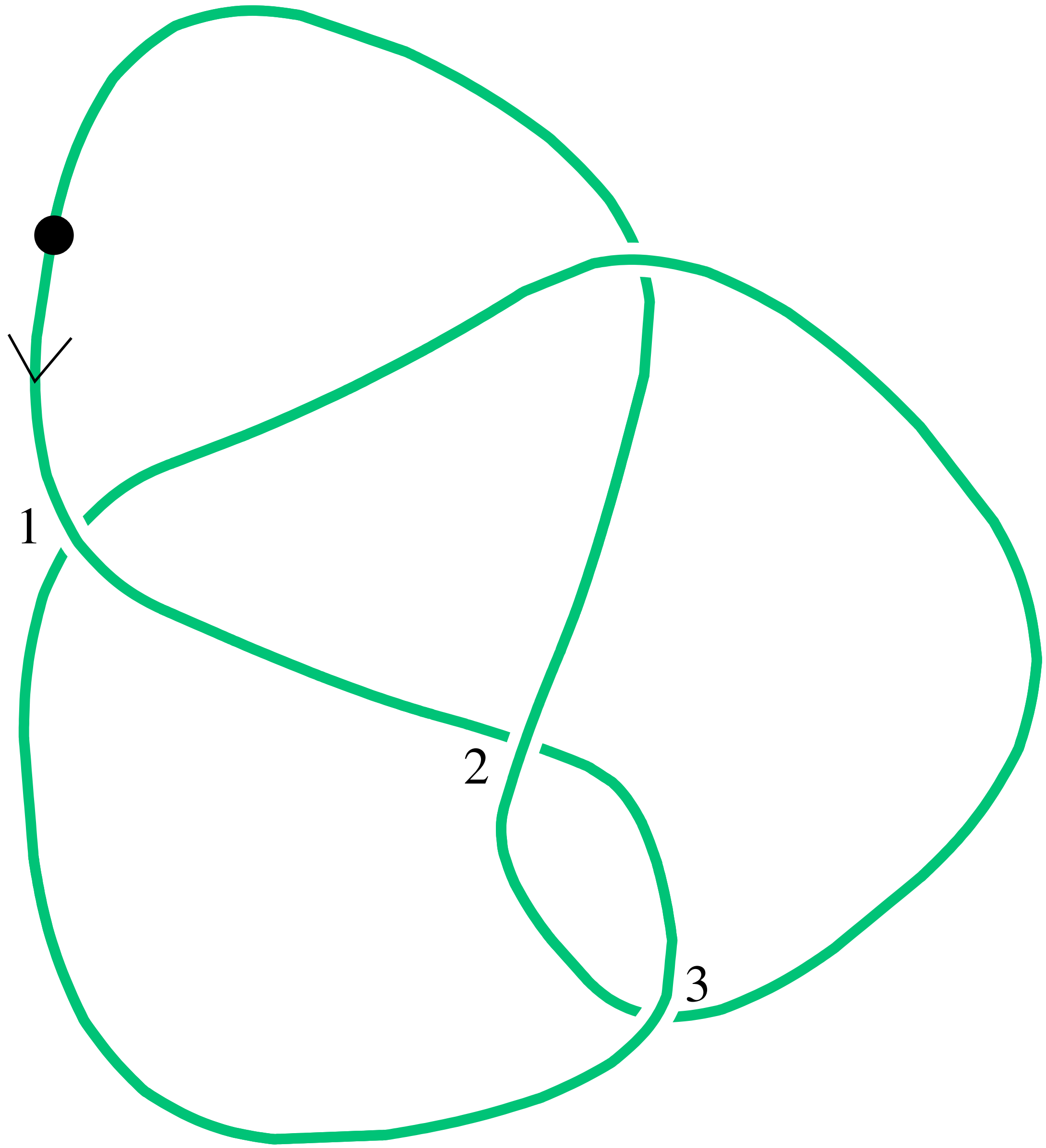


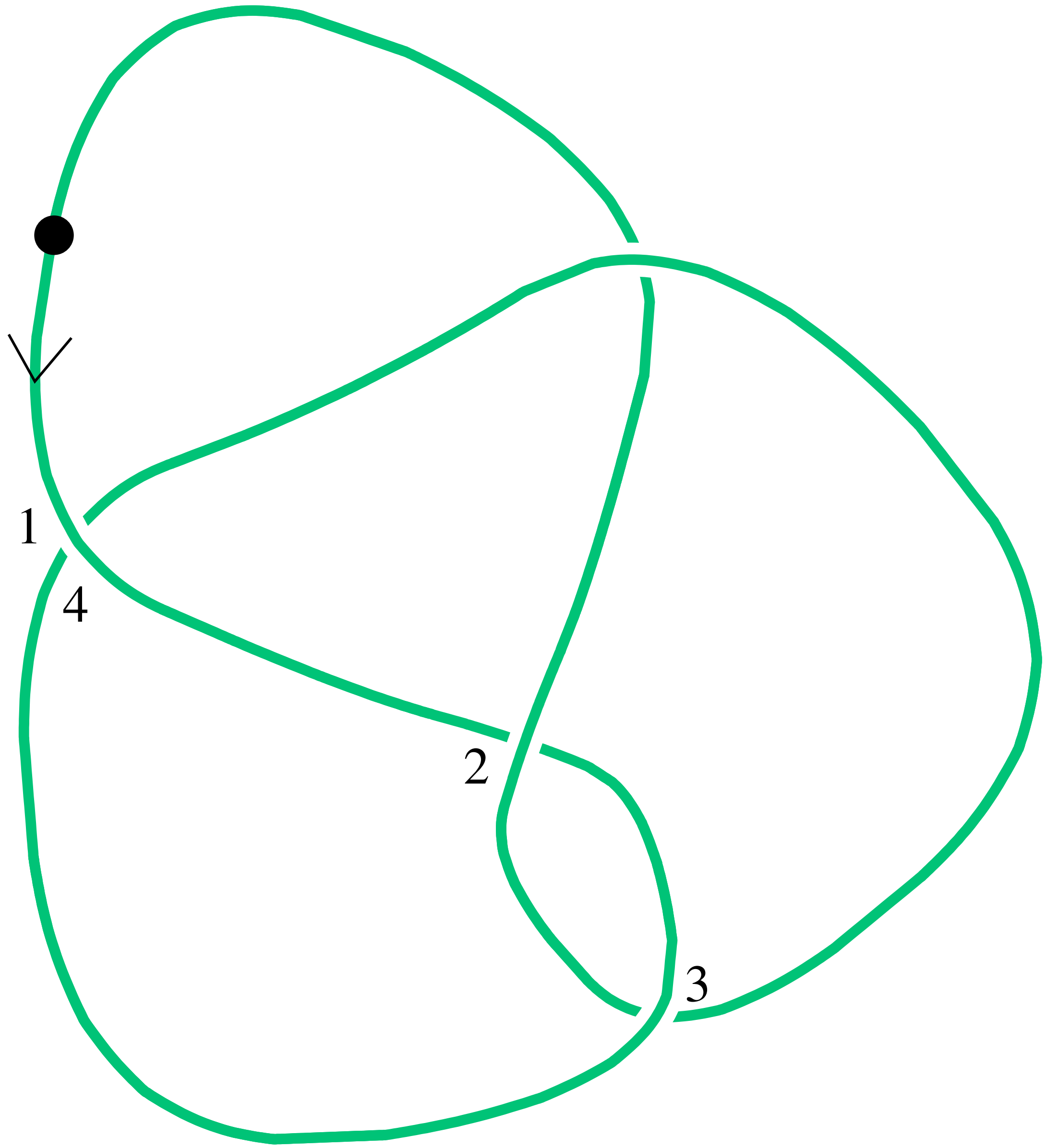
A partir del punto de inicio recorremos el nudo y numeramos los puntos de cruce que nos vayamos encontrando hasta que regresemos al punto base.

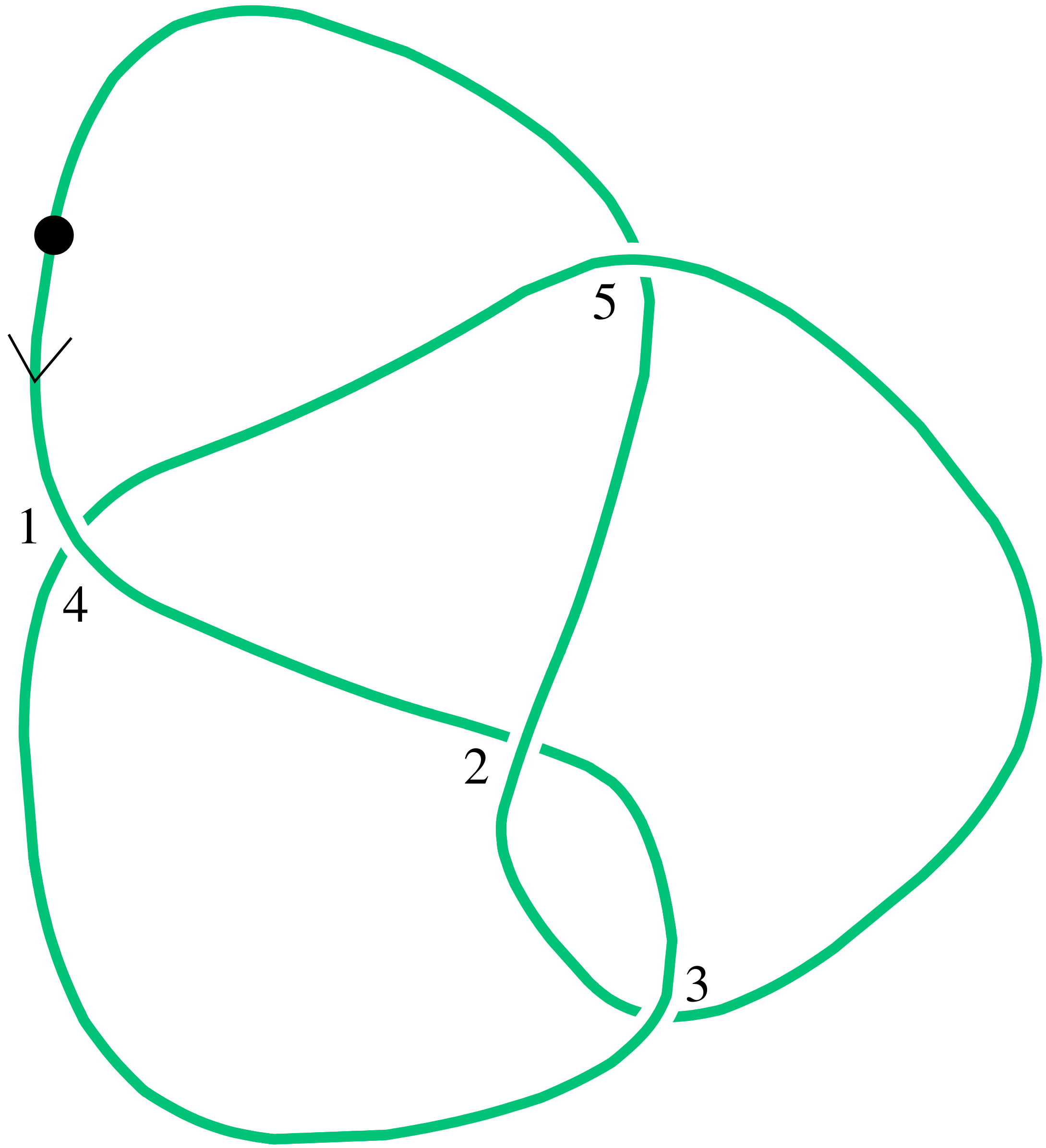


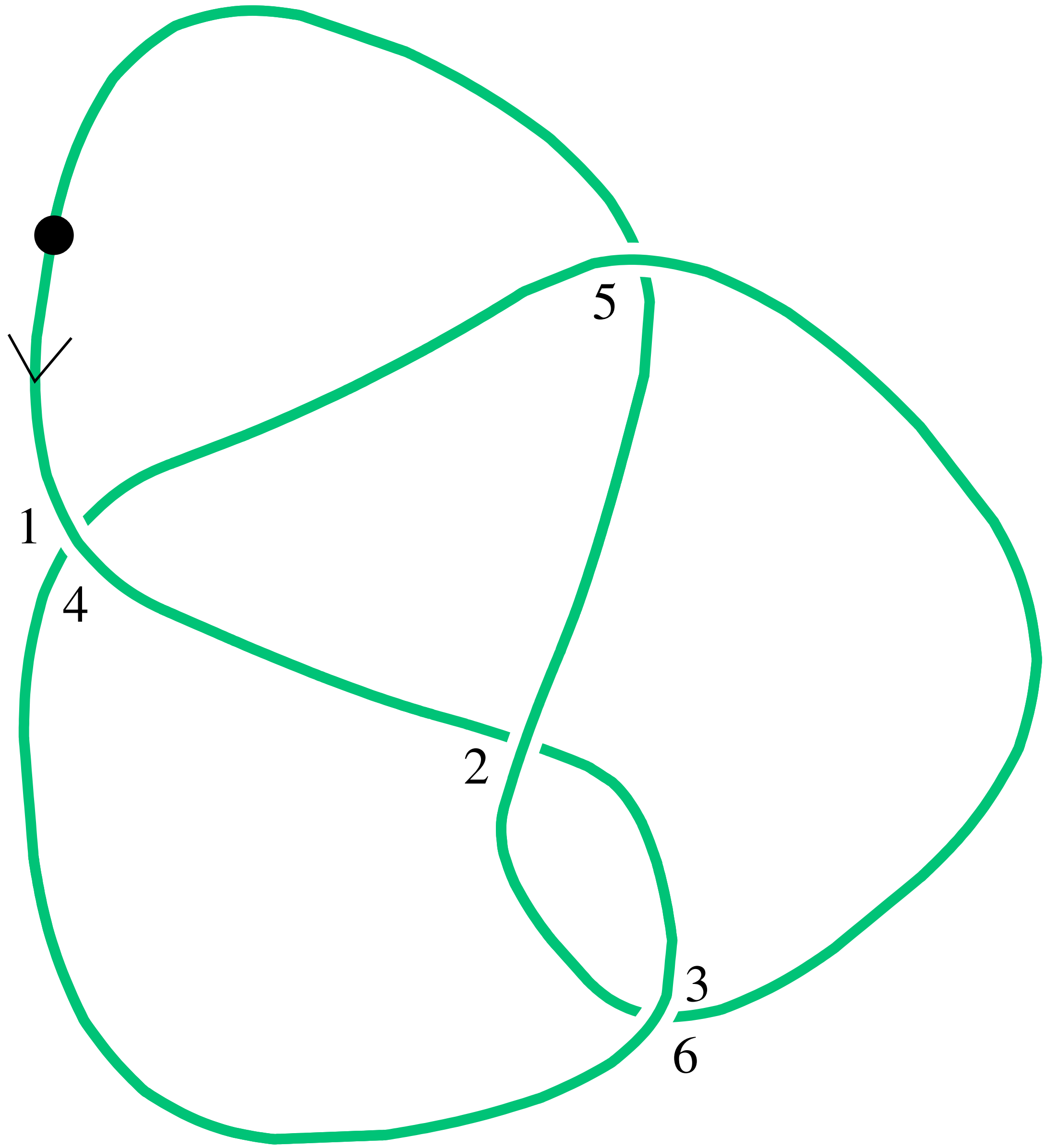

1

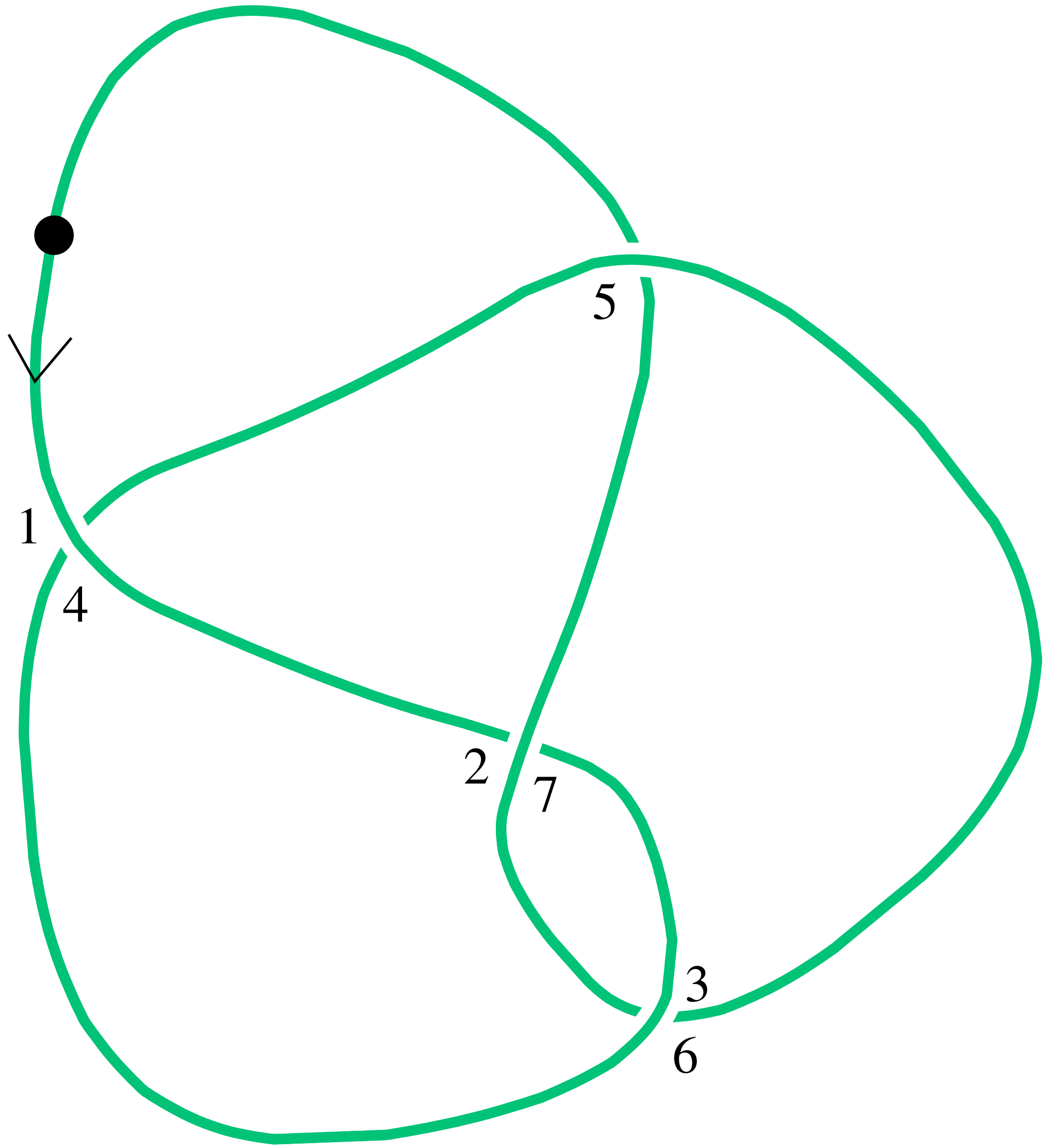

1
2

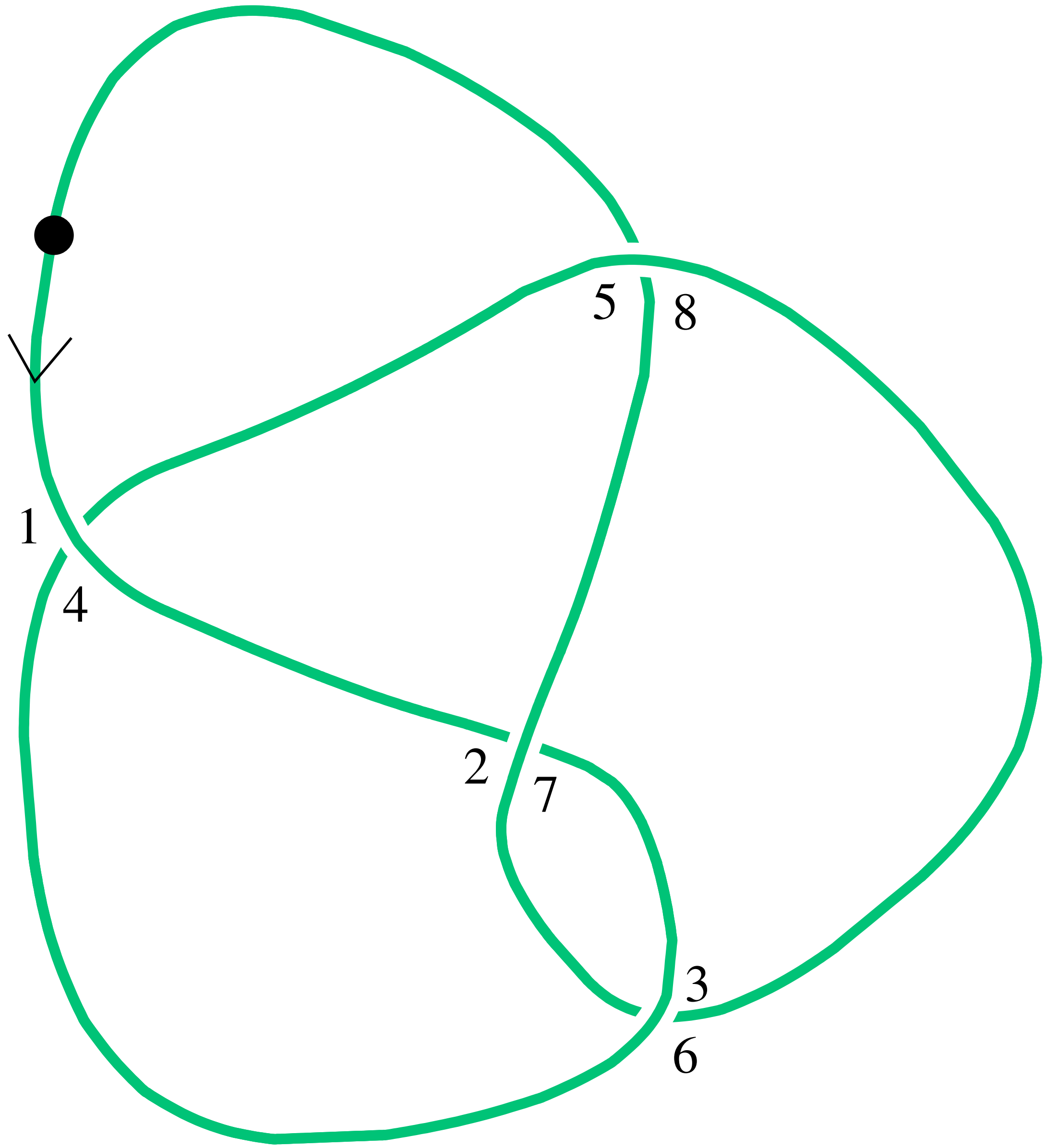

1
2
3


1
4
2
3

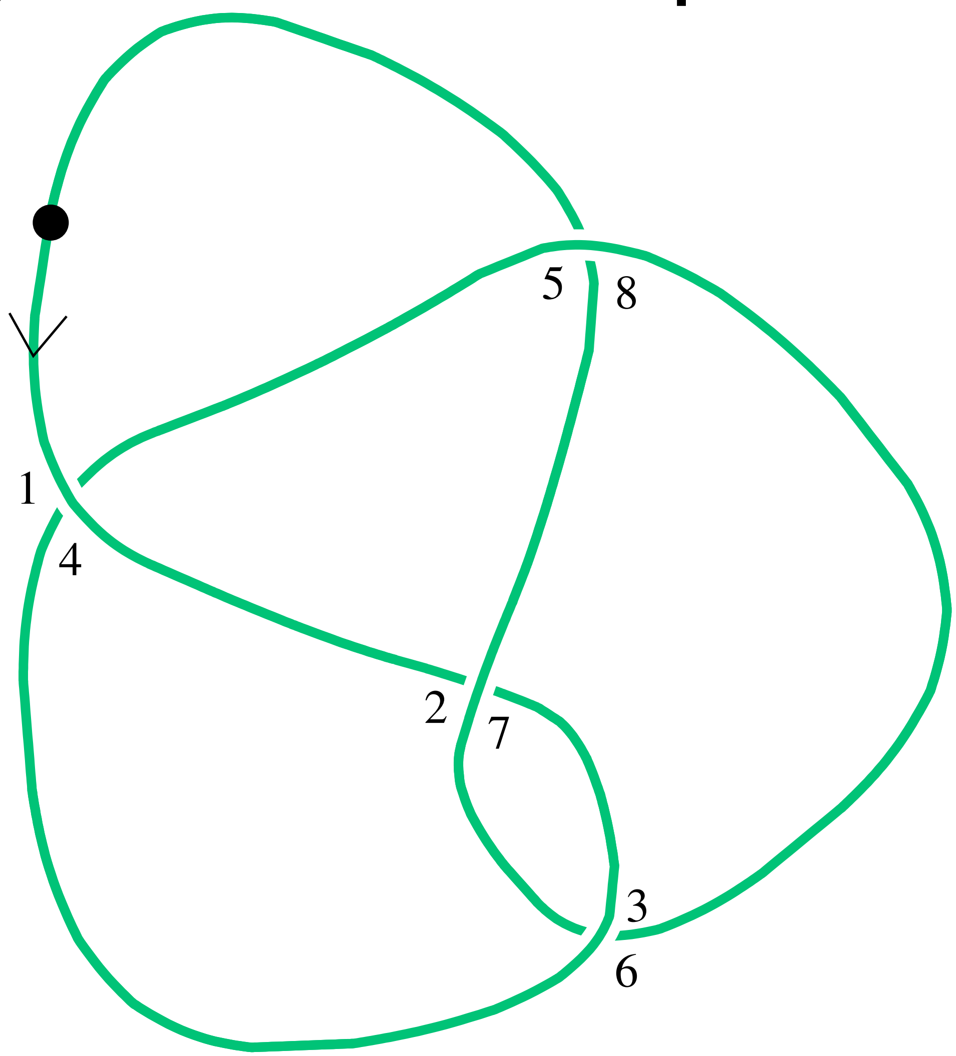

5
1
4
2
3


1
2
3
4
5
6

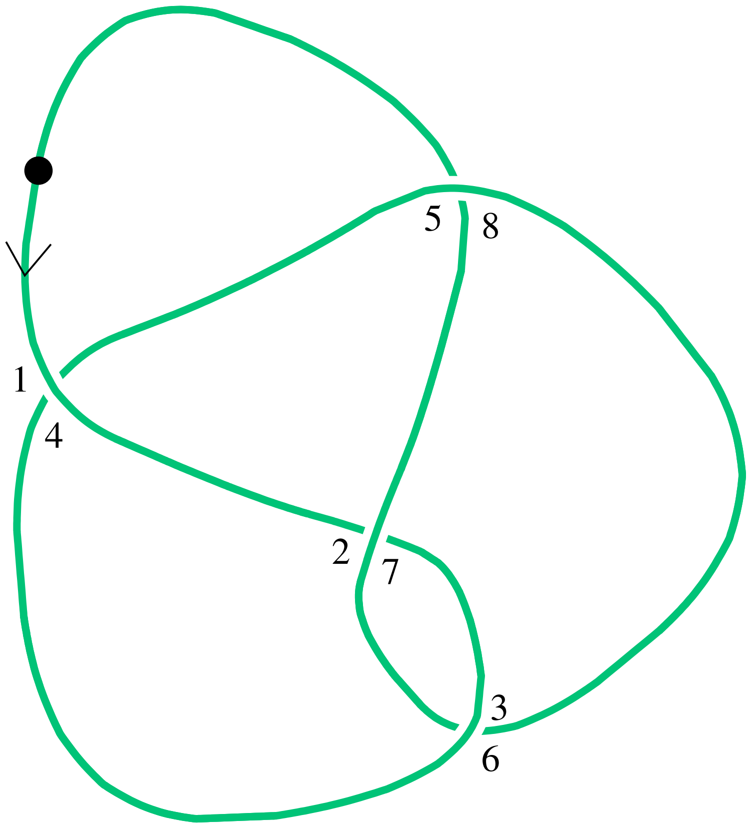

5
1
4
2
7
3
6


5
8
1
4
2
7
3
6

Cada punto de cruce recibe dos números: uno es par y el otro es impar.



Escribimos estas parejas de números en dos renglones, con los impares arriba y en orden:

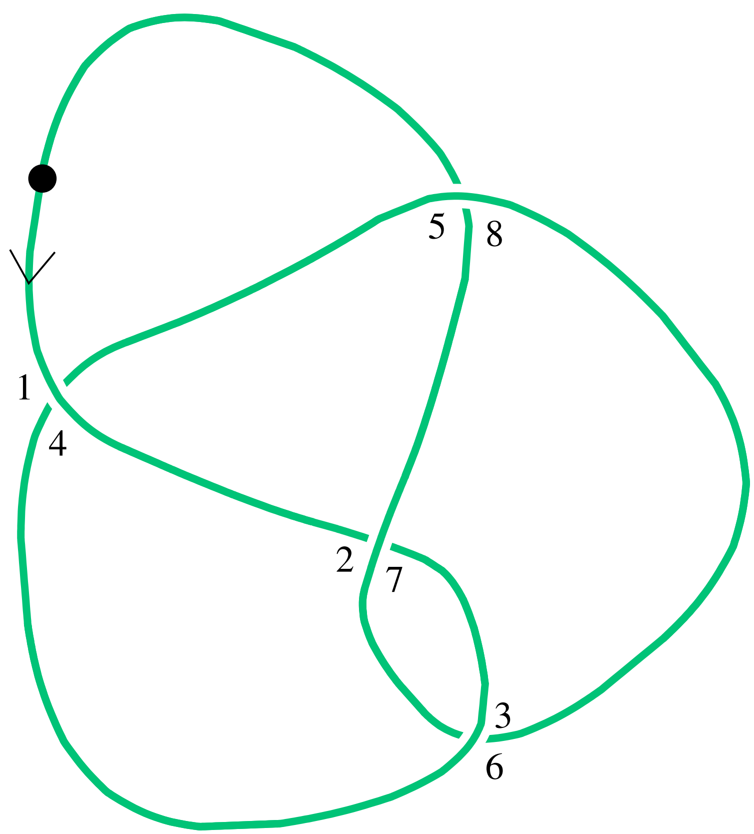


1	3	5	7
4	6	8	2

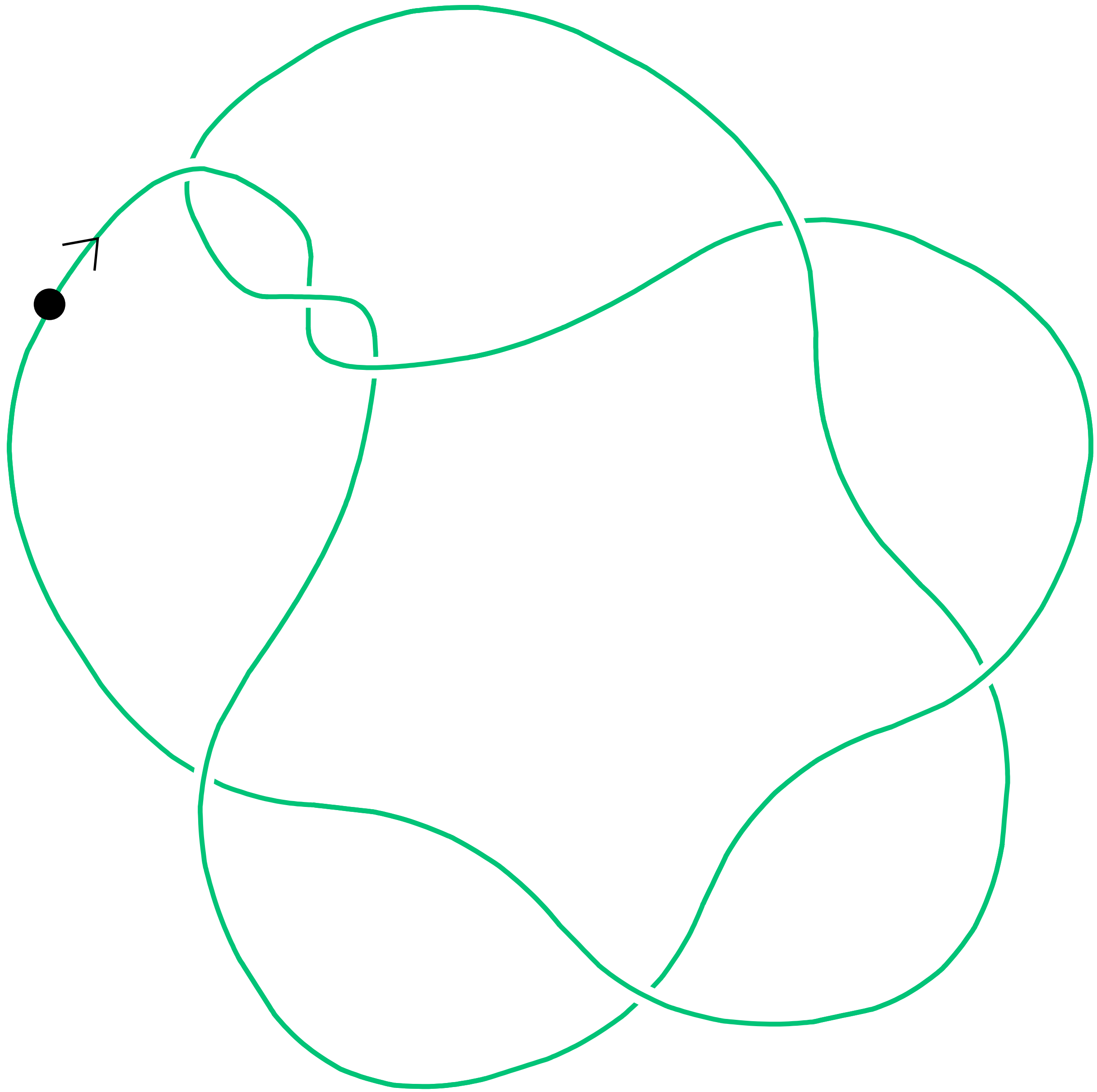
Nos quedamos sólo con los números pares (en el orden que tomaron)

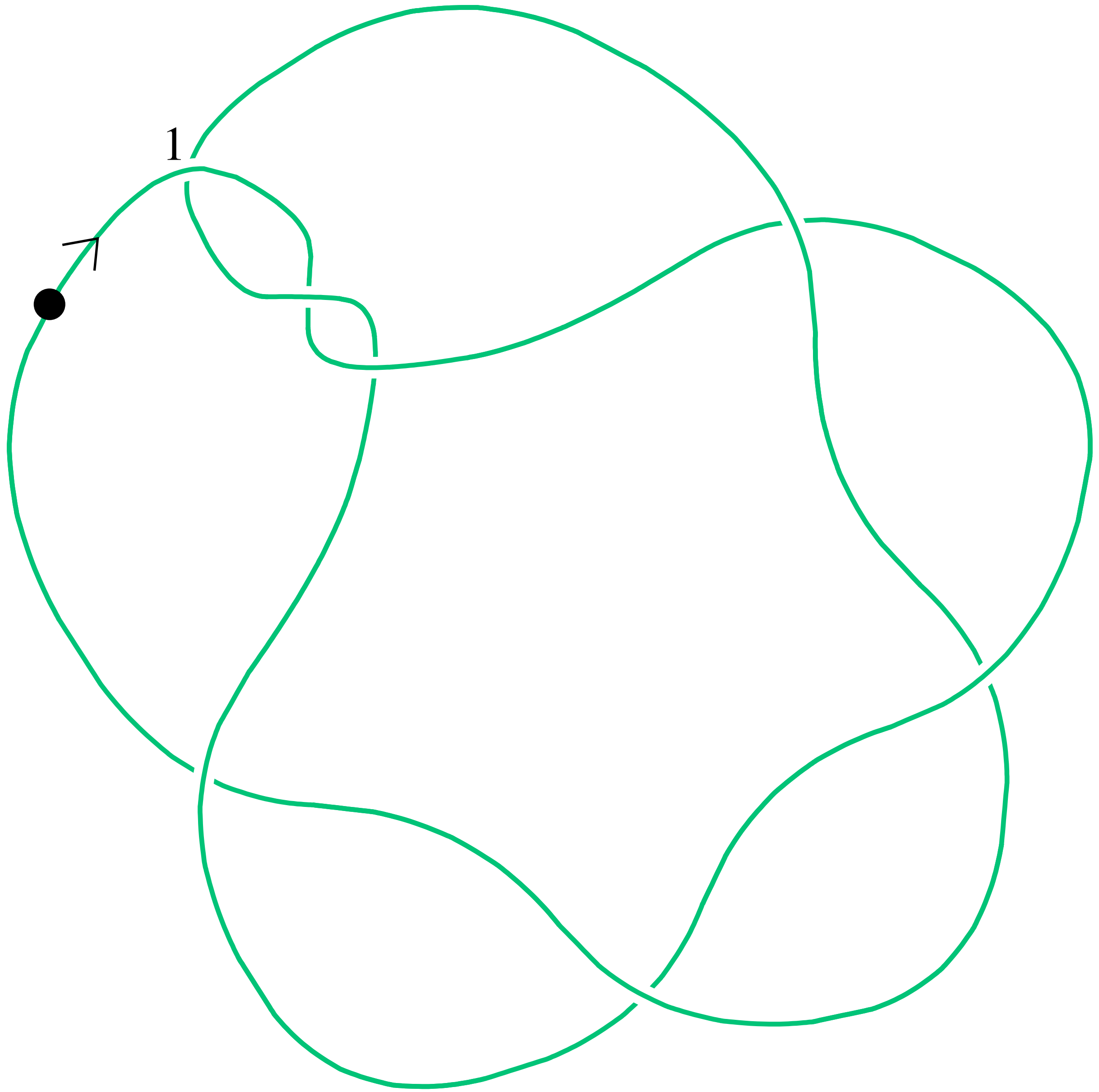
El código de este diagrama es

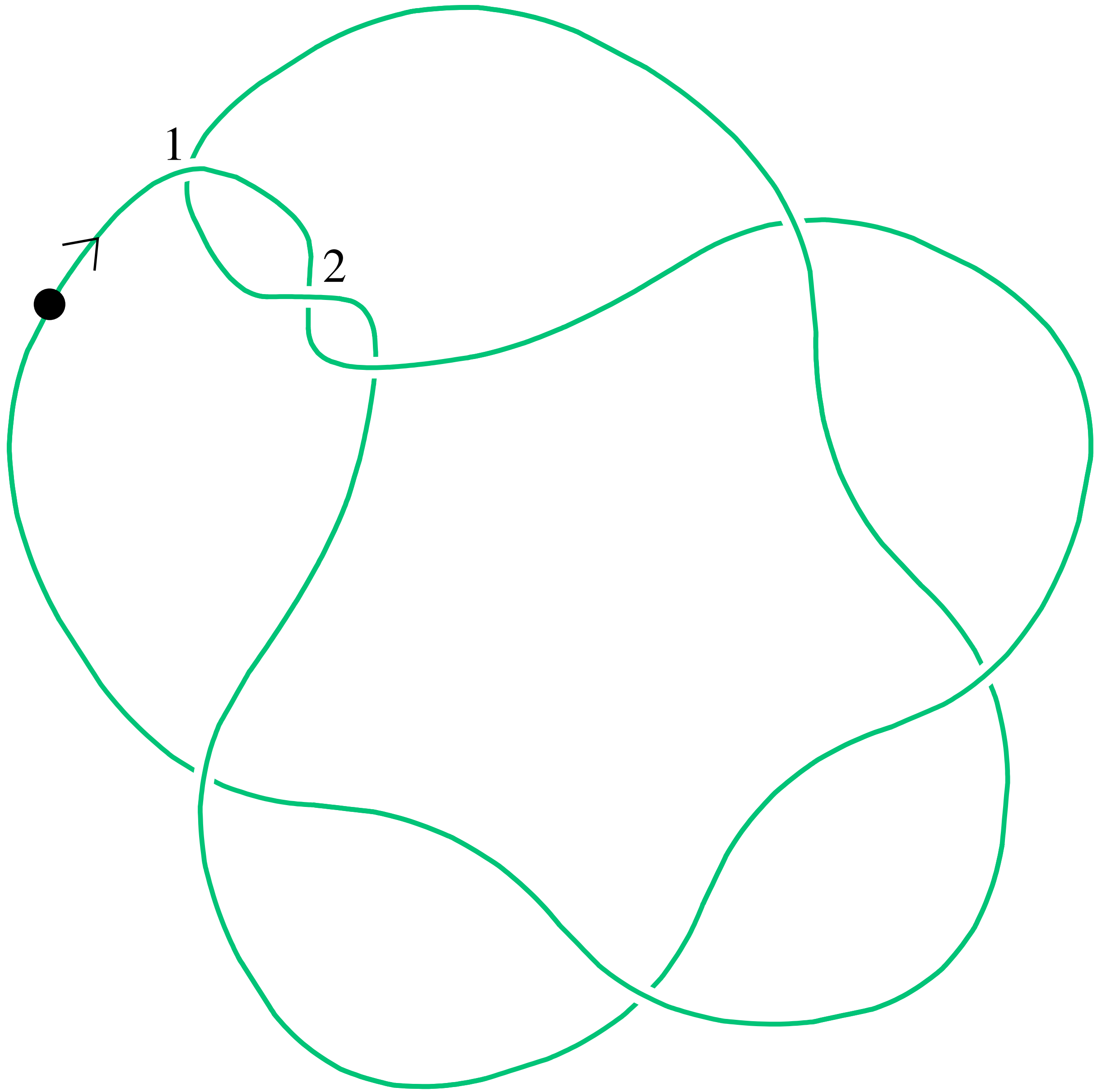
$$4 \quad 6 \quad 8 \quad 2$$

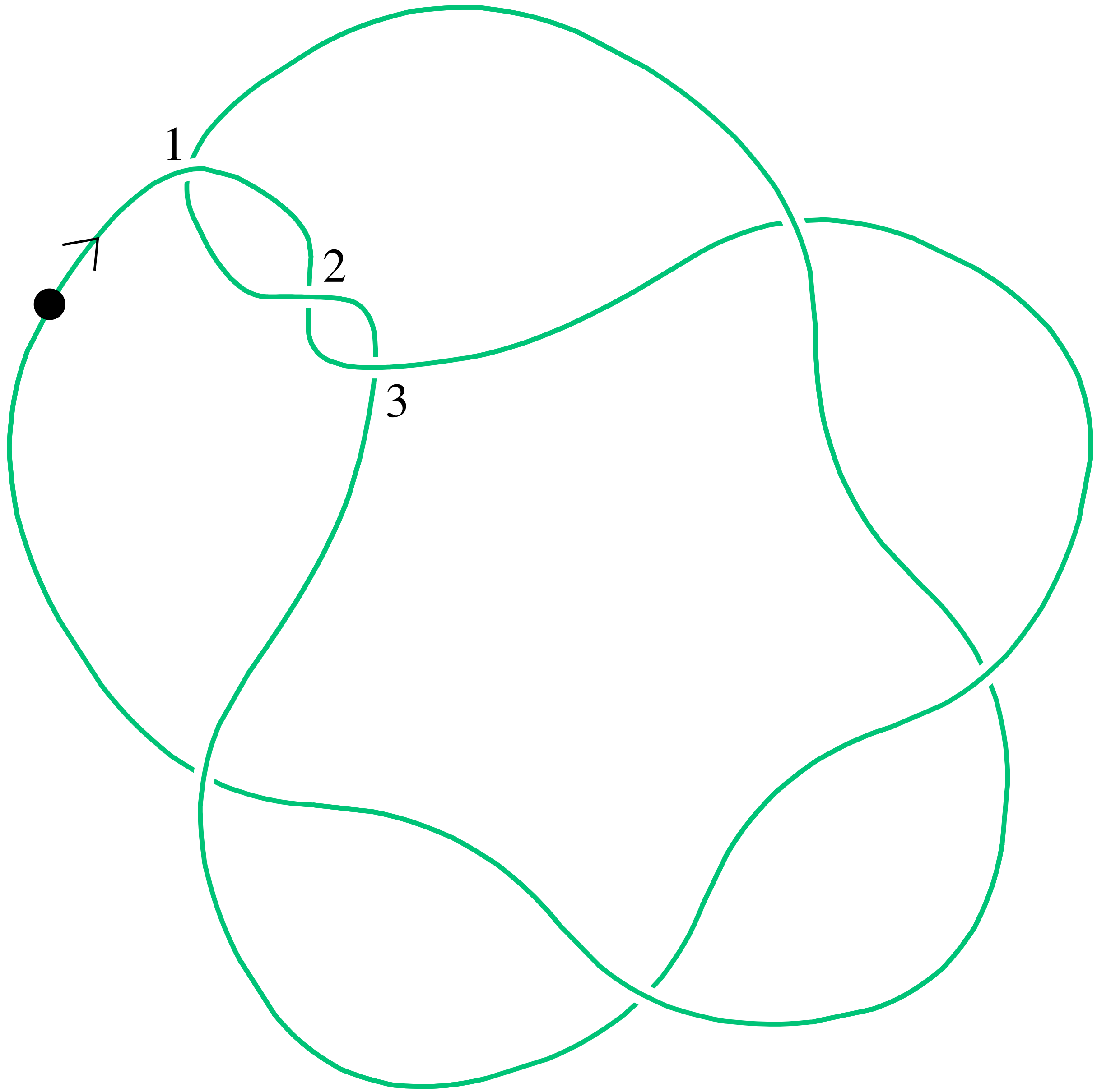


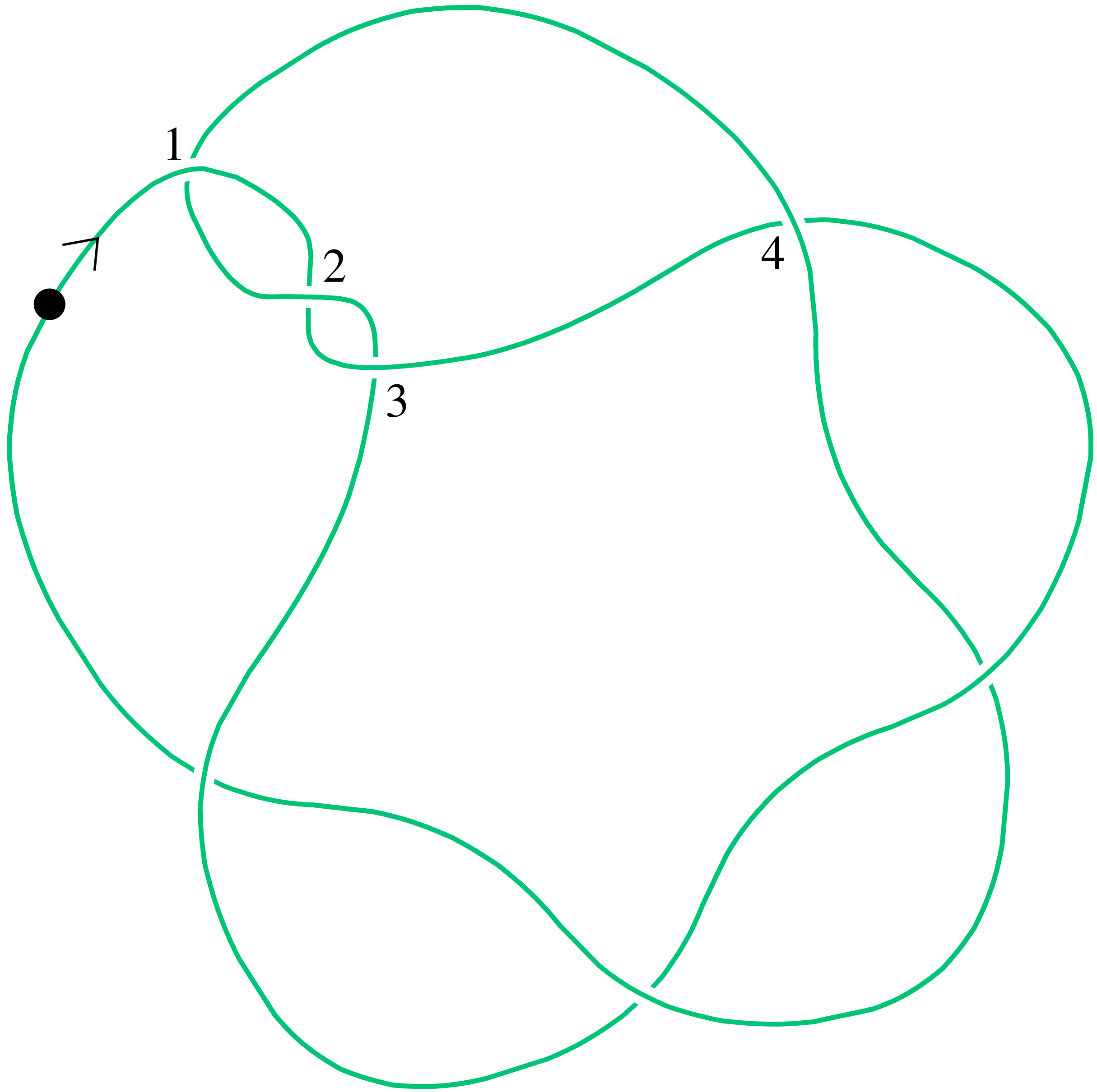
Otro ejemplo:

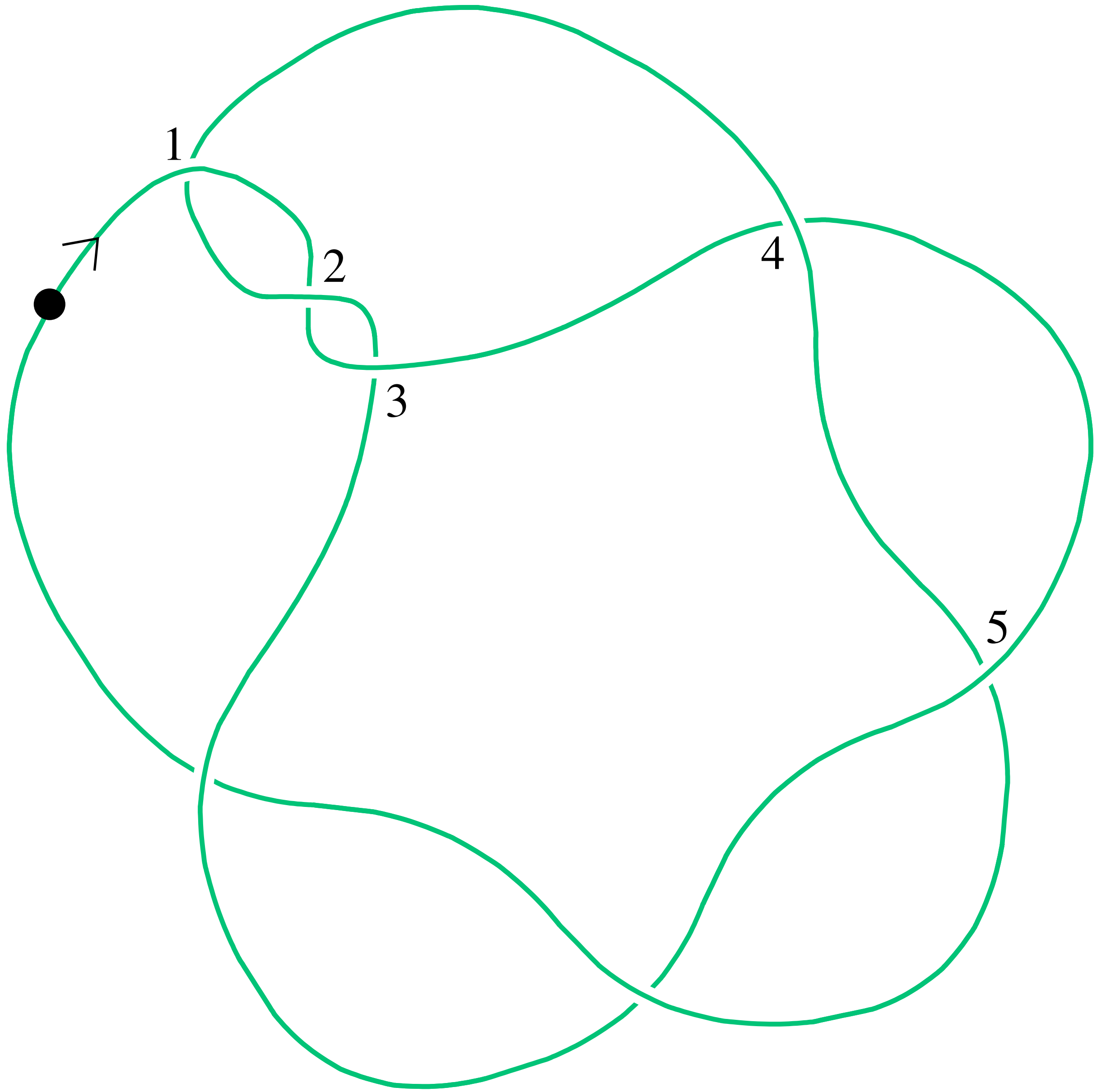


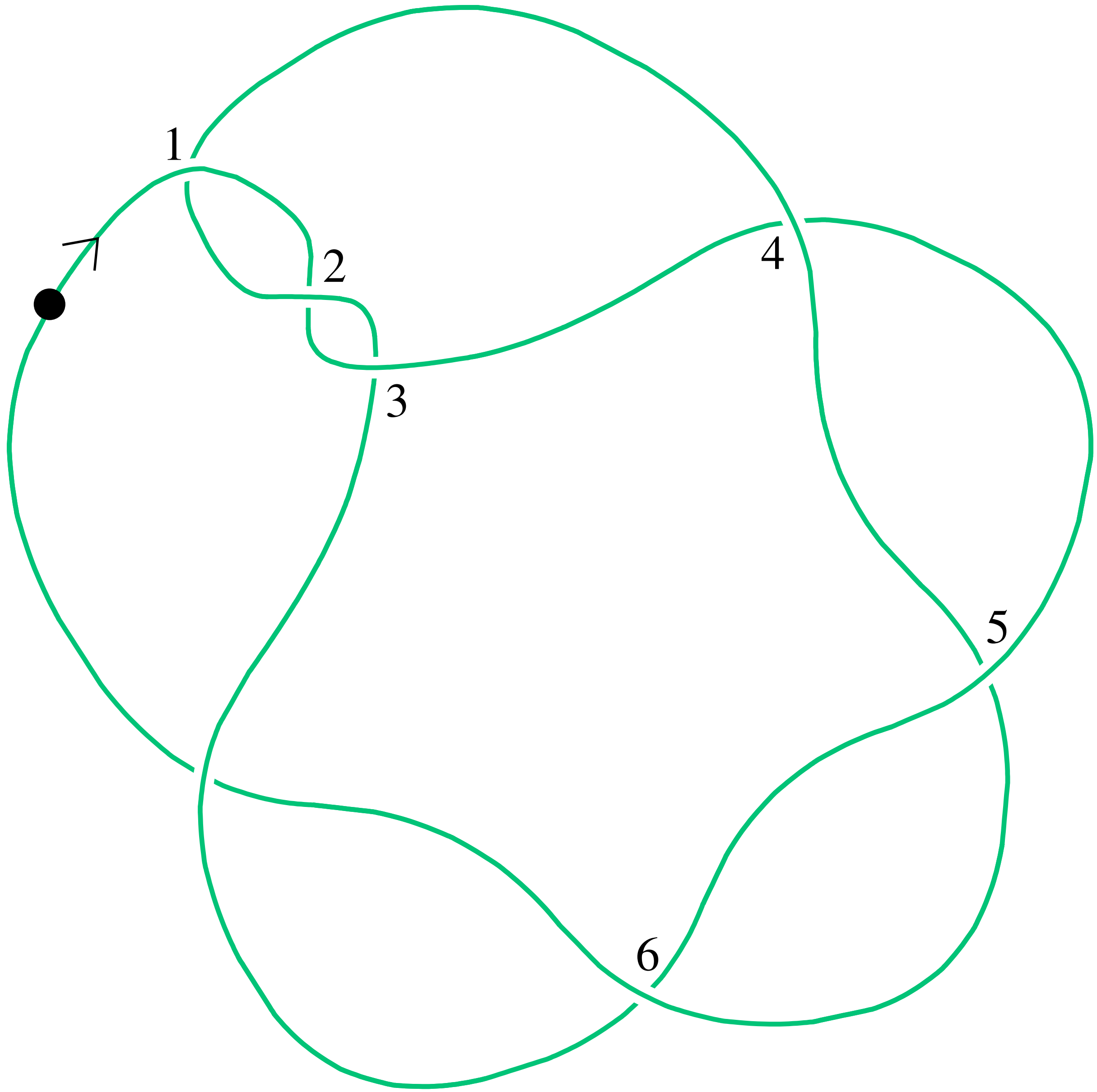

1

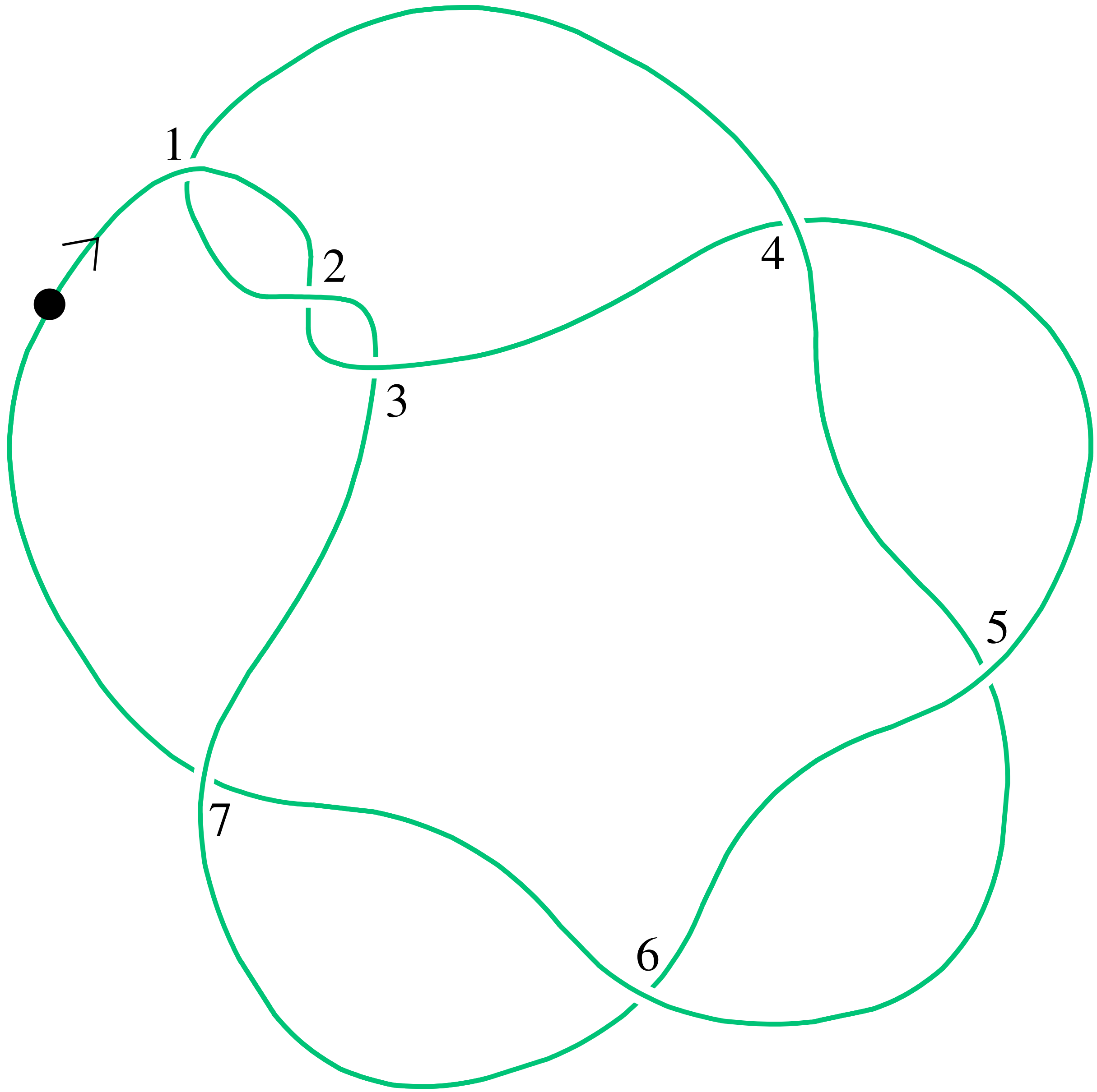

1
2

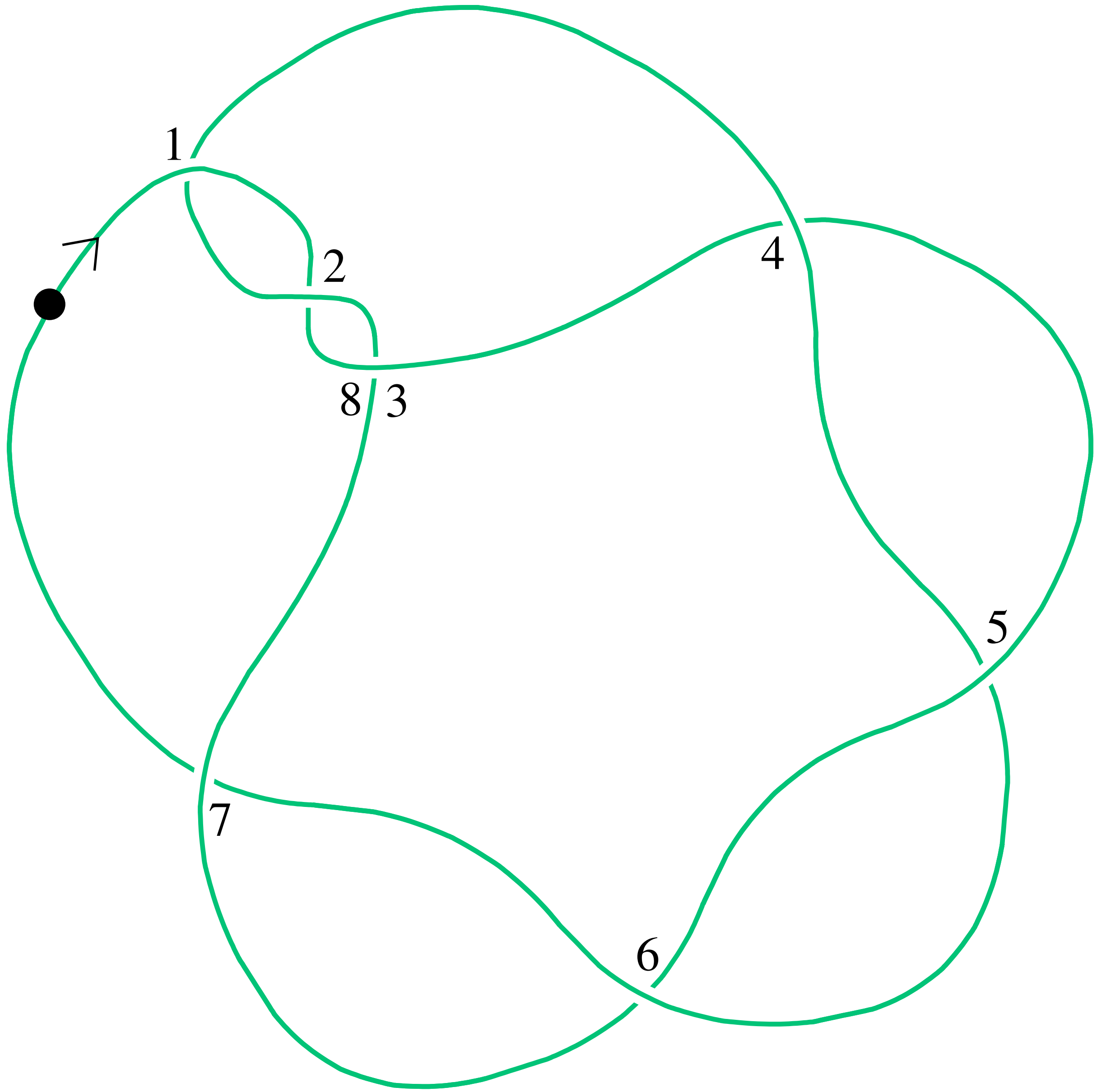

1
2
3

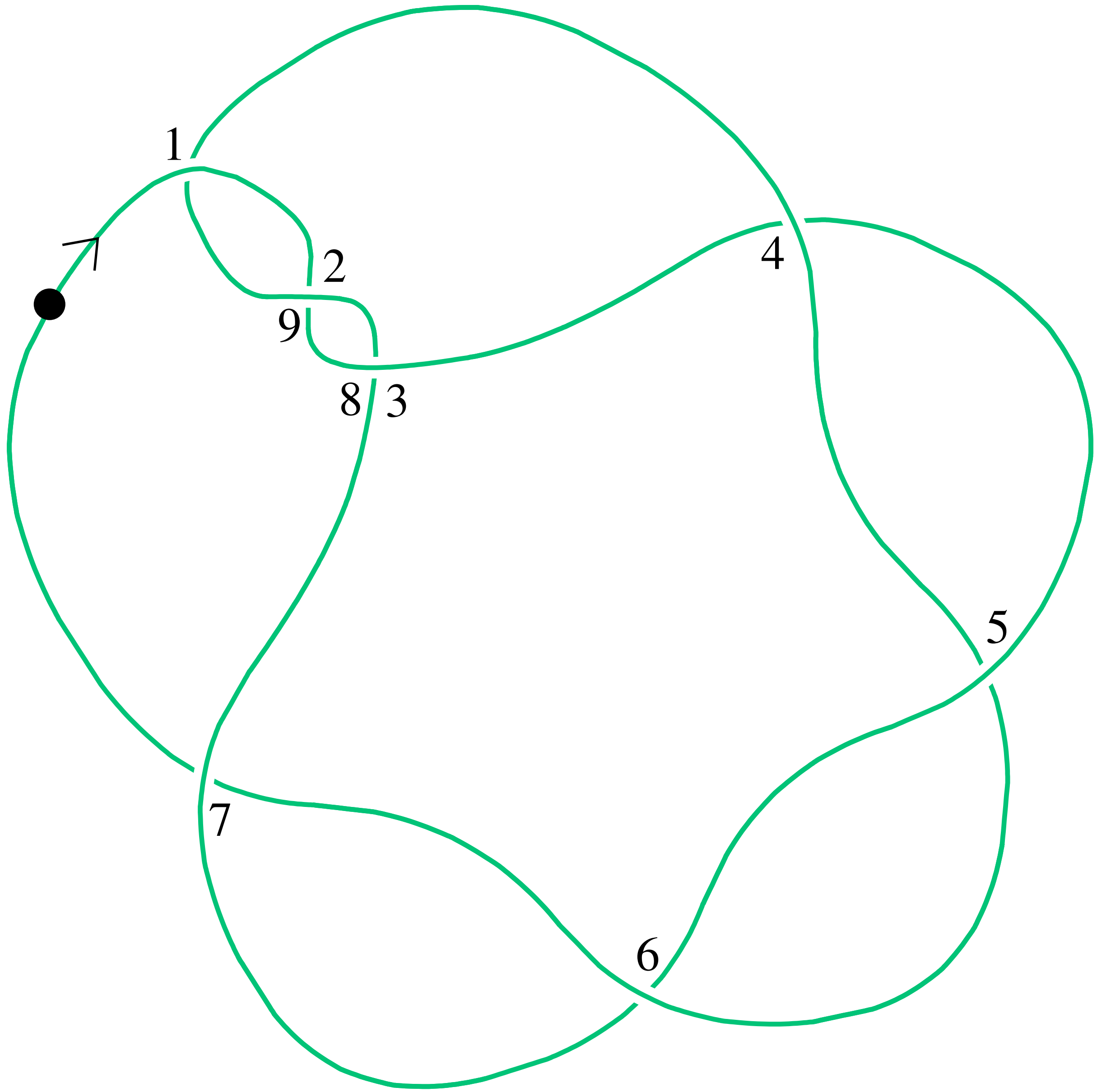

1
2
3
4

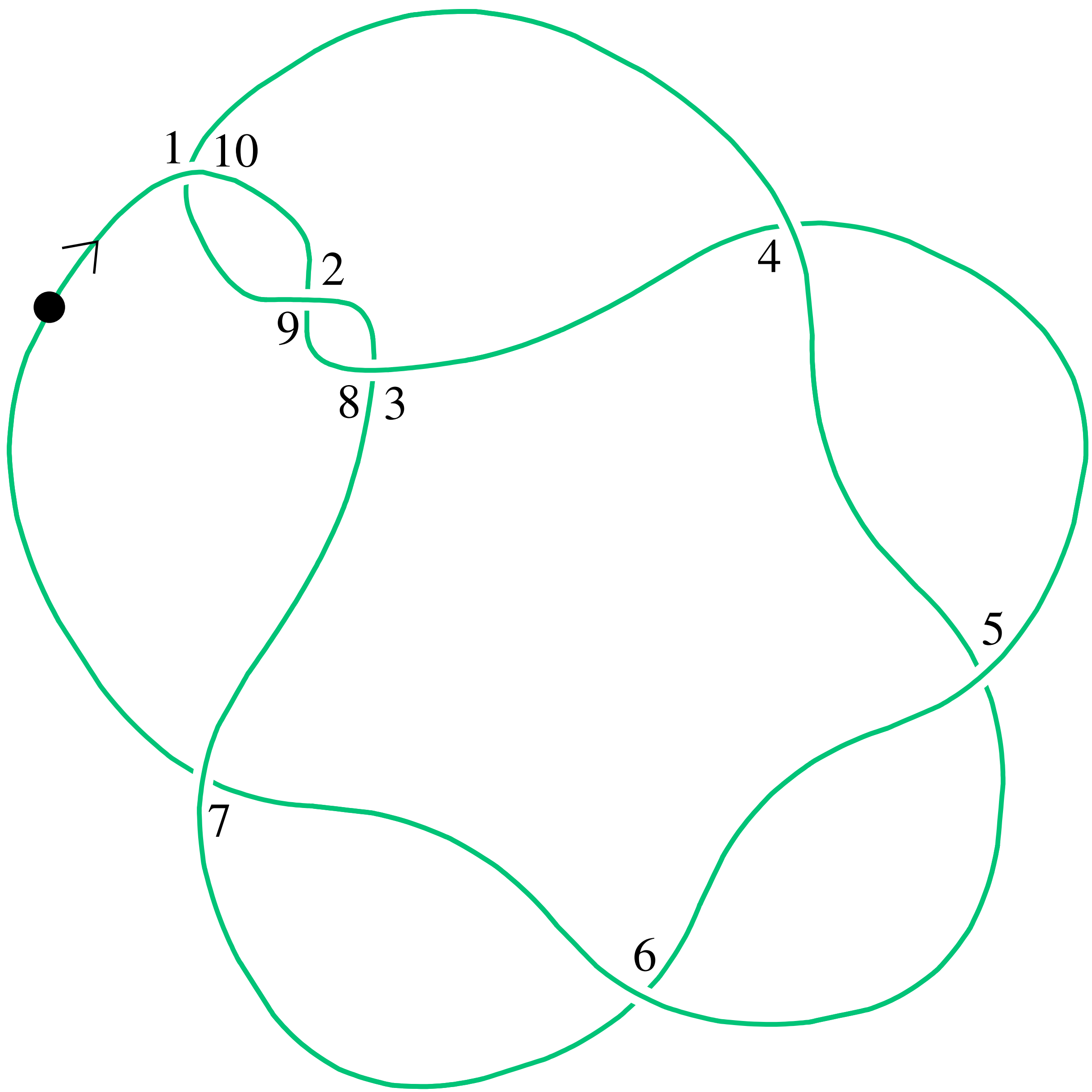

1
2
3
4
5

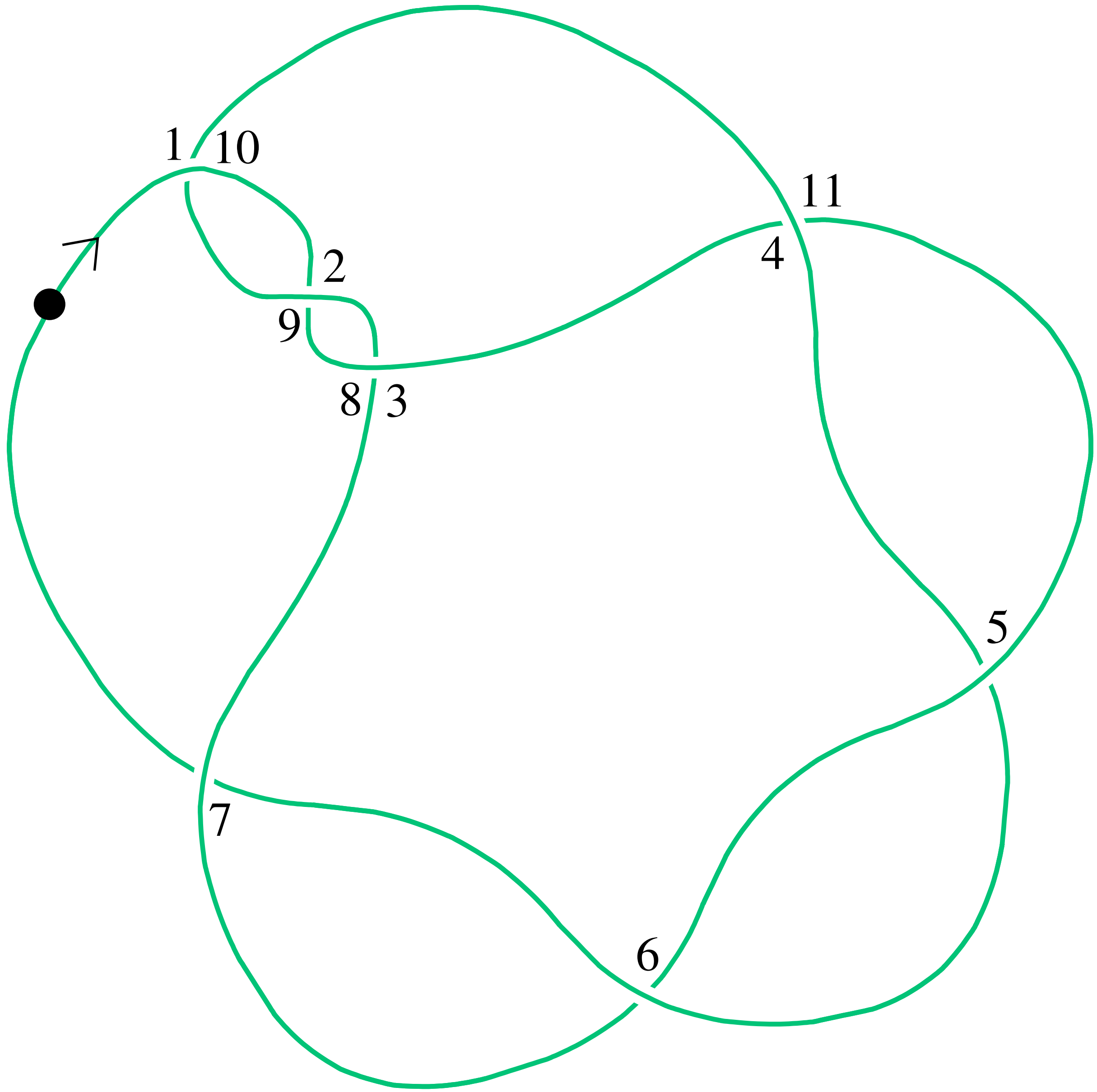

1
2
3
4
5
6

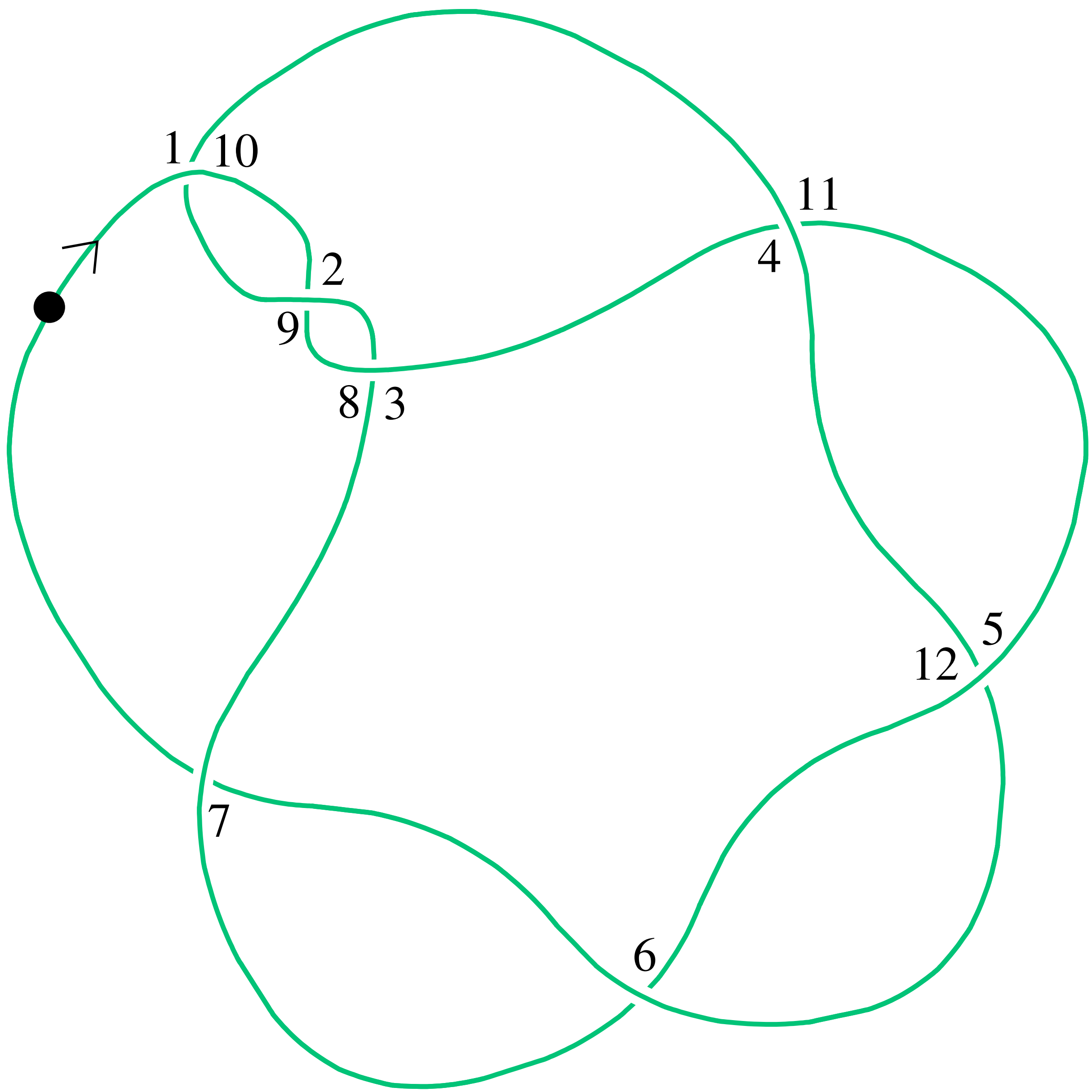

1
2
3
4
5
6
7

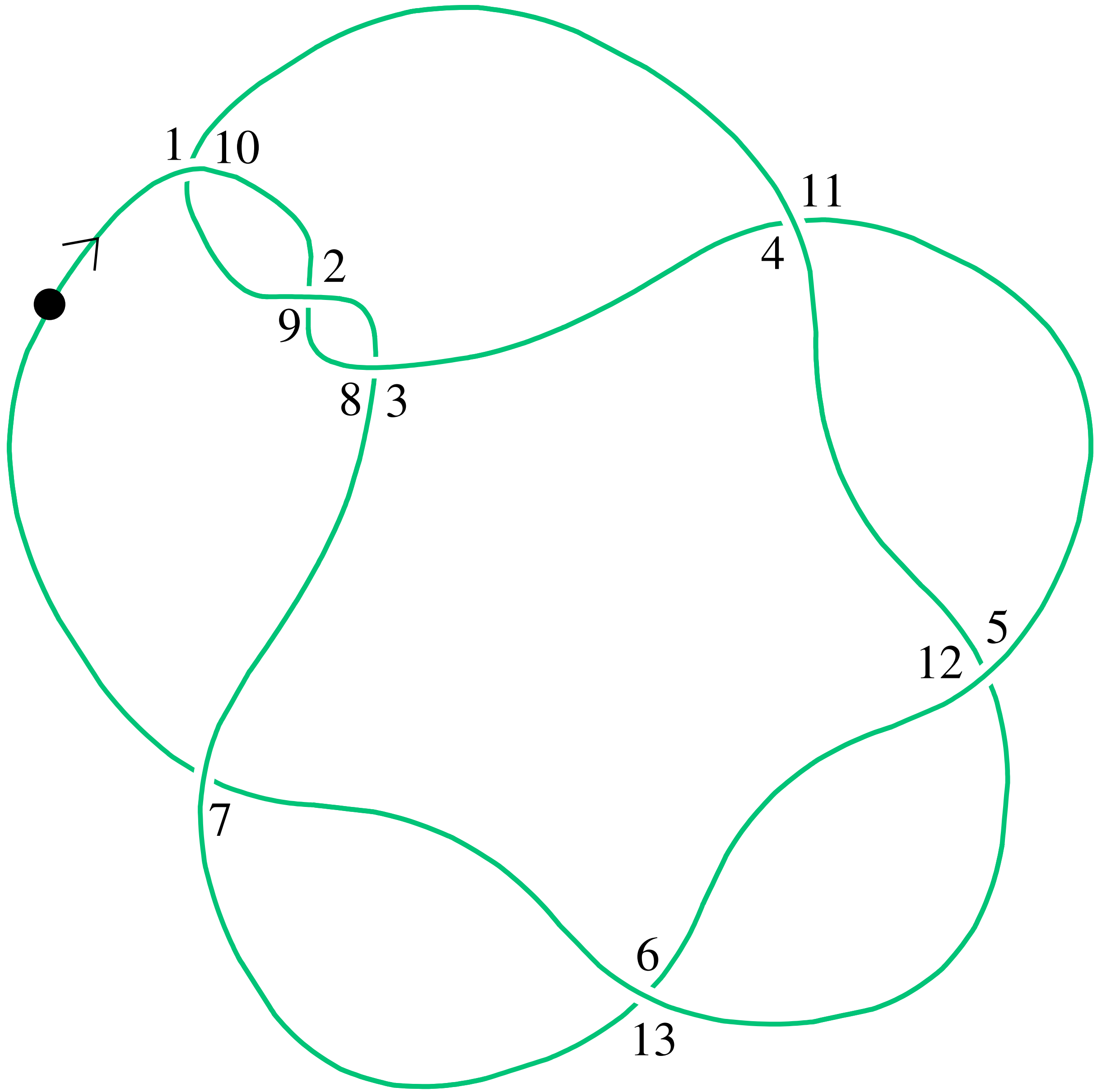

1
2
8
3
4
5
6
7

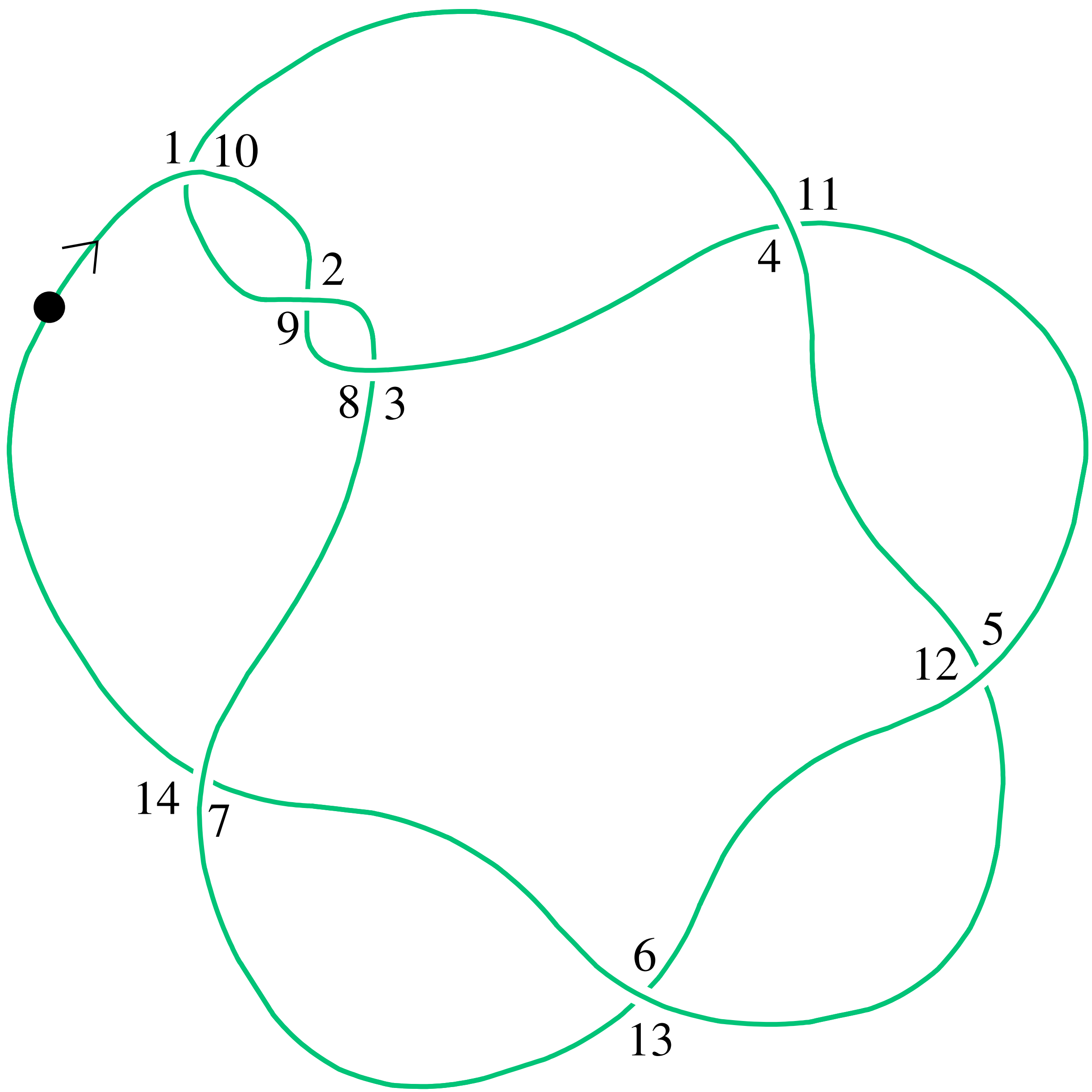

1
2
9
8
3
4
5
6
7


1
10
2
9
8
3
4
5
6
7

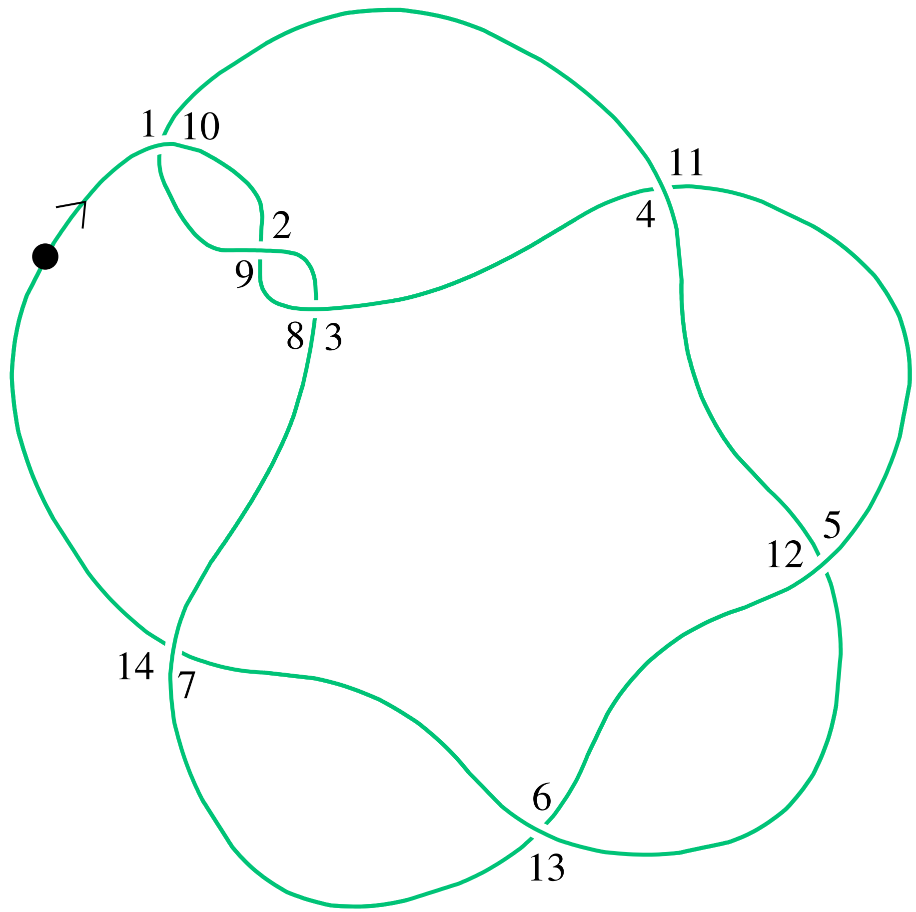

1
10
11
2
4
9
8
3
5
7
6


1
10
2
9
8
3
11
4
5
12
7
6


1
10
11
2
4
9
8
3
5
12
7
6
13


1
10
11
2
4
9
8
3
5
12
14
7
6
13

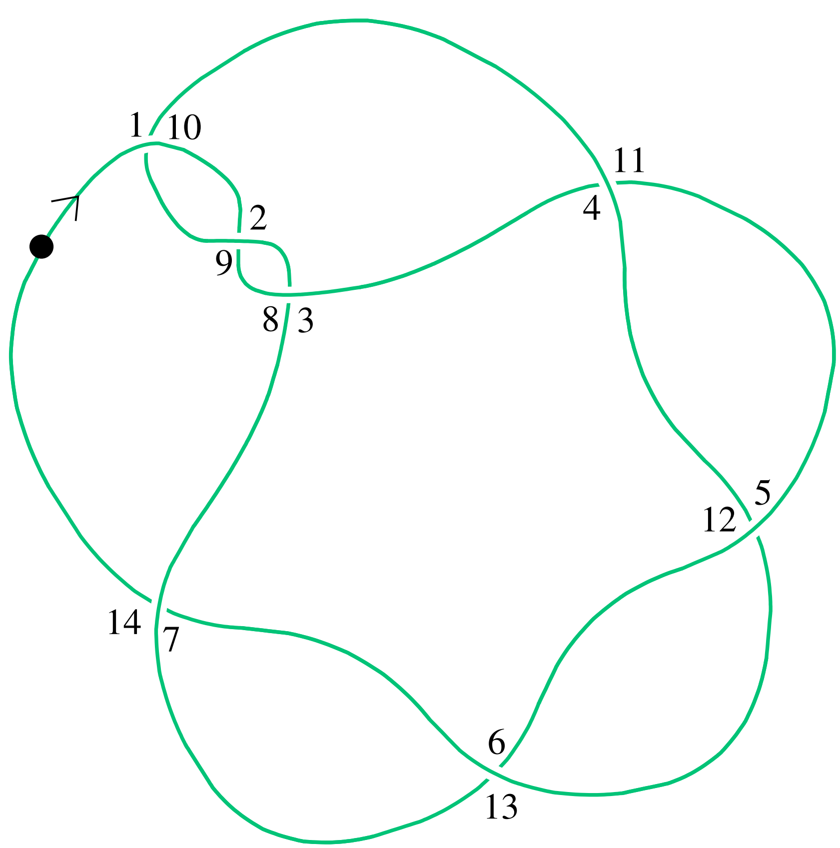
Terminamos con



1	3	5	7	9	11	13
10	8	12	14	2	4	6

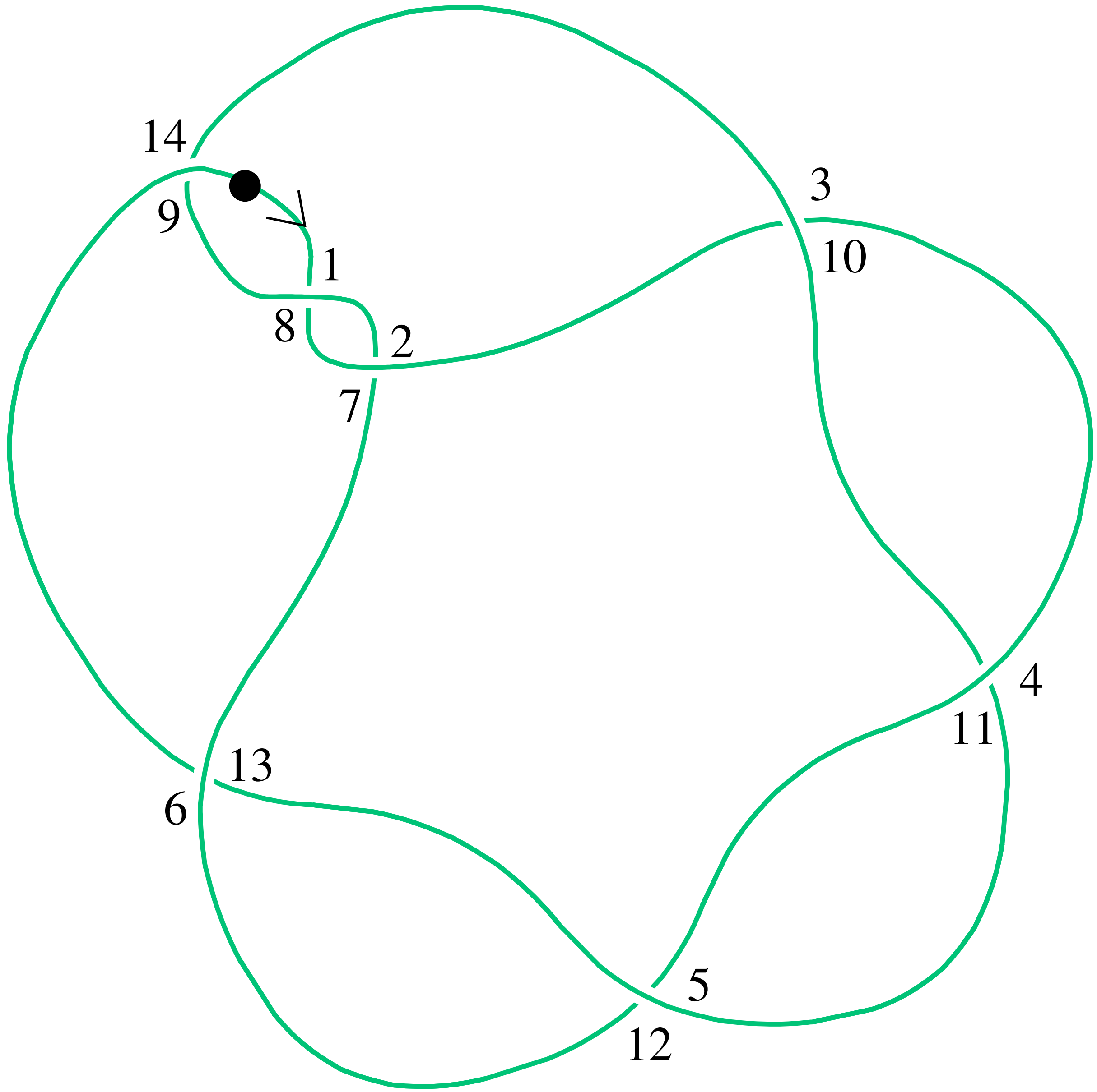
El código de este diagrama es

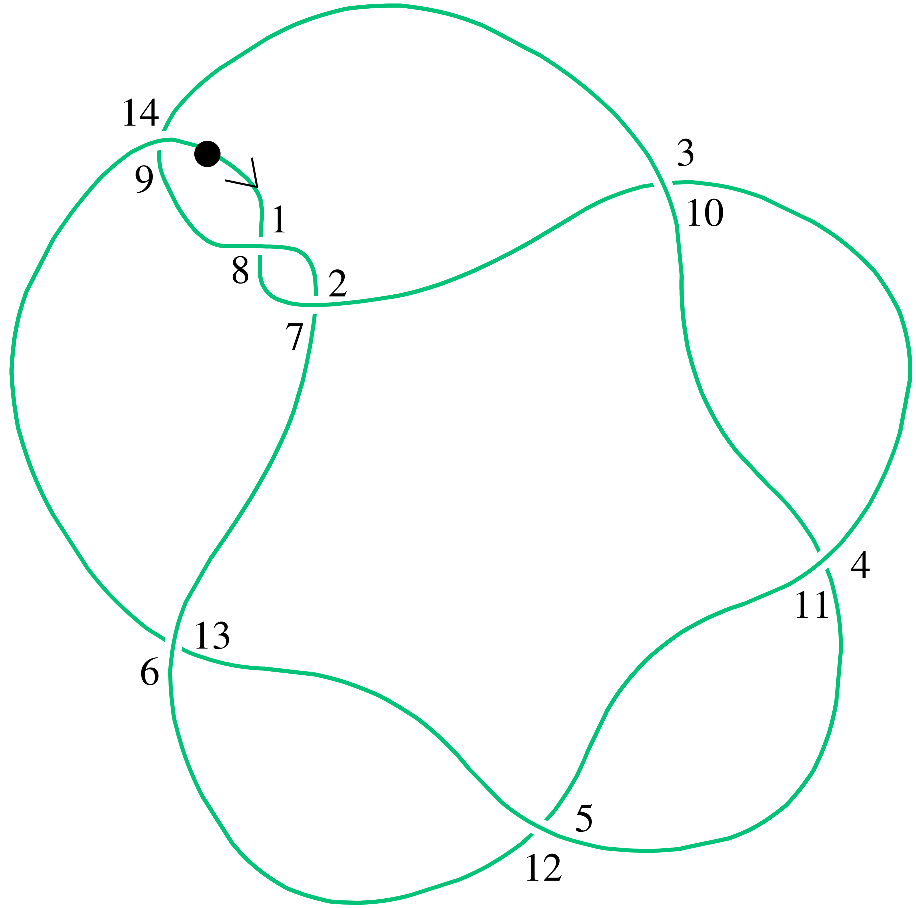
$$10 \quad 8 \quad 12 \quad 14 \quad 2 \quad 4 \quad 6$$



Tenemos varios problemas.

¿Qué tal si comenzamos en otro punto base?

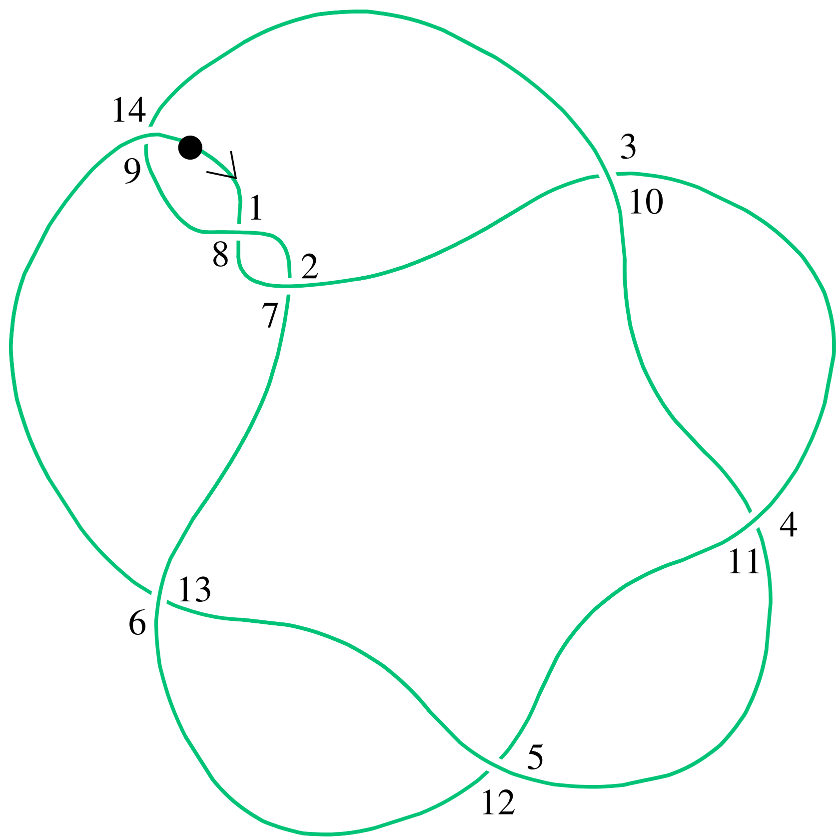

14
3
9
1
10
8
2
7
4
11
13
6
5
12



1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	4	6

El código de este (mismo) diagrama es

$$8 \quad 10 \quad 12 \quad 2 \quad 14 \quad 4 \quad 6$$



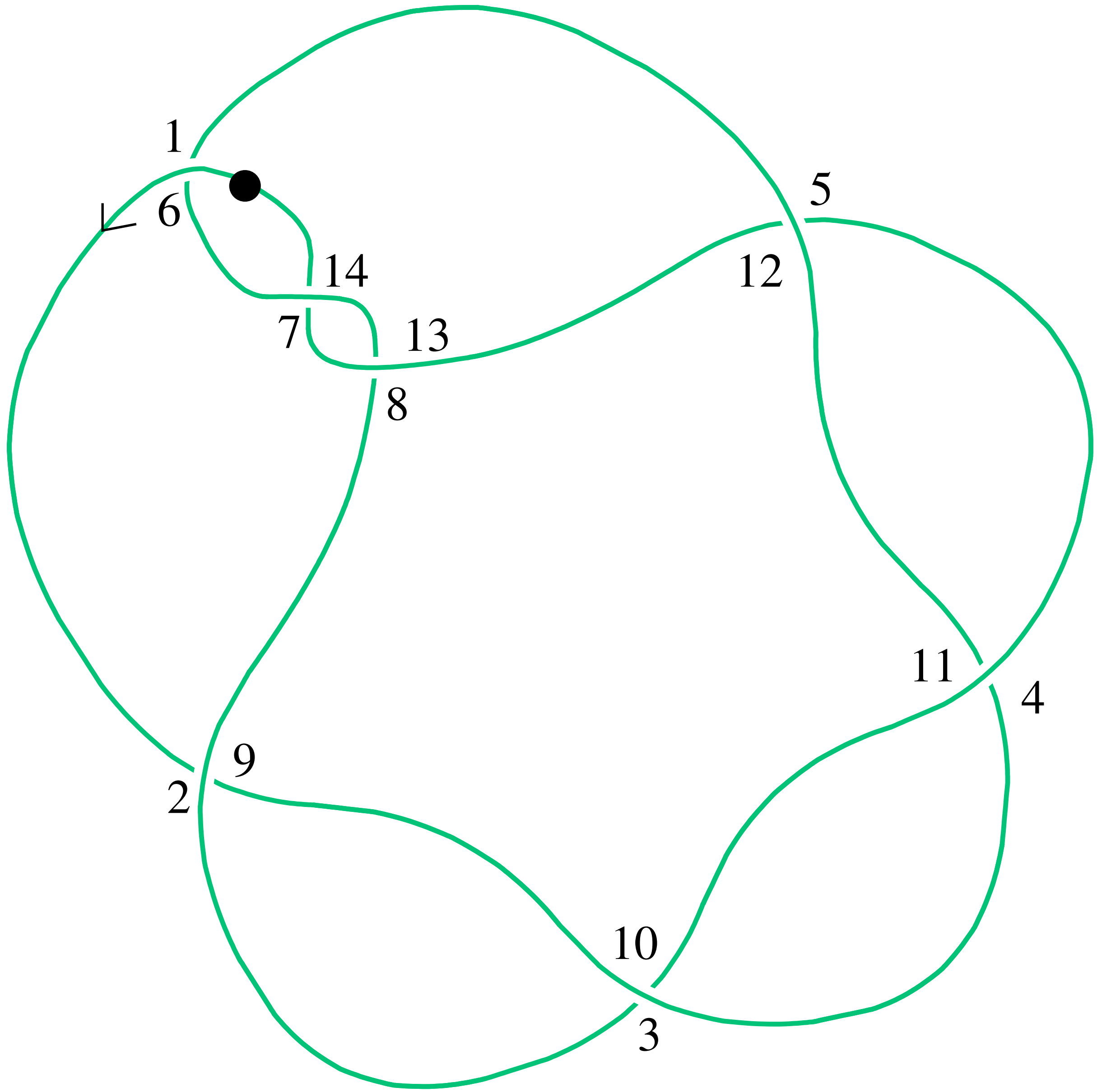
Antes fue

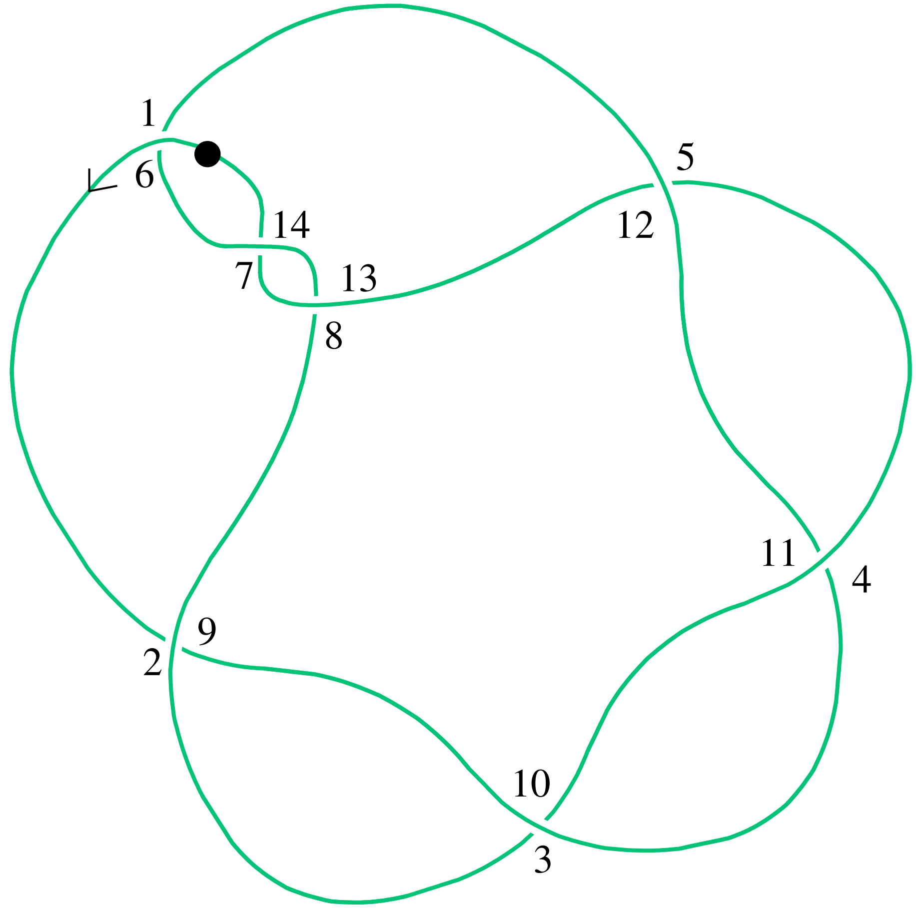
$$10 \quad 8 \quad 12 \quad 14 \quad 2 \quad 4 \quad 6$$

y ahora es

$$8 \quad 10 \quad 12 \quad 2 \quad 14 \quad 4 \quad 6$$

¿Y qué tal si escogemos otra orientación?

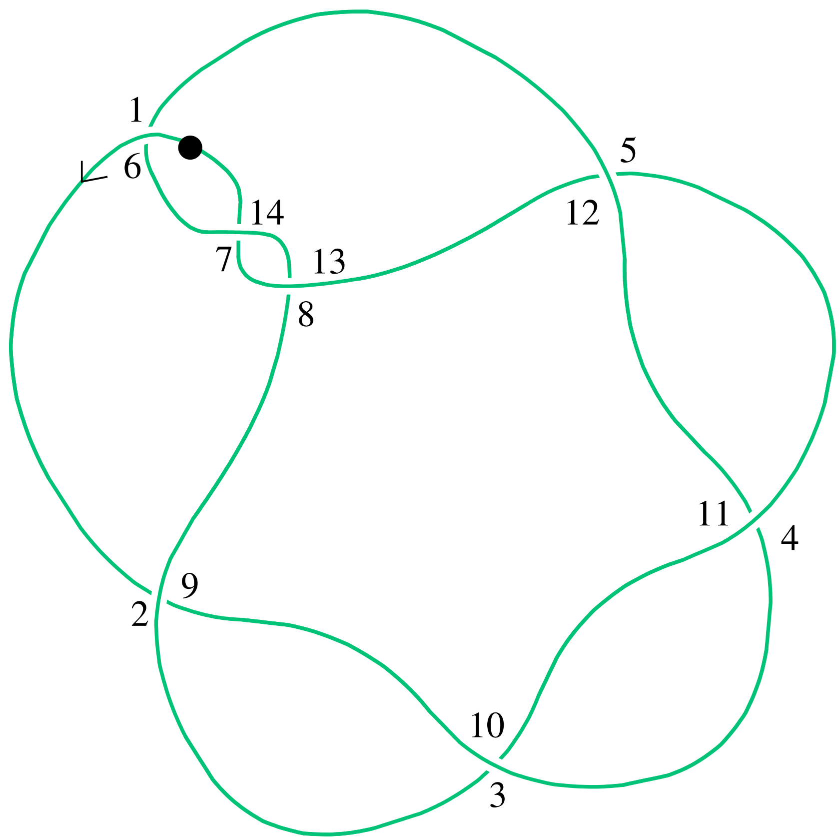

1
6
5
14
12
7
13
8
11
4
9
2
10
3



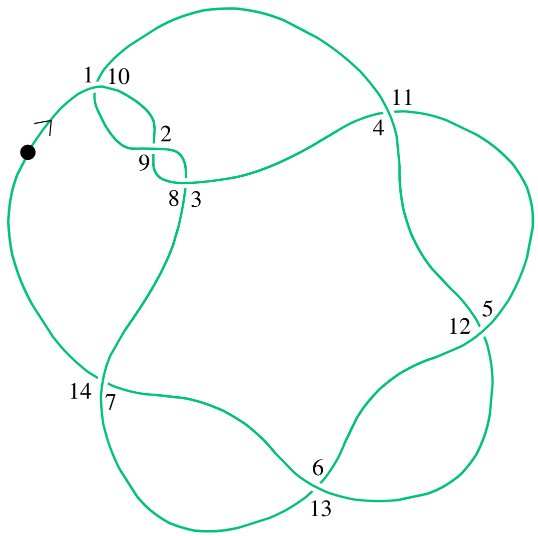
1	3	5	7	9	11	13
6	10	12	14	2	4	8

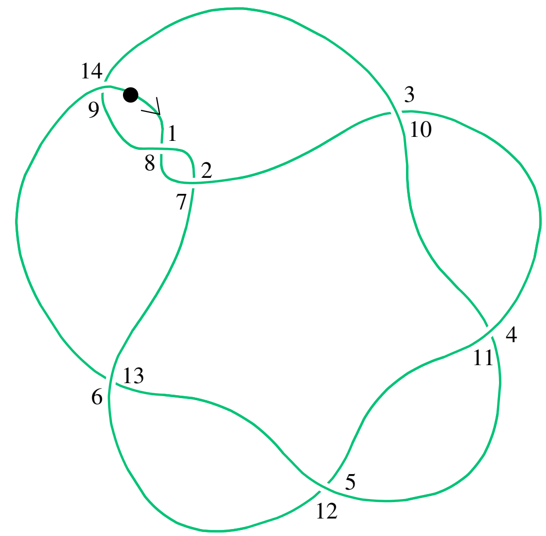
El código de este (mismo) diagrama es

$$6 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 2 \quad 4 \quad 8$$



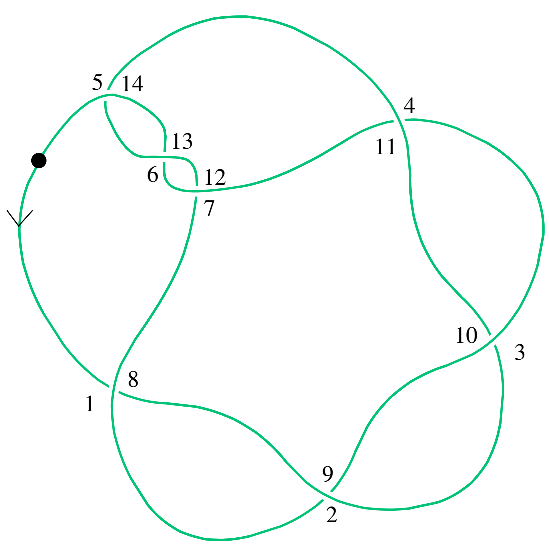
¿Qué tienen que ver estos códigos distintos?

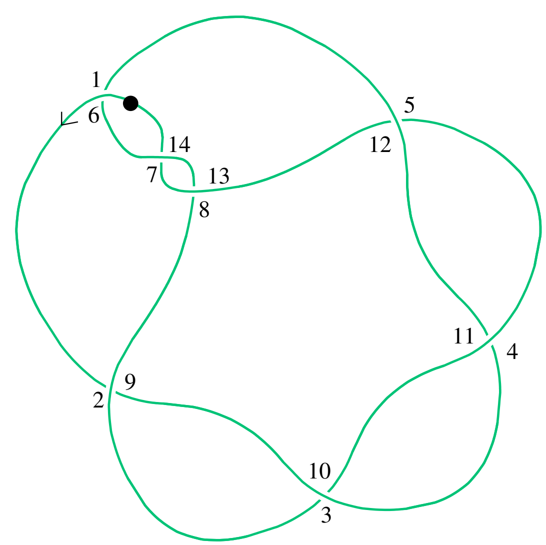




1	3	5	7	9	11	13
10	8	12	14	2	4	6

1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	4	6





1	3	5	7	9	11	13
8	10	14	12	2	4	6

1	3	5	7	9	11	13
6	10	12	14	2	4	8

Sin dibujos se puede

1	3	5	7	9	11	13
10	8	12	14	2	4	6

1	3	5	7	9	11	13
8	10	12	2	14	4	6

1	3	5	7	9	11	13
8	10	14	12	2	4	6

1	3	5	7	9	11	13
6	10	12	14	2	4	8

$$\begin{array}{ccccccc} 1+6=7 & 3+6=9 & 5+6=11 & 7+6=13 & 9+6=1 & 11+6=3 & 13+6=19 \\ 10+6=2 & 8+6=14 & 12+6=4 & 14+6=6 & 2+6=8 & 4+6=10 & 6+6=12 \end{array}$$

$$=$$

$$\begin{array}{ccccccc} 7 & 9 & 11 & 13 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 14 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 \end{array}$$

$$=$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ 8 & 10 & 12 & 2 & 14 & 4 & 6 \end{array}$$

Bueno.

¿Y esto pa qué sirve?

Ejemplo

$$6 \quad 12 \quad 14 \quad 18 \quad 16 \quad 4 \quad 2 \quad 10 \quad 8$$

¡Esto está muy bueno!

Pero vámonos despacito.

Comenzamos con un diagrama de un nudo.

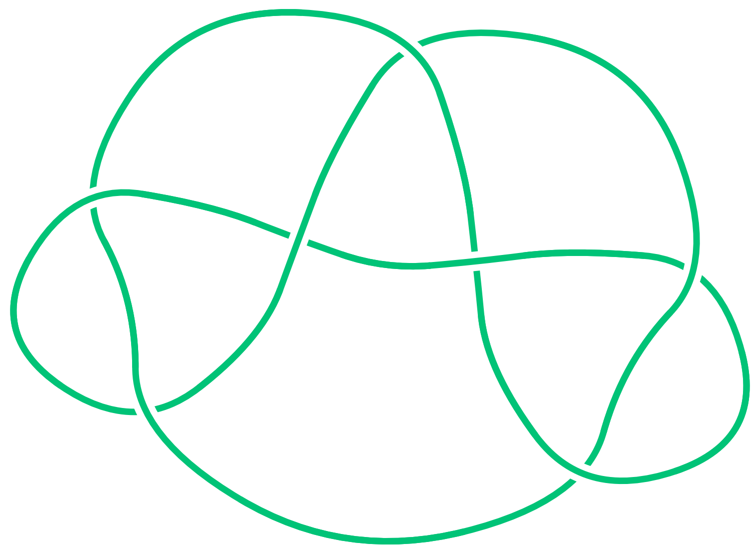
Marcamos un punto de inicio y una dirección sobre el nudo

A partir del punto de inicio recorremos el nudo y numeramos los puntos de cruce que nos vayamos encontrando hasta que regresemos al punto base.

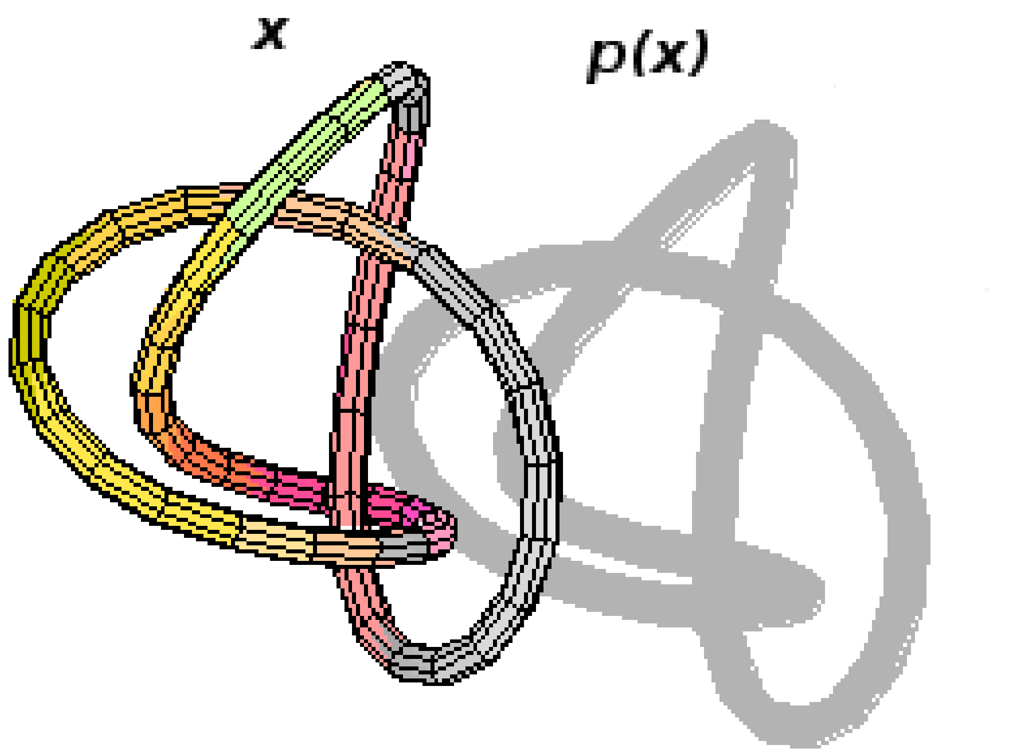
Cada punto de cruce del diagrama recibe dos números: uno es par y el otro es impar.

(¿…?)

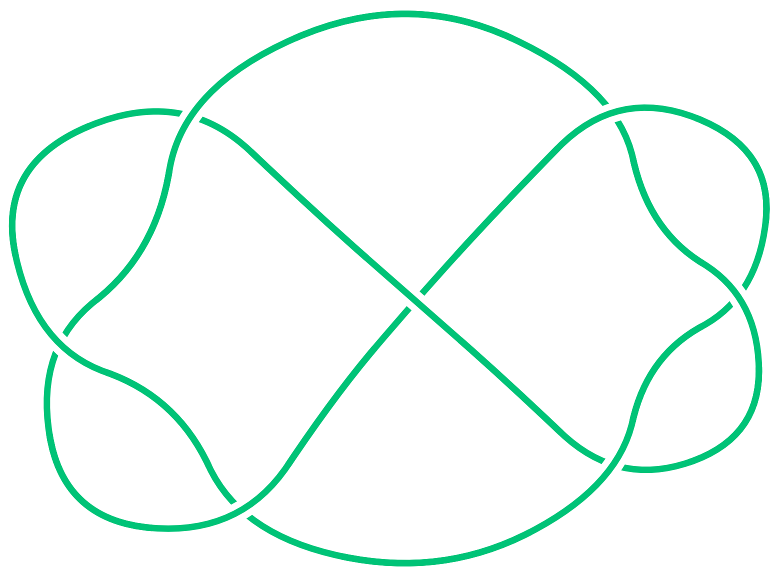
Si tenemos un nudo k en el espacio, entonces un diagrama D del nudo k consta de una proyección del nudo sobre un plano y de indicaciones en los puntos de cruce que nos dicen qué puntos pasan por arriba o por abajo.



Si tenemos un puntito x en el nudo k, vamos a escribir $p(x)$ para el punto de la proyección que corresponde a x

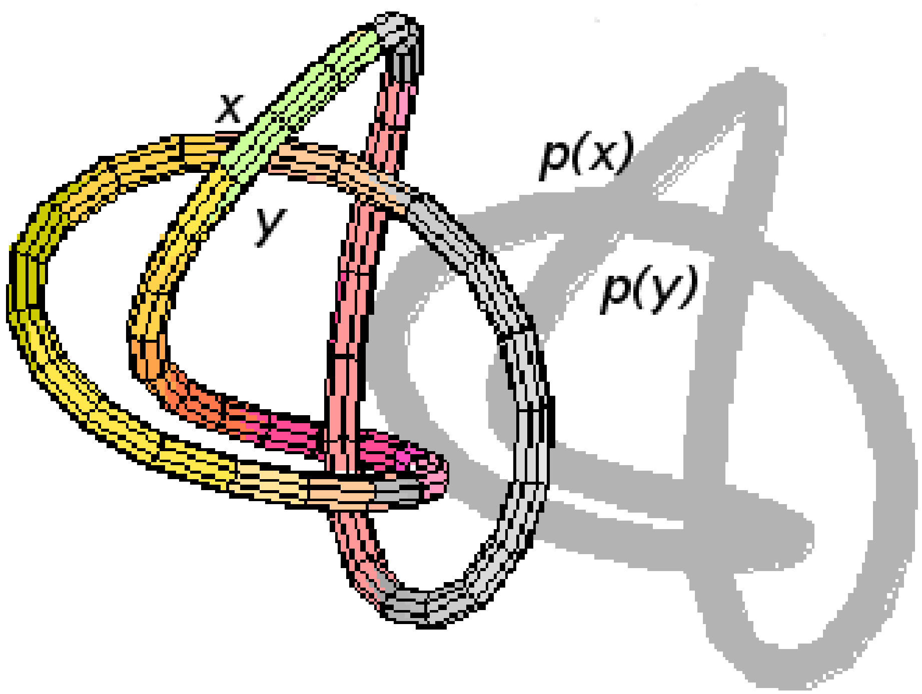


Como tenemos una proyección regular,
en el diagrama vemos arcos y puntos dobles únicamente
(los puntos dobles corresponden a los puntos de cruce)



Para cada punto doble z de la proyeccción, tenemos dos puntitos distintos x y y en el nudo k que se proyectan sobre z, o sea $p(x) = p(y) = z$

(pues sí; son puntos <u>dobles</u>)



Pensemos que nuestro diagrama tiene n puntos de cruce (puntos dobles).

Si recorremos el nudo k y numeramos los puntos de k que se proyectan en puntos dobles, tenemos una sucesión de puntos

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n}$$

O sea, x_1 es el primer punto que nos encontramos, x_2 el segundo punto que nos encontramos, etc., hasta que llegamos al último punto que se proyecta en un punto doble: x_{2n}.

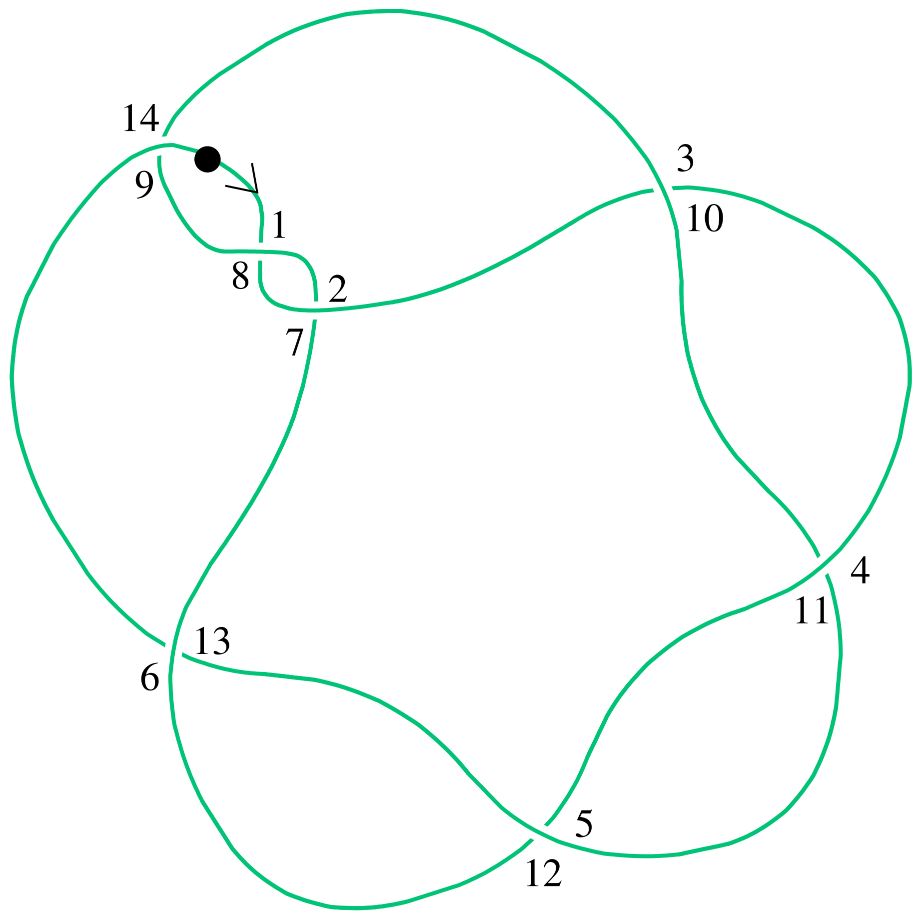
(Después nos volvemos a encontrar con x_1.)

¿Cómo se ven los puntos

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n}$$

en el diagrama?

Pues, se ven así:



Por ejemplo, el cruce donde está el 1 y el 8, es el punto donde se proyectaron los puntos x_1 y x_8 de k.

¿Correcto?

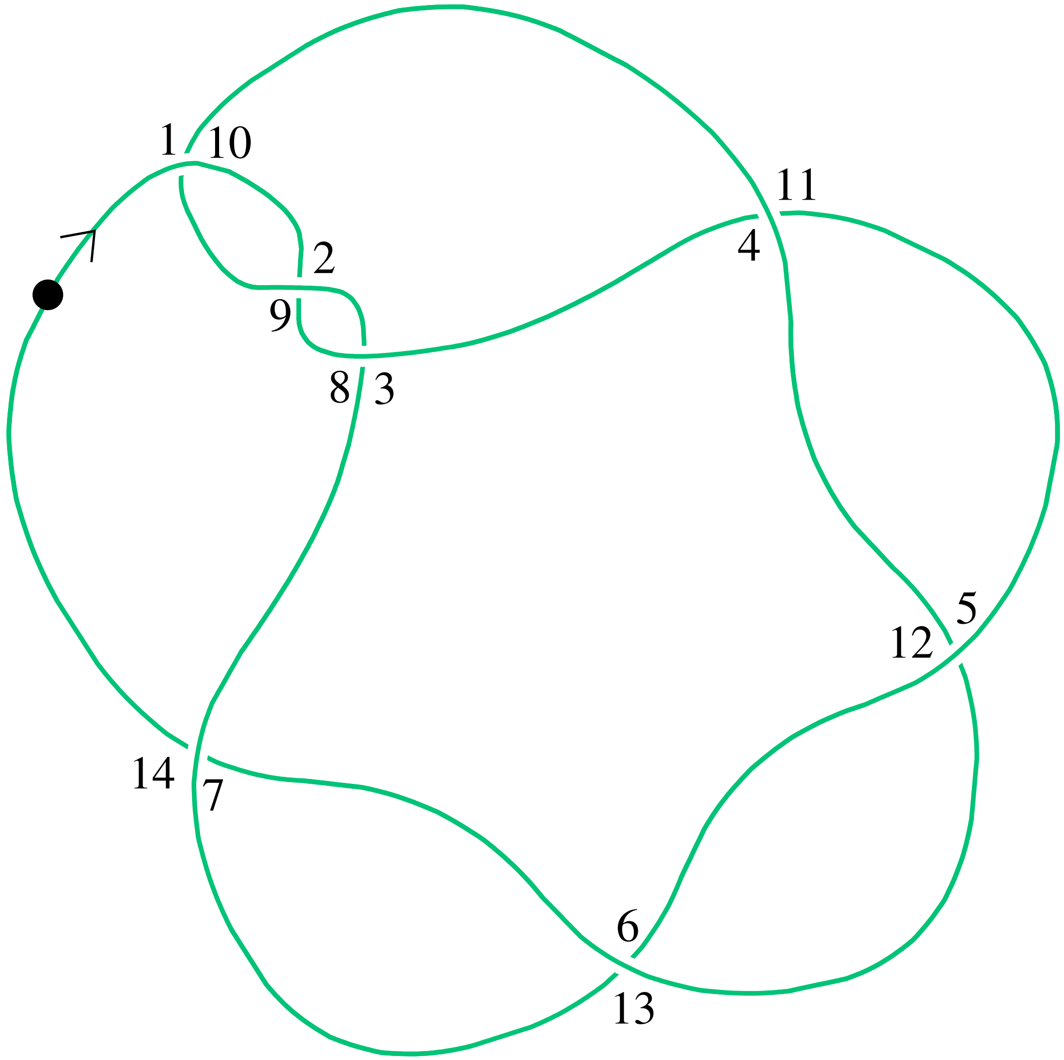
Ya podemos entender la afirmación:

Cada punto de cruce del diagrama recibe dos números: uno es par y el otro es impar.

En la sucesión de un diagrama, si en un cruce tenemos al número i, al otro número j que aparece en ese cruce lo llamamos el acompañante de i.

Escribimos

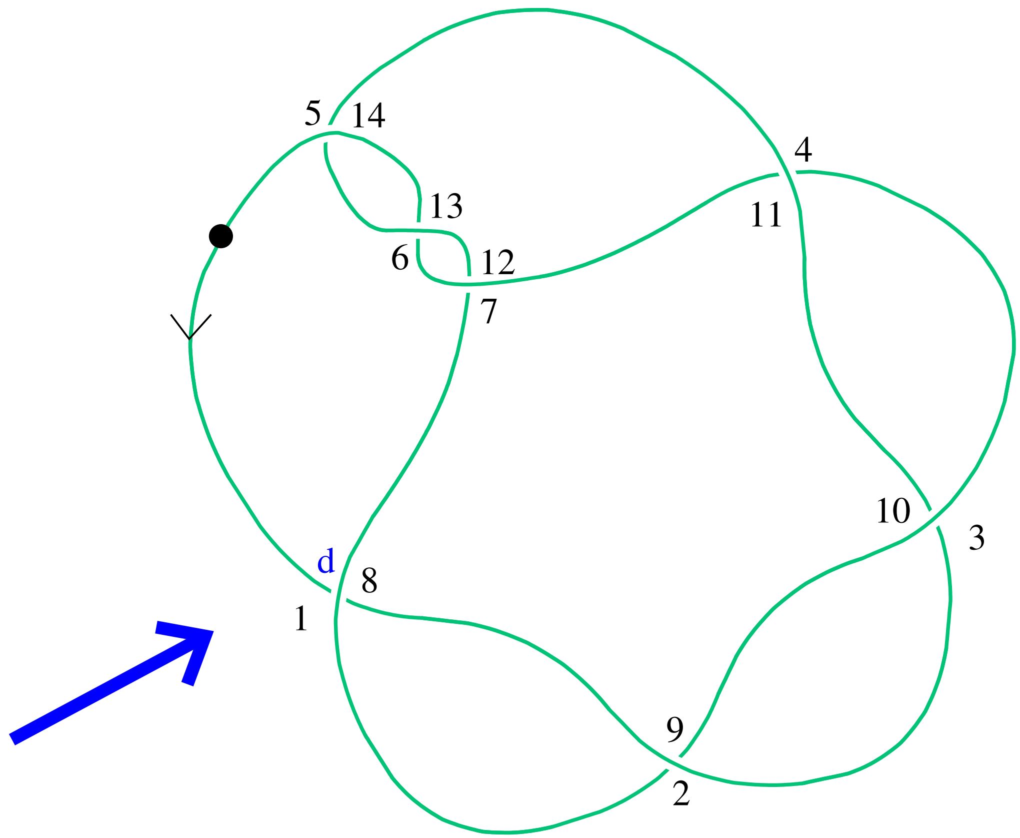
$$j = \text{acompañante}(i) = a(i)$$



$a(1) = 10$, $a(2) = 9$, $a(3) = 8$, $a(4) = 11$, $a(5) = 12$, $a(6) = 13$, $a(7) = 14$,

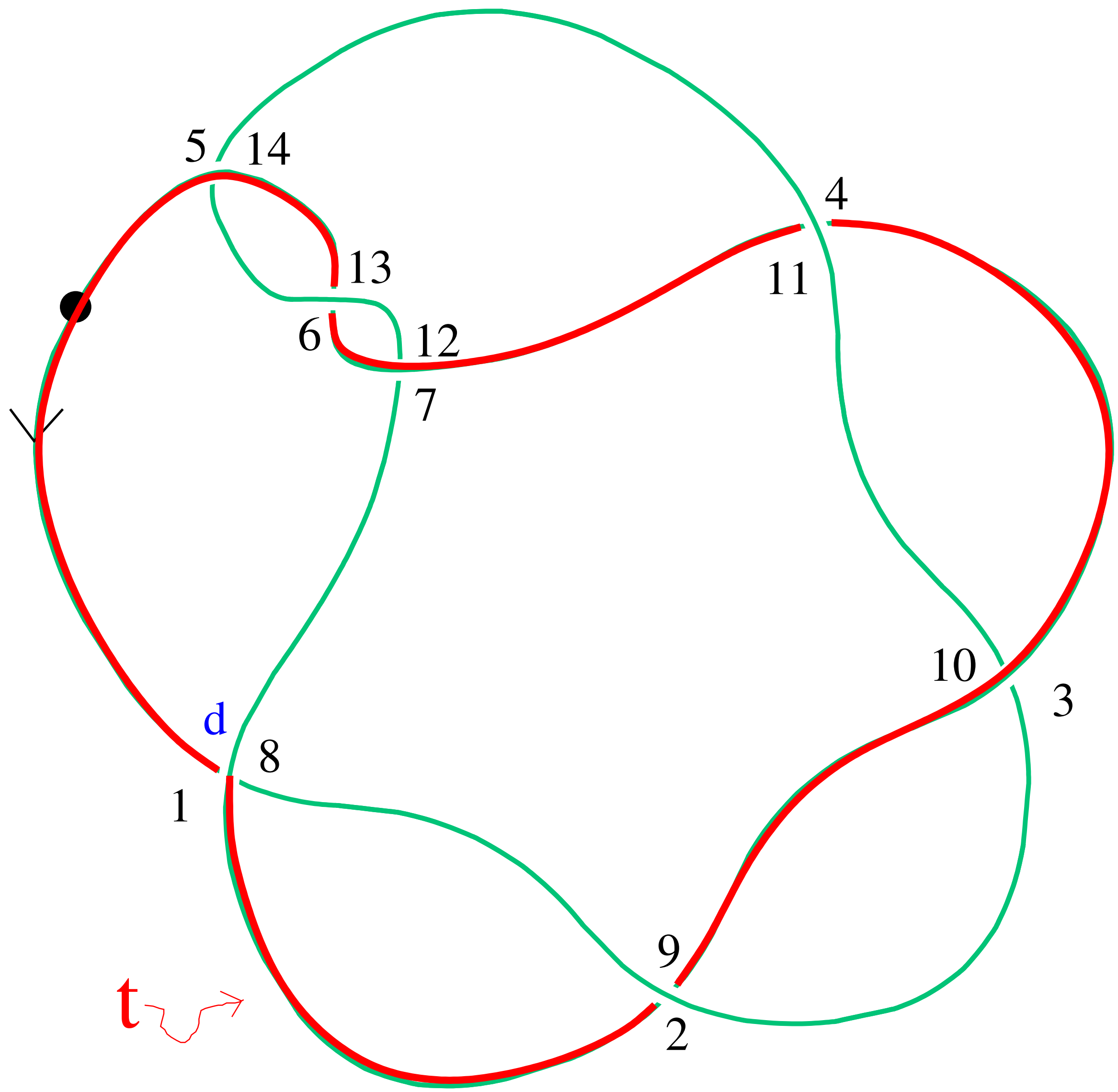
$a(8) = 3$, $a(9) = 2$, $a(10) = 1$, $a(11) = 4$, $a(12) = 5$, $a(13) = 6$ y $a(14) = 7$.

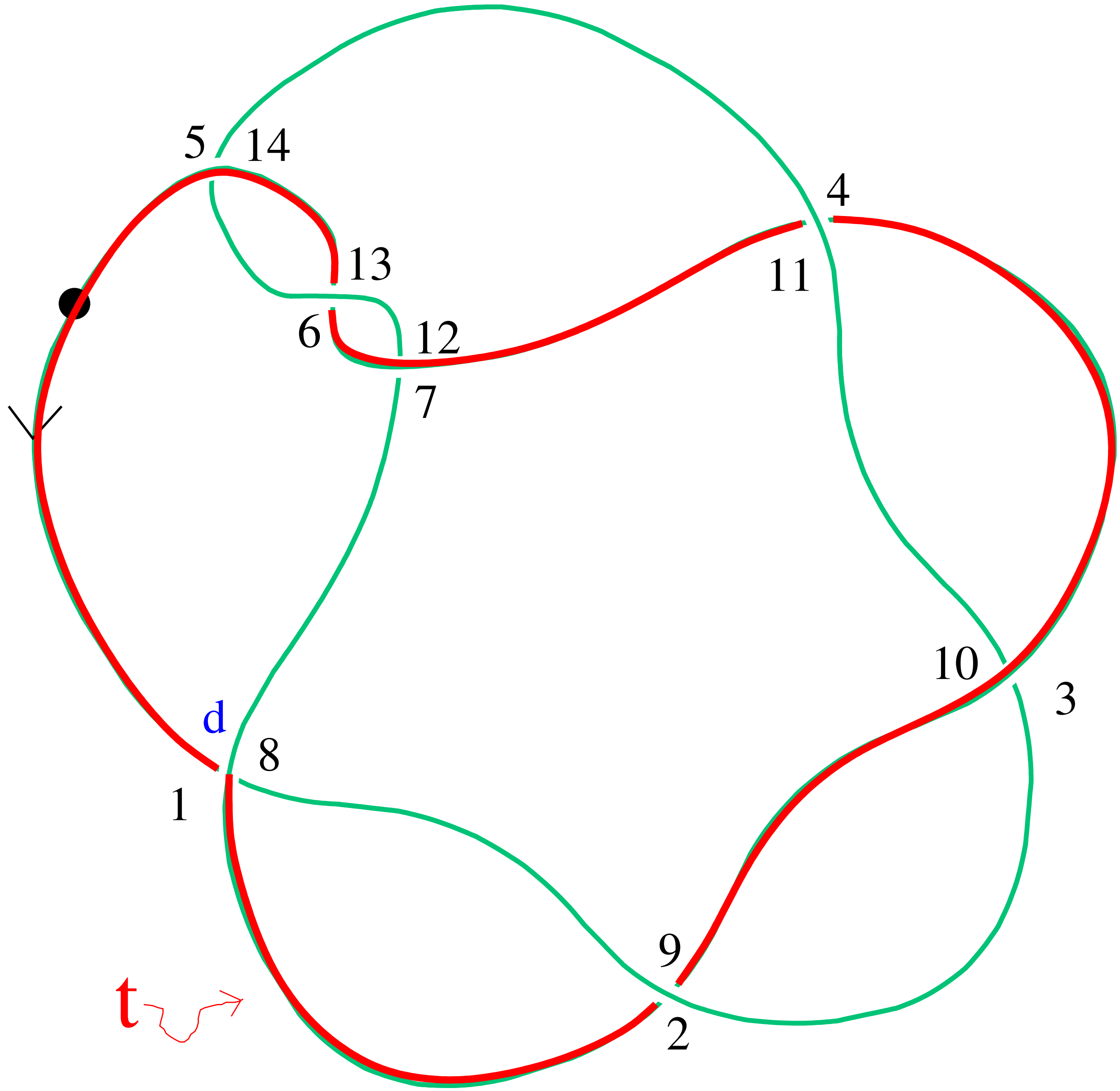
Tomemos un nudo k y un diagrama D de k con proyección p. Tomemos ahora un punto doble en D, $d = p(x_i) = p(x_{a(i)})$.



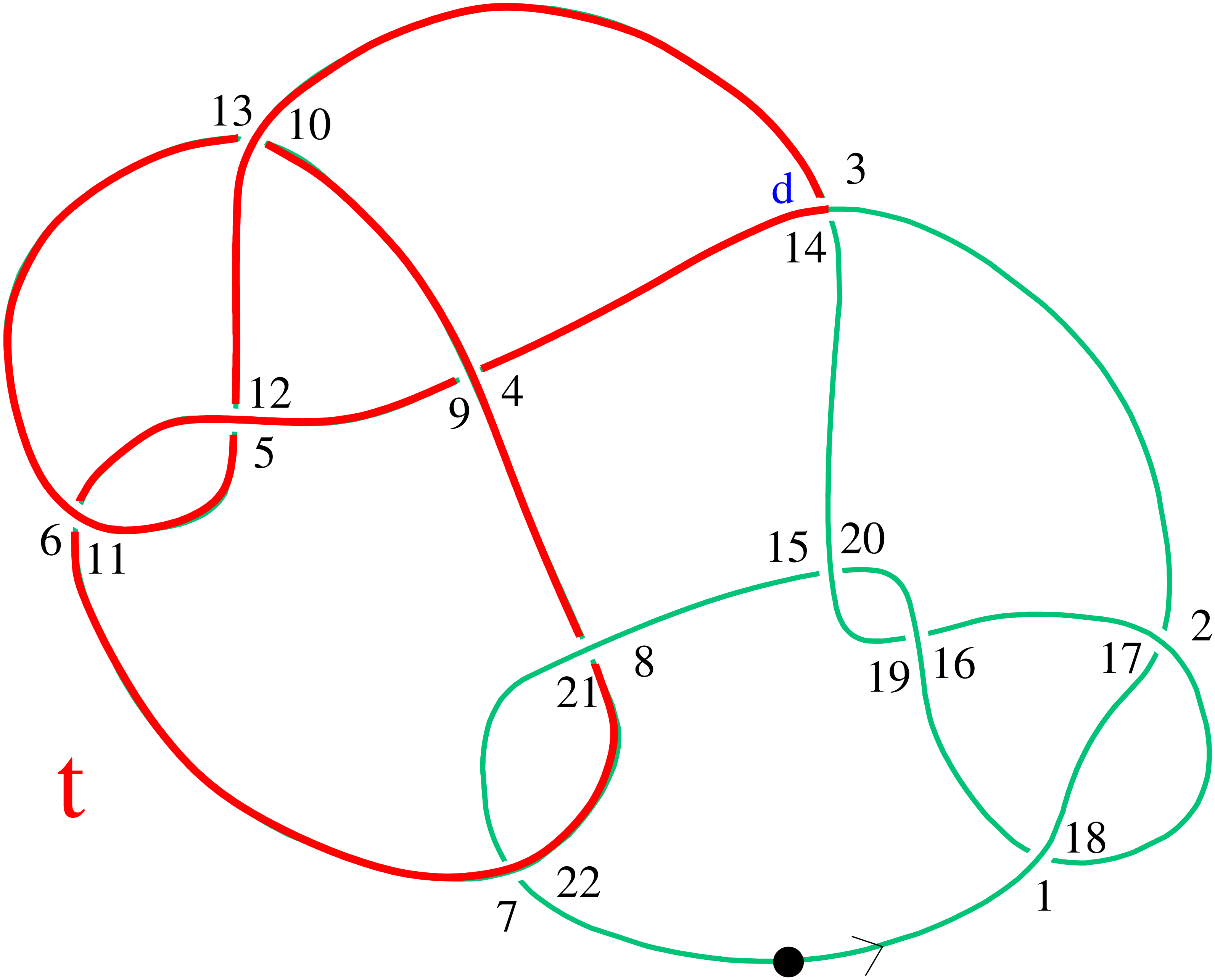
Tenemos que probar que i es par y que $a(i)$ es impar, o al revés, que i es impar y que $a(i)$ es par.
$(a(i) =$ acompañante de $i)$

Llamemos t a la proyección de la curva que va sobre el nudo, siguiendo su orientación, que comienza en x_i y termina en $x_{a(i)}$.





La curva t es cerrada: comieza en d y termina en d.

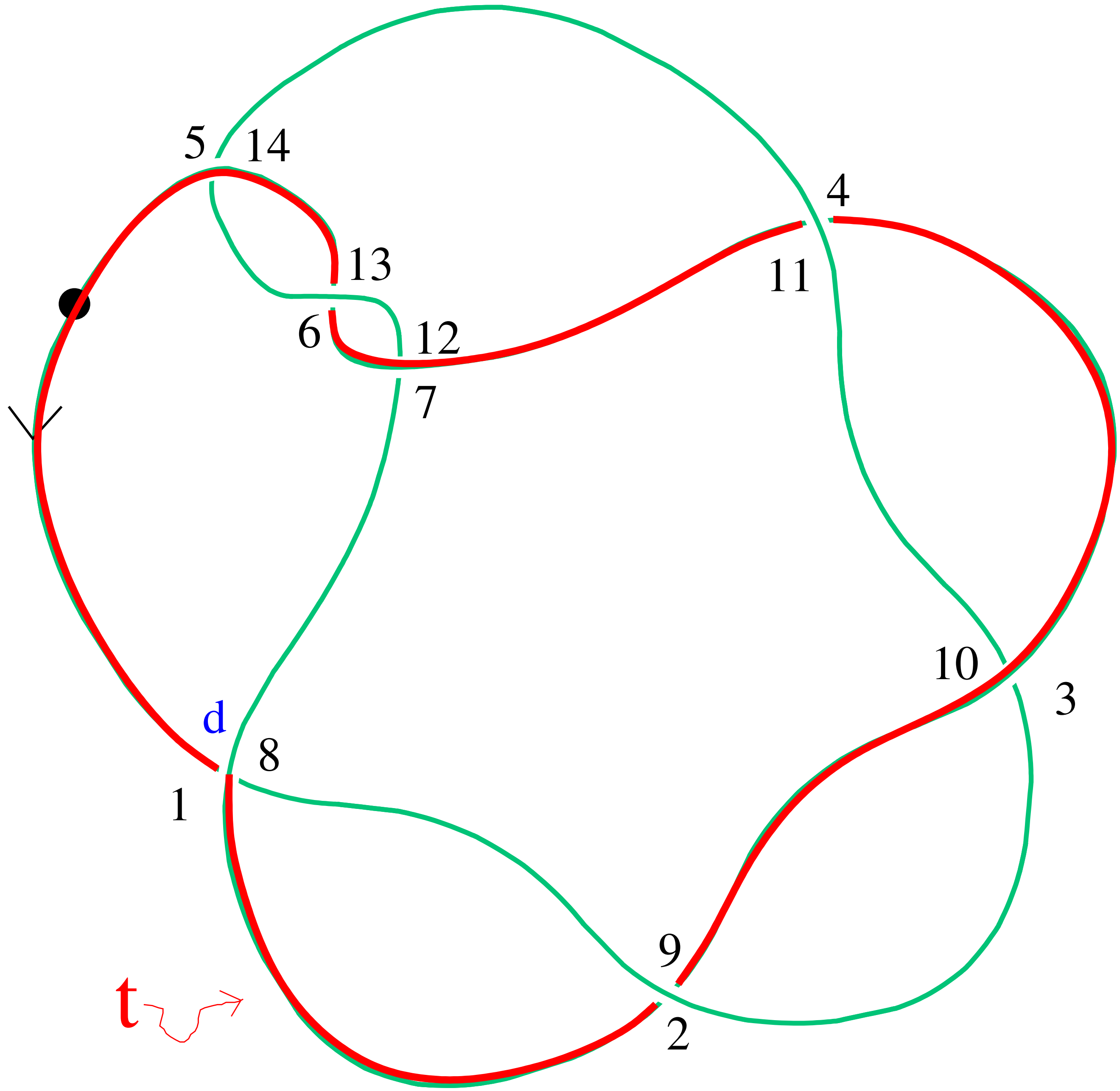


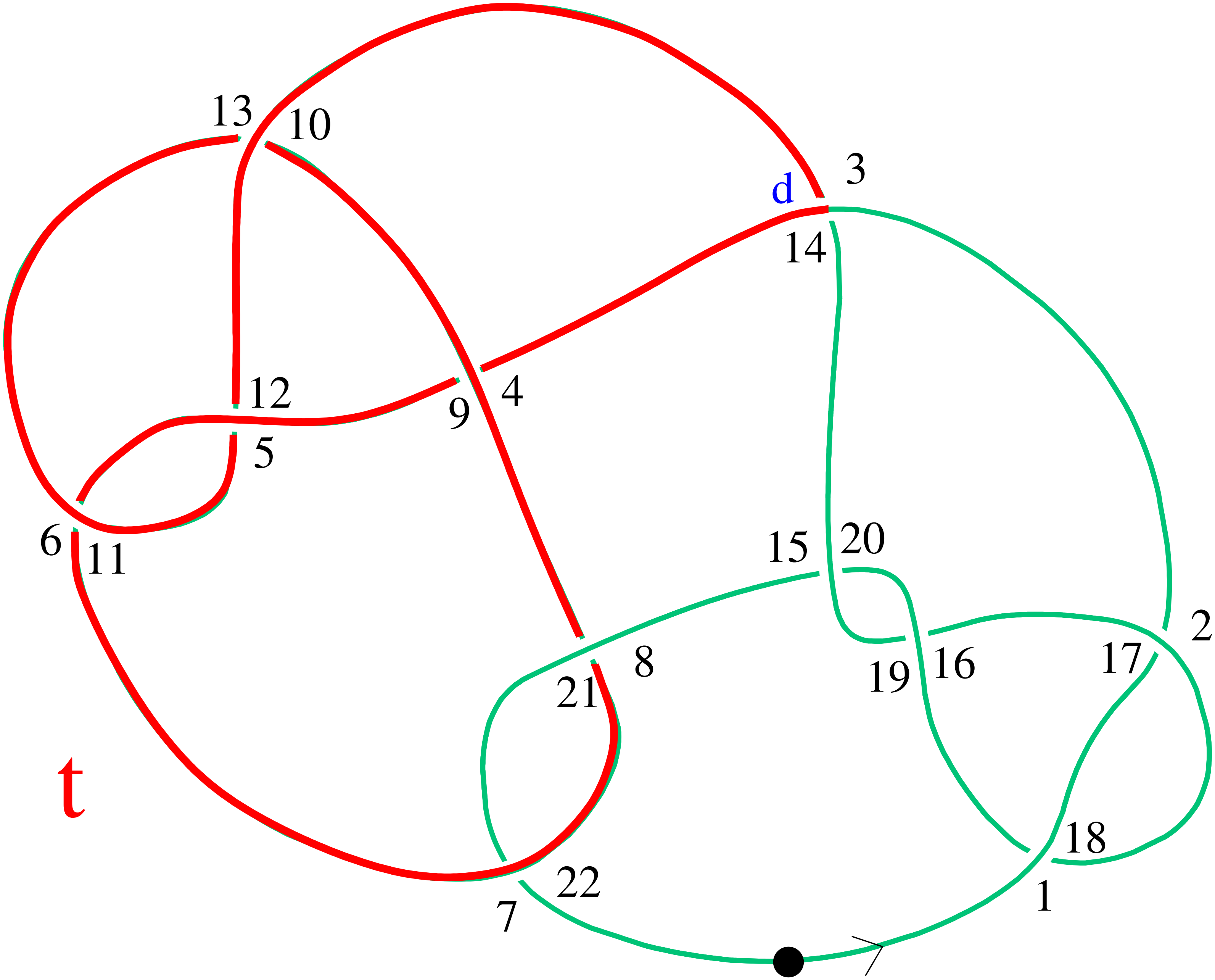
Pero t no tiene por qué ser simple.

Para construir la curva t, comenzamos en x_i, recorremos al nudo, llegamos a $x_{a(i)}$ y proyectamos sobre el diagrama.

Para saber quién es el número $a(i)$, debemos contar el número de puntos dobles sobre los que pasa la curva t.

Si t pasa por k puntos dobles, entonces $a(i) = i + k$.

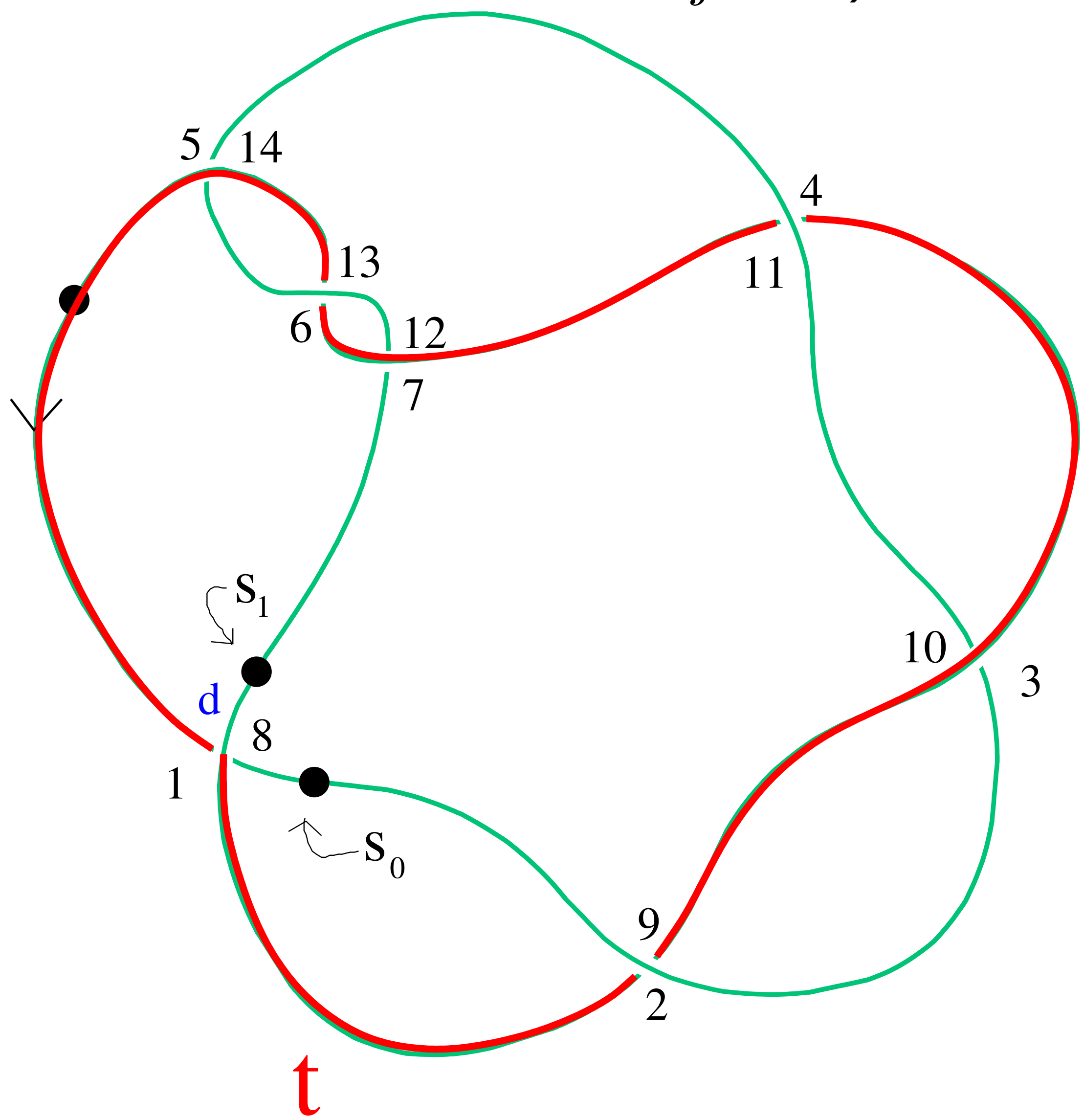




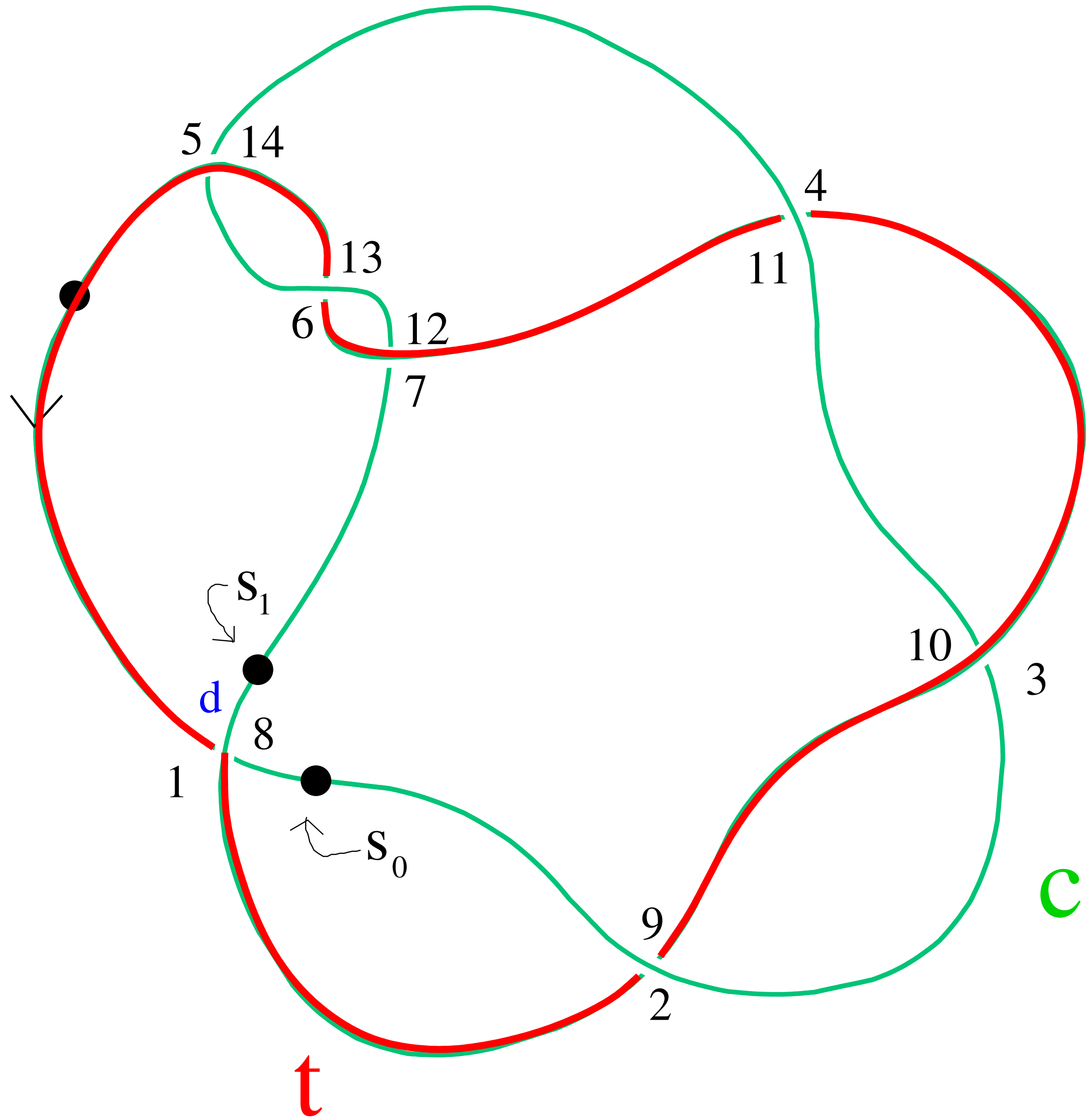
13
10
d
3
14
12
4
9
5
6
11
15
20
2
8
19
16
17
21
t
18
22
1
7

Consideremos dos puntitos, s_0 un poquito después de d y s_1 un poquito antes de d.

(o sea no hay puntos dobles entre s_j y d)

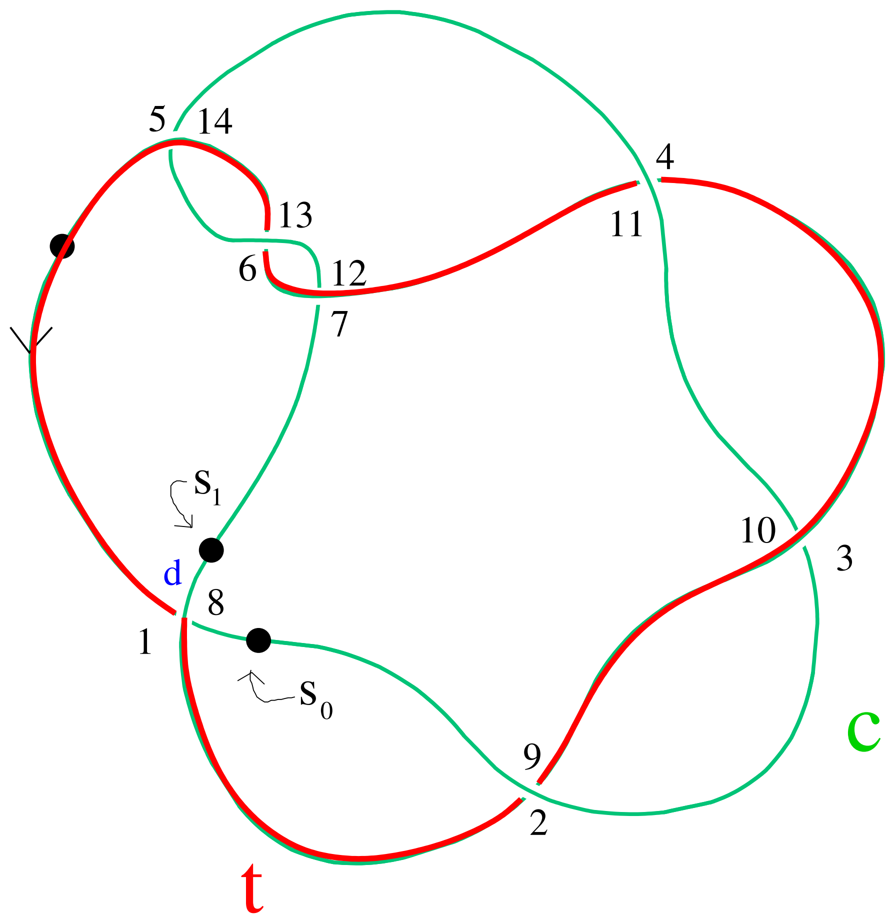


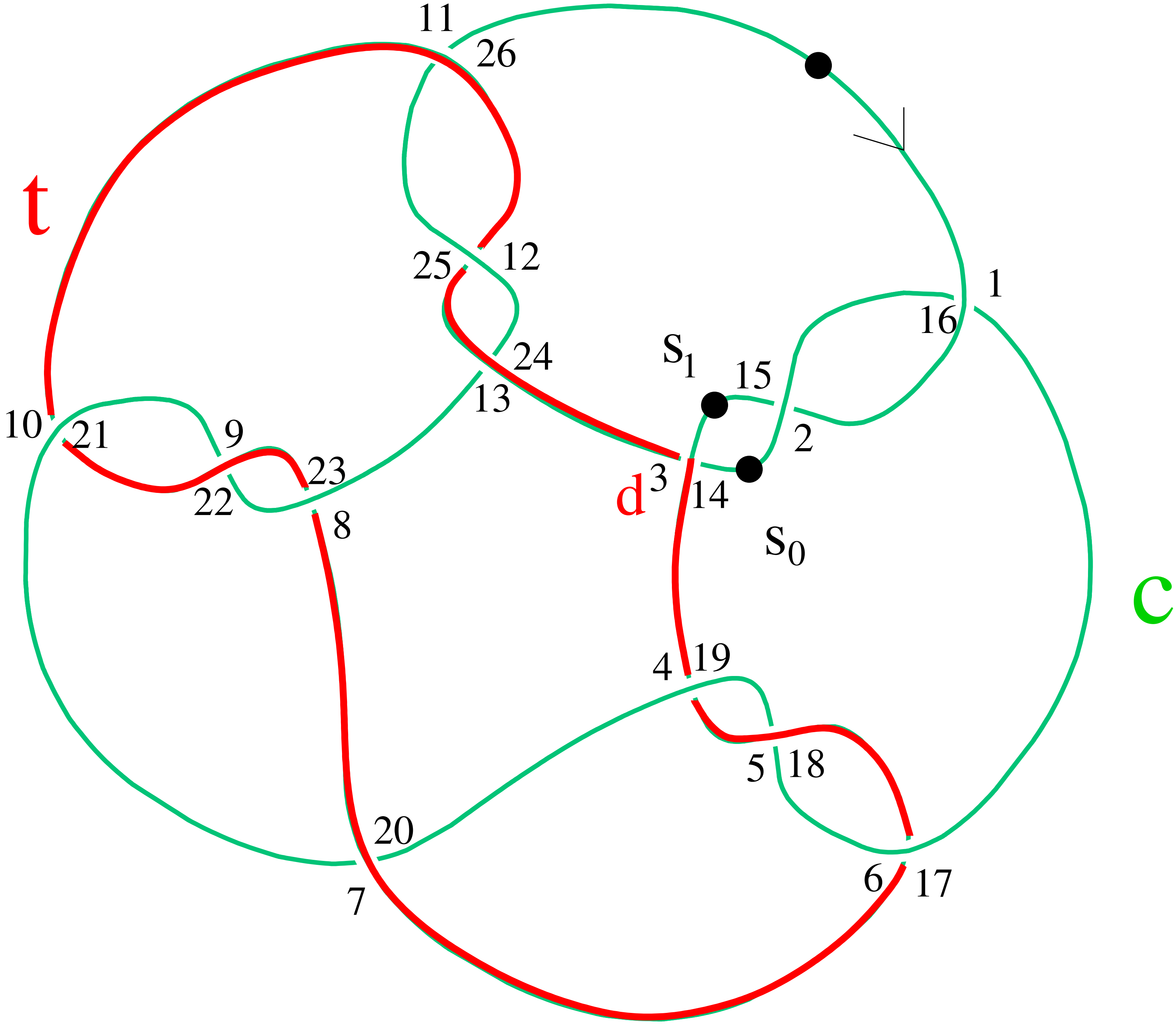
Llamemos c a la curva sobre el diagrama que conecta a s_0 con s_1 siguiendo la orientación del nudo.
(o sea, del otro lado de t)



<u>1er. caso:</u> Consideremos primero el caso en que la curva t es simple.

En este caso, el número de puntos dobles sobre t, el número que nos interesa calcular, es el número de puntos de intersección entre t y c, más 1.



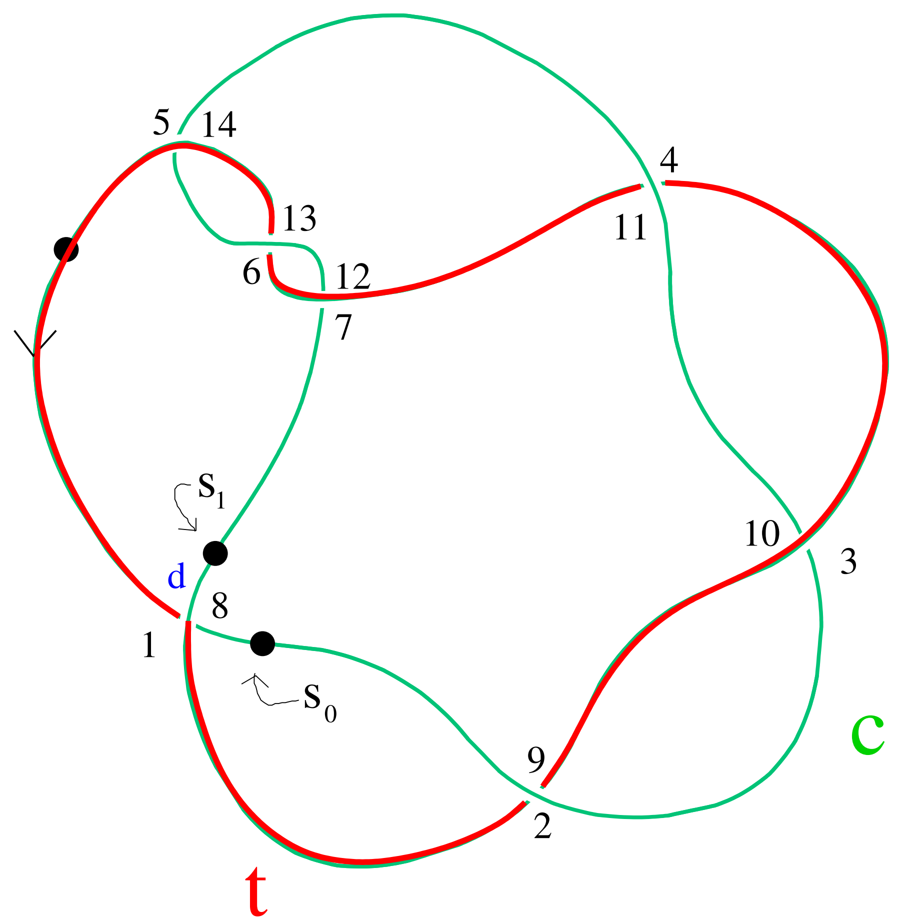


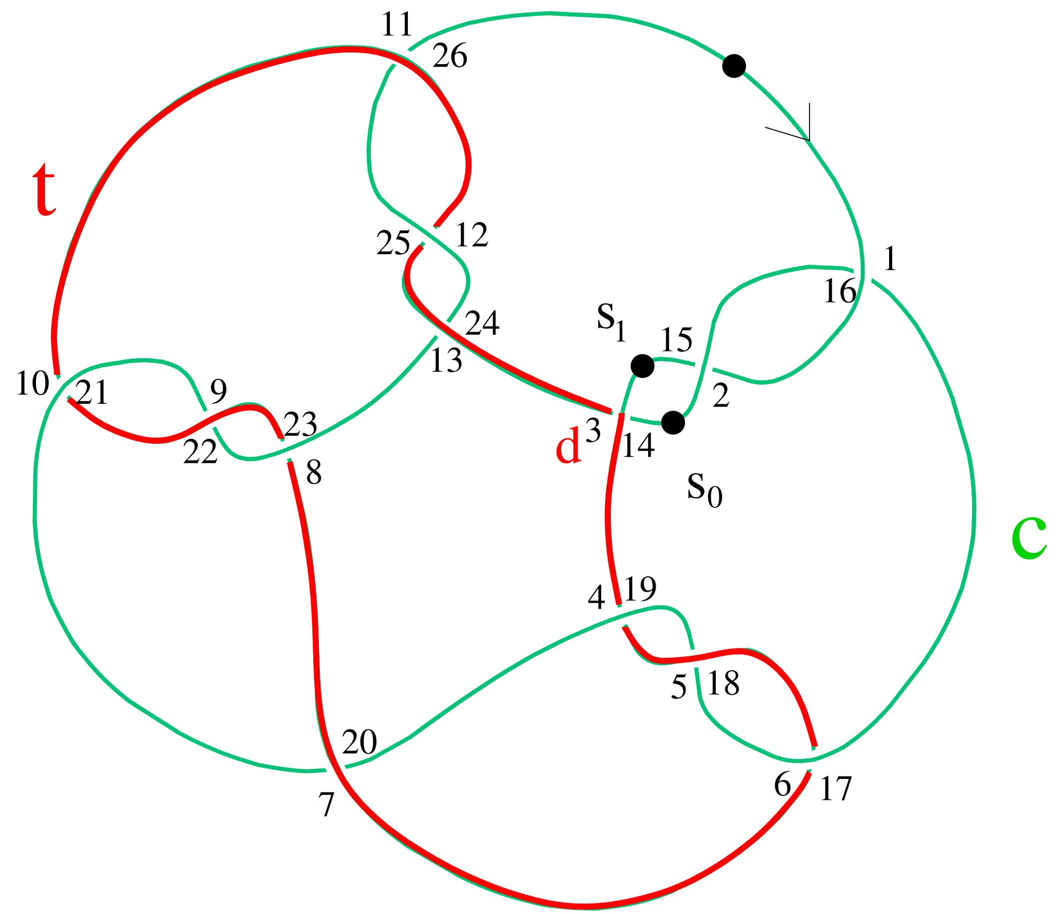
11
26
t
25
12
1
16
24
13
s1
15
10
21
9
2
23
22
d
3
14
8
s0
c
4
19
5
18
20
6
17
7

Como la curva t es simple cerrada, la curva t separa al plano en dos pedazos: la parte de adentro de t y la parte de afuera de t.

(este es el famosísimo Teorema de la Curva de Jordan)

Por como escogimos a los puntos s_0 y s_1, ambos están en la parte de adentro de t o ambos están en la parte de afuera de t.



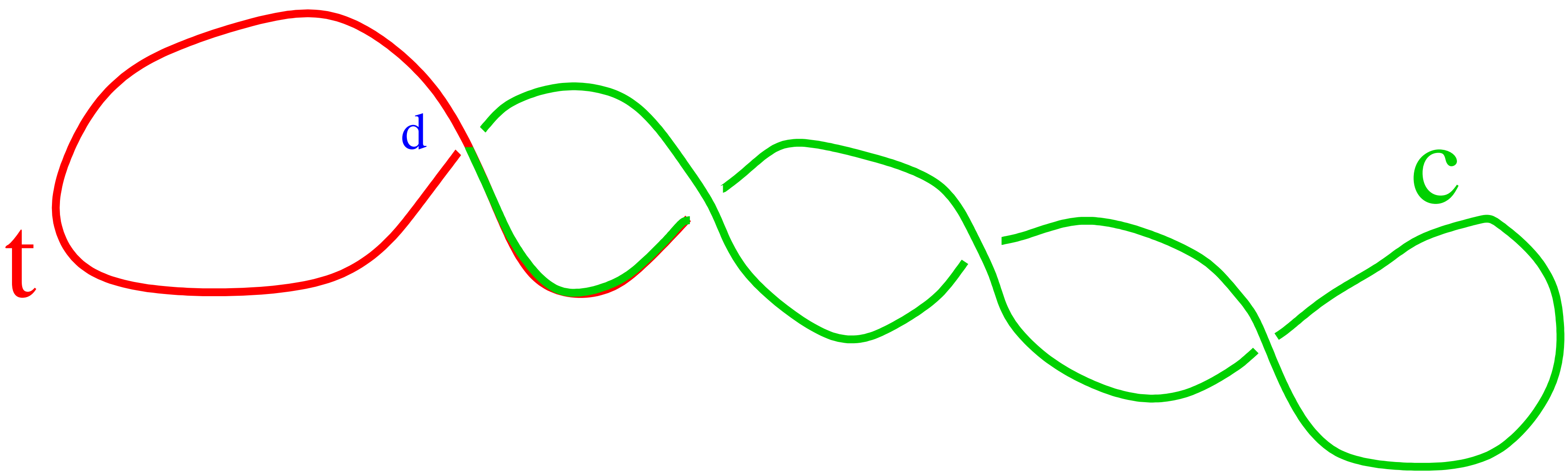


Digamos que ambos están en la parte de afuera.

Si t y c no se tocan, entonces no hay puntos dobles al recorrer t, salvo d, y, por lo tanto, $a(i) = i + 1$ y se tiene el resultado

(i es par y $a(i)$ es impar, o al revés, i es impar y $a(i)$ es par)

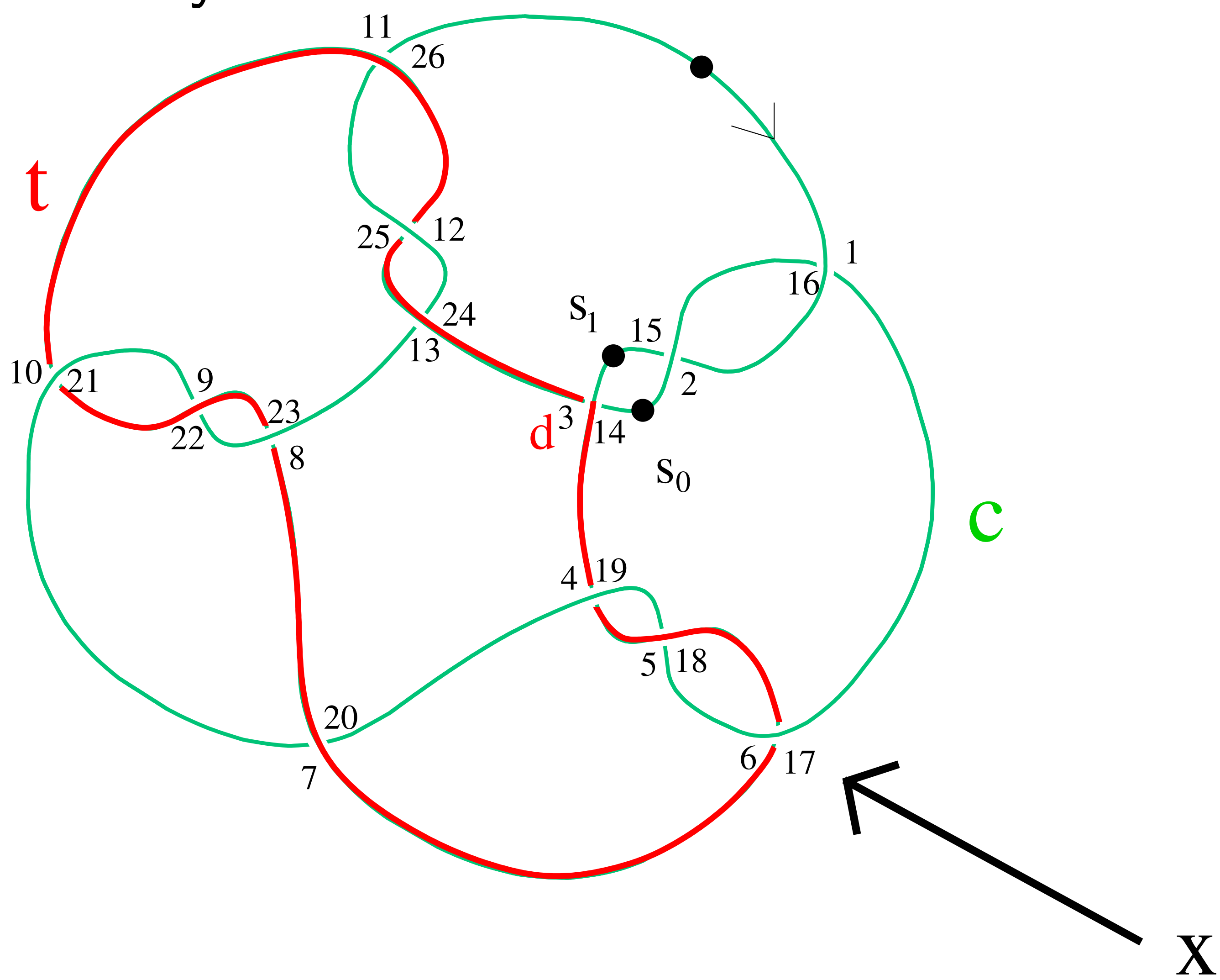
(Este es un caso muy bobo:



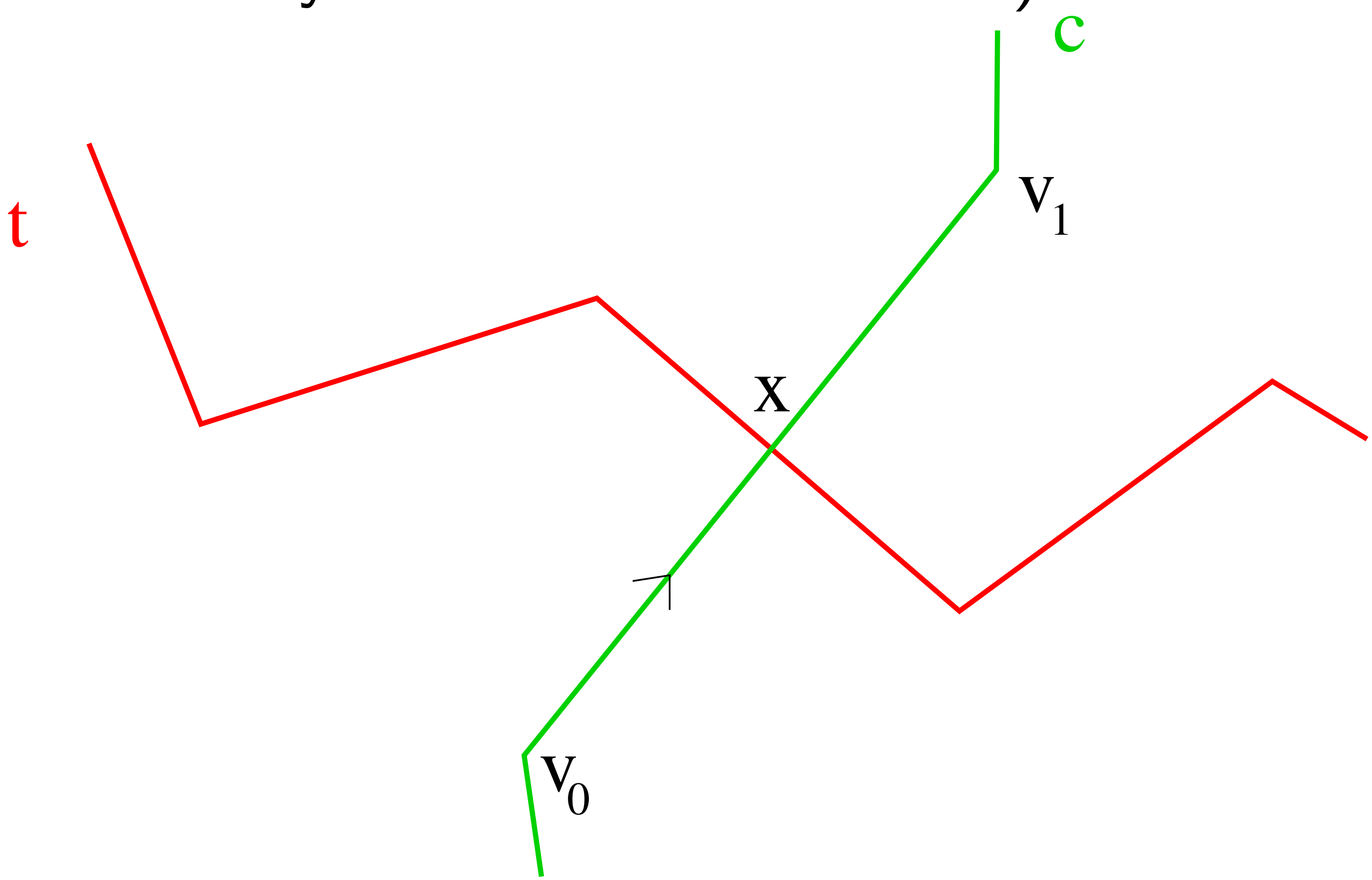
)

Pensemos, entonces que t y c sí se tocan en un cierto número de puntos.

Tomemos x el primer punto de c, a partir de s_0, que está en la intersección de t y c.



Si a es la arista de c donde vive x y v_0 y v_1 son los extremos de a, en ese orden, entonces v_0 y v_1 están en lados distintos de t. (Uno está adentro y otro está afuera de t)

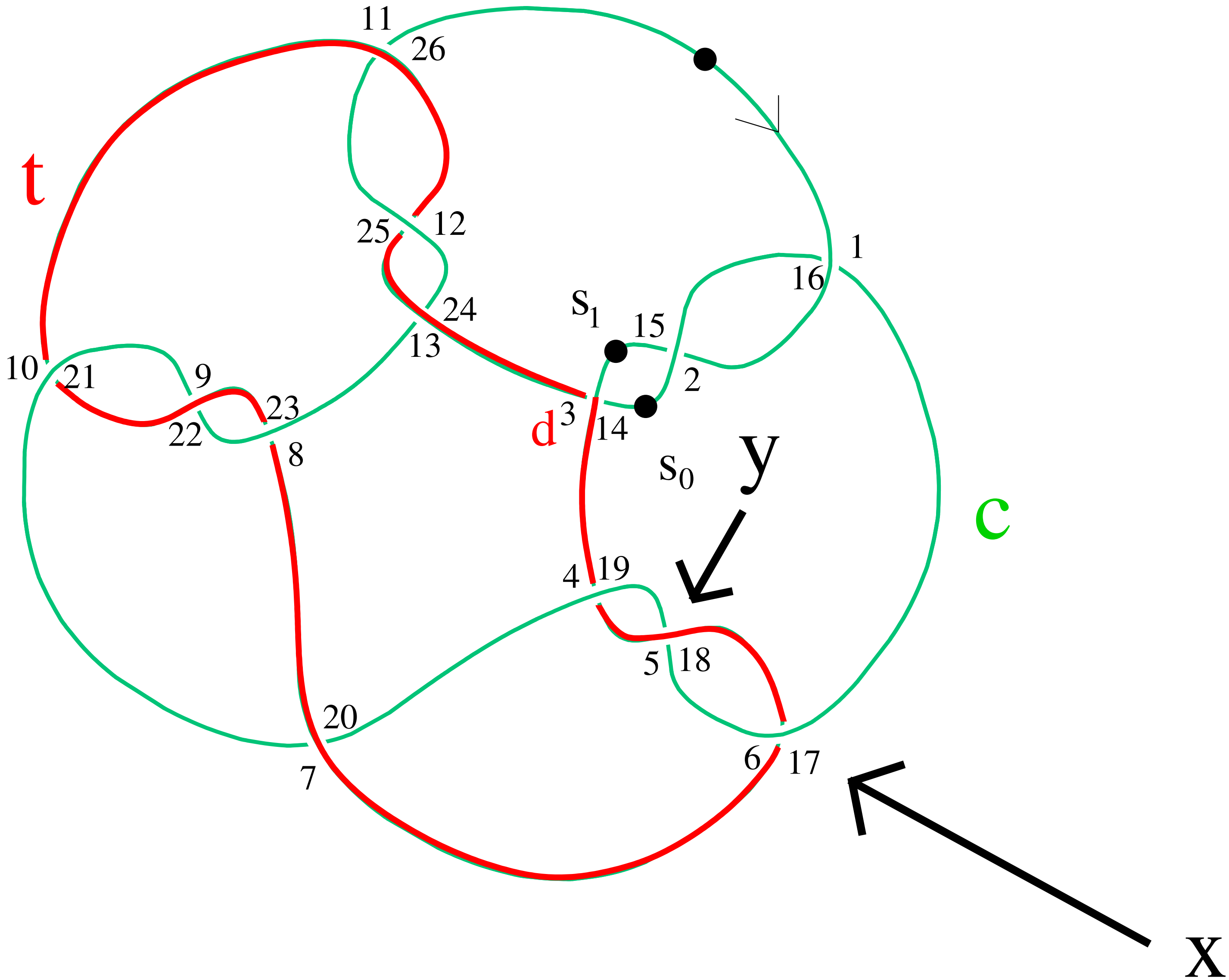


De hecho v_0 está afuera de t y v_1 está adentro de t, pues estamos suponiendo que s_0 está afuera de t.

Ahora, la curva c conecta a v_1 con s_1 y v_1 está adentro de t y s_1 está afuera de t.
Sabemos que t separa al plano en dos partes. ¡Para pasar de una parte a la otra, debemos cruzar a la curva t!
Entonces, forzosamente c debe cortar a t en un punto y posterior a v_1: La curva c corta a t en un punto y posterior a x.

En particular $x \neq y$.

Podemos pensar que y es el segundo punto en el que c corta a t (o sea, escogemos a y como el primer punto de $c \cap t$ que es posterior a x).



Si hay más puntos de intersección de c y t, aparte de x y y, continuamos con el tercer punto de intersección de c y t y, si repetimos el argumento, nos vamos a encontrar un cuarto punto de intersección.

O sea, cada vez que encontremos un punto de intersección de c y t, nos encontramos con otro punto de intersección distinto.

O sea, los puntos de intersección de c y t vienen por pares.

En particular el número k de puntos de intersección de c y t es par.

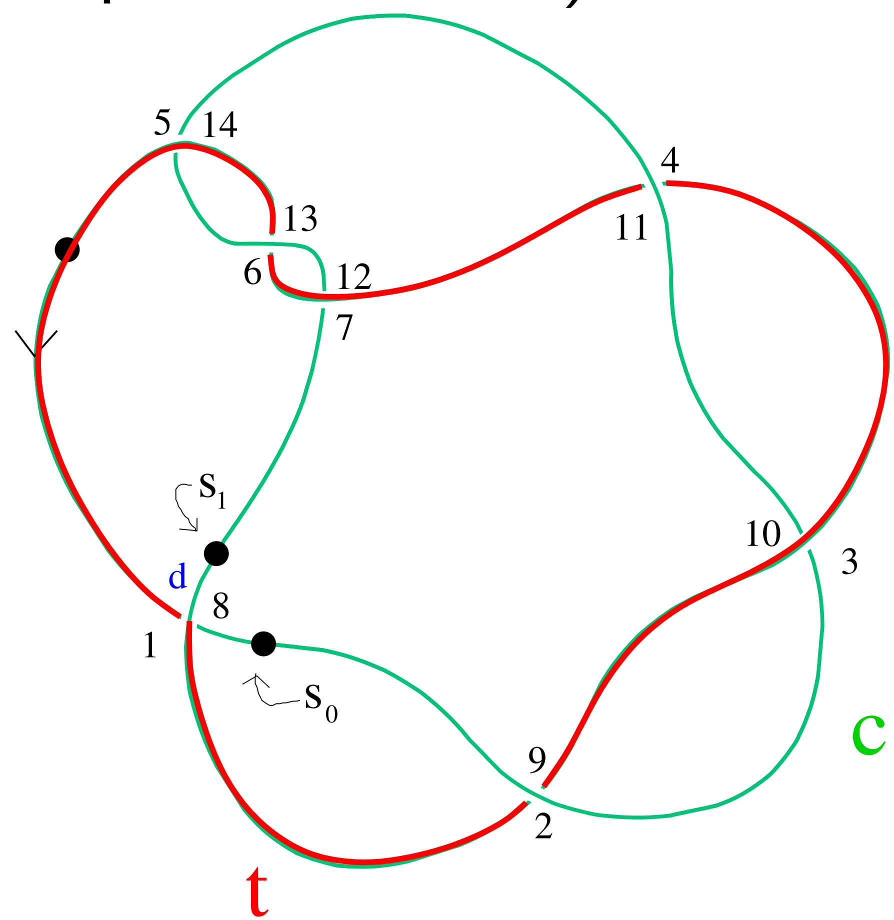
Regresamos a lo que queríamos probar

(i es par y $a(i)$ es impar, o al revés, i es impar y $a(i)$ es par)

y, como ya sabíamos que $a(i) = i + k + 1$ y acabamos de ver que k debe ser par, obtenemos el resultado.

Todo esto salió de suponer que los puntos s_0 y s_1 estaban afuera de t.

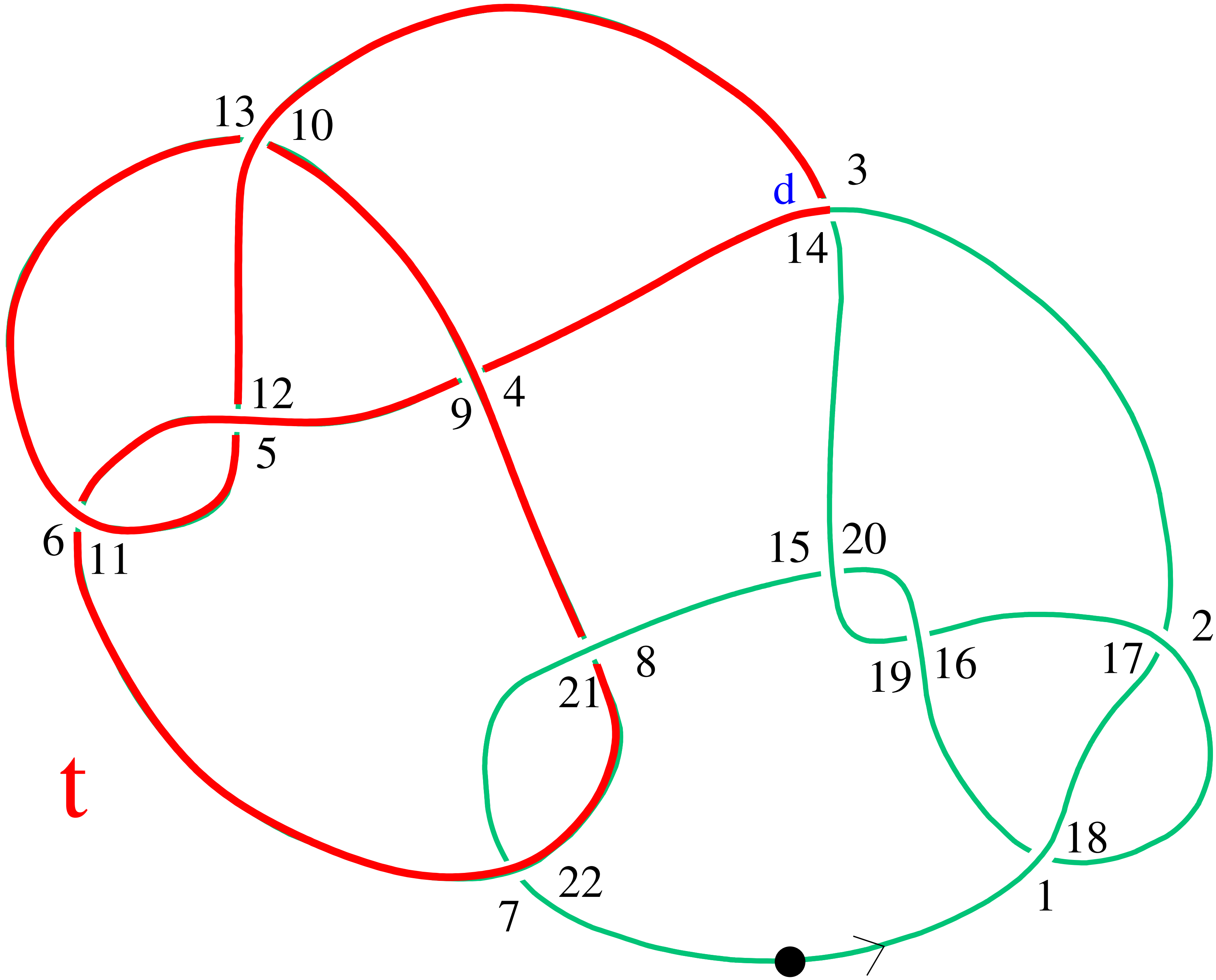
Pero podemos repetir el mismo razonamiento cuando s_0 y s_1 están adentro de t (sólo hay que cambiar "adentro" por "afuera" y "afuera" por "adentro").



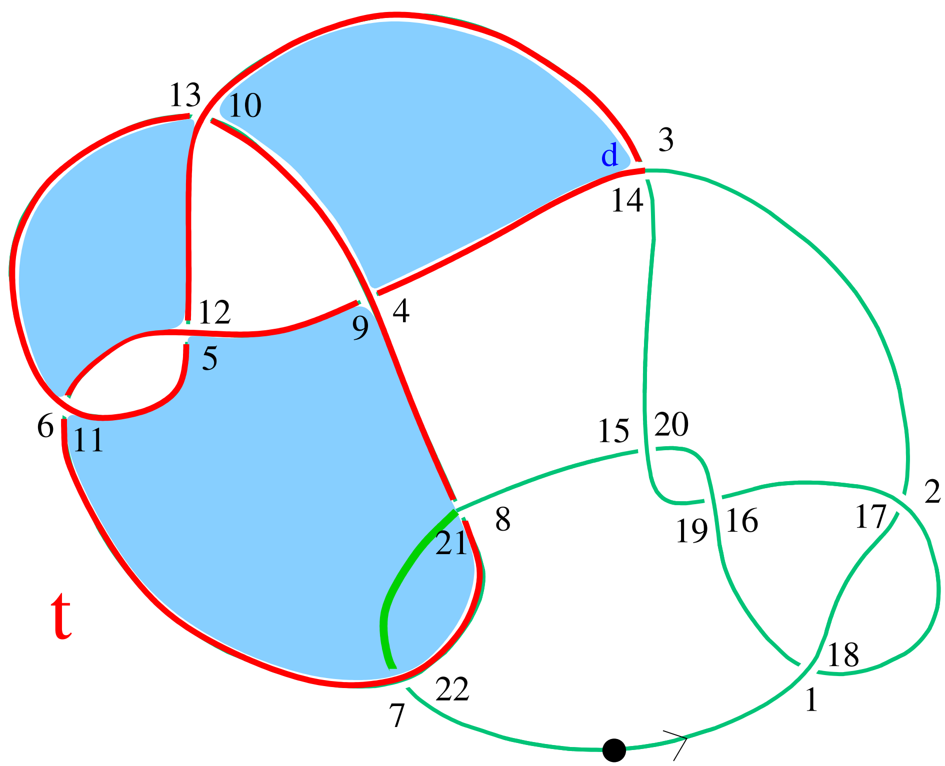
Ahora, estábamos en el caso de que t era una curva simple.

¿Qué pasa si t no es simple?

2do. caso: Supongamos que t no es una curva simple.



En este caso, si coloreamos el plano como tablero de ajedrez usando a t como las "casillas", vemos que t es unión de un número finito de curvas simples cerradas, $t_1, t_2, \ldots, t_m$, que se tocan en puntitos.



Estos puntitos son todos los puntos dobles de t y no tienen nada que ver con c.

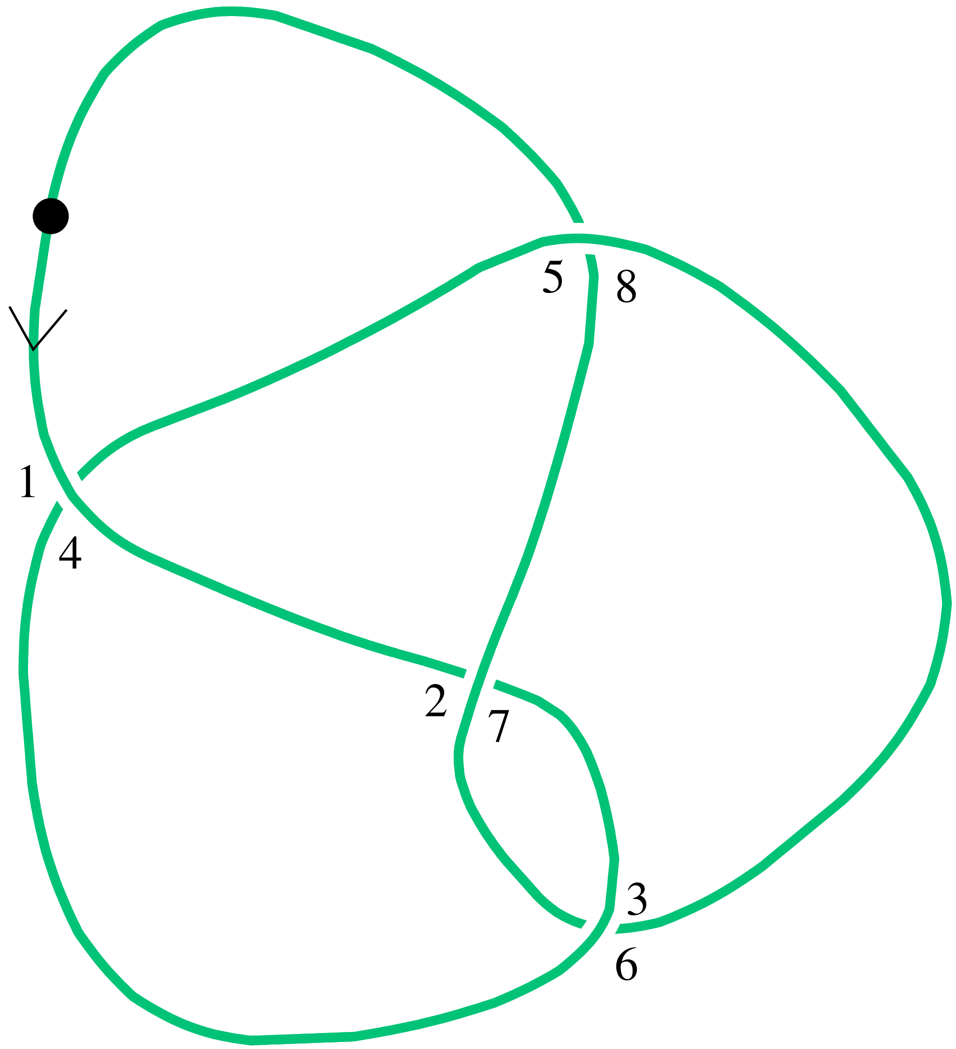
Por el caso anterior, cada una de estas curvas t_j se toca con c un número par de veces, así que, si sumamos, t se toca con c un número par de veces.

Para ir de x_i a $x_{a(i)}$ sobre t, debemos contar todos los puntos de intersección de t con c y hay que añadir un 2 por cada punto doble de t; en total, hay que pasar por un número par de puntos, más el punto de comienzo...

Concluimos que $a(i) = i + \text{un número par} + 1$.

Y, finalmente, tenemos que i es par y $a(i)$ es impar, o al revés, i es impar y $a(i)$ es par, que es lo que queríamos probar.

Entonces es cierto, al numerar un diagrama recorriendo al nudo, cada punto de cruce recibe dos números: uno es par y el otro es impar.



También ya sabemos que si cambiamos el punto base o si cambiamos la orientación del nudo, las sucesiones de números

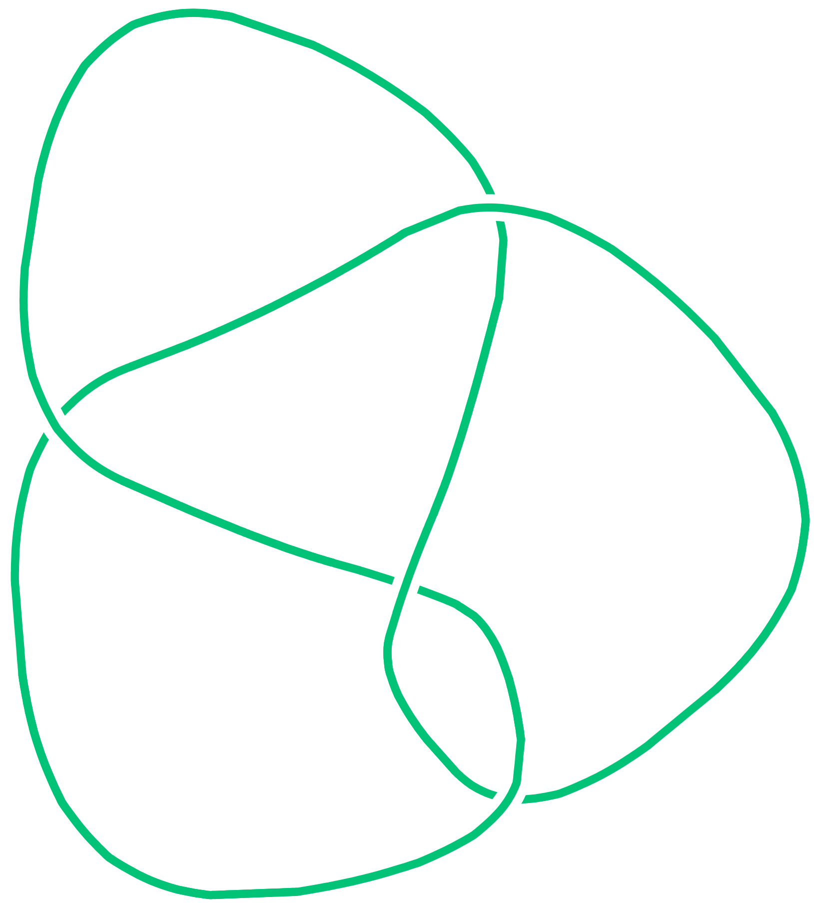
$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n} \end{array}$$

se obtienen unas de las otras sumando (o restando) en cada renglón un cierto número b.

Por la aritmética tan particular que tenemos, basta pensar que el número b está entre 1 y $2n$.

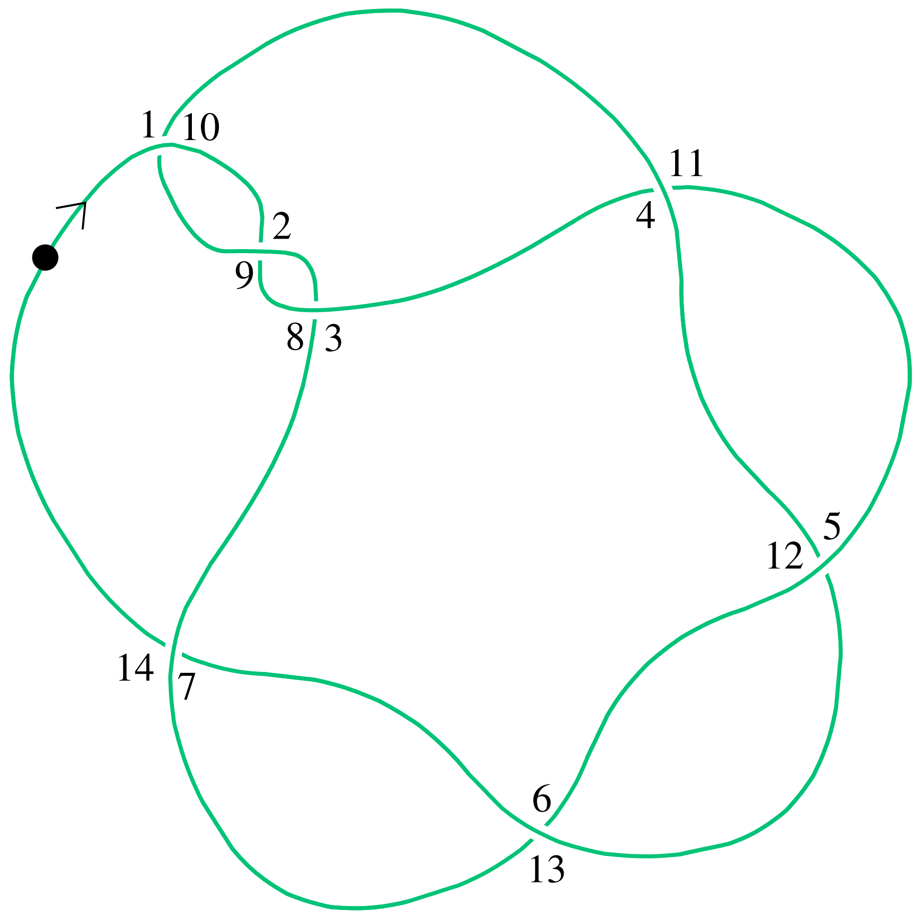
O sea que podemos construir $4n$ sucesiones distintas.

(lo que es claro si vemos el dibujo: Tenemos n cruces, así que podemos escoger $2n$ puntos base distintos. En cada uno de estos puntos base, podemos escoger dos orientaciones posibles. Podemos obtener $4n$ sucesiones, cuando mucho.)



De entre todas las sucesiones de un diagrama, podemos escoger la más chica con el orden del diccionario.

Por ejemplo



1	3	5	7	9	11	13
10	8	12	14	2	4	6

Todos los trasladados de su código son:

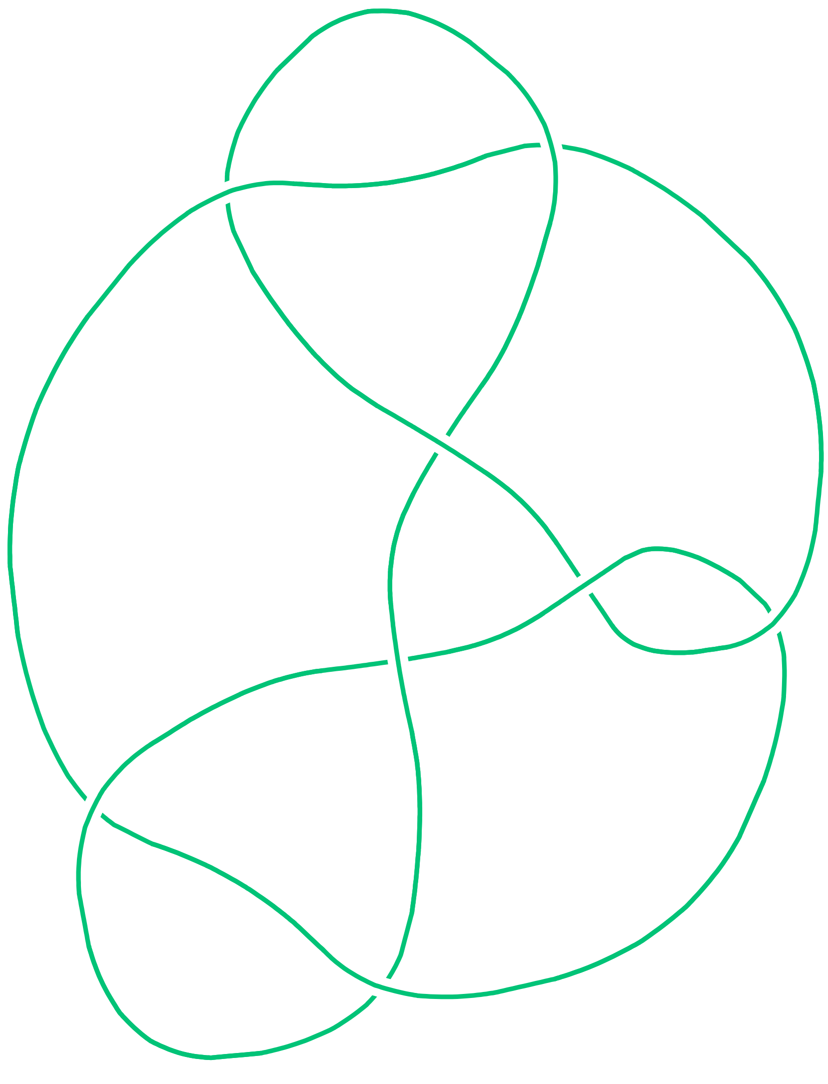
[10, 8, 12, 14, 2, 4, 6]
[8, 10, 14, 12, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 4, 2, 6]
[6, 10, 12, 14, 2, 4, 8]
[8, 12, 10, 14, 2, 4, 6]
[6, 10, 12, 14, 2, 4, 8]
[8, 12, 10, 14, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 2, 14, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 2, 6, 4]
[10, 8, 12, 14, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 2, 14, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 2, 6, 4]
[10, 8, 12, 14, 2, 4, 6]
[8, 10, 14, 12, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 4, 2, 6]
[8, 10, 14, 12, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 4, 2, 6]
[6, 10, 12, 14, 2, 4, 8]
[8, 12, 10, 14, 2, 4, 6]
[6, 10, 12, 14, 2, 4, 8]
[8, 12, 10, 14, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 2, 14, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 2, 6, 4]
[8, 10, 12, 2, 14, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 2, 6, 4]
[10, 8, 12, 14, 2, 4, 6]
[8, 10, 14, 12, 2, 4, 6]
[8, 10, 12, 14, 4, 2, 6]

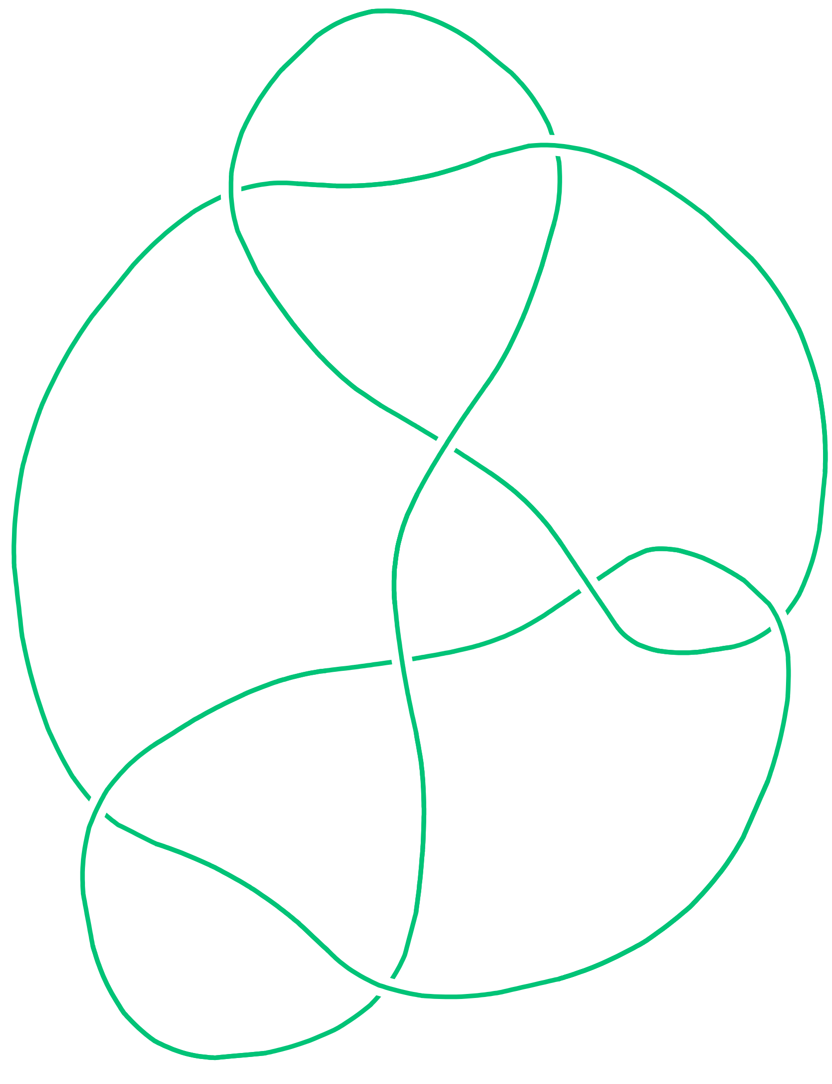
La sucesión más chica es

$$[6, 10, 12, 14, 2, 4, 8]$$

y ése es el código del nudo.

Nudos con la misma proyección





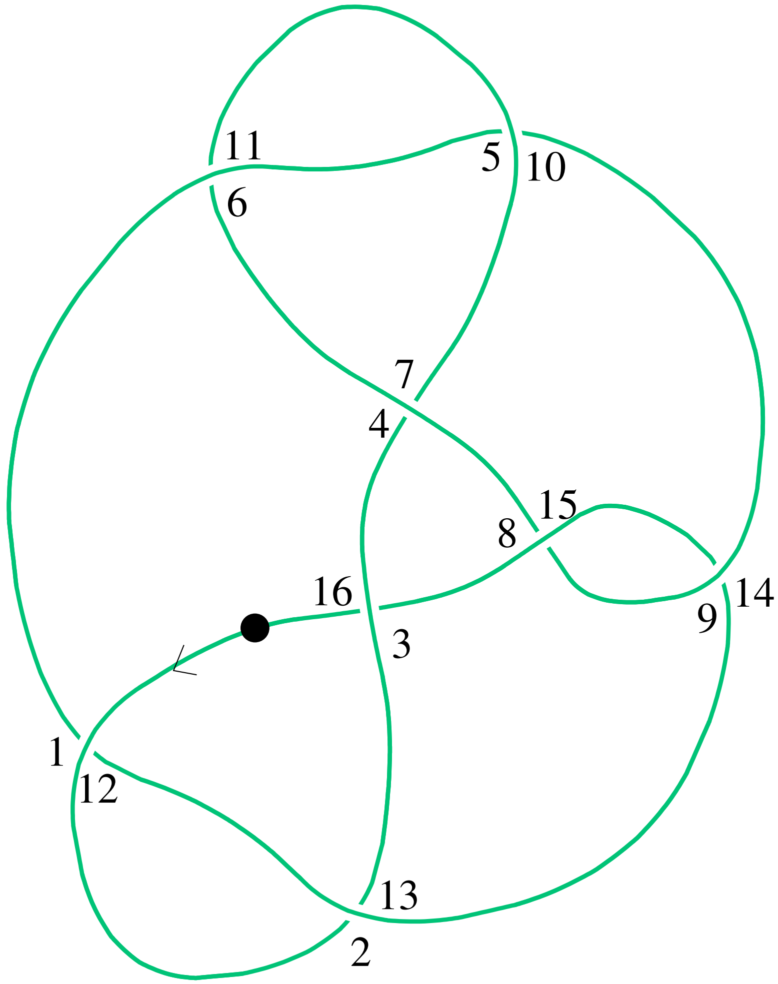
El primer nudo tiene polinomio

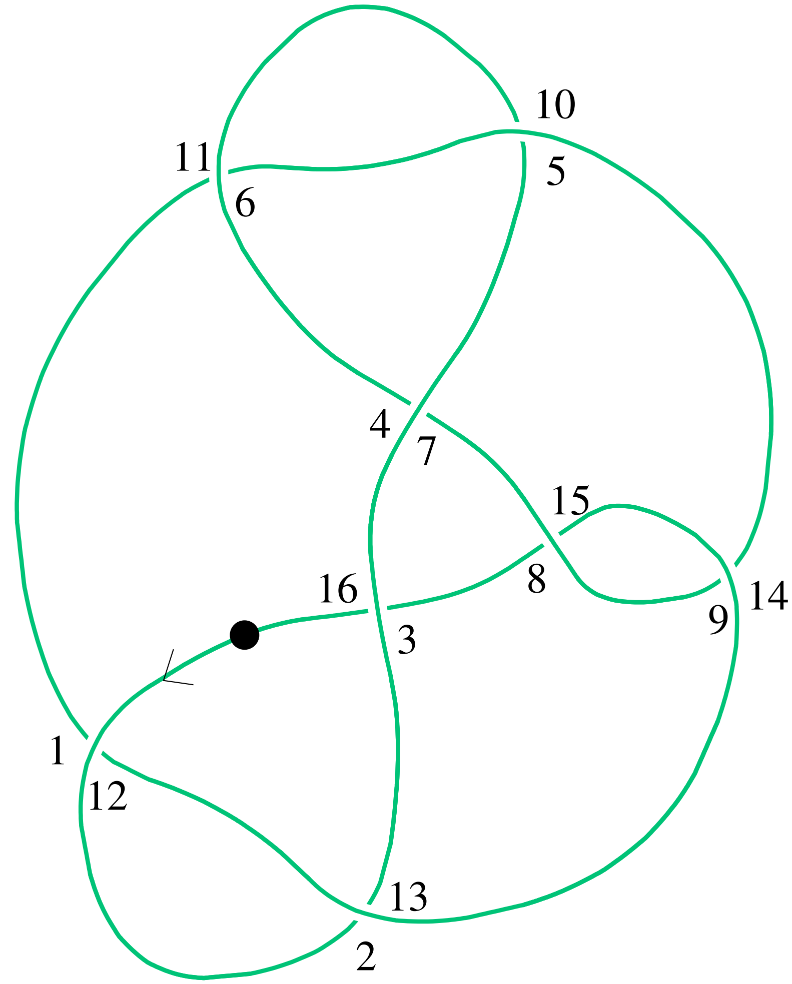
$$f(x) = x^{-8} - 2x^{-12} + 5x^{-16} - 5x^{-20} + 6x^{-24} - 6x^{-28} + 4x^{-32} - 3x^{-36} + x^{-40}$$

y el segundo

$$f(x) = -x^{20} + x^{16} - x^{12} + 2x^{8} - x^{4} + 2 - x^{-4}$$

No son el mismo nudo, pero...





1	3	5	7	9	11	13	15
12	16	10	4	14	6	2	8

1	3	5	7	9	11	13	15
12	16	10	4	14	6	2	8

Pues sí. Si tienen la misma proyección...

Se las puede arreglar uno e inventar códigos para nudos no alternantes.

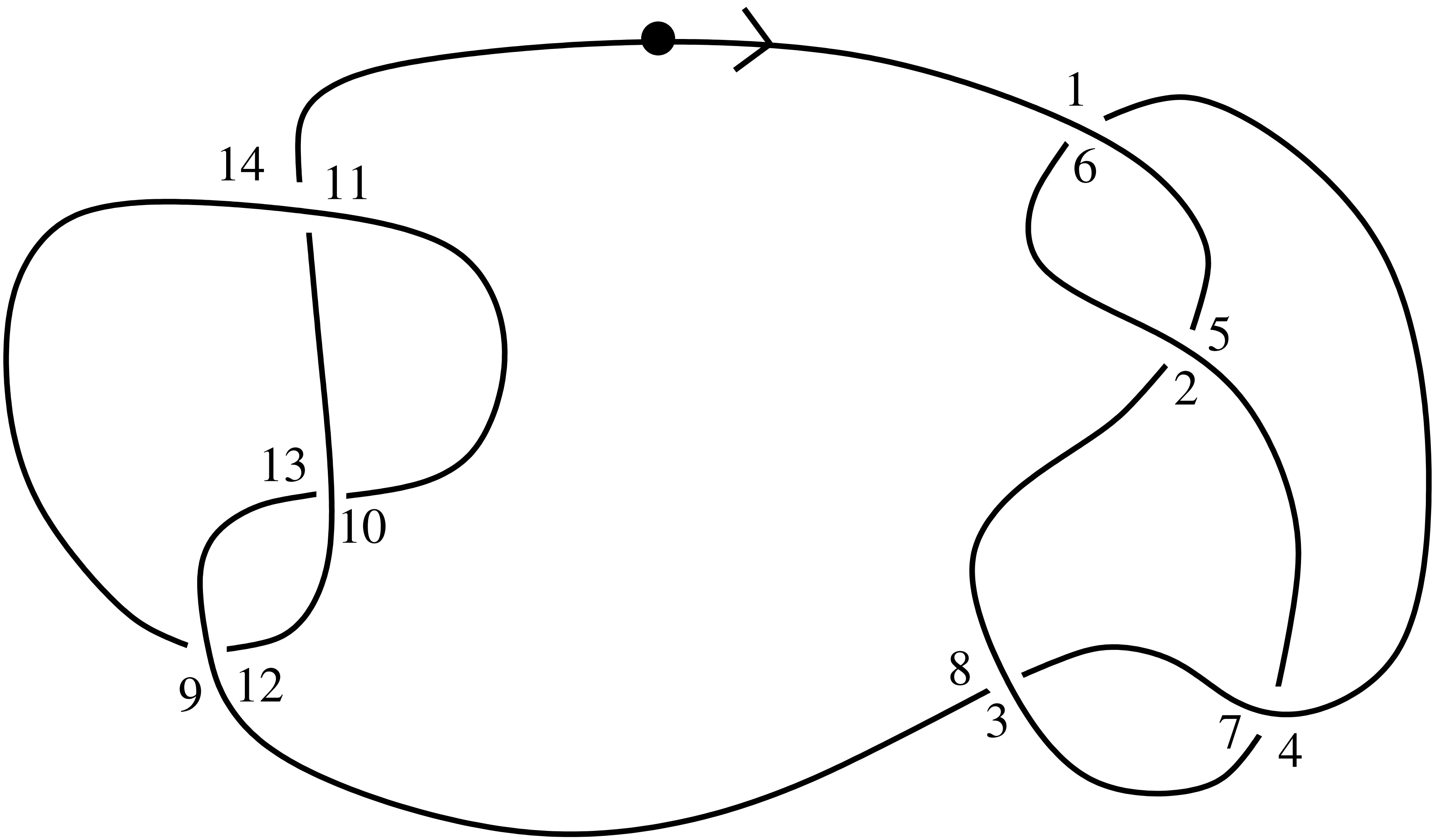
Pero para evitar complicaciones, vamos a pensar sólo en diagramas alternantes.

¿Sale?

Entonces cada diagrama alternante tiene un código, que es una sucesión de números pares.

Si el diagrama tiene n cruces, su código tiene n números pares que están entre 2 y $2n$.

ejemplo



1	3	5	7	9	11	13
6	8	2	4	12	14	10

ejemplo

12	1	4	8	10	14	2	16	20	6	22	12	24	18
12	2	4	8	10	14	2	16	20	6	22	24	12	18
12	3	4	8	10	14	2	16	20	6	24	22	12	18
12	4	4	8	10	14	2	18	6	20	22	12	24	16
12	5	4	8	10	14	2	18	6	22	12	24	16	20
12	6	4	8	10	14	2	18	6	22	20	12	24	16
12	7	4	8	10	14	2	18	20	6	22	24	16	12
12	8	4	8	10	14	2	20	6	22	24	12	18	16
12	9	4	8	10	14	2	20	6	24	22	12	18	16
12	10	4	8	10	14	2	20	16	6	22	12	24	18
12	11	4	8	10	14	2	20	16	6	22	24	12	18
12	12	4	8	10	14	2	20	16	6	24	22	12	18
12	13	4	8	10	14	2	20	18	6	22	24	16	12
12	14	4	8	10	14	2	20	22	6	12	24	16	18
12	15	4	8	10	14	2	22	20	6	12	24	16	18

ejemplo

$$16 \quad 8 \quad 4 \quad 10 \quad 2 \quad 6 \quad 12 \quad 14$$

$$10 \quad 8 \quad 14 \quad 16 \quad 6 \quad 4 \quad 12 \quad 2$$

¿Cómo sabemos si una sucesión corresponde a un nudo?

Respuesta fácil

Para saber si una sucesión de números pares corresponde a un diagrama de un nudo, pues hay que tratar de dibujarla.

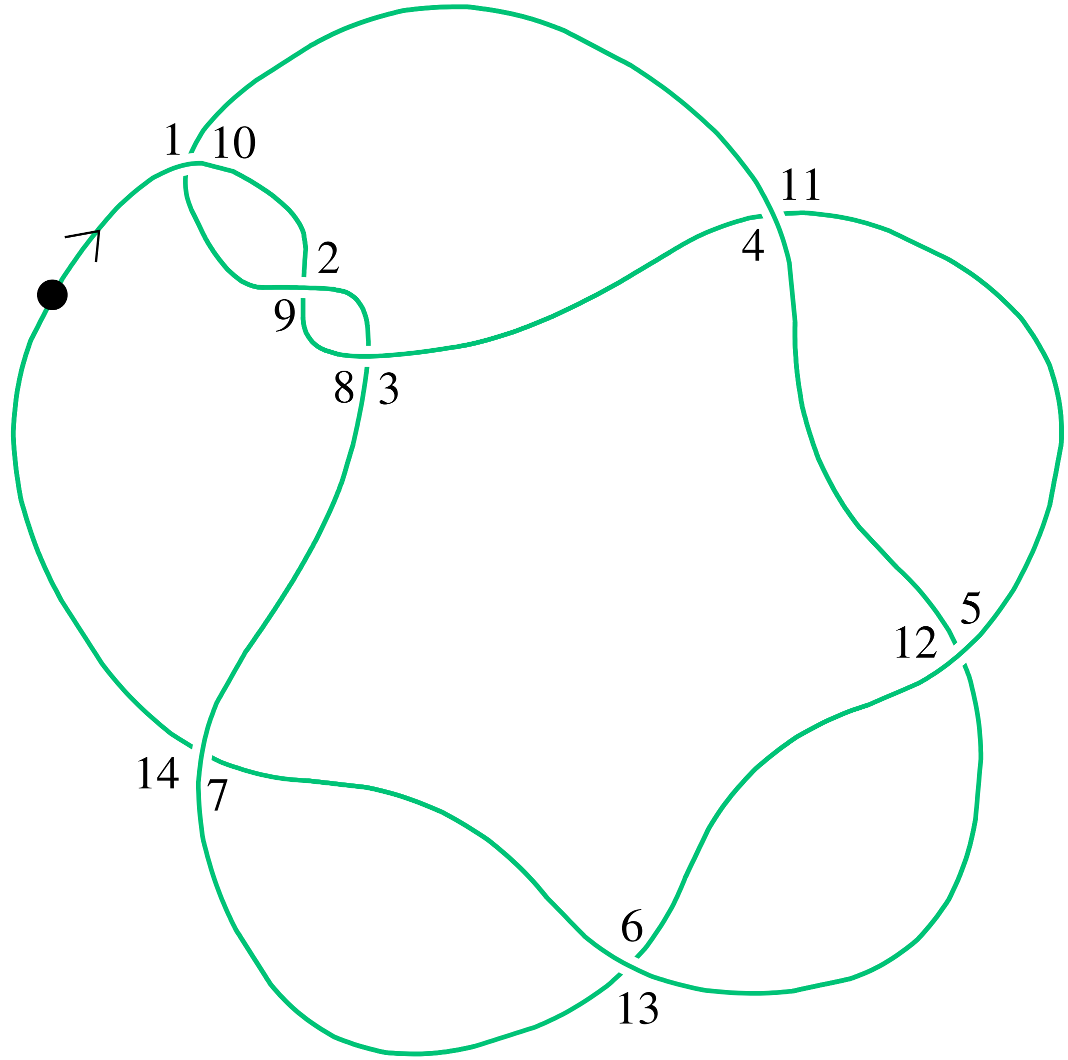
Si puedes dibujarla, la respuesta es sí.

Si no puedes dibujarla, la respuesta es no.

En la sucesión de un diagrama, si en un cruce tenemos al número i, al otro número j que aparece en ese cruce lo llamamos el acompañante de i.

Escribimos

$$j = \text{acompañante}(i) = a(i)$$



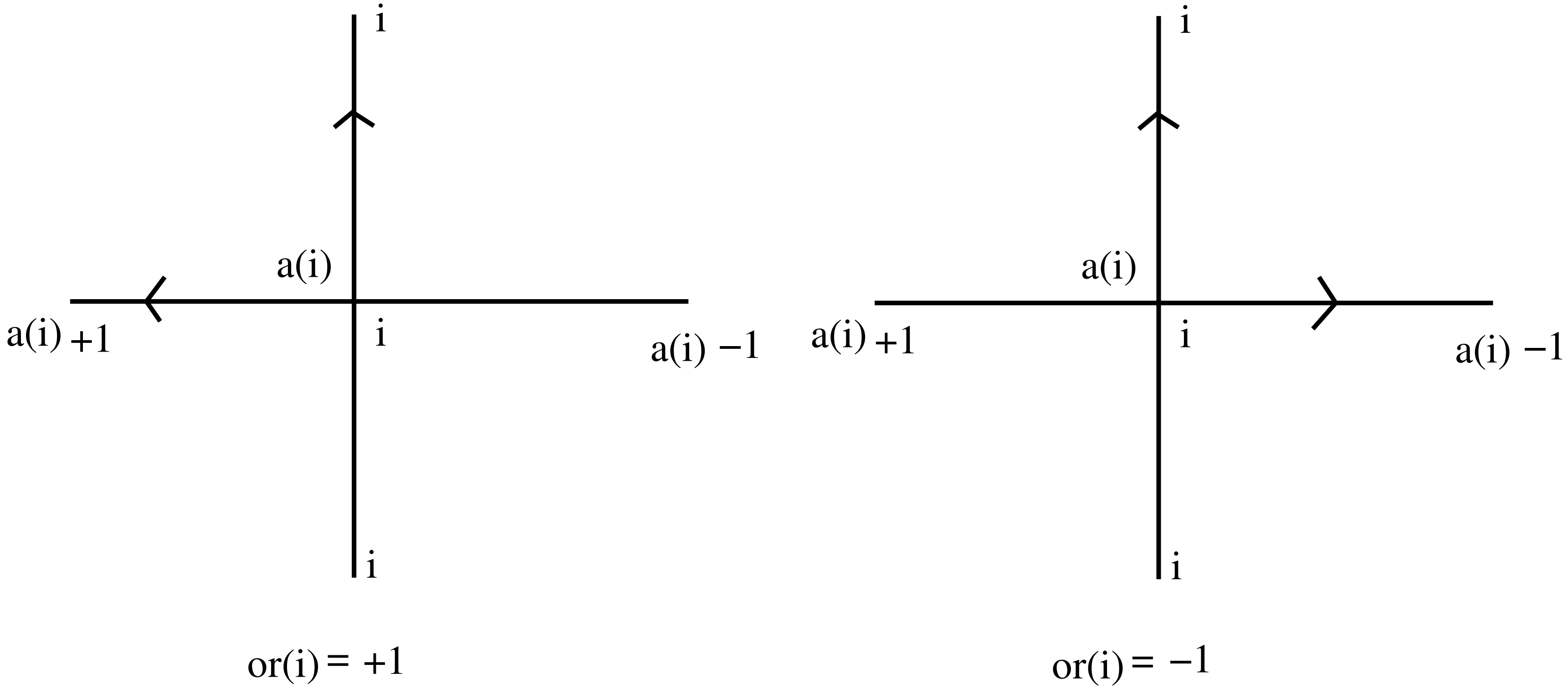
$a(1) = 10$, $a(2) = 9$, $a(3) = 8$, $a(4) = 11$, $a(5) = 12$, $a(6) = 13$, $a(7) = 14$,

$a(8) = 3$, $a(9) = 2$, $a(10) = 1$, $a(11) = 4$, $a(12) = 5$, $a(13) = 6$ y $a(14) = 7$.

Tomamos un diagrama orientado D con n cruces. Tomamos una i entre 1 y $2n$.

Escribimos $or(i) = 1$ si el arco que va de $a(i) - 1$ hacia $a(i) + 1$ cruza al arco de $i - 1$ hacia $i + 1$ de derecha a izquierda.

Escribimos $or(i) = -1$ en otro caso.



Ahora para cada i entre 1 y $2n$ escribimos

$$\varphi_i(i) = 1$$

$$\varphi_i(r) = \begin{cases} -\varphi_i(r-1) & \text{si } a_r \in \{i, i+1, \ldots, a(i)\} \\ \varphi_i(r-1) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(o sea, tenemos φ_1, φ_2, ..., φ_{2n}.)

Regla 2. Tomamos un diagrama D con una orientación or. Para todo $i, s \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tales que $i < a(i) < s$ y $a(s) < s$ se cumple

i) $\varphi_i(s)\varphi_i(a(s)) = 1$, si $a(s) \notin [i, a(i)]$.

ii) $\varphi_i(s)\varphi_i(a(s)) \cdot or(i) = or(s)$, si $a(s) \in [i, a(i)]$.

Teorema. (Dowker y Thistlethwaite) Dado un diagrama con orientación (D, or), una condición necesaria y suficiente para la realizabilidad del diagrama D es la Regla 2.