MATEMÁTICAS
Fractales como puntos fijos de contracciones

Luis Hernández Lamoneda

Julio, 1999.

1 Primera Lección

1.1 Sucesiones

Una *sucesión* es una lista infinita y ordenada de números reales. Es costumbre definir una sucesión mediante una receta (o función) que la especifique.

Ejemplos

1. $1, 2, 3, 4, \ldots$; o más brevemente, $a_n = n$.

2. Una sucesión no es simplemente un conjunto de números; en una sucesión existe un orden y las repeticiones de números son permitidas. Por ejemplo, la sucesión $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$ se forma con dos números (tambien podemos tener una sucesión constante $8, 8, 8, 8, \ldots$). Una regla para determinar esta sucesión es $b_n = (-1)^{n-1}$.

3. $c_n = \frac{1}{n}$, o más explícitamente, $c_1 = 1, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{3}, \ldots$.

4. Más ejemplos:

   - $\{d_n\}$ dada por $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots$.
   - $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, 1, \ldots$. Esta sucesión podría describirse como

   $$e_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{n+2} \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$$

   - La sucesión $\{y_n\}$ dada por

   $$y_1 = 3, y_2 = 3.1, y_3 = 3.14, y_4 = 3.141, y_5 = 3.1415, y_6 = 3.14159, \ldots.$$

5. Tomemos un número real r cualquiera, y definamos una sucesión mediante la siguiente fórmula.

   $$x_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n.$$

El término n-ésimo de la sucesión se obtiene del anterior sumándole a este la potencia n-ésima de r. Vamos a escribirlas para algunas elecciones de r:

- Si $r = 2$ obtenemos la sucesión $1, 3, 7, 15, \ldots, 2^n - 1, \ldots$.
- Para $r = 1/2$, nos queda
$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}, \ldots.$$
- Si $r = 1$ recuperamos la sucesión a_n dada en 1.
- Si $r = -1$, tendremos $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$.

Este tipo de sucesión se conoce como *serie geométrica de razón r*.

Como se ve, existen muchísimas sucesiones diferentes, las cuales aparecen de forma natural en muchos lugares de la ciencia. Para tratar de clasificarlas los matemáticos han dividido a las sucesiones en dos tipos diferentes: las sucesiones *convergentes* y las *divergentes*. Explicamos esta clasificación.

En muchos problemas donde aparecen las sucesiones el meollo es que pasa con los términos de esta para valores de n muy grandes, esto es, como se comporta la cola de la sucesión (la sucesión completa salvo un número finito de sus términos).

DEFINICIÓN 1 *Una sucesión $\{a_n\}$* **converge** *a x, si sus colas se aproximan cada vez más a x. La notación para esto es $a_n \to x$ y decimos que x es el* **límite** *de la sucesión $\{a_n\}$.*

Si una sucesión no converge a ningún número real, diremos entonces que la sucesión **diverge**.

OJO 1 *La definición formal de convergencia es la siguiente. $a_n \to x$ si todo intervalo $(x - r, x + r)$, $r > 0$, contiene a todas las a_n salvo un número finito de ellas.*

Analicemos desde este punto de vista los ejemplos anteriores.

1. $1, 2, 3, \ldots$ diverge, pues sus colas se alejan de todo número (se van "al infinito").

2. $1, -1, 1, -1, \ldots$ también diverge (aunque por razones distintas de la anterior), sus términos no se deciden si acercarse al 1 o al -1. Nota que convergencia requiere que toda la cola este cerca de un número y no solamente una infinidad de sus términos.

   La sucesión $8, 8, 8, 8, \ldots$ claramente converge a 8. Lo mismo le sucede a la sucesión $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, \ldots$.

3. $c_n \to 0$ parece claro.

4. d_n diverge, pues mientras la mitad de sus términos se van a cero la otra mitad marcha felizmente hacia ∞.

5. La sucesión e_n converge a 1. Observa que para que haya convergencia no es necesario que la sucesión crezca o decrezca monótonamente. Los términos de e_n brincan para delante y para atrás, pero acercándose inexorablemente a un límite.

6. Imaginemos que la sucesión y_n se define como las n primeras cifras decimales de π, entonces es claro que $y_n \to \pi$. Este ejemplo nos muestra que una sucesión de números racionales (fracciones) puede converger a un número que no es racional. De hecho, uno puede pensar que los números reales se crean como los límites de sucesiones de números racionales; esto es, los reales vienen a tapar los agujeros que tienen los números racionales.

7. La convergencia de las series geométricas se analiza en el siguiente teorema.

TEOREMA 1 *La serie geométrica $x_n = 1+r+r^2+\cdots+r^n$ diverge si $|r| \geq 1$. Si $|r| < 1$ la serie converge a $\frac{1}{1-r}$. Esto es, si $|r| < 1$ podemos escribir*

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}.$$

Demostración. Si $r = \pm 1$, la sucesión diverge (en un caso es $1, 2, 3, \ldots$, en el otro $1, 0, 1, 0, \ldots$). Supongamos en lo que sigue que $r \neq \pm 1$.

Observa que podemos escribir $x_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ (simplemente multiplica x_n por $1-r$ y todos los sumandos se cancelan con excepción del primero y el último).

Ahora, si $|r| < 1$ entonces $r^n \to 0$. Esto es intuitivamente claro, sin embargo al final se da una prueba para el que esté interesado. Suponiendo esto, terminamos la demostración,

$$x_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r} \to \frac{1}{1-r} - \frac{0}{1-r} = \frac{1}{1-r}.$$

Una manera de probar que $r^n \to 0$ consiste en tomar una fracción $p/p+1$ tal que $|r| \leq \frac{p}{p+1} < 1$. Vemos que $0 \leq |r|^n \leq \left(\frac{p}{p+1}\right)^n$, por lo que basta probar que $\left(\frac{p}{p+1}\right)^n \to 0$. La siguiente cadena de desigualdades nos da la clave,

$$\left(\frac{p}{p+1}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{p}}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{n}{p}+\cdots+\frac{1}{p^n}} < \frac{p}{n};$$

pero sabemos que $\frac{1}{n} \to 0$, luego $\frac{p}{n} \to 0$, $\left(\frac{p}{p+1}\right)^n \to 0$ y finalmente $r^n \to 0$. ∎

Ejemplo. Considera el número $x = .999999\cdots$. Si tomamos $r = \frac{1}{10}$, podemos escribir

$$x = \frac{9}{10} \cdot (1.111111 \cdots) = \frac{9}{10} \cdot (1+r+r^2+r^3+\cdots) = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{1-r}\right) = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = 1.$$

La conclusión es que $.9999 \cdots = 1$ y nos muestra que la representación decimal de un número racional no es única.

En la demostración del teorema anterior se usaron implícitamente algunas propiedades básicas de las sucesiones. Aprovecho para señalarlas.

LEMA 1 *Supongamos que $a_n \to x$ y $b_n \to y$. Entonces*

i. $a_n + b_n \to x + y$

ii. $a_n b_n \to xy$.

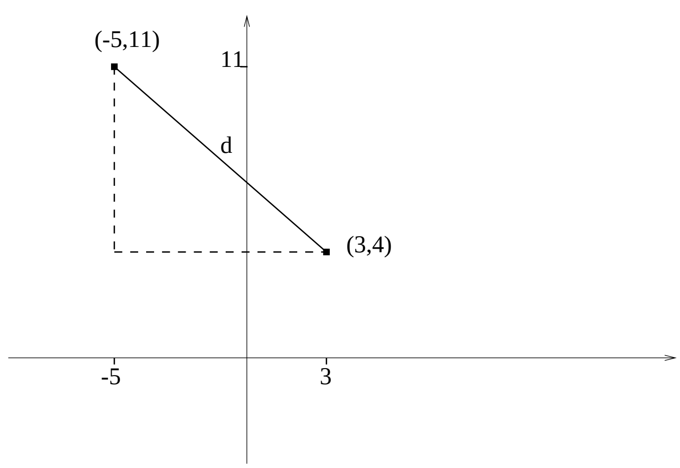
iii. *Si $y \neq 0$ y $b_n \neq 0$,* $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{x}{y}$.

1.2 El plano euclidiano

El plano cartesiano es el conjunto de parejas ordenadas de números reales. Tiene la representación geométrica familiar como plano coordenado. El símbolo que denota al plano es $\mathbb{R}^2$.

En el plano podemos medir distancias; por ejemplo, si queremos saber que distancia d separa a los puntos $(3, 4)$ y $(-5, 11)$, basta utilizar la fórmula que da el Teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(3-(-5))^2 + (4-11)^2} = \sqrt{64+49} = \sqrt{113}.$$



En general, la distancia entre los puntos $p_1 = (x_1, y_1)$ y $p_2 = (x_2, y_2)$ esta dada por

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

DEFINICIÓN 2 *Dados un punto $p = (a, b)$ y un número positivo r, el disco de radio r y centro en p, $D_r(p)$, se define como el conjunto de todos los puntos del plano que distan a lo más r de p.*

$$D_r(p) = \left\{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\right\}.$$

1.3 Transformaciones.

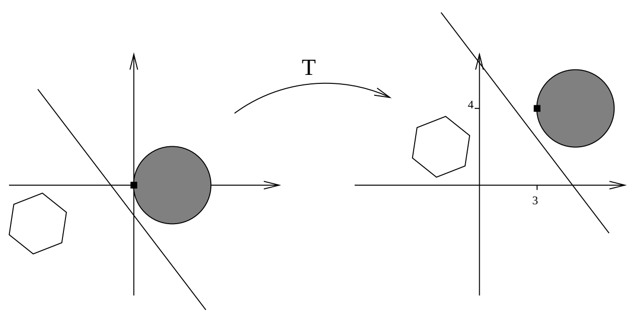
Una transformación (o función) es una regla (o una correspondencia) que nos dice como asociarle a cada punto del plano otro punto: si T es una transformación, entonces a cada punto (x, y) en el plano, el punto asociado se denota por $T(x, y)$.

Ejemplos.

- Las transformaciones constantes: $T(x, y) = (a, b)$, envía todo el plano sobre el punto (a, b).

- La identidad: $I(x, y) = (x, y)$; esta es la transformación que no mueve a nadie.

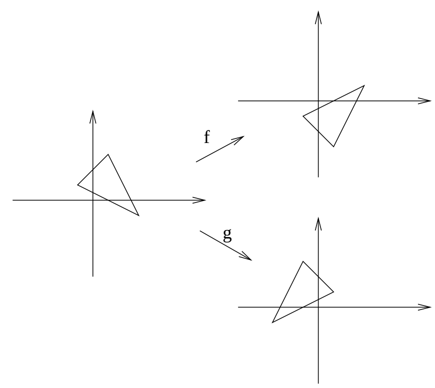
- Las traslaciones son las transformaciones del tipo $T(x, y) = (x, y) + (a, b)$, con (a, b) un punto cualquiera.



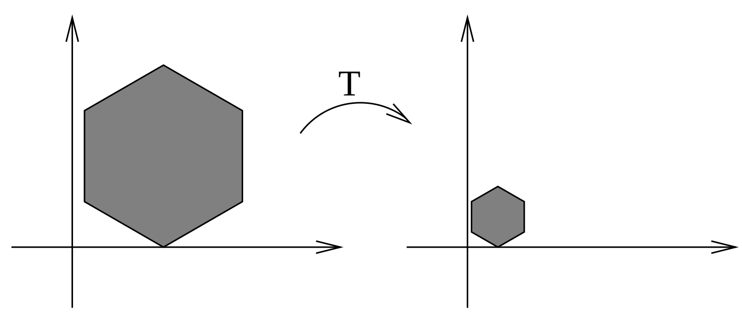
La traslación $T(x, y) = (x, y) + (3, 4)$.

OJO 2 *Observa que las traslaciones preservan distancia; esto es, la distancia que separa a (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es la misma que hay entre $T(x_1, y_1)$ y $T(x_2, y_2)$.*

- Las reflexiones con respecto a los ejes coordenados: $f(x, y) = (x, -y)$ la reflexión con respecto al eje x y $g(x, y) = (-x, y)$ la que refleja fijando al eje y.

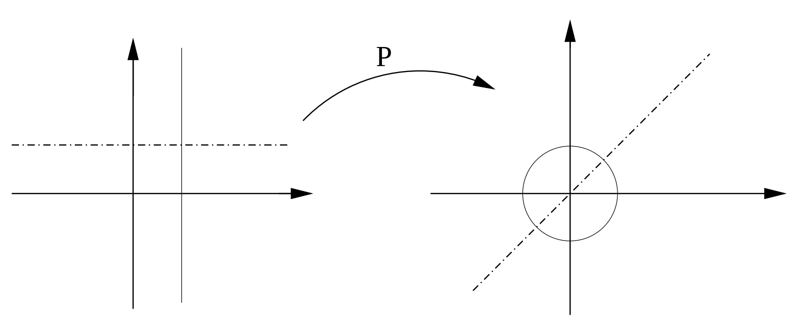


- Las homotecias: $T(x,y) = s(x,y) = (sx, sy)$ $s \geq 0$; estas simplemente estiran o contraen (dependiendo si $s > 1$ o $s < 1$) uniformemente todos los subconjuntos del plano.



$T(x,y) = \frac{1}{3}(x,y)$

- La transformación de coordenadas polares: $P(x,y) = (x\cos(y), x\sin(y))$. Esta transformación envía rectas verticales en círculos con centro en el origen, y a rectas horizontales en rectas por el origen.



La transformación $P(x,y) = (x\cos(y), x\sin(y))$.

- Existen infinidades de transformaciones, en su mayoría mucho más complicadas que los ejemplos anteriores. Una parte sustancial de los esfuerzos de muchos matemáticos (pasados y presentes) ha sido el tratar de comprender la maraña de transformaciones existentes, clasificándolas de acuerdo a propiedades generales y estudiando las familias más interesantes (o más sencillas) de ellas.

Si S es un subconjunto del plano y T una transformación, aplicando esta a cada punto de S obtenemos un nuevo conjunto (el transformado de S) que denotaremos por $T(S)$ y que llamaremos *la imagen de S bajo T*.

EJERCICIO 1 *Sea Δ el triángulo con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, dibuja la imagen de Δ bajo P.*

Hay varias operaciones básicas que podemos realizar entre transformaciones. Podemos sumarlas, multiplicarlas por un número real cualquiera y de esa forma construir nuevos ejemplos. Existe otra operación que será muy importante en estas notas, la composición.

DEFINICIÓN 3 *Si S y T son dos transformaciones del plano, la composición $T \circ S$ es la transformación que consiste en aplicar primero S y al resultado transformarlo con T. En símbolos*

$$(T \circ S)(x, y) = T(S(x, y)).$$

¡Observa que aunque escribimos primero T y luego S, el orden en el que se aplican es el contrario!

2 Segunda Lección

2.1 Transformaciones lineales

Una familia muy importante de transformaciones del plano son las llamadas *lineales*. La propiedad básica que tienen estas transformaciones es que la imagen de cualquier linea recta es otra vez una recta o un punto.

Una matriz de 2×2 es un arreglo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con a, b, c y d números reales. Toda matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ determina una transformación del plano, que también llamaremos A, mediante la regla

$$A(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

DEFINICIÓN 4 *Las transformaciones así definidas se llaman transformaciones lineales.*

Ejemplos

- La transformación lineal definida por $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la transformación identidad I definida arriba.

- Observa que si A es una transformación lineal, entonces $A(0,0) = (0,0)$. En particular, la única transformación lineal constante es la transformación $Z(x,y) = (0,0)$ cuya matriz es la matriz cero:

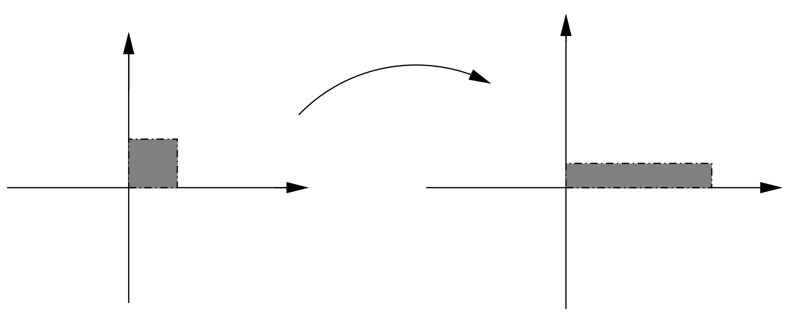
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Una matriz diagonal es una de la forma

$$\Lambda = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Da lugar a la transformación $\Lambda(x,y) = (rx, sy)$. Si $r = s > 0$ obtenemos una homotecia. Las reflexiones con respecto a los ejes coordenados también son ejemplos de transformaciones lineales diagonales.

OJO 3 *Observa como transforma* Λ *al cuadrado* $[0,1] \times [0,1]$ *y más generalmente a cualquier rectángulo del plano.*



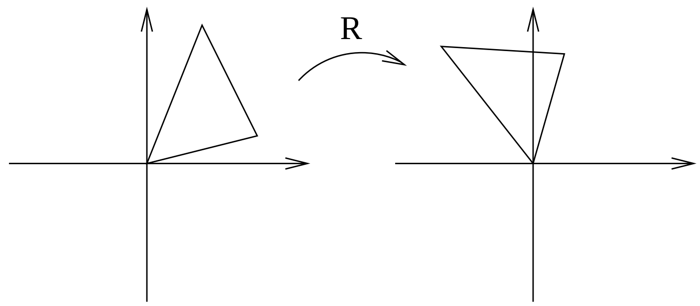
La imagen bajo $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ *del cuadrado unidad.*

- La matriz

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

determina la rotación alrededor del origen en un ángulo θ en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

$$R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta).$$



R_{60°

OJO 4 *Las rotaciones R_θ y las reflexiones con respecto a los ejes coordenados preservan distancia.*

Las transformaciones lineales pueden caracterizarse por medio de dos sencillas propiedades, son el equivalente algebraico de la propiedad de enviar rectas en rectas.

TEOREMA 2 *Sea A una transformación lineal. Entonces*

i. $A(p+q) = A(p) + A(q)$, *para cualesquiera* $p, q \in \mathbb{R}^2$.

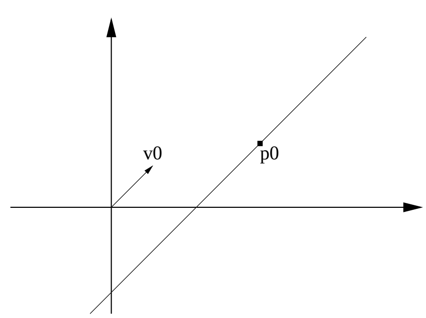
ii. $A(tp) = tA(p)$, *para cualquier* $p \in \mathbb{R}^2$ *y todo número* $t \in \mathbb{R}$.

En particular, si $l \subset \mathbb{R}^2$ es una recta entonces $A(l)$ es una recta o un punto.

Demostración. Las propiedades i. y ii. se comprueban con un cálculo directo. Mostremos la última afirmación.

Una linea recta l es un conjunto de la forma

$l = \{p_0 + tv_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$ (la recta que pasa por p_0 en la dirección de v_0)



Por ello, su imagen bajo A será el conjunto

$$\begin{aligned} A(l) = & \ \{A(p_0 + tv_0) \mid t \in \mathbb{R}\} \\ = & \ \{A(p_0) + tA(v_0) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Así que $A(l)$ es la recta que pasa por $A(p_0)$ en la dirección de $A(v_0)$; $A(l)$ es un punto o una recta dependiendo de si $A(v_0)$ es $(0,0)$ o no. ∎

OJO 5 *Sea* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; *observa que* $A(1,0) = (a,c)$ *y* $A(0,1) = (b,d)$, *luego el eje de las* x *es transformado en la recta que pasa por* (a,c) *y* $(0,0)$ *(o en el origen si* $(a,c) = (0,0)$*) y de la misma forma el eje de las* y *es enviado en la recta por* (b,d) *(y el origen). El triángulo* Δ_0 *con vértices en* $(0,0)$, $(1,0)$ *y* $(0,1)$ *es transformado en el triángulo con vértices* $(0,0)$, (a,c) *y* (b,d).

EJERCICIO 2 *Considera las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Describe como transforman distintos subconjuntos del plano; en particular los ejes coordenados y el triángulo* Δ_0 *con vértices en* $(0,0)$, $(1,0)$ *y* $(0,1)$.

2.2 Multiplicación de matrices

Las matrices pueden ser sumadas, multiplicadas por números y, como veremos, multiplicadas entre sí. La suma de dos matrices corresponde a la suma de transformaciones lineales, la multiplicación de una matriz por un número corresponde a la multiplicación del mismo número por la transformación lineal correspondiente y , finalmente, la multiplicación de matrices va a corresponder a la composición de transformaciones lineales. Explicamos.

Tomemos dos matrices $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Cada una determina (o es, si se quiere) una transformación lineal como se explicó en la sección anterior. Podemos formar la composición $B \circ A$ de estas transformaciones. Resulta que esta composición es a su vez una transformación lineal, y que la matriz, C, que la define se obtiene mediante una multiplicación extraña de B con A. A saber

TEOREMA 3 *Sean* $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ *dos matrices reales.*

La composición $B \circ A$ *de las transformaciones lineales correspondientes, es la transformación lineal* C *asociada a la matriz*

$$C = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_3b_2 & a_2b_1 + a_4b_2 \\ a_1b_3 + a_3b_4 & a_2b_3 + a_4b_4 \end{pmatrix}.$$

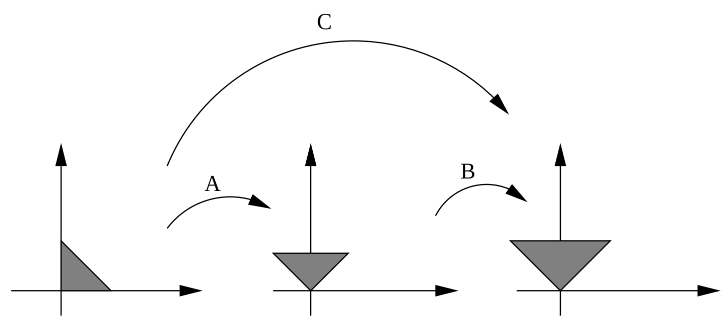
Las entradas de C se obtienen multiplicando, coordenada a coordenada, cada columna de A por un renglón de B y sumando ambos números; las cuatro posibilidades dan las cuatro entradas de C.

La prueba de este resultado no es difícil, pero requiere de ciertos preparativos. La omitimos por falta de tiempo y con la certeza de que el lector la encontrará más adelante en sus estudios.

Ejemplo. Considera la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Para entender como transforma al plano, observamos que

$$\begin{aligned} C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \circ R_{\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Vemos que C rota $45°$ y luego agranda por un factor de $\sqrt{2}$.



$$C = BA,\ B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = R_{\frac{\pi}{4}}.$$

Este ejemplo ilustra bien uno de los principales problemas en álgebra lineal; a saber, el problema de descomponer una matriz dada como producto de matrices más sencillas; o equivalentemente, el de entender como una matriz transforma el plano através de la acción de matrices más sencillas. Cabe señalar que este problema está satisfactoriamente resuelto y su solución es uno de los resultados fundamentales de las matemáticas.

DEFINICIÓN 5 *Dada una transformación T del plano (no necesariamente lineal) decimos que es invertible con inversa S, si $T \circ S = I$ y $S \circ T = I$, donde I es la transformación identidad.*

La inversa de una transformación deshace lo que esta ha hecho. No toda transformación tiene inversa (ni siquiera una lineal); por ejemplo, una transformación constante no posee una inversa.

EJERCICIO 3 *1. Sea $T(x,y) = (x,y) + (e,f)$ una traslación cualquiera. Prueba que T es invertible y que su inversa es la traslación*

$$S(x,y) = (x,y) - (e,f).$$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $ad - bc \neq 0$ define

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

Muestra que A^{-1} es la inversa de A.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, el número $ad - bc$ se llama *el determinante* de A (escribimos $\det A$).

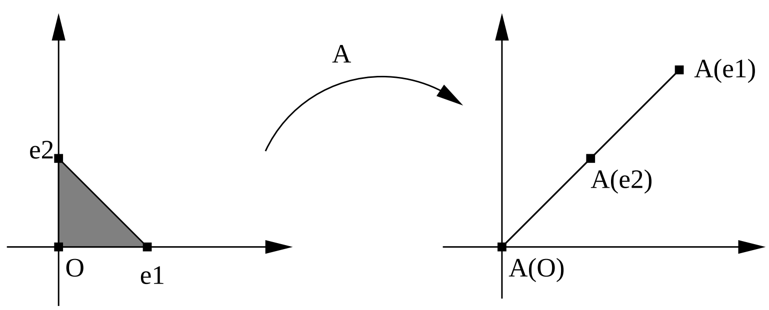
OJO 6 *Un resultado de álgebra lineal asegura que el recíproco del ejercicio anterior también es cierto. Por lo tanto, una transformación lineal posee una inversa sí y solo sí su determinante es distinto de cero.*

El determinante de una transformación lineal tiene una interpretación geométrica.

TEOREMA 4 *Sea A una transformación lineal y sea Δ un triángulo cualquiera. Entonces*

$$|\det A| = \frac{\textit{área } (A(\Delta))}{\textit{área } (\Delta)}.$$

Si $\det A = 0$, $A(\Delta)$ es un triángulo degenerado, esto es, apachurrado.



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \det A = 0 \Rightarrow A(\Delta) \text{ es degenerado.}$$

2.3 Transformaciones afines.

Si componemos una transformación lineal con una traslación obtenemos lo que se llama una transformación afín. Son las transformaciones de la forma

$$T(x,y) = A(x,y) + (e,f).$$

Las transformaciones afines también mandan rectas en rectas, su única diferencia con las lineales es que las afines no necesariamente fijan al origen. El siguiente resultado nos será útil más adelante cuando busquemos aproximaciones fractales a imágenes dadas.

TEOREMA 5 *Dados dos triángulos (con área no cero) Δ y $\widehat{\Delta}$ en el plano, existe una transformación afín T tal que $T(\Delta) = \widehat{\Delta}$.*

Demostración. Supongamos que ambos triángulos tienen un vértice en el origen $(0,0)$. Digamos que los vértices de Δ son los puntos $(0,0)$, (a,c) y (b,d) y los de $\widehat{\Delta}$ los puntos $(0,0)$, $(\hat{a},\hat{c})$ y $(\hat{b},\hat{d})$. Consideremos un tercer triángulo, Δ_0, con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Definimos dos matrices A y $\widehat{A}$ como

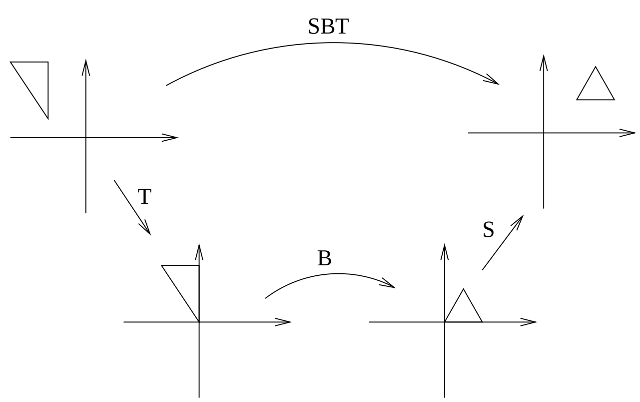
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \widehat{A} = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{c} & \hat{d} \end{pmatrix}.$$

Como se observó en un OJO anterior, $A(\Delta_0) = \Delta$ y $\widehat{A}(\Delta_0) = \widehat{\Delta}$. Sabemos que el determinante de A es la mitad del área de Δ, y por lo tanto no cero. Luego existe la inversa A^{-1}, que en particular satisface que $A^{-1}(\Delta) = \Delta_0$. Luego la transformación lineal $B = \widehat{A} \circ A^{-1}$ manda al triángulo Δ en el $\widehat{\Delta}$.

Finalmente, si Δ y $\widehat{\Delta}$ son dos triángulos de área no cero colocados en cualquier lugar del plano, tomemos una traslación T que traslade un vértice cualquiera de Δ al origen. Si $\widehat{T}$ es otra traslación que manda un vértice cualquiera de $\widehat{\Delta}$ al origen, entonces una transformación afín del tipo

$$(\widehat{T})^{-1} \circ B \circ T$$

con B como arriba mueve un triángulo en el otro.



$$S = (\widehat{T})^{-1}$$

$\blacksquare$

Observa que en la prueba solamente se necesita que Δ tenga área distinta de cero, así que podemos transformar un triángulo de área no cero en otro de área cero. Sin embargo al revés no es posible (un triángulo degenerado es parte de una recta o es un punto, su imagen bajo una transformación afín queda, por fuerza, contenida en una recta).

OJO 7 *Nota que la demostración del teorema anterior es constructiva; nos da un método explícito para encontrar la transformación afín a partir de las coordenadas de los vértices de los triángulos en cuestión.*

3 Tercera Lección

3.1 El espacio de Hausdorff

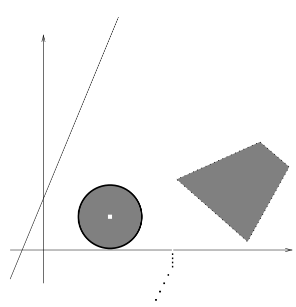
En esta lección las cosas se ponen más abstractas, aún así, en muchos lugares podremos todavía usar nuestra intuición o apoyarnos en diagramas para entender que está pasando.

DEFINICIÓN 6 *Un* **fractal** *es un subconjunto, no vacío, K que satisface dos propiedades*

- *K es acotado; esto es, K queda contenido dentro de algún disco en el plano.*
- *K es cerrado. Esto quiere decir que si tomamos una sucesión $\{k_n\}$ de puntos en K tal que $k_n \to z$, entonces, necesariamente, z pertenece también a K.*

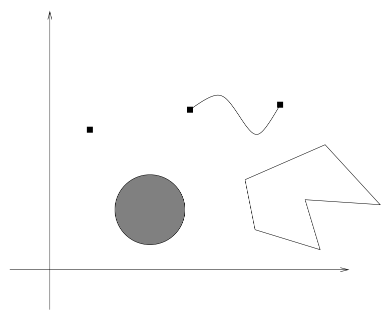
A este tipo de conjuntos (los fractales) suele llamárseles, en Topología, **compactos**. El nombre de fractal parece venir del hecho de que algunos de los ejemplos más singulares (que veremos más adelante) poseen dimensión fraccionaria (ver Apéndice para una discusión sobre ello).

Ejemplos.



No fractales: una recta, un disco agujereado, una sucesión sin su límite, un polígono sin su frontera, etc.

Una recta no queda contenida en ningún disco (no es acotada), al centro de un disco podemos converger con puntos del disco agujereado, lo mismo pasa para la sucesión y para el polígono sin su frontera (ninguno de ellos es cerrado).

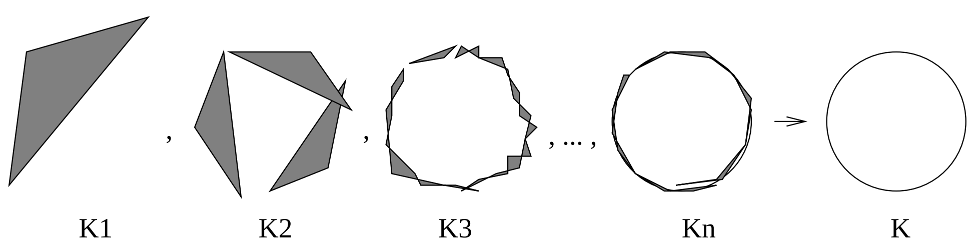


Fractales: un punto, un disco, un arco, la frontera de un polígono, etc.

DEFINICIÓN 7 *El espacio de Hausdorff es el conjunto*

$$\mathcal{H} = \{K \subset \mathbb{R}^2 \mid K \ \textit{es un fractal}\}.$$

El espacio de Hausdorff es el conjunto que agrupa a todos los subconjuntos cerrados y acotados del plano; por ejemplo, contiene a todos los puntos del plano, a todos los discos de todos los radios y todos los centros, a todos los polígonos, elipses, etc. Veremos también que contiene a otros objetos, más extraños y de formas más caprichosas; uno de los objetivos del curso será encontrar (construirlos a pie) ejemplos de estos fractales menos conocidos.
Podemos concebir en $\mathcal{H}$ sucesiones de puntos (sucesiones de fractales) $K_1, K_2, K_3, \ldots$.

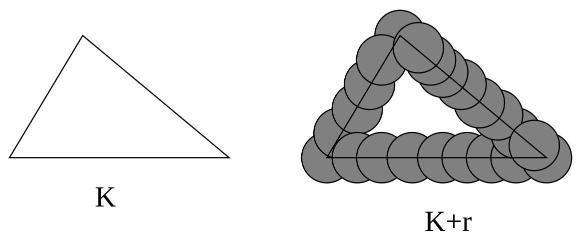


Una sucesión de fractales que converge al círculo.

La manera como encontraremos fractales especiales será como puntos límite de ciertas sucesiones de fractales. Quisieramos definir lo que significa que una sucesión de fractales converja a un fractal, para ello hace falta entender que significa que un fractal este cercano a otro, esto es, necesitamos medir la distancia entre fractales.

Tomemos un fractal K y un número positivo r. Definimos un nuevo conjunto $K + r$ engordando K una distancia r; más precisamente, el conjunto $K + r$ se obtiene centrando en cada punto de K un disco de radio r:

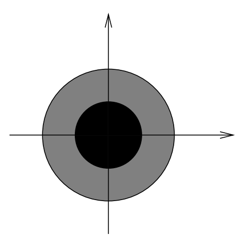
$$K + r = \bigcup_{k \in K} D_r(k).$$



DEFINICIÓN 8 *La distancia (de Hausdorff) h entre dos fractales K y L se define como el número r más pequeño tal que*

$$K \subset (L + r) \text{ y } L \subset (K + r).$$

Ejemplo. Si K es el disco de radio 1 y centro en $(0, 0)$ y L el de radio 2 y mismo centro, entonces la distancia entre ellos es 1.



EJERCICIO 4 *¿Cuál es la distancia entre un cuadrado de lado 1 y su frontera?*

3.2 Contracciones.

Una contracción es una transformación que decrece distancias. Bajo una contracción, cualquier par de puntos es enviado a otro par a distancia estrictamente menor que la original. La definición formal es como sigue.

DEFINICIÓN 9 *Sea f una transformación. Decimos que f es una contracción si existe un número $C < 1$, tal que para todo par de puntos p, q la distancia entre $f(p)$ y $f(q)$ es a lo más C veces la distancia de p a q:*

$$d(f(p), f(q)) \leq Cd(p, q).$$

C se llama el factor de contracción de f.

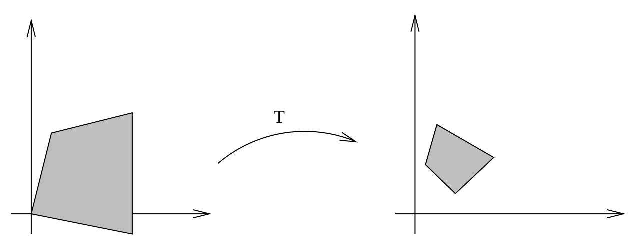
Ejemplos.

- $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ es una contracción del plano euclidiano con factor de contracción $1/2$. De hecho, cualquier homotecia $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ con $r < 1$ es una contracción.

- Más generalmente,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (x, y) + (b_1, b_2) \\ &= rR_\theta(x, y) + (b_1, b_2) \end{aligned}$$

  con $r < 1$, es una contracción con factor de contracción r. T rota un ángulo θ, comprime de acuerdo a r y finalmente traslada $+(b_1, b_2)$.



$$T(x, y) = \frac{1}{2} R_{\frac{\pi}{3}}(x, y) + (2, 1).$$

EJERCICIO 5 *1. Prueba que una transformación afín $T(x, y) = A(x, y) + b$ es una contracción, si y solo si A es una contracción lineal.*

2. ¿Qué condiciones se te ocurren para garantizar que una transformación lineal A sea una contracción? Experimenta.

A continuación probaremos una propiedad fundamental de las contracciones, esta es: las contracciones poseen un único punto fijo. Si f es una transformación, un punto fijo es un punto p tal que $f(p) = p$. Por ejemplo, una rotación fija el origen, la identidad fija a todos los puntos, una traslación no tiene puntos fijos, etc.

TEOREMA 6 *(EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO) Sea f una contracción con factor de contracción C. Entonces existe un y solo un punto fijo de f.*

Demostración. Tomemos un punto cualquiera q y miremos la sucesión que se obtiene al *iterar* f sobre q; esto es, miramos la sucesión

$$a_1 = f(q), a_2 = f(f(q)) = f^{(2)}(q), a_3 = f^{(3)}(q), \ldots, a_n = f^{(n)}(q), \ldots.$$

Probaremos que esta sucesión converge. Observamos que

$$\begin{aligned}
d(a_N, a_{N+k}) &= d(f^{(N)}(q), f^{(N)}(a_k)) \leq C^N d(q, a_k) \\
&\leq C^N \left[d(q, a_1) + d(a_1, a_2) + \cdots + d(a_{k-1}, a_k)\right] \\
&= C^N \left[d(q, a_1) + d(f(q), f(a_1)) + \cdots + d(f^{(k-1)}(q), f^{(k-1)}(a_1))\right] \\
&\leq C^N d(q, a_1) \left[1 + C + C^2 + \cdots + C^{k-1}\right] \\
&\leq \tfrac{C^N}{1-C} d(q, f(q)).
\end{aligned}$$

Como $d(q, f(q))$ es un cierto número fijo, y $C < 1$, $\frac{C^N}{1-C} d(q, f(q)) \to 0$. Esto quiere decir que todos los términos en la cola de la sucesión están muy cercanos entre sí; suponiendo que nuestro espacio no tiene "agujeros", resulta que la sucesión debe converger a algún punto p_0,

$$a_n = f^{(n)}(q) \to p_0.$$

Probemos que p_0 es punto fijo. La sucesión $f(a_n) \to f(p_0)$, pero $f(a_n) = a_{n+1}$, luego $p_0 = f(p_0)$ (toda sucesión tiene a lo más, un límite).

Finalmente, veamos que no puede haber otro punto fijo. Supongamos que p' es otro punto fijo para f. Se tiene entonces que

$$d(p_0, p') = d(f(p_0), f(p')) \leq C d(p_0, p'),$$

por lo tanto $d(p_0, p') = 0$ y $p_0 = p'$. ∎

OJO 8 *La demostración del teorema es tan importante como el teorema mismo, pues nos da una manera de encontrar el punto fijo. A saber, toma cualquier punto e itera la transformación.*

Ejemplos.

- Consideremos la función $f(x) = \frac{x+1}{3}$.

  $$|f(x) - f(y)| = |\frac{x}{3} - \frac{y}{3}| = \frac{1}{3}|x - y|$$

  así que f es una contracción con factor $1/3$. Comencemos con el cero, y formemos la sucesión de iteraciones $f^{(n)}(0)$; observa que

  $$f^{(n)}(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{1}{3}.$$

  Esta sucesión es $1/3$ de la serie geométrica de razón $1/3$, y por lo tanto converge a $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$. Luego el punto fijo de f es $1/2$ (en este caso, se podía haber llegado a esta conclusión simplemente resolviendo la ecuación $f(x) = x$; sin embargo, en los ejemplos que discutiremos más adelante no podremos usar este tipo de argumento elemental).

- Si A es una contracción lineal, entonces 0 es su único punto fijo. Si A no es contracción, puede tener mucho otros puntos fijos además del origen. Por ejemplo,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
fija todos los puntos del eje de las x.

- Sea $T(x, y) = A(x, y) + b$ una contracción afín. Podemos calcular su punto fijo por el método iterativo (como arriba) o resolviendo la ecuación $T(x, y) = (x, y)$; hagamos esto último.

  Queremos resolver $A(x, y) + b = (x, y)$, o equivalentemente, $(I - A)(x, y) = b$. Multiplicando ambos lados por la matriz inversa nos da el resultado
$$(x, y) = (I - A)^{-1}(b).$$

EJERCICIO 6 *Calcula el punto fijo de la contracción afín* $T(x, y) = A(x, y) + (1, 1)$*, donde* A *es la matriz*
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

4 Cuarta Lección

En esta lección echamos mano de lo que hemos aprendido en las tres anteriores para, finalmente, construir fractales interesantes. Los construiremos de la siguiente manera. Recuerda el espacio de Hausdorff $\mathcal{H}$, este es el espacio métrico cuyos puntos son los fractales del plano. Se dará un método para construir, a partir de n contracciones del plano euclidiano, una contracción definida en $\mathcal{H}$. Los fractales que consideraremos serán los puntos fijos de tales contracciones. Lo interesante del método, es que comenzando con transformaciones muy sencillas del plano se generarán fractales complicados.

4.1 Contracciones en el espacio de Hausdorff

TEOREMA 7 *Sean* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *contracciones del plano con factores de contracción* $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Definimos $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *como*
$$F(K) = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \cdots \cup f_n(K).$$
Entonces F *es una contracción en* $\mathcal{H}$ *con factor de contracción* $C = \max\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$.

Demostración.

Paso 1. Probemos primero que $f_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dada por $K \mapsto f_j(K)$ es una contracción. Tomemos K y L dos fractales arbitrarios.

Si $K \subset L + r = \bigcup_{l \in L} D_r(l)$, entonces

$$f_j(K) \subset f_j(L+r) = \bigcup_{l \in L} f_j(D_r(l)) \subset \bigcup_{l \in L} D_{C_j r}(f_j(l)) = f_j(L) + C_j r.$$

Luego $h(f_j(K), f_j(L)) \leq C_j h(K, L)$.

Paso 2.

LEMA 2 *Sean $K_1, K_2, K_3, K_4 \in \mathcal{H}$. Entonces*

$$h(K_1 \cup K_2, K_3 \cup K_4) \leq \max\{h(K_1, K_3), h(K_2, K_4)\}.$$

Demostración. Si $r = \max\{h(K_1, K_3), h(K_2, K_4)\}$ entonces $K_1 \subset K_3 + r$ y $K_2 \subset K_4 + r$, por lo tanto $(K_1 \cup K_2) \subset (K_3 \cup K_4) + r$. Igualmente se prueba que $(K_3 \cup K_4) \subset (K_1 \cup K_2) + r$. ∎

Paso 3. La demostración del teorema por inducción sobre n.

Si $n = 2$,

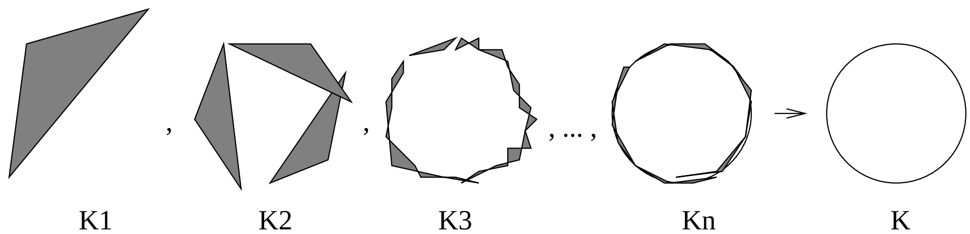
$$\begin{aligned} h(F(K), F(L)) &= h(f_1(K) \cup f_2(K), f_1(L) \cup f_2(L)) \\ &\leq \max\{h(f_1(K), f_1(L)), h(f_2(K), f_2(L))\} \\ &\leq \max\{C_1 h(K, L), C_2 h(K, L)\} \\ &= \max\{C_1, C_2\} h(K, L). \end{aligned}$$

Supongamos que el resultado vale para cualesquiera $n-1$ contracciones $f_1, \ldots, f_{n-1}$. Sea $A = f_1(K) \cup \cdots \cup f_{n-1}(K)$ y $B = f_1(L) \cup \cdots \cup f_{n-1}(L)$. Entonces

$$\begin{aligned} h(F(K), F(L)) &= h(A \cup f_n(K), B \cup f_n(L)) \\ &\leq \max\{h(A, B), h(f_n(K), f_n(L))\} \\ &\leq \max\{\max\{C_1, \ldots, C_{n-1}\} h(K, L), C_n h(K, L)\} \\ &= \max\{C_1, \ldots, C_n\} h(K, L). \end{aligned}$$

∎

COROLARIO 1 *Si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son contracciones del plano, entonces $F(K) = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \cdots \cup f_n(K)$ tiene un único punto fijo K_0, el cual puede encontrarse, a partir de cualquier fractal K, como el límite de la sucesión de iteraciones $F^{(m)}(K)$.*



Una sucesión de fractales que converge a una circunferencia. Observa que un fractal puede consistir de varios "pedazos".

DEFINICIÓN 10 *Al conjunto de contracciones $f_1, \ldots, f_n$ que da lugar a la contracción F de $\mathcal{H}$ le llamamos un "sistema de funciones iteradas". Al punto fijo K_0 de F le llamaremos "el atractor del sistema".*

4.2 Ejemplos

1. Considera las siguientes cuatro contracciones afines.

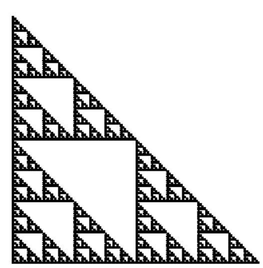
   - $T_1(x, y) = (x/2, y/2)$.
   - $T_2(x, y) = (x/2, y/2) + (0, 1/2)$.
   - $T_3(x, y) = (x/2, y/2) + (1/2, 0)$.
   - $T_4(x, y) = (x/2, y/2) + (1/2, 1/2)$.

   Sea $F(K) = T_1(K) \cup T_2(K) \cup T_3(K) \cup T_4(K)$. F es una contracción con factor de contracción $1/2$. Su punto fijo es el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$.

   Experimenta en el laboratorio con sucesiones $\{F^{(n)}(K)\}$ para diferentes compactos K.

2. Considera el sistema con solo T_1 y T_4. En este caso el atractor es la diagonal $\{(x, y) \mid x = y,\ 0 \leq x, y \leq 1\}$.

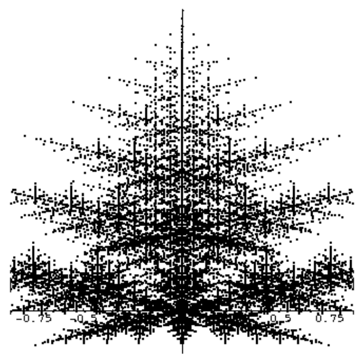
3. El triángulo de Sierpinski es el atractor del sistema $\{T_1, T_2, T_3\}$ con T_j como en el primer ejemplo.



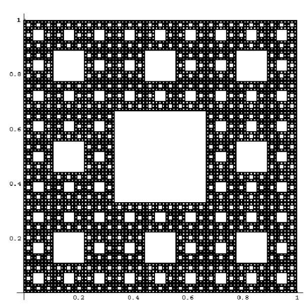
Triángulo de Sierpinski

4. Un arbusto. Toma el sistema de funciones iteradas $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ dado por

   - $T_1(x, y) = \frac{3}{4}(x, y)$.
   - $T_2(x, y) = \frac{3}{4}(x, y) + (0, 1)$.
   - $T_3(x, y) = \frac{1}{2}R_{-60^\circ}(x, y)$.
   - $T_4(x, y) = \frac{1}{2}R_{60^\circ}(x, y)$.

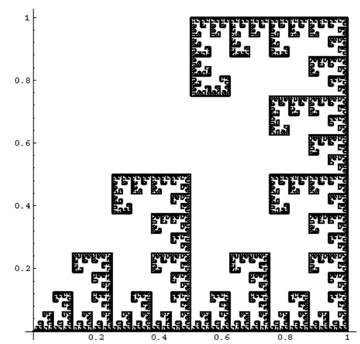


5. Una esponja de Menger. Considera el sistema de 8 funciones iteradas, $T_j(x, y) = A(x, y) + p_j$, $j : 1, \ldots, 8$, con $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ y $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1/3, 0)$, $p_3 = (2/3, 0)$, $p_4 = (0, 1/3)$, $p_5 = (0, 2/3)$, $p_6 = (1/3, 2/3)$, $p_7 = (2/3, 1/3)$ y $p_8 = (2/3, 2/3)$.

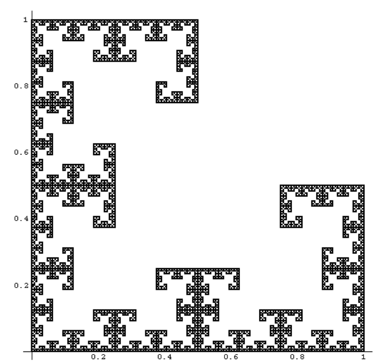


Esponja.

EJERCICIO 7 *1. Encuentra un sistema de funciones iteradas cuyo atractor sea el siguiente "monito".*



2. ¿Qué transformación agregarías para colocarle al siguiente atractor la esquina que le falta? Verifícalo con el programa.

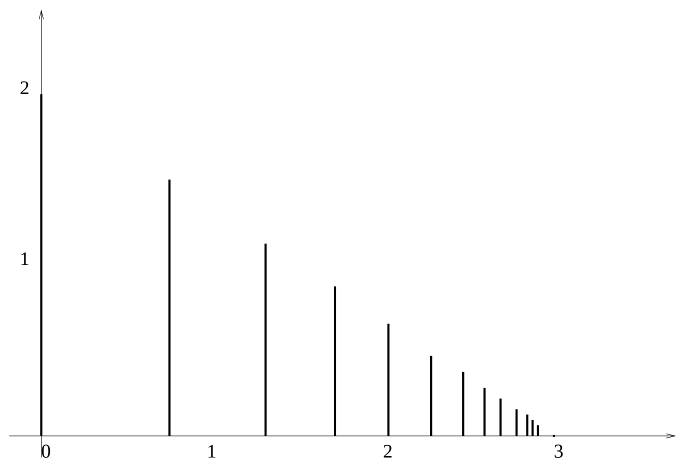


El siguiente teorema se demuestra igual que el anterior. Produce atractores que encierran un fractal dado.

TEOREMA 8 *Sean $f_1, \ldots, f_n$ contracciones con factor de contracción $C_1, \ldots, C_n$. Sea $L_0 \in \mathcal{H}$ un compacto dado. Define $f_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ la transformación constante $f_0(K) = L_0$.*

Sea $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dada por $F(K) = f_0(K) \cup f_1(K) \cup \cdots \cup f_n(K)$. Entonces F es una contracción con factor $C = \max\{C_1, \ldots, C_n\}$.

Ejemplo. Sea $L_0 = \{0\} \times [0, 2] = \{(0, y) \mid 0 \leq y \leq 2\}$, y $T(x, y) = (\frac{3}{4}x, \frac{3}{4}y) + (\frac{3}{4}, 0)$. La transformación $F(K) = L_0 \cup T(K)$ es entonces una contracción. Su atractor es el fractal del dibujo.



5 Quinta Lección

5.1 El Teorema del pegote

Los últimos ejercicios de la sección anterior invitan a estudiar el problema inverso, esto es, el encontrar transformaciones, para un fractal dado, que lo generen como punto fijo de un sistema de funciones iteradas. El problema se puede atacar de manera sencilla usando el Teorema del pegote.

TEOREMA 9 *(EL TEOREMA DEL PEGOTE) Sea* $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ *un sistema de funciones iteradas en el plano euclidiano con factor de contracción* C. *Sea* K_0 *el atractor de dicho sistema y* $K \in \mathcal{H}$ *un fractal arbitrario.*

Entonces,

$$h(K, K_0) \leq \frac{1}{1-C} h(K, f_1(K) \cup f_2(K) \cup \cdots \cup f_n(K)).$$

Así mismo, el teorema sigue siendo válido si agregamos al sistema una transformación constante $f_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$.

Demostración. Definimos $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como $F(K) = \bigcup f_j(K)$. Sabemos que $F^{(k)}(K) \to K_0$ para todo $K \in \mathcal{H}$. Así,

$$\begin{aligned} h(K, K_0) &= \lim h(K, F^{(k)}(K)) \\ &\leq \lim \left[h(K, F(K)) + h(F(K), F^{(2)}(K)) + \cdots + h(F^{(k-1)}(K), F^{(k)}(K)) \right] \\ &\leq h(K, F(K)) \lim \left[1 + C + C^2 + \cdots + C^{k-1} \right] \\ &= \tfrac{1}{1-C} h(K, F(K)). \end{aligned}$$

∎

COROLARIO 2 *Sea* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *un sistema de funciones iteradas con factor de contracción* C. *Sea* $r > 0$ *arbitrario y* $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *dada por* $F(K) = f_1(K) \cup \cdots \cup f_n(K)$. *Sea* K_0 *el atractor del sistema.*

Si $L \in \mathcal{H}$ *es tal que* $h(L, F(L)) \leq r$ *entonces* $h(L, K_0) \leq \frac{r}{1-C}$.

Este sencillo resultado nos da un estimado cuantitativo del error cometido al aproximar el atractor de un sistema. En un momento se explicará como usarlo para dar una forma de codificar imágenes mediante un sistema de funciones iteradas.

5.2 Codificación de imágenes mediante sistemas de funciones iteradas.

Tomemos un caso simple: el triángulo de Sierpinski. Supongamos que yo deseo enviarles una imagen de este fractal através de la internet. El archivo puede ser muy grande (660 K). Sin embargo, el triángulo de Sierpinski puede ser codificado de manera muy sencilla; basta con dar tres transformaciones afines para recuperarlo. Recordemos. Si definimos

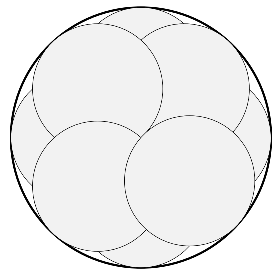
- $T_1(x, y) = (x/2, y/2)$,
- $T_2(x, y) = (x/2, y/2) + (0, 1/2)$,
- $T_3(x, y) = (x/2, y/2) + (1/2, 0)$.

el atractor de dicho sistema es el susodicho triángulo. En otras palabras, yo puedo enviarles estas tres transformaciones y ustedes obtendrán de ellas la imagen (con la resolución que a ustedes les plazca).

El problema principal con esta idea es, cómo dada una imagen K (un fractal) encontramos un sistema de funciones que la aproxime a nuestro antojo. Para esto usaremos el Teorema del pegote: basta encontrar contracciones afines $\{T_1, \ldots, T_n\}$ (junto,quizás, con alguna transformación constante "sencilla" T_0) tal que, si tomamos $F(K) = \bigcup T_j(K)$, entonces $h(K, F(K))$ sea tan pequeño como necesitemos.

Ejemplo. Supongamos que K es el disco unidad $B_1((0,0))$ (este ejemplo es únicamente para ilustrar el método, ya que, claramente, la mejor manera de codificar un disco es dando su centro y radio).

Definamos $T_j(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) + p_j$, $j : 1, \ldots, 8$, donde los p_j son los 8 puntos $(\pm\frac{1}{2}, 0)$, $(0, \pm\frac{1}{2})$, $(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}})$. Esto es, cubrimos el disco con 8 copias de él, reducidas a la mitad:



Un cálculo sencillo revela que $h(K, F(K)) \leq (1 - \cos\pi/8)$ y, como el factor de contracción es $1/2$, entonces $h(K_0, K) \leq 2(1 - \cos\pi/8) < 5 \times 10^{-5}$ donde K_0 es el atractor del sistema. No es difícil ver que el atractor K_0 es, en este caso, un octágono regular inscrito en K.

6 Apéndice

6.1 La dimensión fractal

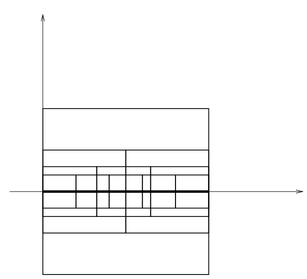
Sea K un fractal en el plano y consideremos el problema siguiente: dado $r > 0$, ¿cuántos cuadrados de lado r necesitamos para cubrir K?

Llamemos $N_K(r)$ al mínimo número de cuadrados de lado $r > 0$ cuya unión contiene a K.

Ejemplos.

1. Sea K el segmento, sobre el eje de las x, entre 0 y 1 ($K = \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$). Claramente

$$N_K(\frac{1}{2}) = 2, N_K(\frac{1}{3}) = 3, \ldots, N_K(\frac{1}{n}) = n, \ldots;$$



además, si $\frac{1}{n+1} \leq r \leq \frac{1}{n}$ entonces $n + 1 \geq N_K(r) \geq n$.

Vemos que $N_K(r)$ como función de r es como $\frac{1}{r}$: $N_K(r) \approx \frac{1}{r}$.

Observa que si tomamos en lugar de K al segmento de 0 a 10 (o a mil), la función $N_K(r)$ se multiplicará por un factor de 10 (o mil), pero seguirá siendo proporcional a $\frac{1}{r}$.

2. Tomemos ahora K igual al cuadrado unidad. En este caso es fácil comprobar que $N_K(r) \approx \left(\frac{1}{r}\right)^2$; y si agrandamos o empequeñecemos el cuadrado, entonces

$$N_K(r) \approx C \left(\frac{1}{r}\right)^2$$

para alguna constante $C > 0$.

Para un fractal arbitrario K se tendrá que $N_K(r) \approx C \left(\frac{1}{r}\right)^D$, y diremos que D es su dimensión fractal. Equivalentemente,

DEFINICIÓN 11 *K un fractal en el plano. Su dimensión se define através del límite*

$$dim\ (K) = \lim_{r \to 0} \frac{\ln (N_K(r))}{\ln(\frac{1}{r})}.$$

La dimensión fractal nos da una idea de que tan denso es el fractal en cuestión. La dimensión mayor de un fractal plano es 2, pero como hemos visto puede también ser 1. Veamos otros ejemplos.

Más ejemplos.

3. Sea K la frontera del cuadrado unidad. En este caso $N_K(r) \approx 4\left(\frac{1}{r}\right)$, así que su dimensión es 1.

4. Sea K el triángulo de Sierpinski de lado 1. Tenemos

$$\begin{aligned} N_K(1) &= 1 \\ N_K(1/2) &= 3 \\ N_K(1/4) &= 9 \\ &\vdots \\ N_K(1/2^n) &= 3^n \end{aligned}$$

Luego

$$\text{dim(Sierpinski)} = \lim \frac{n \ln 3}{n \ln 2} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58.$$

7 Bibliografía

- La referencia principal para estas notas es el libro *Fractals Everywhere*, de M. Barnsley, Academic Press 1988.
- Una introducción accesible al álgebra lineal es el libro *Linear Algebra through Geometry*, T. Banchoff y J. Wermer, Springer Verlag 1991.
- Un buen libro de cálculo, como referencia para el material de sucesiones, es el *Calculus with analytic geometry*, G. Simmons, McGraw-Hill 1985.