Baile de enredos

Tiempo estimado: 4.5 horas (en dos o más sesiones)
Organización: Equipos de 4 o 5 estudiantes
Componente curricular o eje: Patrones, simbolización y generalización, lugares geométricos y pensamiento variacional.
Competencias genéricas: CG1, CG5 y CG8.

En esta Situación de Aprendizaje (SdA) buscamos un algoritmo que permita desenmarañar un enredo creado con cuerdas después de repetir dos pasos «de baile» en reiteradas ocasiones. Primero los equipos logran entender cómo desenredar un configuración dada. Posteriormente, se propone una discusión en plenaria para plantear caminos que permitan resolver cualquier configuración creada por los pasos de baile.

Está diseñada para que las y los alumnos trabajen en equipo y pretende fortalecer o reforzar el manejo de fracciones, así como motivar el uso de distintas representaciones para abordar una situación concreta, incluyendo simbólicas, esquemáticas y numéricas.

Introducción

En esta Situación de Aprendizaje (SdA) las personas participantes resolverán varios retos. Primero se busca que en equipos puedan desenmarañar un nudo físicamente. De esta forma, se adquiere familiaridad con los enredos e intuye la existencia de un proceso inverso, sin que ello requiera que los movimientos permitidos tengan «antimovimientos», pensados como pasos individuales que deshagan directamente el paso anterior.

En un segundo nivel se busca crear un algoritmo que permita desen-

← N marañar cualquier enredo. Para ello se «aritmetizan» los enredos; esto es, a cada enredo se la asigna un número que depende de la secuencia de pasos del baile que se llevó a cabo. Esta asignación se apoyará en una representación gráfica de los enredos que surge de manipularlos físicamente para explorar distintas formas de visualizar el mismo enredo; con ello se logra motivar la idea de que a cada enredo le corresponde un número racional y que para poderlo desenredar se debe regresar al 0.

Esta situación de aprendizaje consiste de tres momentos que pueden llevarse a cabo en su totalidad en aproximadamente cuatro horas y media, por ejemplo, seis sesiones, dos por momento, con duración de 50 minutos por sesión.

Objetivo

El objetivo de esta Situación de Aprendizaje (SdA) es que la clase experimente el proceso de resolución de un problema matemático complejo. El problema planteado se basa en los *Enredos racionales* de J. Conway presentado como un juego de baile.

Parte de la motivación de presentar el problema de esta forma es promover el trabajo en equipo, de forma relajada y la conversación entre compañeras y compañeros sea amena y constructiva.

Vinculación con el currículo

Componentes
1. Construir e interpretar modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas y formales. 2. Formular y resolver problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques. 3. Explicar e interpretar los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y contrastarlos con modelos establecidos. 4. Argumentar la solución obtenida de un problema, con métodos gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático 5. Manejo de la información para clasificar, ordenar, representar, interpretar e inferir en el contexto de una situación concreta. 6. Diseño de algoritmos articulados con una funcionalidad concreta.

Contenidos centrales	Aprendizajes esperados
1. Uso de las variables y las expresiones algebraicas. 2. Uso de los números y sus propiedades. 3. Conceptos básicos del lenguaje algebraico.	1. Tránsito del pensamiento aritmético al lenguaje algebraico. 2. Desarrollo del lenguaje algebraico como un sistema simbólico para la generalización y la representación. 3. Reconocimiento de la existencia de variables e identificación de sus distintos usos. 4. Interpretación y expresión algebraica de propiedades observables en fenómenos de su entorno. 5. Evaluación de expresiones algebraicas en diversos contextos numéricos.

Contenidos centrales	Aprendizajes esperados
4. Tránsito de los patrones numéricos a la simbolización algebraica. 5. Sucesiones y series numéricas. 6. Variación lineal como introducción a la relación funcional.	6. Reconocimiento de patrones de comportamientos entre magnitudes. 7. Formulación, de manera coloquial escrita (retórica), numérica y gráfica, de patrones de comportamiento. 8. Reconocimiento de fenómenos con comportamiento lineal o no lineal.
7. El trabajo simbólico.	9. Simbolización y generalización de fenómenos lineales mediante el uso de variables.
8. Reconocer y construir la recta como lugar geométrico.	10. Caracterización de las rectas según sus disposiciones y sus relaciones
9. Introducción a las funciones algebraicas.	11. Caracterización de las funciones algebraicas y las como herramientas de predicción útiles.

Material

Para realizar esta situación de aprendizaje es necesario que cada equipo disponga de un par de cuerdas, de aproximadamente 2 metros de longitud cada una, de preferencia de dos colores distintos para simplificar la discusión. Estas cuerdas pueden ser de cualquier material.

También, se sugiere que las y los estudiantes dispongan de una base de forma rectangular y cinta adhesiva, en caso de requerir repetir los movimientos de las cuerdas en cada paso de baile y visualizar los enredos.

Se recomienda que cada estudiante disponga de útiles escolares para escribir, como pueden ser lápiz, colores y cuaderno.

Para la puesta en común de soluciones lo ideal es utilizar el pizarrón y así proponer y refinar ideas de manera colectiva.

Descripción de la situación de aprendizaje

Momento 1: Enredos y desenredos con material concreto

Inicio

Se mostrarán dos pasos de baile entre cuatro participantes que sostienen dos cuerdas, una por pareja. Después de una combinación de estos pasos de baile, las cuerdas quedarán enredadas. El reto: ¿Será posible deshacer el enredo tras una sucesión que consista únicamente de esos dos pasos de baile?

Desarrollo

Primero se explica el baile y las reglas o movidas con cuatro personas voluntarias que pasarán al frente del salón:

1. Se comienza con 4 personas voluntarias acomodadas en los vértices de un rectángulo imaginario, que de preferencia asemeje a un cuadrado.

2. Se les entregan dos cuerdas. Cada persona voluntaria tomará uno de los extremos cuidando que las cuerdas no se crucen, corran paralelas de izquierda a derecha (no de «arriba» hacia «abajo», ver figura 1).

Figura 1: Posición inicial. Los puntos representan a las personas voluntarias y las líneas negras a las cuerdas.

3. Se les enseñarán pasos de baile que provocarán que las cuerdas se comiencen a enredar.

   Aclaraciones que se deben considerar:

   - Mencionar que el color de las cuerdas no importa para ver si dos nudos son iguales, pero que se usan cuerdas de distinto color porque el color ayuda a ver qué ocurre con las cuerdas cuando se comienzan a enredar. Como ejemplo, se puede insistir en que no importa el orden de los colores al inicio, cuando las dos cuerdas están paralelas se considerara que representa la posición inicial.
   - El baile moverá de lugar a las personas siempre sobre los vértices del mismo rectángulo. Para propósitos de la situación de aprendizaje, lo que interesa es la configuración del enredo de las cuerdas y no es relevante conocer la posición específica de cada uno de las y los participantes.
   - Se dirá que las cuerdas están en posición inicial (figura 1) cuando las cuerdas están paralelas (corriendo de izquierda a derecha) como en el inicio. No importa quiénes estén en los vértices ni si hubo cambio en el color de las cuerdas.

4. Definir el primer paso de baile que llamaremos *torcer*. Pedirle a las personas voluntarias que hagan un par de *torceres* para que puedan aprender esa movida. Las personas en los lugares C y D, sin importar quienes sean, intercambian lugares de tal forma que la persona del lugar D pasa por debajo de la cuerda que sostiene la del lugar C como se muestra en la figura 2.

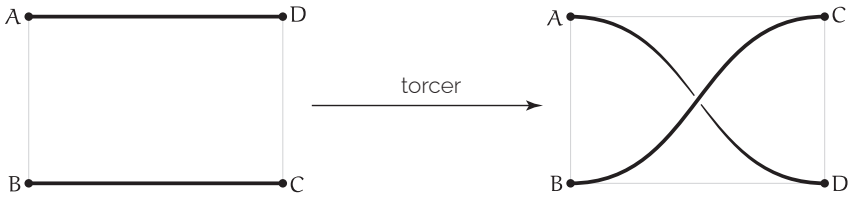


Figura 2: Torcer desde la posición inicial

En la figura anterior y en todas las siguientes, es importante que se preste especial atención en qué cuerda pasa por arriba y qué cuerda pasa por debajo. Por ejemplo, en el diagrama de la izquierda, la cuerda roja pasa por encima de la cuerda azul, mientras en el diagrama de la derecha ocurre lo contrario.

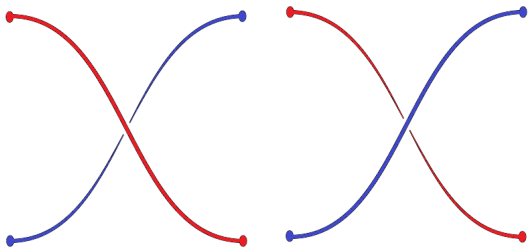


Figura 3: Comparación: ¿Qué cuerda pasa por encima en cada diagrama?

Un ejercicio previo que se puede realizar en este punto es mostrar estas dos imágenes anteriores y pedir a las y los estudiantes discernir qué cuerda pasa por encima. Esto les ayudará a prestar mayor atención en los diagramas siguientes.

5. Aquí pedimos que muestren al público el enredo obtenido. Con la intención de facilitar el entendimiento del paso de baile, pedimos a las personas voluntarias que están en los vértices cercanos al público bajar los brazos que sostienen las cuerdas mientras que los que están en los vértices alejados que los suban.

   Vale la pena hacer énfasis que, desde el punto de vista del público, *torcer* siempre lo lleva a cabo la pareja que está situada a la derecha, siempre pasando la cuerda por arriba la o el participante que cambia de estar cerca del público hacia el fondo; mientras que la

o el participante que pasa del fondo hacia el público pasa la cuerda por debajo. Esto sin importar qué tan avanzado esté el baile. La figura 4 muestra esta idea, donde el rectángulo gris con la letra M de *maraña* representa el cualquier enredo y cómo se modifica en general después de torcer.

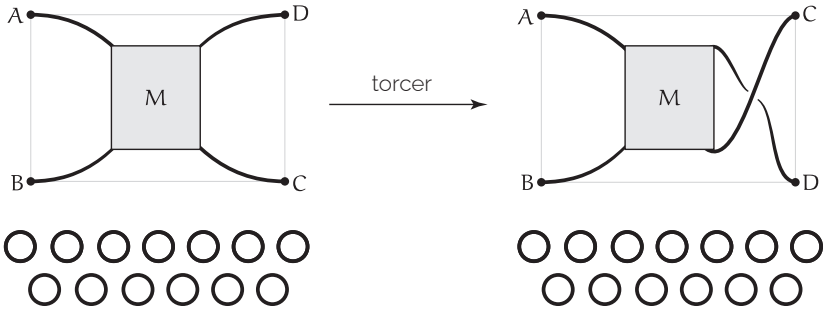


Figura 4: Los círculos representan personas del público. Torcer, sin importar qué maraña se tenga.

6. El segundo (y último) paso de baile se llama *rotar* y consiste en que cada una de las personas voluntarias se moverá al siguiente vértice (del rectángulo imaginario inicial) en el sentido de las manecillas del reloj. Pedirle a las personas voluntarias que apliquen dos o tres movidas de rotar para que aprendan ese paso. La figura 5 muestra el resultado.

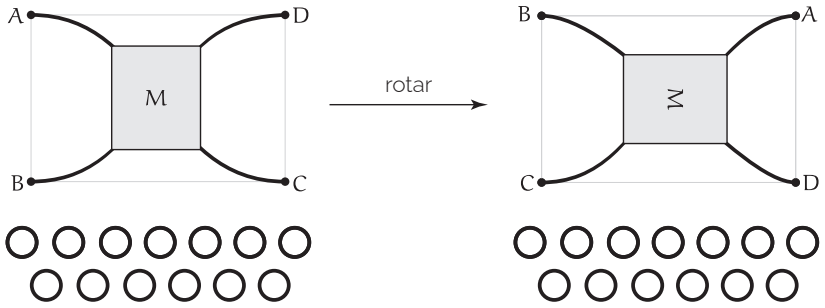


Figura 5: Rotar, sin importar qué maraña se tenga.

Aclaración a considerar: Desafortunadamente el paso *torcer* no tiene **un** paso opuesto. Es decir, no está definido en este baile una mo-

vida o paso de *destorcer*. Se menciona aquí ya que para reiniciar o regresar un paso atrás se antoja decir *destorcer* pero es incorrecto.

7. Regresar a la posición inicial y pedirle a las personas voluntarias que hagan una combinación de estos pasos de baile, por ejemplo: *torcer, torcer, torcer, rotar* y, por último, *torcer*. Pedir al grupo que esté atento al baile generado para corregir en caso de que se hiciera mal alguno de los pasos.

8. Preguntar a todo el grupo si ya se entendió cómo hacer los pasos de baile. También, se recomienda preguntar qué sucede con las cuerdas al seguir la secuencia de pasos esperando de esta forma, se espera que noten los enredos resultantes.

9. Para este punto, formen equipos para que las y los participantes practiquen los pasos de baile. Cuatro de las y los integrantes harán la vez de bailarinas y bailarines. Dados los bailes generados por dos secuencias de pasos: *torcer, torcer, torcer, rotar y torcer* (secuencia 1) y *torcer, torcer, rotar, torcer, torcer, torcer, torcer, rotar, torcer y torcer* (secuencia 2) se pregunta: Para cada uno de los bailes ¿podrán regresar a la posición inicial por medio de una secuencia que consista únicamente de estos dos pasos? Se trata de que utilicen cuantas veces consideren, torcer y rotar para regresar a la posición inicial.

   Dadas las secuencias de pasos anteriores, se espera que las y los estudiantes experimenten con las cuerdas y logren deshacer los enredos. Algunas respuestas posibles:

   Secuencia de pasos 1

   Rotar, torcer, torcer, rotar, torcer y torcer.

   Rotar, torcer, rotar, rotar, rotar, rotar, torcer, rotar, torcer y torcer. En este caso, se podría cuestionar acerca de qué sucede cuándo rotamos dos o cuatro veces y retomar la descripción de posición inicial a fin de obtener la secuencia de pasos "más corta"que deshace el enredo.

   Secuencia de pasos 2

Rotar, torcer, rotar, torcer, torcer, torcer, rotar, torcer, Torcer, rotar, torcer, torcer y torcer.

Para que las y los estudiantes logren obtener esta secuencia se sugiere buscar una relación con el enredo y desenredo de la primera secuencia de pasos por ejemplo, analizar cómo se desenreda un torcer o cómo se llega a la posición inicial dado un rotar.

Se recomienda tener las secuencias de pasos anotadas ya sea en pizarrón o que cada equipo las tenga anotadas en papel. También se sugiere escuchar las propuestas de cada equipo y mostrar que efectivamente, producen desenredos.

Se les pide que hagan los bailes con las cuerdas y que intenten regresar a la posición inicial, registrando la secuencia de pasos que les llevó a desenredarlo. Cada uno de los equipos desarrollará una técnica propia para registrar las secuencias de pasos ejecutadas sobre un enredo. Puede convenir, por simplicidad, presentar las secuencias en este paso como cadenas de letras donde $\mathbf{R}$ representa la operación rotar y $\mathbf{T}$ la operación torcer.

10. Toda vez que logren desenmarañar los enredos del paso anterior, se pide que inventen bailes nuevos con los mismos pasos, es decir, que generen secuencias distintas con estos pasos y después que intenten desenredar las marañas obtenidas. Es conveniente asignar un tiempo de la sesión para que al menos propongan un enredo y logren desenredarlo.

11. Pedir a los equipos que respondan a la siguiente preguntas

    a) ¿Pueden desenredar $\mathbf{3}$ *torceres*?

    b) ¿Pueden desenredar $\mathbf{10}$ *torceres*?

    c) En general, ¿es posible encontrar un patrón que permita desenredar cualquier número $\mathbf{n}$ *torceres*?

    De acuerdo a la convención de asociar enredos con cadenas de $\mathbf{R}$ y $\mathbf{T}$, la tarea pedida es desenredar la siguiente familia:

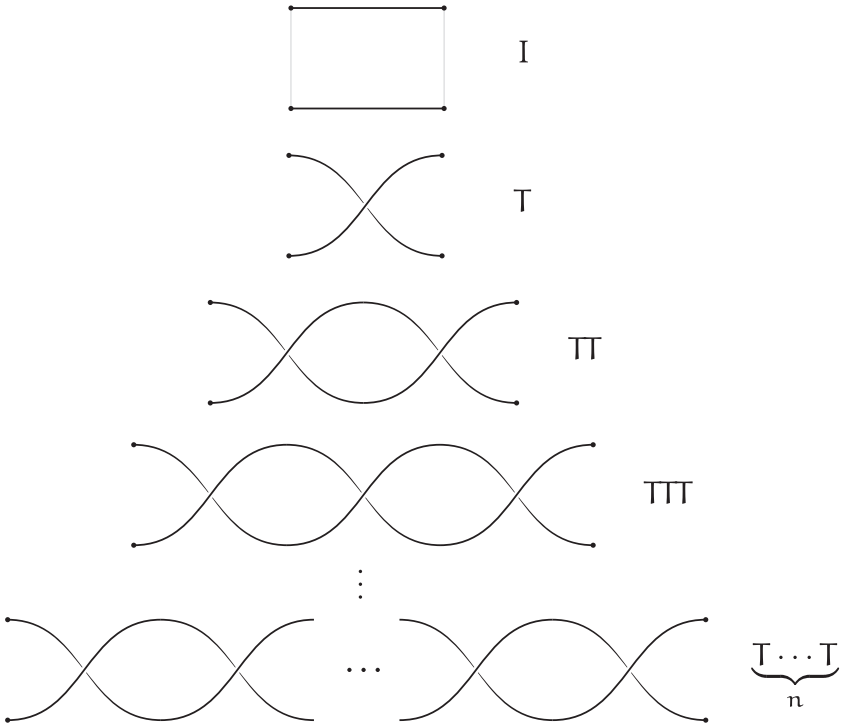


Figura 6: Familia de enredos con $\mathbf{n}$ *torceres*

Una estrategia posible para los grupos es trabajar con ejemplos sencillos y desenredarlos, en busca de alguna regularidad. Para completar este reto, será necesario hacer varios intentos, posiblemente a prueba y error. Es importante motivar a las y los estudiantes para que registren todos sus intentos y, si sus soluciones son largas, que reflexionen sobre posibilidades para acortarlas. Es interesante que puedan valorar este enfoque frente a la opción de resolver secuencias cada vez más largas, tomando decisiones sobre su estrategia. Para la puesta en común de este reto, se pide a las y los estudiantes que retomen sus hallazgos al buscar formas para desenredar un enredo con $\mathbf{n}$ torcidas; para ello, se les invita a pasar ordenadamente al pizarrón y realizar esquemas que les permitan explicar cómo desenredar los nudos con 1, 2 o más torcidas o presentar sus avances al enfrentar estos retos. En este momento, puede ser conveniente motivar una conversación sobre los elementos de cada representación que nos permiten abordar el problema o seguir la solución.

A →

← B

A continuación presentamos una forma de resolución que puede aparecer en el trabajo colaborativo:

← C

En la figura anterior se comienza de 0, que no requiere ningún movimiento (aunque es posible que los equipos comiencen a trabajar en el siguiente nivel). Al explorar los primeros casos, es posible que se den cuenta de que los enredos que se producen con las cadenas T, TT y TTT se desenredan con las cadenas RT, RTRTT y $\mathrm{RTRTTRTT}$, respectivamente. A partir de ello es razonable detectar una regularidad (si se agrega un T más a la secuencia de torceres, se añade un RTT a la secuencia que desenreda).

Cabe señalar que esta es una posibilidad para resolver el reto, pero no es la única.

← D

Cierre

Para el cierre de este momento de la situación de aprendizaje es posible desarrollar las siguientes dos ideas:

1. ¿Qué sería necesario para convencernos de que la fórmula propuesta para desenredar el enredo que resulta de torcer n veces funciona siempre? Aquí es posible recopilar intuiciones como "hay que aprovechar que ya sabemos resolver el caso anterior" o "se podría mostrar que se simplifica gradualmente" o bien "hay momentos donde torcer complica más las cosas, en esos momentos conviene rotar y torcer".

2. A partir de la respuesta anterior, es conveniente motivar la idea de que una representación numérica de los enredos y los pasos que nos permitiera reflejar estas intuiciones de "complejidad" podría ser de gran utilidad. Como propuesta para pensar, se puede considerar asociar el enredo que se produce al torcer n veces con el entero n. Por ejemplo, al enredo que se tuerce 5 veces se le asigna el número 5. En este momento conviene preguntar qué operación le debería corresponder a torcer puede conducir a que el grupo sugiera que torcer puede asociarse con "sumar" una unidad. Se sugiere cerrar esta parte con un inventario de las ideas que se piensa que podrían

funcionar en cualquier caso y dejar la pregunta abierta sobre que operación podría corresponder a rotar.

Momento 2

Inicio

Los objetivos de este momento son justificar que los enredos del baile pueden ser descritos por racionales $\frac{p}{q}$, así como las operaciones rotar y torcer pueden asociarse con funciones que pueden aplicarse al número racional $\frac{p}{q}$ que describe al enredo.

1. **Primera situación.** Entregue a las y los participantes copias de la hoja de trabajo anexa. La situación podría trabajarse en equipos, por lo que si la o el tallerista lo desea puede repartir una hoja de trabajo por equipo. Se sugiere organizar el grupo en los mismos equipos del momento 1.

   Indique a las y los participantes contestar la primera situación. Ésta consiste en representar en papel los enredos resultantes al seguir la secuencia *TTTRT*. Se les han dado los dibujos que representan el estado inicial (paso 0) y el primer paso, lo que les dará pista de cómo hacer las representaciones.

   Es probable que la mayoría haga el enredo con el material de cuerdas que usaron la lección anterior y luego copien el resultado en la tabla imitando los ejemplos. Ésta es la estrategia que puede sugerirles a quienes no puedan hacer los dibujos. Inusualmente, habrá quien pueda hacer un dibujo del resultado sin tener que manipular las cuerdas, pero esto puede llevar a errores más fácilmente.

   Pida a las y los participantes hacer el dibujo lo más fiel posible, pero siguiendo los ejemplos. Que no olviden indicar qué cuerda es la que está por encima de cuál en cada cruce. Pero no corrija otro tipo de errores, como dibujos con cruces de más o curvas demasiado torcidas, o incluso cuerdas muy encimadas. Todo este tipo de errores se confrontan en plenaria.

2. **Comparación grupal.** Hacer una comparación grupal de los dibujos hechos en el paso anterior. Para esto, se sugiere colocar los dibujos

en un espacio común, por ejemplo en el pizarrón, o intercambiarlos entre las y los estudiantes. Hacer algunas preguntas para iniciar una breve discusión con todo el grupo sobre los dibujos. ¿Les quedaron iguales? ¿Deberían ser iguales? ¿Qué diferencias o características en común observan?

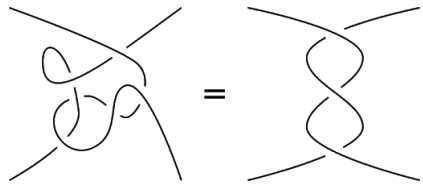
Después de la discusión hágales saber, de ser el caso, que aunque muchos de los dibujos parecen distintos en realidad son el mismo enredo. Ya que todos vienen de la misma secuencia de movidas, sólo que a unos pudieron quedarles más largas o cortas las cuerdas, o más apretadas, etc.

Se sugiere comentar también que, cuando hay un cruce, se suele quebrar la línea que representa a la cuerda que va por detrás para evitar confusiones.

Desarrollo

3. Para responder la situación 3 de la hoja de trabajo, es necesario tener claro la siguiente definición.

Definición: Se dice que dos enredos son equivalentes, es decir, son el mismo, si podemos modificar uno en el otro moviendo las cuerdas sin despegar ni tocar las cuatro esquinas y permitiendo estirar y doblar las cuerdas pero sin romperlas. Por ejemplo los siguientes dos enredos son equivalentes

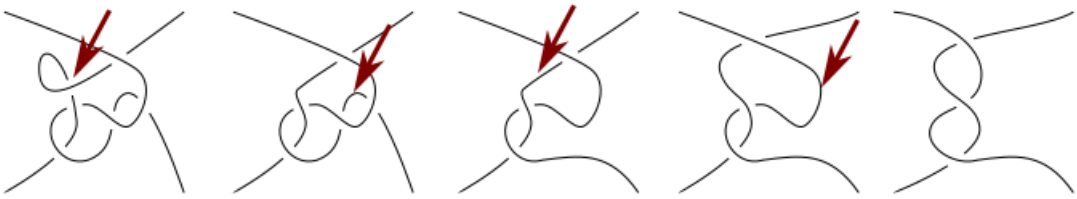


Para entenderla mejor, se ha incluido una definición intuitiva acompañada de un ejemplo. Se sugiere revisar esta definición de manera grupal y verificar paso a paso la equivalencia mostrada en el ejemplo.

Hay dos maneras en las que se podría explicar el ejemplo: mediante cuerdas físicas, y con dibujos. La primera logra un convencimiento

casi inmediato, pero tiene la complicación manual, en la que deberá imitarse cada enredo sin mover los extremos. La segunda demanda un mayor proceso cognitivo, pues la o el participante deberá imaginar los movimientos de las cuerdas físicas en su mente con sólo diagramas como referentes visuales. La segunda manera de entender la equivalencia es deseable, pues facilitará la tarea de convencerse de equivalencias más complicadas (con un mayor número de cruces) y superar las limitantes del material físico.

A continuación presentamos una manera de convencerse de que los dos enredos de la definición son equivalentes. La flecha roja indica la parte de la cuerda que se mueve para lograr la figura inmediata siguiente.



Los siguientes ejemplos también pueden usarse para apoyar a las y los estudiantes a entender la equivalencia de nudos. En cada imagen se puede cuestionar a las y los estudiantes qué modificaciones se realizaron para obtener el nudo equivalente, incluso se pueden apoyar de sus cuerdas.

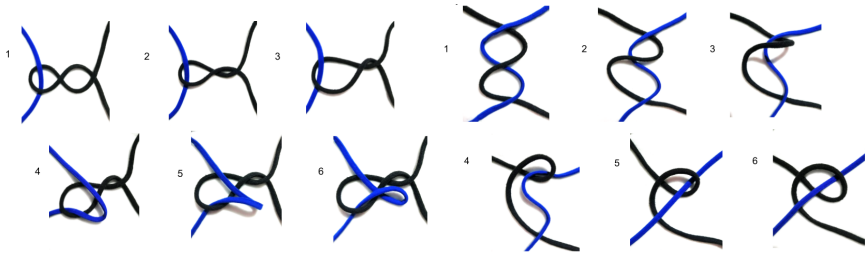
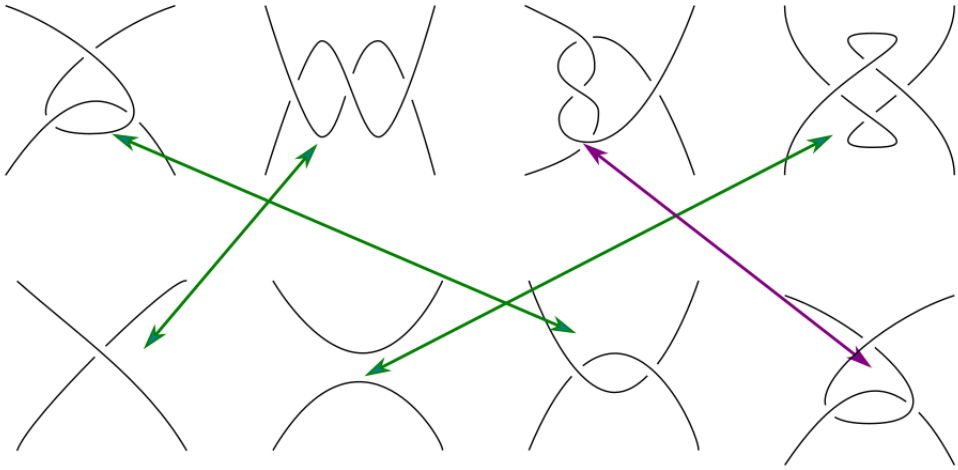


Figura 7: Dos ejemplos de nudos equivalentes.

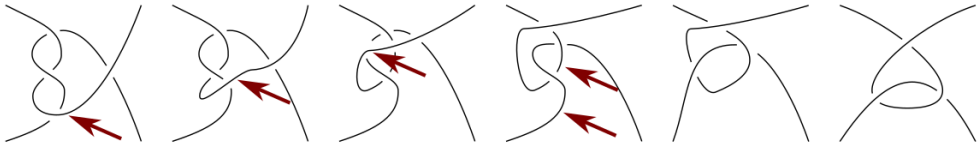
Para justificar sus respuestas de equivalencias para la situación 3

de la hoja de trabajo, se sugiere invitar a las y los participantes a construir secuencias visuales como las de arriba preferentemente, en sus mentes (una secuencia de dibujos reales en cuaderno podría ser muy tardado y llevar toda la sesión).

Las respuesta esperada para esta situación es la siguiente:



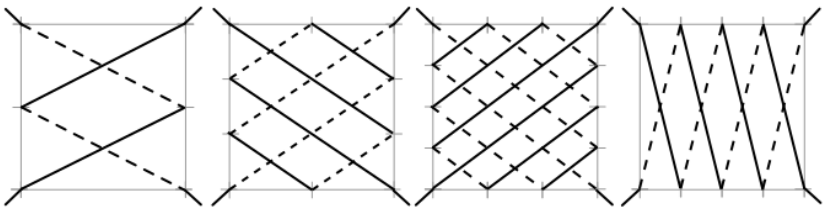
Es natural que las y los participantes completen la situación apareando tres parejas y haciendo un par con la que sobra. Es probable que esta última pareja sea la marcada en morado en la figura anterior, ya que es la relación más complicada. Si ninguno de las y los participantes logra convencerse de su equivalencia, podría usted exponer la siguiente secuencia de imágenes para convencerlos:



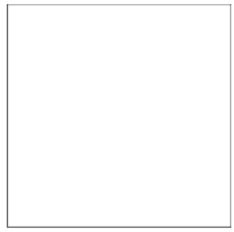
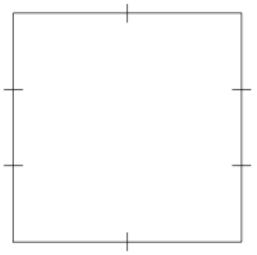
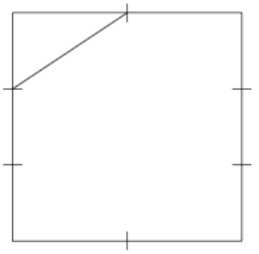
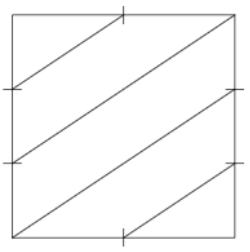
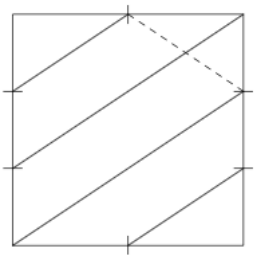
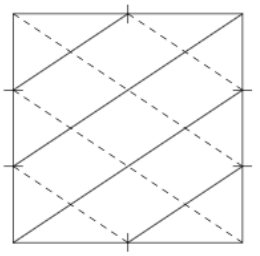
En el anexo se presentan imágenes adicionales para ayudar a explicar la equivalencia de las parejas restantes en esta situación.

4. En la situación 4, se presenta la definición de **enredo racional** que servirá para describir enredos. Puede presentarlos como otra manera de construir enredos pero sin bailes y a un nivel de dibujos.

Definición: Un enredo racional $\frac{p}{q}$ es un enredo cuyas cuerdas inician y terminan en las esquinas de un cuadrado unitario y se forman por segmentos de pendiente $\frac{p}{q}$ o $-\frac{p}{q}$ dentro del cuadrado.
Las rectas de pendiente $\frac{p}{q}$ van por encima de las de pendiente $-\frac{p}{q}$.
A continuación se muestran de izquierda a derecha los enredos racionales $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ y -4. En estos diagramas las líneas punteadas indican que las cuerdas pasan por debajo de las líneas continuas.



Esta definición les servirá de referente para toda la situación de aprendizaje. Sin embargo, la definición es difícil de entender y sobre todo de usar. Para facilitar la comprensión, se recomienda presentar la construcción paso a paso del caso del racional $\frac{2}{3}$. **A continuación se observa la secuencia de pasos de cómo hacer la construcción.**

1. Empezar con un cuadrado.	2. Dividir su lados horizontales en 2 partes iguales (se ponen 1 marca) y los lados verticales en 3 partes iguales (se ponen 2 marcas).	3. Luego se unen las dos marcas más cercanas a la esquina superior izquierda con un recta.
		
4. Se continúa uniendo marcas con rectas paralelas a la ya trazada hasta cubrir todas las marcas (incluyendo las esquinas superior derecha e inferior izquierda).	5. De igual manera se procede uniendo las marcas más cercanas a la esquina superior derecha.	6. Y trazando rectas paralelas a esa. Éstas últimas deberán pensarse como cuerdas que van por debajo de las primeras; para indicar esto las dibujaremos punteadas.
		

Es importante aclarar, que el cuadrado y las marcas no forman parte del enredo, solo sirven como referencia para hacer los trazos. Sugiera a las y los estudiantes remarcar con un color diferente, cada una de las dos cuerdas del enredo resultante (línea continua y línea

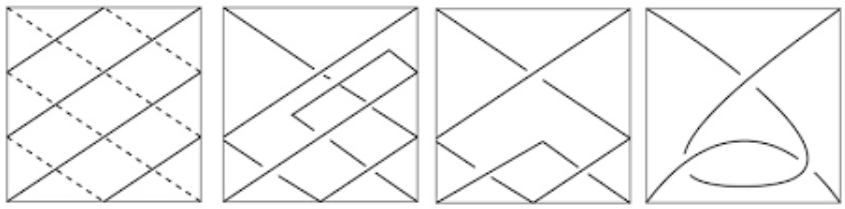
discontinua) a fin de visualizar el enredo resultante.

Los ejercicios planteados en esta parte de la hoja de trabajo son para que las y los participantes entiendan:

- Que el cuadrado sólo es de referencia y no es parte del enredo,
- que efectivamente quedan dibujadas dos cuerdas en cada enredo y,
- que aprendan a dibujar enredos para cualquier racional p/q.

5. **Identificar un racional con un proceso de baile.** En la situación 5 se pide hacer una identificación entre un enredo racional y un enredo aparentemente arbitrario. Pero este enredo es el enredo final que resulta de la situación 1. Se les pide identificar esta relación en la parte b) de la situación. Sin embargo, podría ocurrir que las y los participantes hayan acordado un dibujo distinto al que aquí se presenta, de notar dificultades, podría usted presentar las siguiente variantes del dibujo, mencionar que todas son equivalentes y dedicar un tiempo a visualizar la equivalencia:

Para resolver la parte 3, habrá participantes que aún prefieran proceder con el material. Pero es en este tipo de ejemplos donde el material concreto empieza a mostrar sus limitaciones. Por ejemplo, hacer el enredo racional -⅔ con cuerdas físicas presenta todo un desafío. Para facilitar el abandono del material, puede sugerirles calcar los dibujos usando un lápiz y después modificarlos poco a poco: borrando pedazos de arco y redibujarlos en su nueva posición a fin de entender qué sucede en cada dibujo de la secuencia y explicar la equivalencia entre los enredos:



6. **Describe los enredos que aparecen en el baile TTTRT como enredos racionales.** En la situación 6 de la hoja de trabajo se les pide describir los enredos construidos en la situación 1 con un enredo racional equivalente. Para que esta situación pueda realizarse adecuadamente, es necesario haberse asegurado de que todos tengan muy bien sus dibujos de la situación 1 y de acuerdo al consenso durante la exposición grupal de la situación 2.

   Para facilitarle a las y los participantes encontrar estas relaciones es que ambos enredos racionales resultantes de la situación4.b aparecen en la secuencia TTTRT. Además, como ya se mencionó, el ejemplo de la situación 5 corresponde al último paso. También, uno de los ejemplos en la Definición de enredo racional aparece en esta secuencia.

   La respuestas esperadas son las siguientes:

	Paso 0	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5
Enredo racional ¿Cuál p/q?	0	1	2	3	-1/3	2/3

   El paso 4 y 5 se mostraron en las situaciones anteriores. Los pasos del 1 al 3 son básicamente idénticos. El paso 0 podría parecer que no puede aplicarse la definición de enredo racional, pero puede convencerlos haciendo notar que la recta de pendiente cero es la horizontal.

7. **Rotar enredos racionales.** En la situación 7 de la hoja de trabajo se les pide determinar cómo cambia un enredo racional después de rotar.

   Para algunas personas podría ser inusual hacer pasos de baile sin empezar de la configuración inicial, por lo que podrían entonces

adentrarse en la tarea de buscar las movidas para crear los enredos racionales pedidos para después rotar. Por lo que es buena idea hacer énfasis en que sólo hay que rotar el enredo racional como está, no hay que preocuparse de cómo llegaron a él, sólo queremos saber el racional resultante.

De haber dificultades para entender la consigna, puede usted preguntar cómo rotar el enredo racional 3. Como respuesta se obtiene un enlace racional equivalente al -⅓. Observando detenidamente la respuesta y el enredo racional ⅓ se puede ver que son distintos, pues las cuerdas de pendiente -⅓ en el primero son las que van por delante y las de pendiente ⅓ por detrás.

Una vez aclarada la consigna, se espera que los participantes puedan llegar solos a observar que al rotar p/q se obtiene -q/p.

8. **Torcer enredos racionales.** Aunque la consigna de la situación 8 es muy parecida a la de la 7, la dificultad es mayor. Ya que al torcer un enredo racional no es inmediato que es nuevamente un enredo racional. Se requiere en este caso hacer modificaciones, para ver que es equivalente a uno.

   Para facilitar esta tarea, hemos pedido primero pedido calcular el caso del 5 y -6. En estos ejemplos, la forma del enredo racional es fácilmente reconocible después de torcer: 6 y -5. Pueden además fácilmente estudiarse con cuerdas. Luego, hemos pedido el $-1/3$, que es el ejemplo estudiado en el paso 5 de la situación 1 y retomado en la situación 6 (pusimos esta sugerencia en la situación).

   Un ejemplo que podría costarles trabajo de calcular es el caso de torcer $1/2$. Para este caso, lo esperado es que hagan una conjetura del comportamiento aritmético de la operación torcer (del mismo modo que hicieron con rotar). La conjetura que se induce es "sumar uno", pues es el comportamiento común de los ejemplos anteriores. Con ello, se conjetura que la respuesta es $3/2$. No se espera que lo justifiquen en este momento, eso se hará en la situación 9.

9. Dé tiempo a las y los estudiantes para que respondan este punto en su hoja de trabajo. Aclare que se trata de una conjetura y que debe verificarse para los casos ya calculados como los de la tabla

7. En caso de que alguna persona participante tenga una conjetura inválida que se verifica para los casos ya calculados, es decisión de la o el tallerista proporcionarle algún ejemplo que no cumpla su conjetura o bien permitirle avanzar en espera de que su conjetura falle para resolver los ejercicios que se presentan posteriormente en su hoja de trabajo.

Después de la discusión, se recomienda señalar a las y los participantes que es válido el siguiente hecho general:

Reglas de transformación de enredos racionales.
Regla torcer: El torcido de un enredo racional p/q es equivalente a un enredo racional $p/q + 1$.

$$T\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} + 1$$

Regla Rotar: El rotado de un enredo racional p/q es equivalente al enredo racional $-q/p$

$$R\left(\frac{p}{q}\right) = -\frac{q}{p}$$

← E

Para asegurarse de que se entienden las reglas, puede poner un par de ejemplos donde se varíen los signos y las formas de las fracciones. Por ejemplo, $R(\frac{-1}{3}) = 3$, $R(11) = \frac{-1}{11}$), $R(\frac{7}{5}) = \frac{-5}{7}$.

10. Es normal que a las y los estudiantes les tome un tiempo entender la pregunta, ya que la pregunta plantea una sutil diferencia entre enredos obtenidos por baile y enredos racionales. Trate de aclarar esta sutil diferencia en caso de notar confusión. También puede ser complicado para ellas y ellos elaborar una justificación ante tal hecho. Puede ayudarles dando pistas como que el cero sería el estado inicial (cuando aún no se hacen pasos de baile) y luego, como ya vimos, cada que se aplica rotar y torcer a un enredo racional queda un enredo racional.

11. Para este punto se deben aplicar las reglas de transformación de enredos racionales, que se traduce en aplicar las transformaciones una a una empezando desde el 0.

Por ejemplo:

Para encontrar el racional asociado a **TTTTRTTR**, se procede como sigue

$$0 \xrightarrow{T} 1 \xrightarrow{T} 2 \xrightarrow{T} 3 \xrightarrow{T} 4 \xrightarrow{R} -\frac{1}{4} \xrightarrow{T} \frac{3}{4} \xrightarrow{T} \frac{7}{4} \xrightarrow{R} -\frac{4}{7}$$

En el caso **TTTRTRTTRT** sería así

$$0 \xrightarrow{T} 1 \xrightarrow{T} 2 \xrightarrow{T} 3 \xrightarrow{R} -\frac{1}{3} \xrightarrow{T} \frac{2}{3} \xrightarrow{R} -\frac{3}{2} \xrightarrow{T} -\frac{1}{2} \xrightarrow{T} \frac{1}{2} \xrightarrow{R} -2 \xrightarrow{T} -1$$

12. El último ejercicio de la hoja de trabajo, pregunta por cómo desenredar cualquier enredo. Para este punto quienes participan podrán ver que la consigna de desenredar cualquier enredo consiste en transformar el número racional en 0 aplicando las reglas **T** y **R**.

    Se puede analizar por ejemplo, el caso de desenredar n torceres. De aquí hay dos posibles caminos que se pueden seguir que llevan a dos soluciones distintas. A continuación los describimos.

    Camino 1 Empiece por resolver casos particulares, esto es, dar secuencia de transformaciones para que lleven el n al 0 pero apoyándose ahora de la exploración con las operaciones que se aplican a los racionales. Por ejemplo, pueden encontrar que **RTRTT** lleva el 2 al 0; y que, **RTRTTRTT** lleva el 3 al 0, y que **RTRTTRTTRTT** lleva el 4 al cero, y así sucesivamente. Ya que se tienen las secuencias escritas y ordenadas en (por ejemplo) una tabla, se mueven a buscar patrones. Un patrón que se puede reconocer fácilmente es que cada vez que aumentamos en 1 el número n, debemos extender la secuencia por RTT al final como se muestra:

$$2 \xrightarrow{\text{RT RTT}} 0$$
$$3 \xrightarrow{\text{RT RTT RTT}} 0$$
$$4 \xrightarrow{\text{RT RTT RTT RTT}} 0$$

    Concluyendo pues que la secuencia: RT seguido de la secuencia RTT $(n-1)$-veces desenreda a n. Para una

justificación más formal, puede incluso pedir justificar el resultado de aplicar RTT al enredo representado por n. Por ejemplo,

$$n \overset{\text{RT}}{\to} \frac{n-1}{n} \overset{\text{RTT}}{\to} \frac{n-2}{n-1}$$

Esto justificaría que al aplicar $(n-1)$ veces RTT al enredo $\frac{n-1}{n}$ llegaremos al enredo $\frac{0}{1}$.

Observe que al aplicar **RTT** a la fracción $\frac{n-1}{n}$ se resta uno, tanto en el numerador como en el denominador, para obtener $\frac{n-2}{n-1}$. Si se repite el proceso $n-1$ veces, se restarán $n-1$ en el numerador y $n-1$ en el denominador, logrando la fracción $\frac{0}{1}$.

Camino 2 Sugiera a los participantes que busquen una sucesión de pasos que lleven el racional del n al $n-1$. Si el participante es versado en el álgebra, podrá darse cuenta sin tener que hacer muchos casos (o ninguno) que la secuencia RTRTR logra esto. De aquí, se concluye que realizando esta secuencia n veces se logrará llegar al cero. Por ejemplo, para ir del 5 al 0 tendríamos que hacer 5 veces la secuencia **RTRTR**.

Cierre

Realizar una reflexión grupal con algunas de las siguientes preguntas:

a) ¿Por qué es útil asignar números a los enredos que resultan de las movidas de baile? Una conveniencia de esto que el grupo puede identificar es que esta traducción nos ha permitido reconocer patrones y comportamientos generales que nos han ayudado a identificar las secuencias de pasos que desenredan un enredo a partir de reconocer la secuencia de pasos que las produjeron.

b) ¿Cómo se pueden poner a prueba las conjeturas en matemáticas? ¿Qué ocurrió con los experimentos que hicimos? Recor-

demos que el propósito de nuestra situación siempre es desenredar los enredos. En este sentido, siempre que proponemos una regla nos tenemos que convencer de que ésta aplicará a cualquier caso con el que nos podamos enfrentar.

c) ¿Habrá alguna receta para desenredar cualquier enredo creado con los pasos de baile T y R? Podemos aprovechar las representaciones aritméticas y gráficas que hemos construido para tratar de descubrir una estrategia, aprovechando que estas formas de codificar nos permiten proponer y poner a prueba reglas generales.

Momento 3

Inicio

El objetivo de esta situación es crear un algoritmo que sea capaz de desenredar cualquier enredo de la cual conozcamos el número asociado a él. Para esto será conveniente considerar que sospechamos que torcer es sumar 1 y rotar es cambiar x por $-1/x$.

Desarrollo

Para convencer a las y los estudiantes que el número obtenido al torcer un enredo con número asociado p/q es $p/q + 1$, y que el número obtenido de rotar un enredo con número asociado p/q es $-q/p$, se propone explorar el efecto de ambas operaciones:

1. Desde el punto de vista de cuerdas, ¿qué significa desenredar?
   Se busca que las y los estudiantes puedan notar, ya sea con cuerdas físicamente o con esquemas en papel de un enredo, que desenredar significa llevar a cabo una sucesión de pasos de baile *torcer* y *rotar* que eventualmente termine en la configuración de paralelas horizontales.

2. Desde el punto de vista numérico, ¿qué significa desenredar?
   La idea es que el grupo esté de acuerdo en que si x representa un enredo, lo que se busca es llegar de x a 0 usando una secuencia de pasos T y R.

3. ¿Son equivalentes el llevar x a 0 y el desenredar un enredo?

4. Si torcer es sumar uno, es decir, si $T(p/q) = p/q + 1$ ¿cuándo conviene torcer?

5. Si rotar es el negativo del inverso multiplicativo, es decir, $R(p/q) = -q/p$, ¿cuándo conviene rotar?

   Al dirigir una conversación con el grupo para revisar una propuesta de algoritmo o hacer un recuento de los distintos intentos, conviene poner atención a las siguientes observaciones:

a) El resultado de torcer es un número mayor que el que representaba al enredo antes de torcer;

b) rotar cambia el signo e intercambia el numerador por el denominador;

c) deseamos hacer una combinación de esas operaciones para poder llegar a cero.

N →

Con estas observaciones se llega al algoritmo cuyo diagrama de flujo se muestra en la figura **??**.

- Hasta ahora logramos encontrar un algoritmo que permite llegar de un racional $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ al $\mathfrak{0}$ por medio de las operaciones $\mathbf{T}$ y $\mathbf{R}$. Es pertinente en este momento preguntar si ya terminamos. Es decir, si este algoritmo realmente desenreda enredos o sólo manda números al $\mathfrak{0}$. Dicho de otra forma, hasta ahora hemos supuesto que torcer es equivalente a la operación $\mathbf{T}$ que se aplica a los racionales y que rotar es equivalente a la operación $\mathbf{R}$, pero no hemos demostrado esta coincidencia. ¿Será cierto que esto sucede?

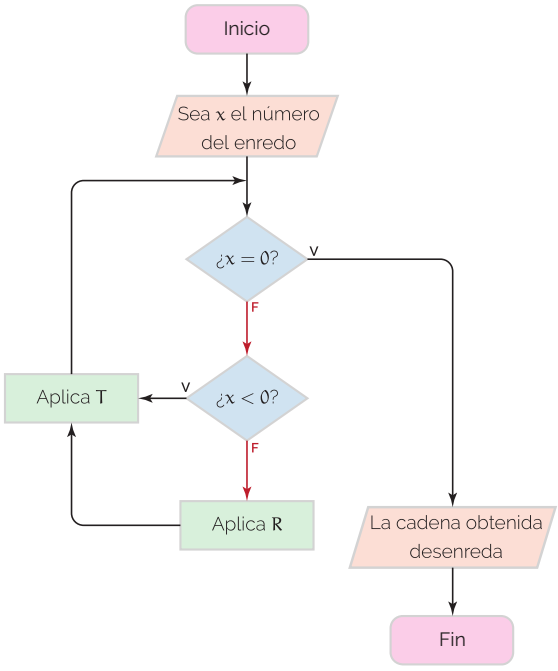


Diagrama de flujo del «Algoritmo desenredador»

6. Ya con el algoritmo en mano, retomamos la pregunta 3. ¿Son equivalentes el llevar x a 0 y el desenredar un enredo?
   Para contestar esta pregunta se pueden tomar distintos caminos. Presentamos el siguiente:

   Cuerdas: En una primera aproximación de convencimiento, el asumir que $T(x) = x + 1$ y $R(x) = -1/x$, nos permite asociar números a enredos generados desde la posición inicial (con valor 0) al aplicar una secuencia de torceres y rotares.
   Se pide que hagan distintos enredos tan complicados como quieran y que para cada uno de ellos realicen lo siguiente:

   a) Anoten la secuencia de torceres y rotares del enredo,

   b) calculen el número x asociado al enredo,

   c) obtengan la secuencia de pasos utilizando el algoritmo para llegar de x a 0,

   d) apliquen esa secuencia al enredo.

Los argumentos que hemos presentado hasta ahora no completan una demostración formal, porque esto tomaría más tiempo y está fuera del alcance de esta actividad. Nos parece que lo más valioso es que emerjan las ideas fundamentales para el diseño de este algoritmo.

Cierre

De forma plenaria un equipo al frente del grupo lleva a cabo un baile con los pasos dados en grupo. Se oculta el enredo creado envolviéndolo en una bolsa o algo similar.

Usando el algoritmo propuesto se llevan a cabo los pasos para desenmarañar el enredo. Finalmente se quita (se requerirá romper o cortar) la bolsa y al jalar los extremos …¡Sorpresa! ¡No hay enredo!

Orientaciones didácticas

Enteros y racionales. Al utilizar la notación de números racionales conviene hacer notar que en un número entero se considera el denominador igual a 1.

A →

Eliminar rotaciones consecutivas. Al intentar reducir las secuencias, es posible que las y los estudiantes deduzcan que realizar varias rotaciones consecutivas puede ser innecesario. Realizar esta observación al rotar cuatro veces es inmediato. Considerarlo con al rotar dos veces consecutivas es algo que puede surgir en ejemplos concretos (por ejemplo, a partir de rotar n veces) y que puede intentar incorporarse al tratar de reducir la longitud de una cadena de operaciones.

← B

Buscar una representación eficiente. Durante la puesta en común de las soluciones, se sugiere motivar conversaciones con el grupo para establecer representaciones comunes a través de dibujos donde, por ejemplo:

- se distinga qué cuerdas pasan encimas de otras y
- las secuencias de pasos puedan señalarse por medio de secuencias de estados que utilicen flechas y etiquetas para indicar las operaciones realizadas.

← C

Motivar el reconocimiento de un patrón. Si ninguno de los equipos encuentra regularidades en las soluciones, es posible hacer a la vista de todos una tabla que recopile las distintas soluciones que los equipos generaron, para posteriormente pedirles que comprueben las soluciones que les resulten nuevas y que aprovechen el registro colectivo para seguir buscando una solución general. Si faltara alguna de las soluciones de la forma RTRTT...RTT, es posible anotarla y pedir que comprueben si funciona. Si el grupo no puede encontrar la regularidad, se propone resaltar aquellas cadenas que la sugieren y moderar una conversación sobre las posibles regularidades.

← D

Identificar enredos ya explorados. Al trabajar con esta representación es posible darse cuenta de que al comenzar en un enredo con n torceduras y aplicar RTRTR volvemos a encontrar el nodo con $n-1$ torceduras. Esta observación, en particular, puede utilizarse para responder de manera general como desenredar un nodo con n torceduras.

La notación de función $f(x) = y$ representa que al aplicarle f a x lo lleva a y. Es decir, que f manda a x en y, o bien, $x \xrightarrow{f} y$.

← E

Reconocer las ideas. El planteamiento de esta situación supone que las y los estudiantes realicen exploraciones de forma individual. Es posible que las ideas señaladas en el desarrollo no aparezcan en orden, ni

← F

tampoco se enuncien inicialmente de manera formal. Es importante que la conversación, en la medida de lo posible, aproveche las preguntas para identificar en los planteamientos de quienes participan las ideas que permitan introducir las distintas representaciones de los enredos y sus operaciones. En todo momento se desea que las representaciones aritméticas y gráficas aparezcan como parte de una necesidad para expresar observaciones que se realizaron en la exploración de los enredos.

G → **¿Qué «número» representa a R? desde 0** Tras la identificación de los enredos con los números racionales y de la asignación de operaciones aritméticas para rotar y torcer, cabe preguntarse con qué podemos identificar al enredo generado por un sólo rotar.

Sabemos que:

- si rotamos de nuevo obtenemos la identidad;
- si torcemos no pasa nada.

Preguntando al grupo sobre una posible asignación para R, es posible que alguna de las personas que participa proponga que le corresponde el ∞ y realice una comprobación de que, al aplicar extender las operaciones aritméticas a este valor, se verifican ambas observaciones.

Planeación sugerida

Sesión	Duración	Objetivos
Momento 1	90 minutos	Llegar a plantear la pregunta: ¿Podrás desenredar n torceres?
Momento 2	90 minutos	Lograr plantear las operaciones que relacionan los torceres y rotares con los números racionales. Poner a prueba las hipótesis con algunos enredos. Llegar a la idea de la utilidad de crear estructuras consistentes.
Momento 3	90 minutos	Crear el algoritmo desenredador Concluir con el desenredo de la maraña oculta.

Extensiones

Interpretación geométrica y MCD

Supongamos que tenemos un enredo cuya fracción asociada es $a = \frac{m}{n}$.Sabemos que $T(a) = a+1$ y que $R(a) = -\frac{1}{a}$. En nuestro caso tenemos entonces que $T(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} + 1 = \frac{m+n}{n}$ y que $R(\frac{m}{n}) = -\frac{n}{m}$.

Si al número $\frac{m}{n}$ le asociamos la recta por el origen con pendiente $\frac{m}{n}$, esta recta pasará por $(0,0)$ y por (n,m). Ahora, al aplicar T a $\frac{m}{n}$ obtenemos que $T(\frac{m}{n}) = \frac{m+n}{n}$ y su recta asociada pasará ahora por $(0,0)$ y $(n, m+n)$, es decir, la nueva recta simplemente pasa por el punto que está n unidades arriba del original.

La rotación tiene una interpretación mucho más simple. Al aplicar R obtenemos la recta que pasa por el origen y que es perpendicular a la recta dada.

Podemos usar el baile de enredos para calcular el Máximo común divisor (MCD) de dos números enteros usando una variante del algoritmo de Euclides.

Dados dos números enteros a y b distintos de cero, aprovechando la interpretación geométrica del desenredo, consideramos el punto en el plano cartesiano con coordenadas (a, b).

Aplicamos el algoritmo del desenredo. El denominador del último paso antes de llegar a cero será el MCD de a y b.

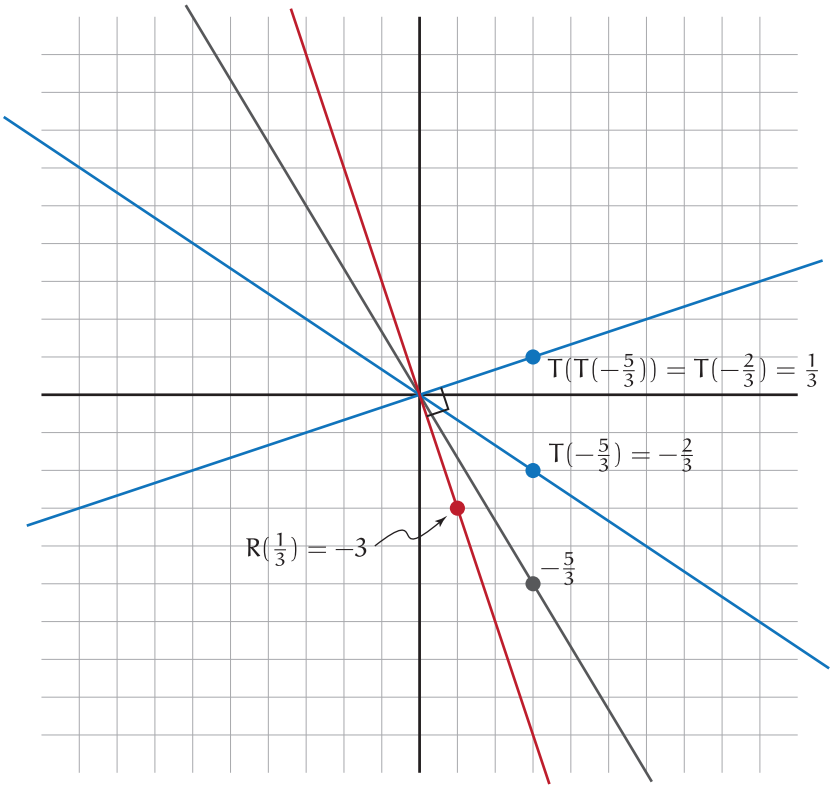
Por ejemplo. Para calcular el MCD de 9 y 24, tenemos que el punto inicial es $(9, 24)$ y la recta asociada que pasa por el origen tiene entonces pendiente $\frac{24}{9}$. Entonces, la sucesión de pasos queda así:

$$\frac{24}{9} \xrightarrow{R} \frac{-9}{24} \xrightarrow{T} \frac{15}{24} \xrightarrow{R} \frac{-24}{15} \xrightarrow{T} \frac{-9}{15} \xrightarrow{T} \frac{6}{15} \xrightarrow{R} \frac{-15}{6} \xrightarrow{T} \frac{-9}{6} \xrightarrow{T} \frac{-3}{6} \xrightarrow{T} \frac{3}{6} \xrightarrow{R} \frac{-6}{3} \xrightarrow{T} \frac{-3}{3} \xrightarrow{T} 0$$

con lo que obtenemos que el MCD de 9 y 24 es 3.

Árboles de búsqueda

Como una actividad adicional entre el segundo y el tercer momento, previo a encontrar el algoritmo que lleva cualquier enredo al que corresponde al "0", podría ser conveniente introducir los árboles de búsqueda como una estrategia para representar y organizar información.



Interpretación geométrica de *torcer* y *rotar*: Al número $-\frac{5}{3}$ le corresponde la recta (en negro) que pasa por el origen y por el punto $(3, -5)$. Al torcer $-\frac{5}{3}$ obtenemos $\frac{-5+3}{3} = -\frac{2}{3}$. Esto es, el punto $(3, -5)$ subió tres unidades para llegar al $(3, -2)$. Al torcer de nuevo llegamos al punto $(3, 1)$. A estos torceres les corresponden las rectas azules. Ahora, si rotamos $\frac{1}{3}$ obtenemos $-\frac{3}{1} = -3$, que corresponde a la recta roja, que es perpendicular a la azul obtenida después de haber torcido dos veces.

Hasta ese momento es posible que, para abordar la situación, se hayan utilizado distintas representaciones, incluyendo hacer enredos con cuerdas, hacer dibujos libres, dibujos, secuencias de letras que indican las operaciones aplicadas desde un estado inicial y números racionales.

Se puede proponer que, conversando en grupos pequeños, se ordenen las representaciones usadas de acuerdo a su conveniencia para:

- Identificar de qué enredo se trata sin ambigüedad.

- Comunicarnos con otras personas haciendo referencia a los enredos.
- Aplicar operaciones y anticipar los resultados.
- Recordar cuáles pasos nos llevaron a ese estado.
- Reconocer cuándo dos enredos son equivalente.

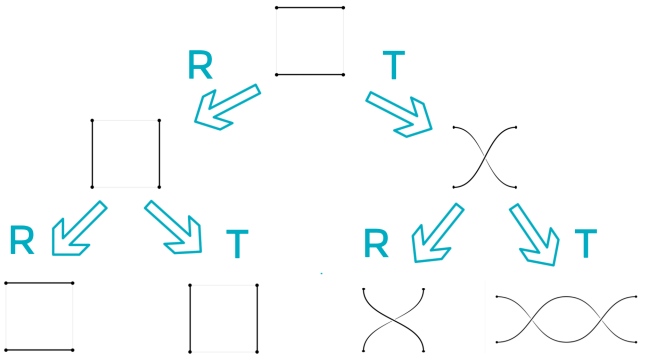
Se anticipa que, por ejemplo, las representaciones gráficasy con números racionales ayudarán a eliminar la ambigüedad, siendo que estas últimas ayudan a intuir una forma de representar las operaciones, lo cual es muy difícil de visualizar utilizando las primeras. Por otra parte, los dibujos pueden ayudar a la comunicación, aunque aquellos que no utilizan los diagramas con líneas rectas pueden complicar el identificar equivalencias entre los enredos. Finalmente, la única forma de recordar los pasos que produjeron un estado es necesario recurrir directamente a hacer el registro la secuencia de acciones aplicadas.

Aprovechando las respuestas y observaciones generadas en este primer momentos de la situación, se puede organizar una discusión en plenaria en torno a la pregunta ¿cómo podemos hacer una representación que nos ayude a explorar ordenadamente? A partir de las respuestas, se sugiere generar un listado de las características que son convenientes para organizar la búsqueda de una solución ante el universo de posibilidades; por ejemplo:

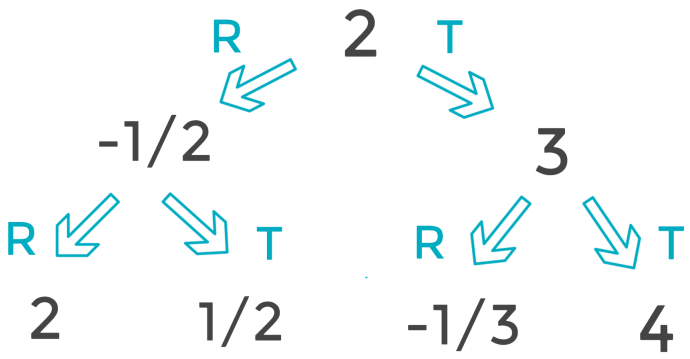
- Que permita considerar todas las operaciones posibles y sus resultados, partiendo desde un estado particular.
- Que ayude a explorar caminos ordenadamente, sin perder la secuencia.
- Que facilite identificar cuando llegamos a un paso que ya habíamos encontrado antes, para reducir nuestra búsqueda.
- Que permita registrar los puntos en donde hemos tomado decisiones, para poder retomarlos y considerar caminos alternativos.

Una forma de construir una representación con estos rasgos es dibujar un árbol de búsqueda, comenzando con el enredo dado inicialmente y

conectando todas las opciones posibles en cada paso. Para iniciar esta construcción basta dibujar la posición original y considerar qué pasa si se aplica cada una de las operaciones disponibles. A partir de cada uno de los estados que resultaron, podemos repetir la operación. Esto se puede repetir iterativamente. Poco a poco obtendremos una figuras como las siguientes:



Árbol de búsqueda con dibujos, registrando las acciones aplicadas.



Árbol de búsqueda con números racionales, incorporando la interpretación de rotar y torcer como operaciones aritméticas.

Para cerrar esta situación, se puede proponer al grupo que utilicen un árbol de búsqueda para presentar el algoritmo que desenreda $\mathbf{n}$ torceres y argumentar con él por qué funciona siempre.

Para saber más

1. Tom Davis.Conway'sRationalTangles. 2017. `http://geometer.org/mathcircles/tangle.pdf`.
2. Cecilia Neve y Laura Rosales.Porlasendadeloscírculos. México:papirhos, IM-UNAM, 2017.
3. James Tanton.UnderstandingRationalTangles.2012.

   `https://www.mathteacherscircle.org/assets/session-materials/JTantonRationalTangles.pdf`

Esta situación está basada en la actividad *Enredos racionales* de los *Círculos matemáticos del Instituto de Matemáticas de la UNAM*. Incorpora el trabajo realizado a manera de diseño colaborativo por la *Red de Enseñanza Creativa de las Matemáticas* y forma parte de las acciones del *Programa Nacional de Investigación e Incidencia de Enseñanza de las Matemáticas del CONACyT*.

Anexo

A continuación se presentan soluciones más detalladas, paso a paso, de la equivalencia de las tres parejas de nudos faltantes en la pregunta 3 de la Hoja de Trabajo.

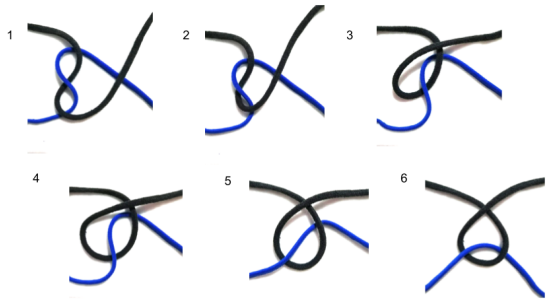


Figura 8: Pareja 1.

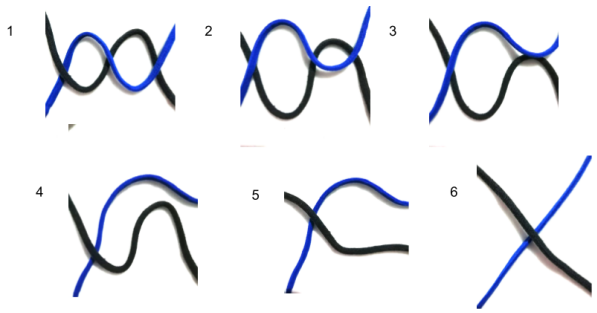


Figura 9: Pareja 2.

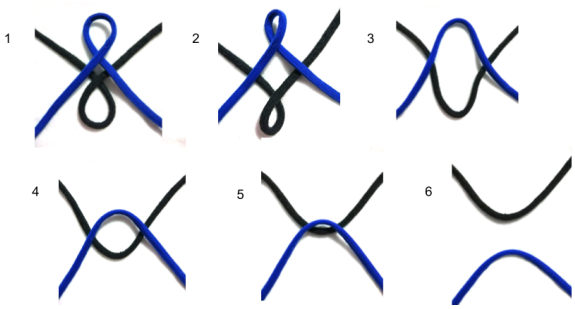


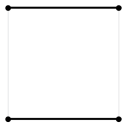
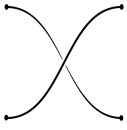
Figura 10: Pareja 3.

Anexo
Versión para estudiantes

Hoja de trabajo A1

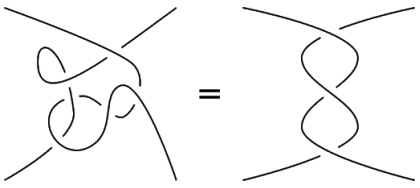
1. Sigue los pasos de baile con las dos cuerdas que aprendiste anteriormente para la sucesión de pasos T T T R T y completa la tabla con los dibujos que correspondan a cada paso.

   Asegúrate de que se note, en cada dibujo, cuál cuerda pasa por arriba y cuál por abajo.

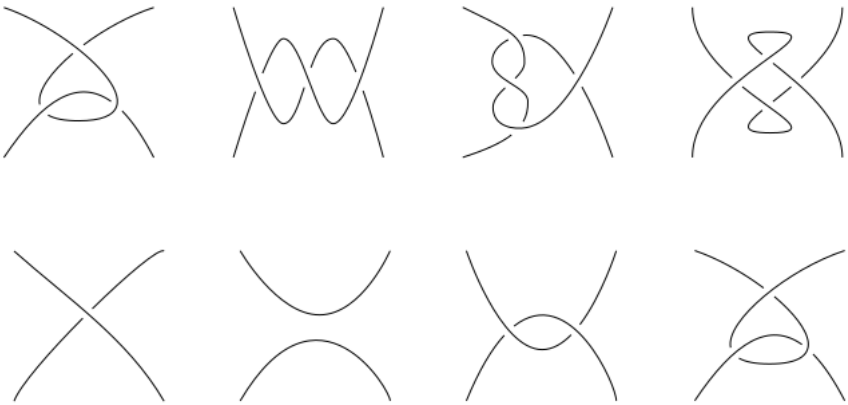
Paso 0. Inicio	Paso 1. Torcer	Paso 2. Torcer de nuevo	Paso 3. Torcer otra vez	Paso 4. Rotar	Paso 5. Torcer
					

2. Compara lo anterior con tus compañeras y compañeros y corrige de ser necesario.

   Definición: Se dice que dos enredos son equivalentes, es decir, son el mismo, si podemos modificar uno en el otro moviendo las cuerdas sin despegar ni tocar las cuatro esquinas y permitiendo estirar y doblar las cuerdas pero sin romperlas. Por ejemplo los siguientes dos enredos son equivalentes

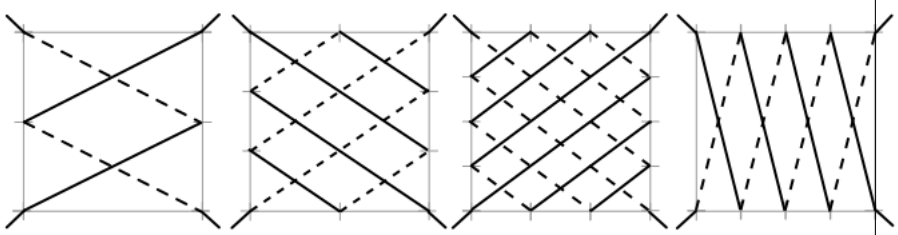
   

3. Usando la definición de equivalencia mencionada arriba, relaciona los diagramas de enredos del primer renglón con su equivalente en el renglón de abajo.



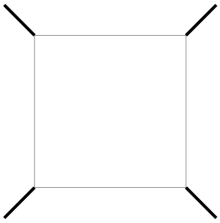
4. Ahora te presentamos una definición que nos servirá para describir muchos de los enredos que hemos construido. Lee la definición con cuidado y realiza lo que se te pide.

Definición: Un enredo racional $\frac{p}{q}$ es un enredo cuyas cuerdas inician y terminan en las esquinas de un cuadrado unitario y se forman por segmentos de pendiente $\frac{p}{q}$ o $-\frac{p}{q}$ dentro del cuadrado.
Las rectas de pendiente p/q van por encima de las de pendiente $-\frac{p}{q}$.
A continuación se muestran de izquierda a derecha los enredos racionales $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ y -4. En estos diagramas las líneas punteadas indican que las cuerdas pasan por debajo de las líneas continuas.

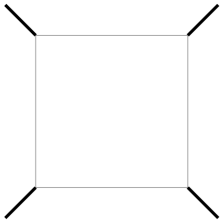


a) En cada uno de los diagramas de la figura anterior, pinta las dos cuerdas de dos colores distintos.

b) Dibuja los enredos racionales $-\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

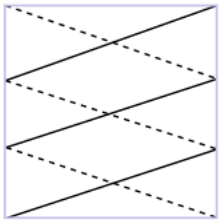


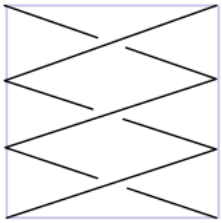
(a) Enredo racional $-\frac{1}{3}$

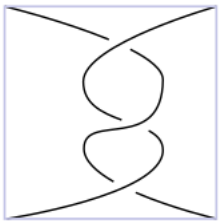


(b) Enredo racional $\frac{2}{3}$

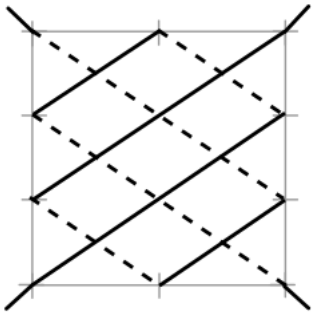
Observación: Como ya se dijo, los enredos racionales tienen dos cuerdas, y al igual que con los enredos del baile, las puedes doblar y estirar de todos lados excepto de las 4 esquinas. Por ejemplo, a continuación se muestran distintos diagramas que representan el mismo enredo racional $\frac{3}{4}$.

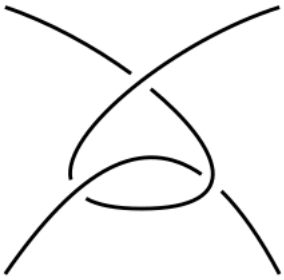






5. Observa la figura y responde.

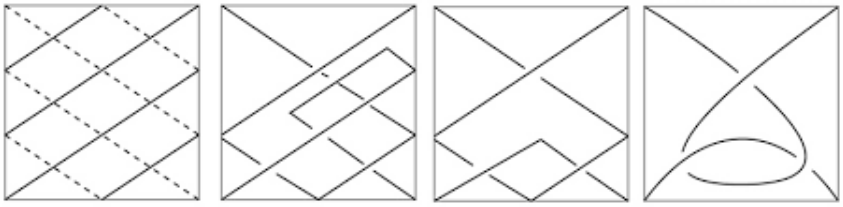




a) ¿A que número racional corresponde el enredo racional de la izquierda?_____

b) ¿Con qué pasos de baile se puede obtener el enredo de la derecha?_____

c) Los dos enredos son equivalentes. Utiliza los dibujos para explicar esta equivalencia.



6. Para cada uno de los enredos que dibujaste en la tabla del situación 1, decide si es equivalente a algún enredo racional e indica el racional correspondiente.

	Paso 0	Paso 1	Paso 2	Paso 3	Paso 4	Paso 5
Enredo racional ¿Cuál p/q?						

Como has observado, el resultado de los pasos de baile son enredos que han resultado ser racionales. Esto pasa en general, en las siguientes situaciones nos convenceremos de ello.

7. Completa la tabla indicando en cada caso qué enredo racional resulta después de hacer el paso de baile Rotar.

Enredo racional	3	1/2	3/5	p/q
Después de rotar				

Explica qué resulta al rotar $\frac{p}{q}$._____.

8. Completa la tabla indicando en cada caso qué enredo racional resulta después de hacer el paso de baile Torcer. Sugerencia: Revisa las situaciones 5 y 6 para responder qué pasa al torcer $-\frac{1}{3}$.

Enredo racional	5	-6	$-1/3$	1/2
Después de torcer				

9. ¿Qué resulta de torcer $\frac{p}{q}$?.Explica tu respuesta._____.
10. ¿Cómo se puede concluir que los enredos a través del baile son siempre enredos racionales? Escríbelo con tus palabras:

    _____

    _____

    _____

11. Practica lo que hemos descubierto. Sin hacer dibujos, para cada una de las siguientes secuencias de baile, calcula el racional que le corresponde:

    a) T T T T R T T R : _____

    b) T T T R T R T T R T: _____

12. ¿Podemos usar lo que hemos aprendido para desenredar enredos?

    _____

    _____

    En la siguiente momento de la situación seguiremos explorando esta pregunta.