SERIE
SCHAUM

TRIGONOMETRIA PLANA Y ESFERICA

FRANK AYRES, JR.

TEORIA Y
680
PROBLEMAS RESUELTOS

schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS

DE

TRIGONOMETRIA

Plana y Esférica

FRANK AYRES, JR., Ph. D.
Profesor y Jefe del Departamento
de Matemática del
BRUCE *Dickinson College*

UP THE IRONS !!

TRADUCCION Y ADAPTACION
ANTONIO LINARES
Profesor de Matemáticas de la Universidad del Valle
Cali

McGRAW-HILL

Bogotá, Buenos Aires, Caracas, Guatemala, Lisboa, Madrid, México,
Nueva York, Panamá, San Juan, Sao Paulo,
Auckland, Hamburgo, Londres, Montreal, Nueva Delhi, París,
San Francisco, San Luis, Sidney, Tokio, Toronto.

Traducido de la primera edición de TRIGONOMETRY
Theory and Problems

ISBN 968-451-176-0

1234567890 9123456780

Impreso en Colombia *Printed in Colombia*

Se imprimieron 5.000 Ejemplares en el mes de Julio de 1990.

Impresor: FORMAS e IMPRESOS PANAMERICANA, Bogotá, Colombia

Prólogo

El propósito fundamental de este libro es servir de ayuda a los que se inician en el estudio de la trigonometría y para ello les presenta una colección de problemas representativos, completamente resueltos. Al mismo tiempo, el arreglo del material que contiene es tal que servirá como un manual práctico para quienes deseen repasar los principios fundamentales y sus aplicaciones.

El libro, aunque completo, no se ha escrito en el estilo formal de los libros de texto. Cada capítulo contiene un compendio de las definiciones y teoremas necesarios, seguido de un conjunto de ejercicios cuya dificultad se ha graduado debidamente. Las demostraciones de los teoremas y las deducciones de las fórmulas se incluyen entre los problemas resueltos. Estos, a su vez, van seguidos por un conjunto de problemas propuestos con sus respuestas.

Los aspectos numéricos de la trigonometría plana se han tratado ampliamente. Igual atención se ha prestado a las soluciones logarítmicas y no-logarítmicas de los triángulos rectángulos y oblicuángulos. Las aplicaciones son muchas y diversas. Las figuras se han trazado y rotulado cuidadosamente para mayor utilidad; las respuestas se han redondeado de acuerdo con los datos.

Las más sencillas identidades y ecuaciones requieren un conocimiento de álgebra elemental. Los problemas se han seleccionado cuidadosamente, se han explicado con todo detalle las soluciones, y todo el material se ha dispuesto de modo que ilustre claramente tanto los procesos algebraicos como el uso de las relaciones trigonométricas básicas.

Los capítulos dedicados a la trigonometría esférica están precedidos de un capítulo sobre geometría del espacio. La teoría y las fórmulas necesarias para resolver triángulos esféricos rectángulos y oblicuángulos se han explanado suficientemente e incluyen el uso del semisenoverso y de los métodos del triángulo rectángulo para resolver triángulos oblicuángulos. Las aplicaciones consisten en problemas relacionados con rumbo y distancia sobre la superficie de la Tierra y en algunos problemas relativos a la esfera celeste.

Frank Ayres, Jr.

Tabla de materias

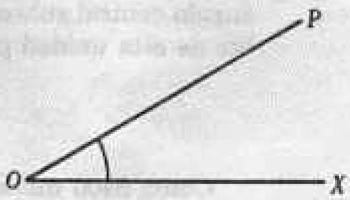
CAPITULO 1

Angulos y longitudes de arco

LA TRIGONOMETRIA, como lo sugiere la misma palabra, trata de las mediciones de las partes o elementos de un triángulo. La trigonometría plana, que se estudiará en varios de los capítulos siguientes, se limita a los triángulos contenidos en los planos. La trigonometría esférica estudia ciertos ángulos trazados sobre esferas.

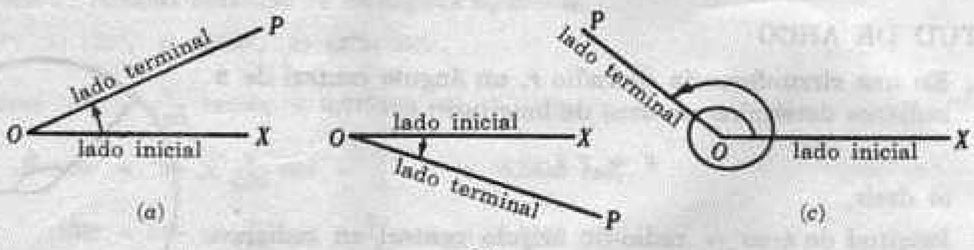
La trigonometría se basa en algunas relaciones, llamadas funciones trigonométricas, que se definirán en el capítulo siguiente. Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en la agrimensura, la navegación y la ingeniería. Estas funciones también desempeñan un papel importante en toda clase de fenómenos vibratorios (sonido, luz, electricidad, etc.). En consecuencia, una gran parte de esta materia se dedica al estudio de las propiedades de las funciones trigonométricas y de las relaciones entre ellas.

EL ANGULO PLANO XOP está formado por las dos semi-rectas secantes OX y OP. El punto O es el *vértice* del ángulo, y las semi-rectas son los lados del ángulo.



Más aún, se puede suponer que un ángulo plano se genera mediante un giro (en un plano) de una semi-recta desde una posición inicial OX hasta una posición terminal OP. Así, el punto O sigue siendo el vértice, OX es el *lado inicial* y OP el lado *terminal*.

1



(a) (b) (c)

Un ángulo así generado es *positivo* si el sentido del giro (indicado por una flecha curvilínea) es contrario al de las agujas de un reloj, y *negativo* si el sentido del giro es el mismo de las agujas de un reloj. Los ángulos de las figuras (a) y (c) son positivos; el de la figura (b) es negativo.

MEDIDAS DE ANGULOS

A. Se define un *grado* (°) como la medida del ángulo central subtendido por un arco igual a 1/360 de la circunferencia.

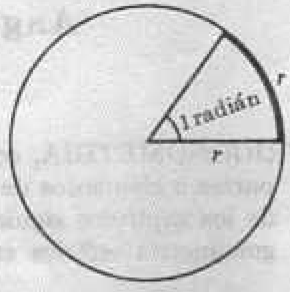
Un *minuto* (′) es 1/60 de un grado; un *segundo* (″) es 1/60 de un minuto.

EJEMPLO 1. *a*) $\frac{1}{4}(36°24') = 9°6'$ *b*) $\frac{1}{2}(127°24') = \frac{1}{2}(126°84') = 63°42'$

c) $\frac{1}{2}(81°15') = \frac{1}{2}(80°75') = 40°37{,}5'$ o $40°37'30''$

d) $\frac{1}{4}(74°29'20'') = \frac{1}{4}(72°149'20'') = \frac{1}{4}(72°148'80'') = 18°37'20''$

B. Se define un *radián* (rad) como la medida del ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es igual a la del radio de la circunferencia.



La longitud de la circunferencia = 2π (radios) y subtiende un ángulo de 360°. Entonces, 2π radianes = 360°, de donde,

$$1 \text{ radián} = \frac{180°}{\pi} = 57{,}296° = 57°17'45'' \quad \text{y}$$

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radián} = 0{,}017453 \text{ rad, aprox.,}$$

donde $\pi = 3{,}14159$.

EJEMPLO 2. *a*) $\frac{7}{12}\pi \text{ rad} = \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{180°}{\pi} = 105°$ *b*) $50° = 50 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5\pi}{18} \text{ rad.}$

(Véanse los problemas 1-3.)

C. Se define un *mil*, unidad utilizada en los estudios militares, como la medida del ángulo central subtendido por un arco igual a 1/6400 de la circunferencia. El nombre de esta unidad proviene de que, aproximadamente,

$$1 \text{ mil} = \frac{1}{1000} \text{ radián.}$$

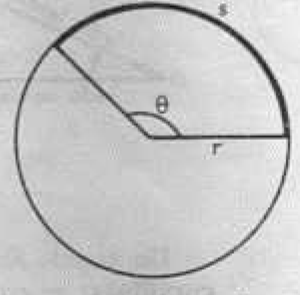
$$\text{Como } 6400 \text{ miles} = 360°,\ 1 \text{ mil} = \frac{360°}{6400} = \frac{9°}{160} \text{ y } 1° = \frac{160}{9} \text{ miles.}$$

(Véanse los problemas 14-16.)

LONGITUD DE ARCO

A. En una circunferencia de radio r, un ángulo central de θ radianes determina un arco de longitud

$$s = r\,\theta,$$



es decir,

longitud de arco = radio × ángulo central en radianes.

(Nota. s y r pueden medirse en cualquier unidad conveniente, pero deben expresarse en la misma unidad.)

EJEMPLO 3. *a*) La longitud del arco determinado por un ángulo central de 1/3 radianes en una circunferencia de 30 pulgadas de radio es

$$s = r\theta = 30\left(\tfrac{1}{3}\right) = 10 \text{ pulgadas.}$$

b) En la misma circunferencia un ángulo central de 50° determina un arco cuya longitud es

$$s = r\theta = 30\left(\tfrac{5\pi}{18}\right) = \frac{25\pi}{3} \text{ pulgadas.}$$

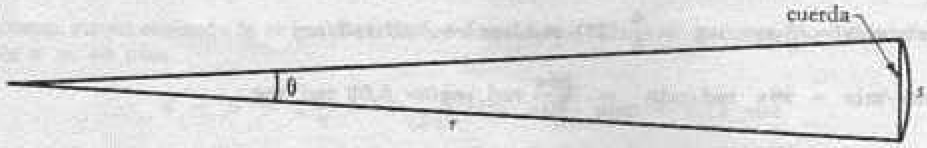
c) En la misma circunferencia un arco cuya longitud es de $1\frac{1}{2}$ pies subtiende un ángulo central.

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \text{ rad, cuando } s \text{ y } r \text{ se expresan en pulgadas,}$$

$$\text{o} \qquad \theta = \frac{s}{r} = \frac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5} \text{ rad, cuando } s \text{ y } r \text{ se expresan en pies.}$$

(Véanse los problemas 4-13.)

B. Si el ángulo central es relativamente pequeño, se puede tomar la longitud del arco como un valor aproximado de la longitud de la cuerda correspondiente.



Ahora, puesto que θ rad $= 1000\,\theta$ miles y $s = r\,\theta = \dfrac{r}{1000}(1000\,\theta)$, se sigue que

longitud de la cuerda $= \dfrac{r}{1000}$ (ángulo central en miles), aproximadamente.

En los estudios militares, la igualdad anterior se expresa mediante la fórmula $W = Rm$, donde m es el ángulo central expresado en miles, R es el radio (alcance) expresado en miles de yardas, y W es la cuerda (abertura) expresada en yardas.

(Véanse los problemas 17-19.)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Expresar en radianes cada uno de los ángulos siguientes:
a) 30°, *b)* 135°, *c)* 25°30′, *d)* 42°24′35″.

Como $1° = \dfrac{\pi}{180}$ radián $= 0{,}017453$ rad,

a) $30° = 30 \times \dfrac{\pi}{180}$ rad $= \dfrac{\pi}{6}$ rad o $0{,}5236$ rad,

b) $135° = 135 \times \dfrac{\pi}{180}$ rad $= \dfrac{3\pi}{4}$ rad o $2{,}3562$ rad,

c) $25°30' = 25{,}5° = 25{,}5 \times \dfrac{\pi}{180}$ rad $= 0{,}4451$ rad,

d) $42°24'35'' = 42° + \left(\dfrac{24 \times 60 + 35}{3600}\right)° = 42{,}41° = 42{,}41 \times \dfrac{\pi}{180}$ rad $= 0{,}7402$ rad.

2. Expresar en grados, minutos y segundos cada uno de los ángulos siguientes:
a) $\pi/3$ rad, *b)* $5\pi/9$ rad, *c)* $2/5$ rad, *d)* $4/3$ rad.

Puesto que 1 rad $= \dfrac{180°}{\pi} = 57°17'45''$,

a) $\dfrac{\pi}{3}$ rad $= \dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{180°}{\pi} = 60°$, *b)* $\dfrac{5\pi}{9}$ rad $= \dfrac{5\pi}{9} \times \dfrac{180°}{\pi} = 100°$,

c) $\dfrac{2}{5}$ rad $= \dfrac{2}{5} \times \dfrac{180°}{\pi} = \dfrac{72°}{\pi}$ o $\dfrac{2}{5}(57°17'45'') = 22°55'6''$,

d) $\dfrac{4}{3}$ rad $= \dfrac{4}{3} \times \dfrac{180°}{\pi} = \dfrac{240°}{\pi}$ o $\dfrac{4}{3}(57°17'45'') = 76°23'40''$.

3. Una rueda gira a razón de 48 rpm (revoluciones por minuto o rev/min). Expresar esta velocidad angular en *a)* rev/seg, *b)* rad/min, *c)* rad/seg.

a) $48 \text{ rev/min} = \dfrac{48}{60} \text{ rev/seg} = \dfrac{4}{5} \text{ rev/seg}$

b) Como 1 rev $= 2\pi$ rad, $48 \text{ rev/min} = 48(2\pi) \text{ rad/min} = 301{,}6 \text{ rad/min}$

c) $48 \text{ rev/min} = \dfrac{4}{5} \text{ rev/seg} = \dfrac{4}{5}(2\pi) \text{ rad/seg} = 5{,}03 \text{ rad/seg}$

o $48 \text{ rev/min} = 96\pi \text{ rad/min} = \dfrac{96\pi}{60} \text{ rad/seg} = 5{,}03 \text{ rad/seg.}$

4. El minutero de un reloj mide 12 cm. ¿Qué distancia recorre la punta del minutero durante 20 minutos?

En 20 minutos la aguja describe un ángulo de $\theta = 120° = 2\pi/3$ rad y la punta de la aguja recorre una distancia de $s = r\theta = 12(2\pi/3) = 8\pi$ cm $= 25{,}1$ cm.

5. Un ángulo central determina un arco de 6 cm en una circunferencia de 30 cm de radio. Expresar el ángulo central θ en radianes y en grados.

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} \text{ rad} = 11°27'33''$$

6. Una vía férrea ha de describir un arco de circunferencia. ¿Qué radio hay que utilizar si la vía tiene que cambiar su dirección en 25° en un recorrido de 120 m?

Se pide encontrar el radio de una circunferencia tal que un ángulo central $\theta = 25° = 5\pi/36$ rad determine un arco de 120 m. Entonces

$$r = \frac{s}{\theta} = \frac{120}{5\pi/36} = \frac{864}{\pi} \text{ m} = 275 \text{ m.}$$

7. Un tren se mueve a razón de 8 millas por hora (mi/hr) sobre una vía circular cuyo radio mide 2500 pies. ¿Qué ángulo describe en un minuto? (1 milla = 5280 pies).

Puesto que $8 \text{ mi/hr} = \dfrac{8(5280)}{60}$ pies/min = 704 pies/min, recorre un arco de longitud $s = 704$ pies

en un minuto. Entonces $\theta = \dfrac{s}{r} = \dfrac{704}{2500} = 0{,}2816$ rad o $16°8'$.

8. Supóngase que la Tierra es una esfera de 3960 millas de radio. Encontrar la distancia que hay desde el ecuador hasta un punto situado a 36°N de latitud.

Puesto que $36° = \dfrac{\pi}{5}$ radián, $s = r\theta = 3960(\dfrac{\pi}{5}) = 2488$ millas.

9. La distancia entre dos ciudades situadas en un mismo meridiano es de 270 kilómetros. Encontrar su diferencia de latitud.

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{270}{3960} = \frac{3}{44} \text{ rad} \quad \text{o} \quad 3°54{,}4'.$$

10. Una rueda de 4 pies de diámetro gira a razón de 80 rpm. Encontrar (en pies) la distancia que recorre en un segundo un punto de borde de la rueda; esto es, la velocidad lineal del punto (en pies/seg).

$$80 \text{ rpm} = 80\left(\frac{2\pi}{60}\right) \text{ rad/seg} = \frac{8\pi}{3} \text{ rad/seg.}$$

Entonces, en un segundo la rueda describe un ángulo $\theta = 8\pi/3$ rad y un punto del borde recorre una distancia $s = r\theta = 2(8\pi/3)$ pies $= 16{,}8$ pies. La velocidad lineal es de 16,8 pies/seg.

11. Encontrar el diámetro de una polea que gira a razón de 360 rpm movida por una correa de 40 pies/seg.

$$360 \text{ rev/min} = 360(\frac{2\pi}{60}) \text{ rad/seg} = 12\pi \text{ rad/seg}.$$

Entonces, en un segundo la polea describe un ángulo $\theta = 12\pi$ rad y un punto del borde recorre una distancia $s = 40$ pies.

$$d = 2r = 2(\frac{s}{\theta}) = 2(\frac{40}{12\pi}) \text{ pies} = \frac{20}{3\pi} \text{ pies} = 2{,}12 \text{ pies}.$$

12. Un punto del borde de una rueda hidráulica de 10 pies de diámetro se mueve con una velocidad lineal de 45 pies/seg. Encontrar la velocidad angular de la rueda en rad/seg y en rev/seg.

En un segundo un punto del borde recorre una distancia $s = 45$ pies. Entonces, en un segundo la rueda describe un ángulo $\theta = s/r = 45/5 = 9$ radianes, y su velocidad angular es 9 rad/seg.

Puesto que 1 rev $= 2\pi$ rad o 1 rad $= \frac{1}{2\pi}$ rev, 9 rad/seg $= 9(\frac{1}{2\pi})$ rev/seg $= 1{,}43$ rev/seg.

13. Determinar la velocidad de la Tierra (en mi/seg) en su recorrido alrededor del Sol. Supóngase que la órbita terrestre es una circunferencia de 93.000.000 millas de radio, y que un año = 365 días.

En 365 días la Tierra recorre una distancia de $2\pi r = 2(3{,}14)(93.000.000)$ millas.

En un segundo recorrerá una distancia de $s = \frac{2(3{,}14)(93.000.000)}{365(24)(60)(60)}$ millas $= 18{,}5$ millas. Su velocidad es de 18,5 mi/seg.

14. Expresar cada uno de los siguientes ángulos en miles: *a*) 18°, *b*) 16°20′, *c*) 0,22 rad, *d*) 1,6 rad.

Puesto que $1° = \frac{160}{9}$ miles y 1 rad = 1000 miles,

a) $18° = 18(\frac{160}{9})$ miles $= 320$ miles, *b*) $16°20' = \frac{49}{3}(\frac{160}{9})$ miles $= 290$ miles

c) 0,22 rad = 0,22(1000) miles = 220 miles *d*) 1,6 rad = 1,6(1000) miles = 1600 miles.

15. Expresar en grados y radianes cada uno de los ángulos siguientes: *a*) 40 miles, *b*) 100 miles.

Puesto que 1 mil $= \frac{9°}{160} = 0{,}001$ rad,

a) 40 miles $= 40(\frac{9°}{160}) = 2°15'$ y 40 miles $= 40(0{,}001)$ rad $= 0{,}04$ rad,

b) 100 miles $= 100(\frac{9°}{160}) = 5°37{,}5'$ y 100 miles $= 100(0{,}001)$ rad $= 0{,}1$ rad.

16. Demostrar que un mil = 0,001 radián, aproximadamente.

$$1 \text{ mil} = \frac{2\pi}{6400} \text{ rad} = \frac{3{,}14159}{3200} \text{ rad} = 0{,}00098175 \text{ rad o, aproximadamente, } 0{,}001 \text{ rad}.$$

17. A una distancia de 5000 yardas una batería cubre un ángulo de 15 miles. Encontrar el campo de abertura de la batería.

$$R = \frac{5000}{1000} = 5, \quad m = 15, \quad y \quad W = Rm = 5(15) = 75 \text{ yardas}.$$

18. Desde un punto de observación en la costa, un barco de 360 pies de longitud subtiende un ángulo de 40 miles. Encontrar la distancia entre la costa y el barco.

$W = 360$ pies $= 120$ yardas, $m = 40$, y $R = W/m = 120/40 = 3$.

La distancia buscada es de 3000 yardas.

19. Se observa que una granada explota a 200 yardas a la izquierda del blanco. ¿Qué corrección angular debe hacerse si el blanco se encuentra a una distancia de *a*) 5000 yardas y *b*) 7500 yardas?

a) La corrección es $m = W/R = 200/5 = 40$ miles, a la derecha.

b) La corrección es $m = W/R = 200/7{,}5 = 27$ miles, a la derecha.

PROBLEMAS PROPUESTOS

20. Expresar en radianes cada uno de los ángulos siguientes:

a) $25°$, *b*) $160°$, *c*) $75°30'$, *d*) $112°40'$, *e*) $12°12'20''$.

Resp. *a*) $5\pi/36$ rad o 0,4363 rad *b*) $8\pi/9$ rad o 2,7925 rad *c*) $151\pi/360$ rad o 1,3177 rad *d*) $169\pi/270$ rad o 1,9664 rad *e*) 0,2130 rad

21. Expresar en grados cada uno de los ángulos siguientes:
a) $\pi/4$ rad, *b*) $7\pi/10$ rad, *c*) $5\pi/6$ rad, *d*) $1/4$ rad, *e*) $7/5$ rad.
Resp. *a*) $45°$, *b*) $126°$, *c*) $150°$, *d*) $14°19'26''$, *e*) $80°12'51''$

22. Dada la circunferencia de 24 pulgadas de radio encontrar la longitud del arco subtendido por un ángulo central *a*) de $2/3$ rad, *b*) de $3\pi/5$ rad *c*) de $75°$, *d*) de $130°$.
Resp. *a*) 16 pul, *b*) $14{,}4\pi$ ó 45,2 pul, *c*) 10π ó 31,4 pul, *d*) $52\pi/3$ ó 54,5 pul

23. Una circunferencia tiene un radio de 30 pulgadas. ¿Cuántos radianes mide un ángulo central subtendido por un arco *a*) de 30 pul, *b*) de 20 pul, *c*) de 50 pul?
Resp. *a*) 1 rad, *b*) $2/3$ rad, *c*) $5/3$ rad

24. Encontrar el radio de una circunferencia tal que un arco de 15 cm de longitud subtiende un ángulo central *a*) de 1 rad, *b*) de $2/3$ rad, *c*) de 3 rad, *d*) de $20°$, *e*) de $50°$.
Resp. *a*) 15 cm, *b*) 22,5 cm, *c*) 5 cm, *d*) 43,0 cm, *e*) 17,2 cm

25. El extremo de un péndulo de 40 cm de longitud describe un arco de 5 cm. ¿Cuál es el ángulo de oscilación del péndulo? *Resp.* $1/8$ rad ó $7°9'43''$

26. Un tren se mueve a razón de 12 mi/hr por una vía curvilínea de 3000 pies de radio. ¿Qué ángulo recorre en un minuto? *Resp.* 0,352 rad ó $20°10'$

27. Un tramo de una vía férrea curvilínea está formado por dos arcos sucesivos. El primer arco corresponde a un ángulo central de $20°$ con un radio de 2500 pies, y el segundo corresponde a un ángulo central de $25°$ con un radio de 3000 pies. Encontrar la longitud total de los dos arcos.
Resp. $6250\pi/9$ pies ó 2182 pies

28. Un volante de 10 pulgadas de radio gira a razón de 900 rpm. ¿A qué velocidad, en pies/seg, se mueve un punto del borde del volante? *Resp.* 78,5 pies/seg

29. La rueda de un automóvil tiene 30 pul de diámetro. ¿Con qué rapidez (rpm) gira la rueda alrededor de su eje cuando el automóvil mantiene una velocidad de 45 mi/hr? *Resp.* 504 rpm

30. Al amolar ciertas herramientas, la velocidad lineal de la muela no debe exceder de 6000 pies/seg. Encontrar el máximo número de revoluciones por segundo *a*) de una muela de 12 pulgadas de diámetro, *b*) de una muela de 8 pulgadas de diámetro.
Resp. *a*) $6000/\pi$ rev/seg o 1910 rev/seg, *b*) 2865 rev/seg

31. Si la rueda de un automóvil, de 32 pulgadas de diámetro, gira a razón de 800 rpm, ¿cuál es, en mi/hr, la velocidad del automóvil? *Resp.* 76,2 mph

32. Expresar en miles cada uno de los ángulos siguientes: *a*) 45°, *b*) 10°15′, *c*) 0,4 rad, *d*) 0,06 rad.
Resp. *a*) 800 miles, *b*) 182 miles, *c*) 400 miles, *d*) 60 miles

33. Expresar en grados y en radianes cada uno de los ángulos siguientes: *a*) 25 miles, *b*) 60 miles, *c*) 110 miles.
Resp. *a*) 1°24′ y 0,025 rad, *b*) 3°22′ y 0,06 rad, *c*) 6°11′ y 0,11 rad

34. La pared lateral de un hangar situado a 1750 yardas subtiende un ángulo de 40 miles. ¿Cuál es la longitud de la pared? *Resp.* 70 yardas

35. Un globo aerostático de 120 pies de largo está suspendido directamente sobre un punto de observación. Si el ángulo subtendido por el globo es de 50 miles, ¿a qué altura se encuentra? *Resp.* 800 yardas

36. Desde un bote que se encuentra en el mar, se observa que el ángulo de elevación de un risco es de 12 miles. Si se sabe que la altura del risco es de 90 pies, ¿a qué distancia del risco está situado el bote?
Resp. 2500 yardas

37. Una colina, cuya altura es de 180 pies, subtiende un ángulo de 30 miles al ser observada desde un punto situado en el terreno llano. Desde el mismo punto de observación, se divisa, en la falda de la colina, una trinchera de artillería con un ángulo de elevación de 12 miles. ¿A qué altura, sobre la base de la colina, se encuentra la trinchera? *Resp.* 72 pies

CAPITULO 2

Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

ESCALA NUMERICA. Una *recta dirigida* es una recta en la que se han señalado dos sentidos: uno positivo y otro negativo. El sentido positivo se indica con una flecha.

Se determina una *escala numérica* cuando se escogen un punto O (véase la Fig. 2-A), llamado *origen*, y una unidad de medida $OA = 1$, en una recta dirigida. En esta escala, B está situado a 4 unidades a la derecha de O (esto es, en el sentido positivo a partir de O) y C está a dos unidades a la izquierda de O (esto es, en el sentido negativo a partir de O).

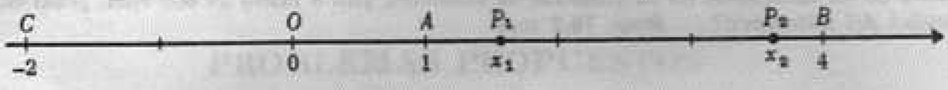


Fig. 2-A

La distancia dirigida $OB = +4$ y la distancia dirigida $OC = -2$. Es importante observar que, puesto que la recta está dirigida, $OB \neq BO$ y $OC \neq CO$. La distancia dirigida $BO = -4$, porque se mide en sentido contrario al que se ha tomado como positivo, y la distancia dirigida $CO = +2$. Entonces $CB = CO + OB = 2 + 4 = 6$ y $BC = BO + OC = -4 + (-2) = -6$.

UN SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES en un plano consiste en dos escalas numéricas (llamadas *ejes*), una horizontal y otra vertical, cuyo punto de intersección (origen) es el origen de cada escala. Es costumbre escoger el sentido positivo de cada eje tal como se indica en la figura, esto es, positivo hacia la derecha en el eje horizontal o eje de las x, y positivo hacia arriba en el eje vertical o eje de las y. Por conveniencia se toma la misma unidad de medida en ambos ejes.

En un sistema de esta clase, la posición de un punto cualquiera P en el plano queda determinado por sus distancias dirigidas, llamadas *coordenadas*, a los ejes. La coordenada x o *abscisa* de un punto P (véase la Fig. 2-B) es la distancia dirigida $BP = OA$ y la coordenada y u *ordenada* es la distancia dirigida $AP = OB$. Un punto P, de abscisa x y ordenada y, se denota $P(x, y)$.

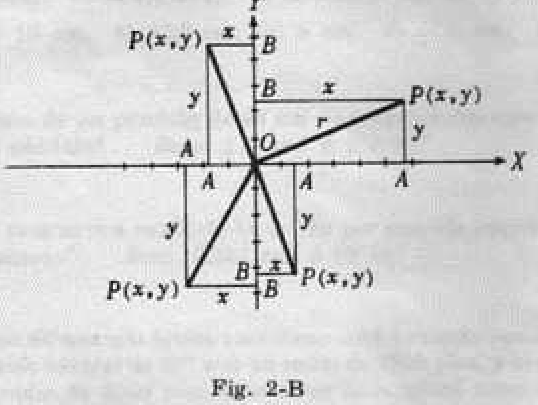


Fig. 2-B

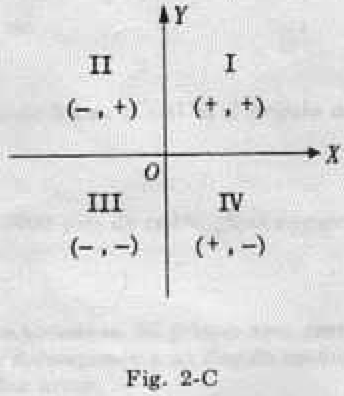


Fig. 2-C

Los ejes dividen el plano en cuatro partes, llamadas *cuadrantes*, que se numeran I, II, III, IV. En la Fig. 2-C se muestran los cuadrantes numerados y los signos correspondientes a las coordenadas de un punto en cada uno de los cuadrantes.

La distancia no dirigida r de un punto $P(x, y)$ al origen, llamada *distancia de P* o radio vector de P, está dada por

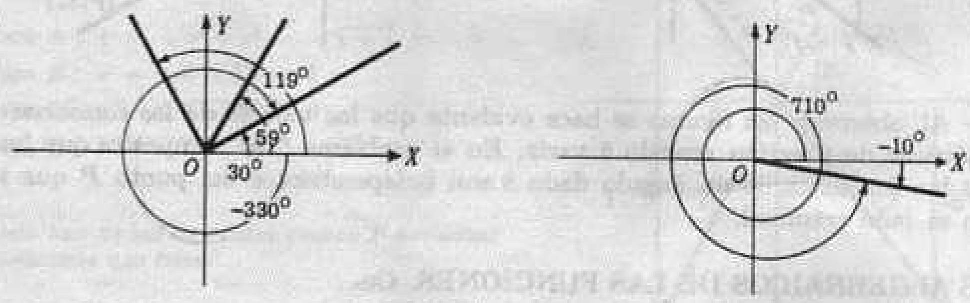
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Así, a cada punto del plano están asociados tres números: x, y, r.

(Véanse los problemas 1-3.)

ANGULOS EN POSICION NORMAL. Un ángulo está en *posición normal*, respecto a un sistema de coordenadas rectangulares, cuando su vértice coincide con el origen y su lado inicial con el semi-eje positivo de las x.

Un ángulo *pertenece al primer cuadrante* o es un *ángulo del primer cuadrante* cuando, colocado en posición normal, su lado terminal cae en dicho cuadrante. Definiciones semejantes se aplican a los otros cuadrantes. Por ejemplo, los ángulos 30°, 59°, y -330° son ángulos del primer cuadrante; 119° es un ángulo del segundo cuadrante; -119° es un ángulo del tercer cuadrante; -10° y 710° son ángulos del cuarto cuadrante.



Son *ángulos coterminales* los que, colocados en posición normal, tienen lados terminales coincidentes. Por ejemplo, 30° y -330°, -10° y 710° son pares de ángulos coterminales. Dado un ángulo cualquiera, existe un conjunto infinito de ángulos coterminales con él. (Véase el problema 4.)

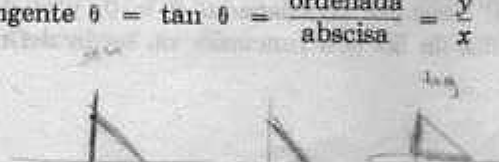
Los ángulos 0°, 90°, 180°, 270°, y todos sus ángulos coterminales reciben el nombre de *ángulos cuadrangulares*.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO CUALQUIERA. Sea θ un ángulo, (no cuadrangular) colocado en posición normal, y sea $P(x, y)$ un punto cualquiera, distinto del origen, perteneciente al lado terminal del ángulo. Las seis funciones trigonométricas de θ se definen, en términos de la abscisa, la ordenada y la distancia de P como sigue:

$$\text{seno } \theta = \text{sen } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{y}{r} \qquad \text{cotangente } \theta = \cot \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y}$$

$$\text{coseno } \theta = \cos \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \frac{x}{r} \qquad \text{secante } \theta = \sec \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \frac{r}{x}$$

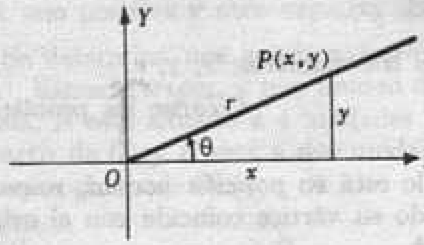
$$\text{tangente } \theta = \tan \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x} \qquad \text{cosecante } \theta = \csc \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \frac{r}{y}$$

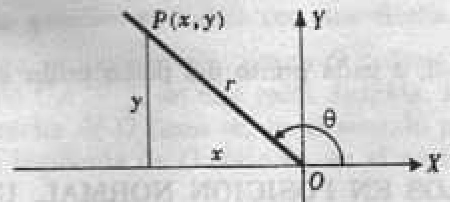


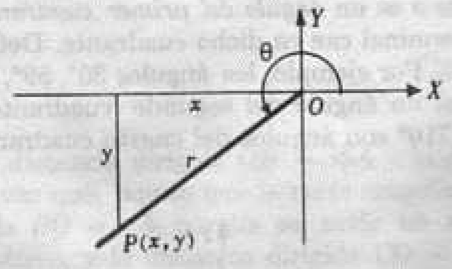
Como consecuencia inmediata de estas definiciones se obtienen las llamadas *relaciones inversas:*

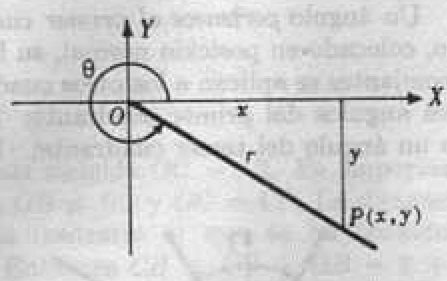
$$\text{sen}\ \theta = 1/\csc\theta \qquad \tan\theta = 1/\cot\theta \qquad \sec\theta = 1/\cos\theta$$

$$\cos\theta = 1/\sec\theta \qquad \cot\theta = 1/\tan\theta \qquad \csc\theta = 1/\text{sen}\ \theta$$



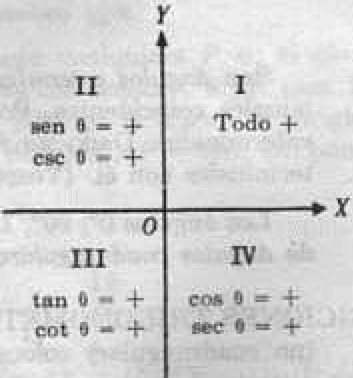






Al observar las figuras se hace evidente que los valores de las funciones trigonométricas de θ varían cuando θ varía. En el problema 5 se demuestra que los valores de las funciones de un ángulo dado θ son independientes del punto P que se escoja en el lado terminal.

SIGNOS ALGEBRAICOS DE LAS FUNCIONES. Como r es siempre positiva, los signos de las funciones en los distintos cuadrantes dependen de los signos de x y de y. Para determinar estos signos se puede colocar (mentalmente) el ángulo en posición normal, o se puede utilizar algún otro recurso, como el que aparece en la figura adjunta donde únicamente se han registrado las funciones cuyo signo es positivo. (Véase el problema 6.)



Las funciones de un ángulo dado están definidas unívocamente. Sin embargo, cuando se conoce el valor de la función de un ángulo, el ángulo no queda definido unívocamente. Por ejemplo, si seno $\theta = \frac{1}{2}$ entonces $\theta = 30°, 150°, 390°, 510°, \ldots$ En general existen dos posiciones posibles del lado terminal; por ejemplo, los lados terminales de 30° y 150° del ejemplo anterior. Las excepciones a esta regla ocurren cuando el ángulo es cuadrangular. (Véanse los problemas 7-15.)

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS CUADRANGULARES. El lado terminal de un ángulo cuadrangular coincide con uno de los ejes. Un punto P (distinto del origen) del lado terminal tiene por coordenadas $x = 0$, $y \neq 0$ ó $x \neq 0$, $y = 0$. En ambos casos sucede que dos de las seis funciones no están definidas. Por ejemplo, el lado terminal del ángulo 0° coincide con el semi-eje positivo de las x, y la ordenada de P es 0. Como el denominador de las relaciones que definen la cotangente y la cosecante es la ordenada, estas funciones no están definidas. Para indicar estas conclusiones algunos autores utilizan la notación $\cot 0° = \infty$ y otros utilizan $\cot 0° = \pm\infty$. En el problema 16 se obtienen los siguientes resultados:

ángulo θ	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
90°	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
180°	0	−1	0	$\pm\infty$	−1	$\pm\infty$
270°	−1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	−1

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Localizar los siguientes puntos en un sistema de coordenadas rectangulares y encontrar el valor de r correspondiente a cada uno de ellos:

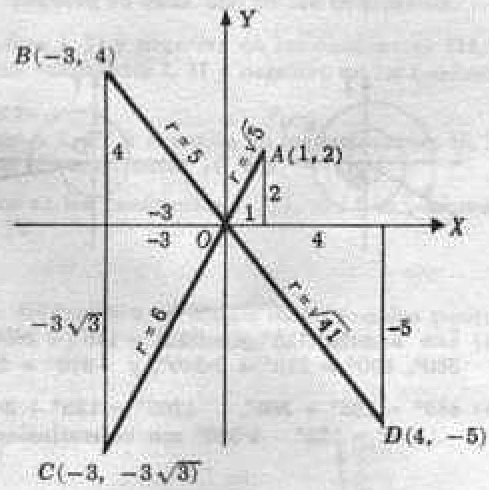
$A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $C(-3, -3\sqrt{3})$, $D(4, -5)$.

Para A: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Para B: $r = \sqrt{9+16} = 5$

Para C: $r = \sqrt{9+27} = 6$

Para D: $r = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$



2. En cada uno de los siguientes puntos P encontrar la coordenada que falta:

a) $x = 2$, $r = 3$, P en el primer cuadrante
b) $x = -3$, $r = 5$, P en el segundo cuadrante
c) $y = -1$, $r = 3$, P en el tercer cuadrante
d) $x = 2$, $r = \sqrt{5}$, P en el cuarto cuadrante
e) $x = 3$, $r = 3$;
f) $y = -2$, $r = 2$; *g*) $x = 0$, $r = 2$, y positiva; *h*) $y = 0$, $r = 1$, x negativa.

a) De la relación $x^2 + y^2 = r^2$, se obtiene $4 + y^2 = 9$; entonces $y^2 = 5$ y $y = \pm\sqrt{5}$. Puesto que P está en el primer cuadrante, la coordenada que falta es $y = \sqrt{5}$.

b) Aquí $9 + y^2 = 25$, $y^2 = 16$, y $y = \pm 4$.
Puesto que P está en el segundo cuadrante, la coordenada que falta es $y = 4$.

c) Se tiene que $x^2 + 1 = 9$, $x^2 = 8$, y $x = \pm 2\sqrt{2}$.
Como P está en el tercer cuadrante, la coordenada que falta es $x = -2\sqrt{2}$.

d) $y^2 = 5 - 4$ y $y = \pm 1$. Puesto que P está en el cuarto cuadrante, la coordenada que falta es $y = -1$.

e) Aquí, $y^2 = r^2 - x^2 = 9 - 9 = 0$ y la coordenada que falta es $y = 0$.

f) $x^2 = r^2 - y^2 = 0$ y $x = 0$ *g*) $y^2 = r^2 - x^2 = 4$ y $y = 2$ es la coordenada que falta.

h) $x^2 = r^2 - y^2 = 1$ y $x = -1$ es la coordenada que falta.

3. ¿En qué cuadrante se puede localizar $P(x, y)$ si

a) x es positiva y $y \neq 0$? *c*) y/r es positiva? *e*) y/x es positiva?
b) y es negativa y $x \neq 0$? *d*) r/x es negativa?

a) En el primer cuadrante cuando y es positiva y en el cuarto cuadrante cuando y es negativa.

b) En el cuarto cuadrante cuando x es positiva y en el tercer cuadrante cuando x es negativa.

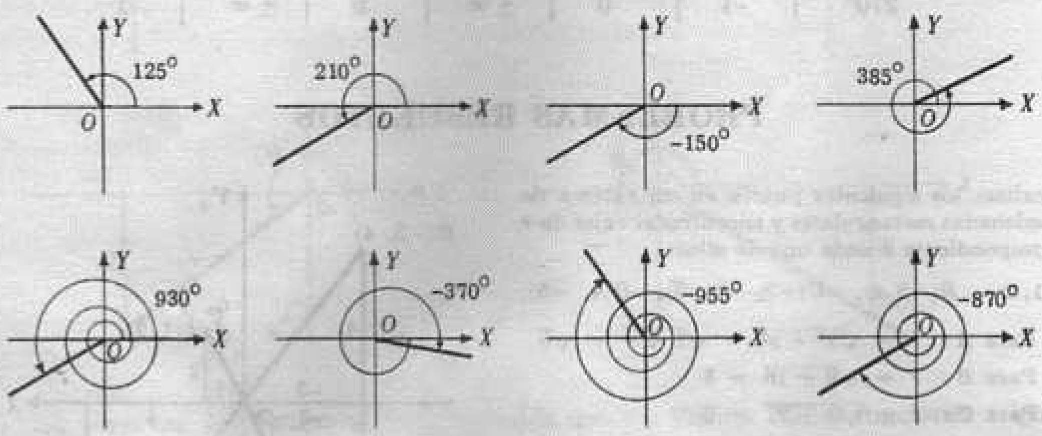
c) En los cuadrantes primero y segundo. *d*) En los cuadrantes segundo y tercero.

e) En el primer cuadrante cuando tanto x como y son positivas, y en el tercer cuadrante cuando tanto x como y son negativas.

4. *a*) Construir los siguientes ángulos en posición normal y determinar cuáles son coterminales:

$$125°,\quad 210°,\quad -150°,\quad 385°,\quad 930°,\quad -370°,\quad -955°,\quad -870°.$$

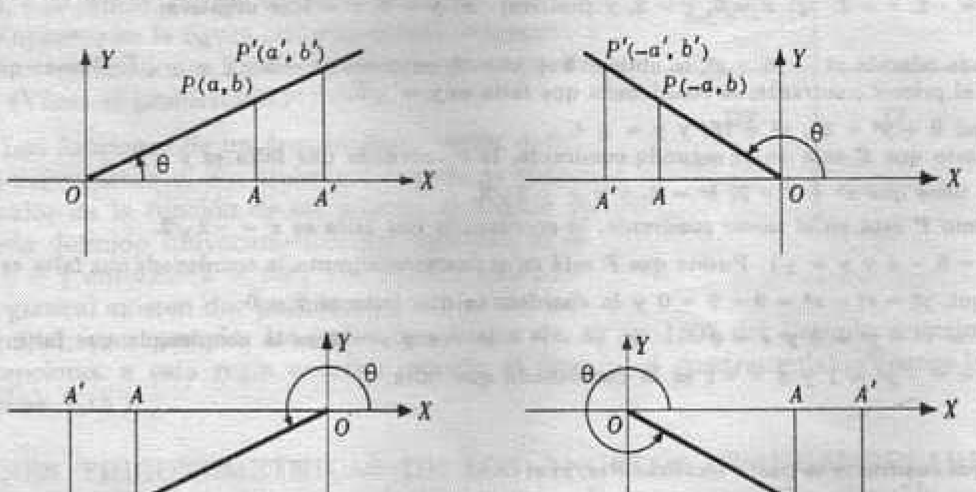
b) Encontrar otros cinco ángulos coterminales con 125°.



a) Los ángulos 125° y $-955° = 125° - 3{\cdot}360°$ son coterminales. Los ángulos 210°, $-150° = 210° - 360°$, $930° = 210° + 2{\cdot}360°$, y $-870° = 210° - 3{\cdot}360°$ son coterminales.

b) $485° = 125° + 360°$, $1205° = 125° + 3{\cdot}360°$, $1925° = 125° + 5{\cdot}360°$, $-235° = 125° - 360°$, $-1315° = 125° - 4{\cdot}360°$ son coterminales con 125°.

5. Demostrar que las funciones trigonométricas de un ángulo θ no dependen del punto P que se escoja en el lado terminal del ángulo.



Supóngase que los puntos P y P' de los lados terminales de cada uno de los ángulos de las figuras anteriores tienen las coordenadas que se les han señalado. Denótense las distancias OP y OP' por r y r' respectivamente. Trácense las perpendiculares AP y $A'P'$ al eje de las x. En cada figura, el triángulo OAP y $OA'P'$, cuyos lados a, b, r y a', b', r' respectivamente son similares; así,

1) $b/r = b'/r'$, $a/r = a'/r'$, $b/a = b'/a'$, $a/b = a'/b'$, $r/a = r'/a'$, $r/b = r'/b'$.

Puesto que las razones obtenidas corresponden a las funciones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante, los valores de las funciones de un ángulo cualquiera del primer cuadrante son independientes del punto P escogido.

De 1) se sigue que

$b/r = b'/r'$, $-a/r = -a'/r'$, $b/-a = b'/-a'$, $-a/b = -a'/b'$, $r/-a = r'/-a'$, $r/b = r'/b'$.

Como éstas son las relaciones correspondientes a las funciones de un ángulo del segundo cuadrante, los valores de las funciones de un ángulo cualquiera del segundo cuadrante son independientes del punto P escogido.

Se deja al lector la consideración de los casos

$-b/r = -b'/r'$, $-a/r = -a'/r'$, etc., y $-b/r = -b'/r'$, $a/r = a'/r'$, etc.

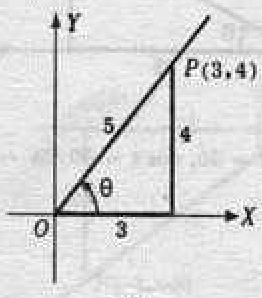
6. Determinar los signos de las funciones seno, coseno y tangente en cada uno de los cuadrantes.

sen $\theta = y/r$. Puesto que y es positiva en los cuadrantes I, II y negativa en los cuadrantes III, IV, mientras que r es siempre positiva, sen θ es positivo en los cuadrantes I, II y negativo en los cuadrantes III, IV.

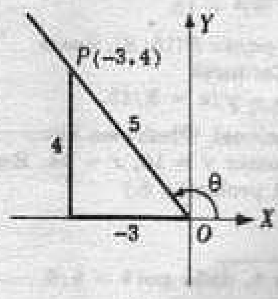
cos $\theta = x/r$. Puesto que x es positiva en los cuadrantes I, IV y negativa en los cuadrantes II, III, cos θ es positivo en los cuadrantes I, IV y negativo en los cuadrantes II, III.

tan $\theta = y/x$. Puesto que x y y tienen el mismo signo en los cuadrantes I, III, tan θ es positiva en los cuadrantes I, III y negativa en los cuadrantes II, IV.

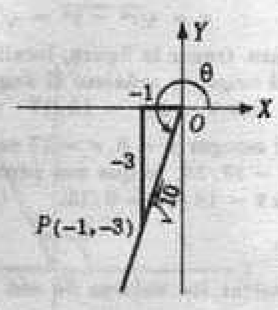
7. Determinar los valores de las funciones trigonométricas del ángulo θ (el menor de los ángulos positivos en posición normal) si P es un punto del lado terminal de θ y las coordenadas de P son: $a)$ $P(3, 4)$, $b)$ $P(-3, 4)$, $c)$ $P(-1, -3)$.



(a)



(b)



(c)

$a)$ $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$	$b)$ $r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$	$c)$ $r = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$
sen $\theta = y/r = 4/5$	sen $\theta = 4/5$	sen $\theta = -3/\sqrt{10} = -3\sqrt{10}/10$
cos $\theta = x/r = 3/5$	cos $\theta = -3/5$	cos $\theta = -1/\sqrt{10} = -\sqrt{10}/10$
tan $\theta = y/x = 4/3$	tan $\theta = 4/-3 = -4/3$	tan $\theta = -3/-1 = 3$
cot $\theta = x/y = 3/4$	cot $\theta = -3/4$	cot $\theta = -1/-3 = 1/3$
sec $\theta = r/x = 5/3$	sec $\theta = 5/-3 = -5/3$	sec $\theta = \sqrt{10}/-1 = -\sqrt{10}$
csc $\theta = r/y = 5/4$	csc $\theta = 5/4$	csc $\theta = \sqrt{10}/-3 = -\sqrt{10}/3$

Obsérvense las relaciones inversas. Por ejemplo, en $b)$ sen $\theta = 1/\csc = 4/5$, cos $\theta = 1/\sec\theta = -3/5$, tan $\theta = 1/\cot\theta = -4/3$, etc.

8. ¿En qué cuadrante cae el lado terminal de θ, si

a) sen θ y cos θ son ambos negativos?
b) sen θ y tan θ son ambos positivos?
c) sen θ es positivo y secante θ es negativa?
d) sec θ es negativa y tan θ es negativa?

a) Puesto que sen $\theta = y/r$ y cos $\theta = x/r$, ambos, x y y son negativas. (Recuérdese que r es siempre positiva.) Así, θ es un ángulo del tercer cuadrante.

b) Puesto que sen θ es positivo, y es positiva. Como tan $\theta = y/x$ es positiva, x es también positiva. Así, θ es un ángulo del primer cuadrante.

c) Como sen θ es positivo, y es positiva; como sec θ es negativa, x es negativa. Así, θ es un ángulo del segundo cuadrante.

d) Como sec θ es negativa, x es negativa; como tan θ es negativa, y es positiva. Así, θ es un ángulo del segundo cuadrante.

9. ¿En qué cuadrante puede terminar θ, si

a) sen θ es positivo? b) cos θ es negativo? c) tan θ es negativa? d) sec θ es positiva?

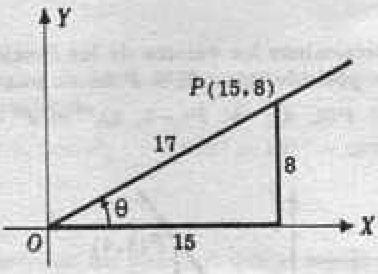
a) Puesto que sen θ es positivo, y es positiva.
Entonces, x puede ser positiva o negativa, con lo que θ es un ángulo del primer cuadrante o del segundo.

b) Puesto que cos θ es negativo, x es negativa.
Entonces, y puede ser positiva o negativa, con lo que θ es un ángulo del segundo cuadrante o del tercero.

c) Puesto que tan θ es negativa, puede suceder que y sea positiva y x negativa, o que y sea negativa y x positiva. Así, θ puede ser un ángulo del segundo cuadrante o del cuarto.

d) Puesto que sec θ es positiva, x es positiva. Así θ puede ser un ángulo del primer cuadrante o del cuarto.

10. Encontrar los valores de cos θ y tan θ, si sen $\theta = 8/17$ y θ pertenece al cuadrante I.



Sea P un punto del lado terminal de θ. Puesto que sen $\theta = y/r = 8/17$, se toma $y = 8$ y $r = 17$. Puesto que θ pertenece al cuadrante I, x es positiva; entonces,

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{(17)^2 - (8)^2} = 15.$$

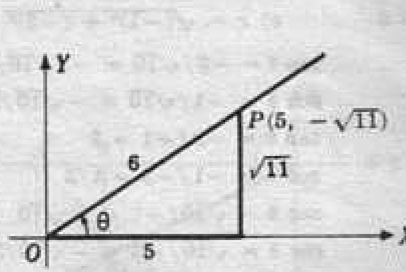
Para trazar la figura, localícese el punto $P(15, 8)$, únase con el origen y señálese el ángulo θ. Entonces
cos $\theta = x/r = 15/17$ y tan $\theta = y/x = 8/15$.

El escoger $y = 8$, $r = 17$ es convencional. Obsérvese que $8/17 = 16/34$, lo que nos permitiría tomar $y = 16$, $r = 34$. Entonces, $x = 30$, cos $\theta = 30/34 = 15/17$ y tan $\theta = 16/30 = 8/15$. (Véase el problema 5.)

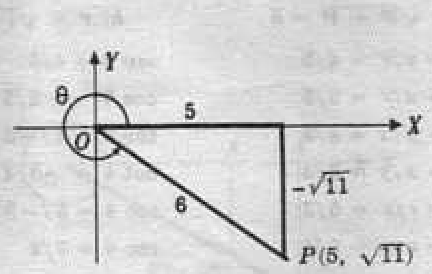
11. Encontrar los valores de sen θ y tan θ, dado cos $\theta = 5/6$.

Como cos θ es positivo, θ pertenece al primer cuadrante o al cuarto.

Puesto que cos $\theta = x/r = 5/6$, se toma $x = 5$, $r = 6$; $y = \pm\sqrt{(6)^2 - (5)^2} = \pm\sqrt{11}$.



(a)



(b)

a) Si θ está en el cuadrante I (figura *a*), se tiene $x = 5$, $y = \sqrt{11}$, $r = 6$; entonces

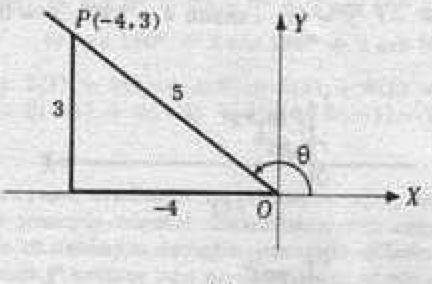
$$\operatorname{sen}\theta = y/r = \sqrt{11}/6 \quad \text{y} \quad \tan\theta = y/x = \sqrt{11}/5.$$

b) Si θ está en el cuadrante IV (figura *b*), se tiene $x = 5$, $y = -\sqrt{11}$, $r = 6$; entonces

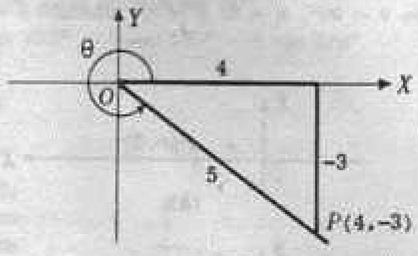
$$\operatorname{sen}\theta = y/r = -\sqrt{11}/6 \quad \text{y} \quad \tan\theta = y/x = -\sqrt{11}/5.$$

12. Encontrar los valores de sen θ y cos θ, dada $\tan\theta = -3/4$.

Puesto que $\tan\theta = y/r$ es negativa, θ está en el cuadrante II (si $x = -4$, $y = 3$) o en el cuadrante IV (si $x = 4$, $y = -3$). En ambos casos, $r = \sqrt{16+9} = 5$.



(*a*)



(*b*)

a) Si θ está en el cuadrante II (figura *a*), $\operatorname{sen}\theta = y/r = 3/5$ y $\cos\theta = x/r = -4/5$.

b) Si θ está en el cuadrante IV (figura *b*), $\operatorname{sen}\theta = y/r = -3/5$ y $\cos\theta = x/r = 4/5$.

13. Encontrar sen θ, si $\cos\theta = -4/5$ y tan θ es positiva.

Puesto que $\cos\theta = x/r$ es negativo, x es negativa. Como $\tan\theta = y/x$ es positiva, y tiene que ser negativa. Entonces θ está en el cuadrante III. (Véase la figura *c*.)

Tómese $x = -4$, $r = 5$; entonces $y = -\sqrt{5^2 - (-4)^2} = -3$. Así, $\operatorname{sen}\theta = y/r = -3/5$.

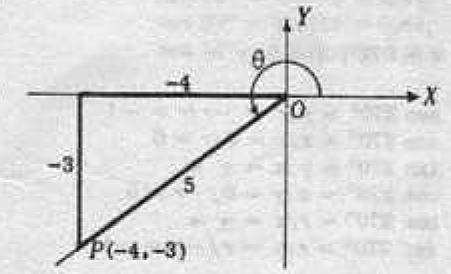


Fig. (*c*) Prob. 13

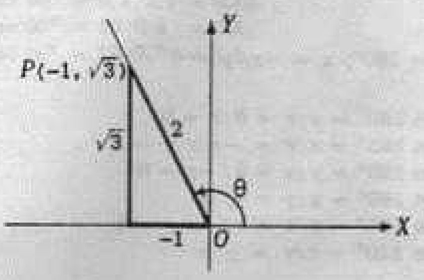


Fig. (*d*) Prob. 14

14. Encontrar los valores de las otras funciones de θ, dados $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2$ y $\cos\theta = -1/2$.

Como $\operatorname{sen}\theta = y/r$ es positivo, y es positiva. Dado que $\cos\theta = x/r$ es negativo, x es negativa. Así, θ pertenece al cuadrante II. (Véase la figura *d*.)

Tomando $x = -1$, $y = \sqrt{3}$, $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, tenemos

$$\tan\theta = y/x = \sqrt{3}/-1 = -\sqrt{3} \qquad \cot\theta = 1/\tan\theta = -1/\sqrt{3} = -\sqrt{3}/3$$

$$\sec\theta = 1/\cos\theta = -2 \qquad \csc\theta = 1/\operatorname{sen}\theta = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3.$$

15. Determinar los valores de $\cos\theta$ y $\tan\theta$ si $\operatorname{sen}\theta = m/n$, es una fracción negativa.

Puesto que $\operatorname{sen}\theta$ es negativo, θ está en el cuadrante III o en el cuadrante IV.

a) En un cuadrante III: Tómese $y = m$, $r = n$, $x = -\sqrt{n^2 - m^2}$; entonces

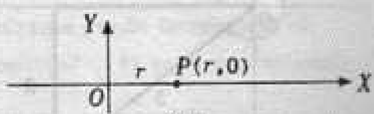
$$\cos\theta = x/r = -\sqrt{n^2 - m^2}/n \quad \text{y} \quad \tan\theta = y/x = -m/\sqrt{n^2 - m^2}.$$

b) En el cuadrante IV: Tómese $y = m$, $r = n$, $x = +\sqrt{n^2 - m^2}$; entonces

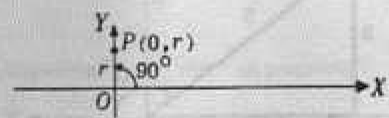
$$\cos\theta = x/r = \sqrt{n^2 - m^2}/n \quad \text{y} \quad \tan\theta = y/x = m/\sqrt{n^2 - m^2}.$$

16. Determinar los valores de las funciones trigonométricas de *a*) 0°, *b*) 90°, *c*) 180°, *d*) 270°.

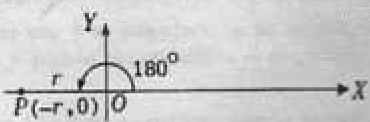
Sea P un punto cualquiera (diferente de 0) del lado terminal de θ. Cuando $\theta = 0°$, $x = r$, $y = 0$; cuando $\theta = 90°$, $x = 0$, $y = r$; cuando $\theta = 180°$, $x = -r$, $y = 0$; cuando $\theta = 270°$, $x = 0$, $y = -r$.



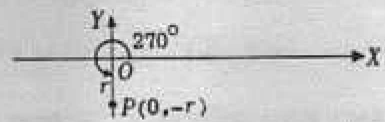
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

a) $\theta = 0°$; $x = r$, $y = 0$

$\operatorname{sen} 0° = y/r = 0/r = 0$
$\cos 0° = x/r = r/r = 1$
$\tan 0° = y/x = 0/r = 0$
$\cot 0° = x/y = \pm\infty$
$\sec 0° = r/x = r/r = 1$
$\csc 0° = r/y = \pm\infty$

b) $\theta = 90°$; $x = 0$, $y = r$

$\operatorname{sen} 90° = y/r = r/r = 1$
$\cos 90° = x/r = 0/r = 0$
$\tan 90° = y/x = \pm\infty$
$\cot 90° = x/y = 0/r = 0$
$\sec 90° = r/x = \pm\infty$
$\csc 90° = r/y = r/r = 1$

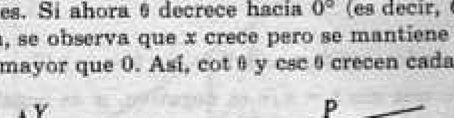
c) $\theta = 180°$; $x = -r$, $y = 0$

$\operatorname{sen} 180° = y/r = 0/r = 0$
$\cos 180° = x/r = -r/r = -1$
$\tan 180° = y/x = 0/-r = 0$
$\cot 180° = x/y = \pm\infty$
$\sec 180° = r/x = r/-r = -1$
$\csc 180° = r/y = \pm\infty$

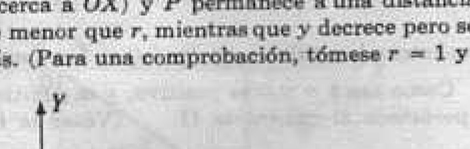
d) $\theta = 270°$; $x = 0$, $y = -r$

$\operatorname{sen} 270° = y/r = -r/r = -1$
$\cos 270° = x/r = 0/r = 0$
$\tan 270° = y/x = \pm\infty$
$\cot 270° = x/y = 0/-r = 0$
$\sec 270° = r/x = \pm\infty$
$\csc 270° = r/y = r/-r = -1$

Se habrá observado que $\cot 0°$ y $\csc 0°$ no están definidas porque la división por cero no está permitida. En la figura (*e*), se ha tomado θ como un ángulo muy pequeño en posición normal y se ha señalado en su lado terminal un punto $P(x, y)$ a una distancia r del origen. En estas condiciones, x es poco menor que r y, además, y es muy pequeña y positiva. Entonces, $\cot\theta = x/y$ y $\csc\theta = r/y$ son positivas y muy grandes. Si ahora θ decrece hacia 0° (es decir, OP se acerca a OX) y P permanece a una distancia r del origen, se observa que x crece pero se mantiene siempre menor que r, mientras que y decrece pero se mantiene mayor que 0. Así, $\cot\theta$ y $\csc\theta$ crecen cada vez más. (Para una comprobación, tómese $r = 1$ y calcú-



(*e*)



(*f*)

lese csc θ cuando $y = 0{,}1,\ 0{,}01,\ 0{,}001, \ldots$) Para indicar estas conclusiones se suele escribir $\cot 0° = \pm\infty$ y $\cos 0° = +\infty$. Nótese que, aunque se utiliza el signo $=$, no se quiere significar que "cot 0° sea igual a"; sino que, cuando un ángulo positivo pequeño se hace cada vez menor, la cotangente del ángulo toma valores positivos cada vez mayores.

Supóngase ahora que, como aparece en la figura (*f*), que θ es un ángulo pequeño y negativo, y señálese en su lado terminal un punto $P(x, y)$ a una distancia r del origen. En estas condiciones, x es positiva y poco menor que r, mientras que y es negativa y numéricamente pequeña. Entonces cot θ y csc θ son negativas y numéricamente grandes. Cuando θ crece hacia 0°, cot θ y csc θ permanecen negativas y son, numéricamente, cada vez mayores. Para indicar estas conclusiones, se indica $\cot 0° = -\infty$ y $\csc 0° = -\infty$.

17. Evaluar: *a*) $\operatorname{sen} 0° + 2\cos 0° + 3\operatorname{sen} 90° + 4\cos 90° + 5\sec 0° + 6\csc 90°$

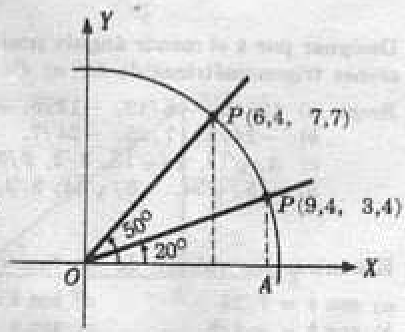
b) $\operatorname{sen} 180° + 2\cos 180° + 3\operatorname{sen} 270° + 4\cos 270° - 5\sec 180° - 6\csc 270°$

a) $0 + 2(1) + 3(1) + 4(0) + 5(1) + 6(1) = 16$

b) $0 + 2(-1) + 3(-1) + 4(0) - 5(-1) - 6(-1) = 6$

18. Constrúyase, mediante un transportador, un ángulo de 20° en posición normal. Descríbase, con centro en O, un arco de 10 unidades de radio que corte el lado terminal en P. Desde P trácese una perpendicular al eje de las x. Sea A el pie de la perpendicular trazada. Al efectuar las mediciones convenientes se obtiene que $OA = 9{,}4$ y $AP = 3{,}4$ de modo que las coordenadas de P son $(9{,}4,\ 3{,}4)$. Entonces,

$\operatorname{sen} 20° = 3{,}4/10 = 0{,}34$, $\quad \cot 20° = 9{,}4/3{,}4 = 2{,}8$,
$\cos 20° = 9{,}4/10 = 0{,}94$, $\quad \sec 20° = 10/9{,}4 = 1{,}1$,
$\tan 20° = 3{,}4/9{,}4 = 0{,}36$, $\quad \csc 20° = 10/3{,}4 = 2{,}9$.



(*g*)

19. Obtener las funciones trigonométricas de 50°, como en el problema 18. Considérese la figura (*g*).

Al efectuar las mediciones convenientes, se obtiene que las coordenadas de P, situado a 10 unidades del origen, son $(6{,}4,\ 7{,}7)$. Entonces,

$\operatorname{sen} 50° = 7{,}7/10 = 0{,}77$, $\quad \cot 50° = 6{,}4/7{,}7 = 0{,}83$,
$\cos 50° = 6{,}4/10 = 0{,}64$, $\quad \sec 50° = 10/6{,}4 = 1{,}6$,
$\tan 50° = 7{,}7/6{,}4 = 1{,}2$, $\quad \csc 50° = 10/7{,}7 = 1{,}3$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

20. Establecer el cuadrante en que termina cada ángulo y el signo del seno, coseno y tangente.

 a) $125°$, *b*) $75°$, *c*) $320°$, *d*) $212°$, *e*) $460°$, *f*) $750°$, *g*) $-250°$, *h*) $-1000°$.

 Resp. *a*) II; $+, -, -$ *b*) I; $+, +, +$ *c*) IV; $-, +, -$ *d*) III; $-, -, +$ *e*) II *f*) I *g*) II *h*) I

21. ¿En qué cuadrante termina θ si

 a) sen θ y cos θ son positivos?
 b) cos θ y tan θ son positivos?
 c) sen θ y sec θ son negativos?
 d) cos θ y cot θ son negativos?
 e) tan θ es positiva y sec θ es negativa?
 f) tan θ es negativa y sec θ es positiva?
 g) sen θ es positivo y cos θ es negativo?
 h) sec θ es positiva y csc θ es negativa?

 Resp. *a*) I, *b*) I, *c*) III, *d*) II, *e*) III, *f*) IV, *g*) II, *h*) IV

22. Designar por θ el menor ángulo positivo cuyo lado terminal pasa por el punto dado y encontrar las funciones trigonométricas de θ: *a*) $P(-5, 12)$, *b*) $P(7, -24)$, *c*) $P(2, 3)$, $P(-3, -5)$.

 Resp. *a*) $12/13$, $-5/13$, $-12/5$, $-5/12$, $-13/5$, $13/12$
 b) $-24/25$, $7/25$, $-24/7$, $-7/24$, $25/7$, $-25/24$
 c) $3/\sqrt{13}$, $2/\sqrt{13}$, $3/2$, $2/3$, $\sqrt{13}/2$, $\sqrt{13}/3$
 d) $-5/\sqrt{34}$, $-3/\sqrt{34}$, $5/3$, $3/5$, $-\sqrt{34}/3$, $-\sqrt{34}/5$

23. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de θ, dados:

 a) sen $\theta = 7/25$
 b) cos $\theta = -4/5$
 c) tan $\theta = -5/12$
 d) cot $\theta = 24/7$
 e) sen $\theta = -2/3$
 f) cos $\theta = 5/6$
 g) tan $\theta = 3/5$
 h) cot $\theta = \sqrt{6}/2$
 i) sec $\theta = -\sqrt{5}$
 j) csc $\theta = -2/\sqrt{3}$

 Resp. *a*) I: $7/25$, $24/25$, $7/24$, $24/7$, $25/24$, $25/7$
 II: $7/25$, $-24/25$, $-7/24$, $-24/7$, $-25/24$, $25/7$

 b) II: $3/5$, $-4/5$, $-3/4$, $-4/3$, $-5/4$, $5/3$; III: $-3/5$, $-4/5$, $3/4$, $4/3$, $-5/4$, $-5/3$

 c) II: $5/13$, $-12/13$, $-5/12$, $-12/5$, $-13/12$, $13/5$
 IV: $-5/13$, $12/13$, $-5/12$, $-12/5$, $13/12$, $-13/5$

 d) I: $7/25$, $24/25$, $7/24$, $24/7$, $25/24$, $25/7$
 III: $-7/25$, $-24/25$, $7/24$, $24/7$, $-25/24$, $-25/7$

 e) III: $-2/3$, $-\sqrt{5}/3$, $2/\sqrt{5}$, $\sqrt{5}/2$, $-3/\sqrt{5}$, $-3/2$
 IV: $-2/3$, $\sqrt{5}/3$, $-2/\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}/2$, $3/\sqrt{5}$, $-3/2$

 f) I: $\sqrt{11}/6$, $5/6$, $\sqrt{11}/5$, $5/\sqrt{11}$, $6/5$, $6/\sqrt{11}$
 IV: $-\sqrt{11}/6$, $5/6$, $-\sqrt{11}/5$, $-5/\sqrt{11}$, $6/5$, $-6/\sqrt{11}$

 g) I: $3/\sqrt{34}$, $5/\sqrt{34}$, $3/5$, $5/3$, $\sqrt{34}/5$, $\sqrt{34}/3$
 III: $-3/\sqrt{34}$, $-5/\sqrt{34}$, $3/5$, $5/3$, $-\sqrt{34}/5$, $-\sqrt{34}/3$

 sen
 h) I: $2/\sqrt{10}$, $\sqrt{3}/\sqrt{5}$, $2/\sqrt{6}$, $\sqrt{6}/2$, $\sqrt{5}/\sqrt{3}$, $\sqrt{10}/2$
 III: $-2/\sqrt{10}$, $-\sqrt{3}/\sqrt{5}$, $2/\sqrt{6}$, $\sqrt{6}/2$, $-\sqrt{5}/\sqrt{3}$, $-\sqrt{10}/2$

 i) II: $2/\sqrt{5}$, $-1/\sqrt{5}$, -2, $-1/2$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}/2$; III: $-2/\sqrt{5}$, $-1/\sqrt{5}$, 2, $1/2$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}/2$

 j) III: $-\sqrt{3}/2$, $-1/2$, $\sqrt{3}$, $1/\sqrt{3}$, -2, $-2/\sqrt{3}$; IV: $-\sqrt{3}/2$, $1/2$, $-\sqrt{3}$, $-1/\sqrt{3}$, 2, $-2/\sqrt{3}$

24. Calcular cada una de las siguientes expresiones:

 a) $\tan 180° - 2\cos 180° + 3\csc 270° + \text{sen}\, 90° = 0$.

 b) $\text{sen}\, 0° + 3\cot 90° + 5\sec 180° - 4\cos 270° = -5$.

CAPITULO 3

Funciones trigonométricas de un ángulo agudo

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO. Al trabajar con un triángulo rectángulo cualquiera, es conveniente (véase Fig. 3-A) designar los vértices de los ángulos como A, B, C, los ángulos de los triángulos como A, B, $C = 90°$ y los lados opuestos a los ángulos, a, b, c, respectivamente. Con relación al ángulo A, el lado a recibe el nombre de *cateto opuesto* y b el de *cateto adyacente;* con relación al ángulo B, el *cateto adyacente* es a, y el *cateto opuesto* es b. Al lado c se llama siempre *hipotenusa*.

Si ahora se coloca el triángulo en un sistema de coordenadas (véase la Fig. 3-B) de tal manera que el ángulo A quede en posición normal, las coordenadas del punto B, en el lado terminal del ángulo A, son (b, a) y su distancia es $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. En estas condiciones, las funciones trigonométricas del ángulo A, pueden definirse en términos de los lados del triángulo rectángulo, como sigue:

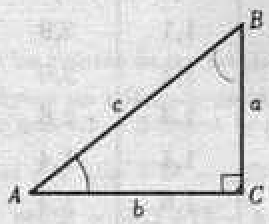


Fig. 3-A

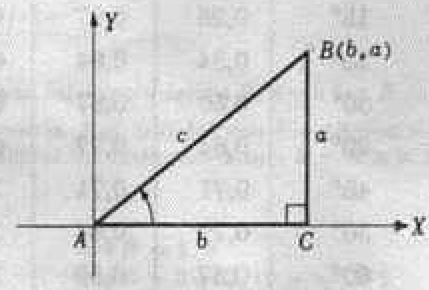


Fig. 3-B

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cot A = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec A = \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \csc A = \frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS COMPLEMENTARIOS. Los ángulos agudos A y B del triángulo rectángulo ABC son complementarios, es decir, $A + B = 90°$. En la Fig. 3-A se tiene que

$$\operatorname{sen} B = b/c = \cos A \qquad \cot B = a/b = \tan A$$
$$\cos B = a/c = \operatorname{sen} A \qquad \sec B = c/a = \csc A$$
$$\tan B = b/a = \cot A \qquad \csc B = c/b = \sec A$$

Estas relaciones asocian las funciones en pares-seno y coseno, tangente y cotangente, secante y cosecante, de modo que cada una de las funciones de un par es la *cofunción* de la otra. Así, cualquier función de un ángulo agudo es igual a la correspondiente cofunción de un ángulo complementario.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE 30°, 45° y 60°. En los problemas 8-9 se obtienen los resultados siguientes:

Angulo θ	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$

EN LOS PROBLEMAS 10-16 se presentan algunas aplicaciones sencillas de las funciones trigonométricas; en ellas se utilizará la siguiente tabla:

Angulo θ	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
15°	0,26	0,97	0,27	3,7	1,0	3,9
20°	0,34	0,94	0,36	2,7	1,1	2,9
30°	0,50	0,87	0,58	1,7	1,2	2,0
40°	0,64	0,77	0,84	1,2	1,3	1,6
45°	0,71	0,71	1,0	1,0	1,4	1,4
50°	0,77	0,64	1,2	0,84	1,6	1,3
60°	0,87	0,50	1,7	0,58	2,0	1,2
70°	0,94	0,34	2,7	0,36	2,9	1,1
75°	0,97	0,26	3,7	0,27	3,9	1,0

PROBLEMAS RESUELTOS

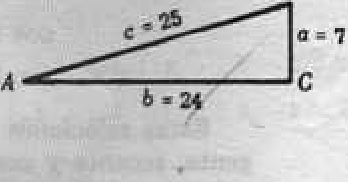
1. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC, dados $b = 24$ y $c = 25$.

Puesto que $a^2 = c^2 - b^2 = (25)^2 - (24)^2 = 49$, $a = 7$. Entonces

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{7}{25} \qquad \cot A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{24}{7}$$

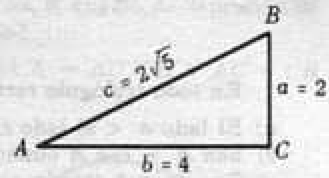
$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{24}{25} \qquad \sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{25}{24}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{7}{24} \qquad \csc A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{25}{7}$$



$$\operatorname{sen} B = 24/25 \qquad \cot B = 7/24$$
$$\cos B = 7/25 \qquad \sec B = 25/7$$
$$\tan B = 24/7 \qquad \csc B = 25/24$$

2. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC, dados $a = 2$, $c = 2\sqrt{5}$.



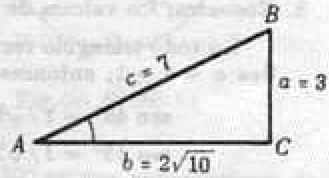
Puesto que $b^2 = c^2 - a^2 = (2\sqrt{5})^2 - (2)^2 = 20 - 4 = 16$, $b = 4$. Entonces

$\operatorname{sen} A = 2/2\sqrt{5} = \sqrt{5}/5 = \cos B$ $\qquad$ $\cot A = 4/2 = 2 = \tan B$

$\cos A = 4/2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5 = \operatorname{sen} B$ $\qquad$ $\sec A = 2\sqrt{5}/4 = \sqrt{5}/2 = \csc B$

$\tan A = 2/4 = 1/2 = \cot B$ $\qquad$ $\csc A = 2\sqrt{5}/2 = \sqrt{5} = \sec B$

3. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas del ángulo agudo A, dado $\operatorname{sen} A = 3/7$.



Constrúyase un triángulo rectángulo ABC, tal que $a = 3$, $c = 7$ y $b = \sqrt{7^2 - 3^2} = 2\sqrt{10}$. Entonces

$\operatorname{sen} A = 3/7$ $\qquad$ $\cot A = 2\sqrt{10}/3$

$\cos A = 2\sqrt{10}/7$ $\qquad$ $\sec A = 7/2\sqrt{10} = 7\sqrt{10}/20$

$\tan A = 3/2\sqrt{10} = 3\sqrt{10}/20$ $\qquad$ $\csc A = 7/3$

4. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas del ángulo agudo B, dada $\tan B = 1{,}5$.

Constrúyase un triángulo rectángulo ABC (véase la Fig. (a)) tal que $b = 15$ y $a = 10$ unidades. (Obsérvese que $1{,}5 = 3/2$ con lo que podríamos utilizar un triángulo donde $b = 3$, $a = 2$).

Entonces $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 15^2} = 5\sqrt{13}$ y

$\operatorname{sen} B = 15/5\sqrt{13} = 3\sqrt{13}/13$ $\qquad$ $\cot B = 2/3$

$\cos B = 10/5\sqrt{13} = 2\sqrt{13}/13$ $\qquad$ $\sec B = 5\sqrt{13}/10 = \sqrt{13}/2$

$\tan B = 15/10 = 3/2$ $\qquad$ $\csc B = 5\sqrt{13}/15 = \sqrt{13}/3$.

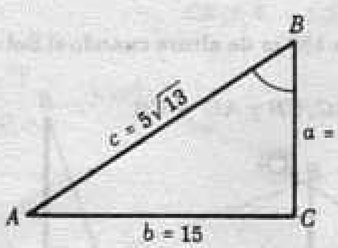


Fig.(a) Prob. 4

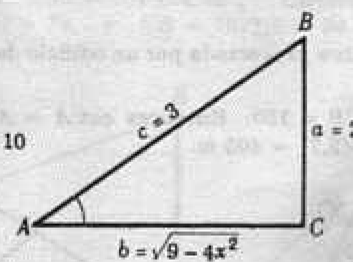


Fig.(b) Prob. 5

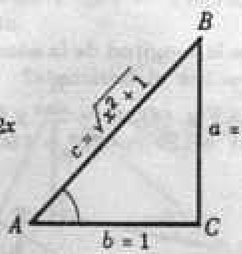


Fig.(c) Prob. 6

5. Si A es agudo y $\operatorname{sen} A = 2x/3$, determínense los valores de las otras funciones.

Constrúyase un triángulo rectángulo ABC tal que $a = 2x < 3$ y $c = 3$, como en la Fig. (b).

Entonces $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4x^2}$ y

$$\operatorname{sen} A = \frac{2x}{3},\ \cos A = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{3},\ \tan A = \frac{2x}{\sqrt{9-4x^2}},\ \cot A = \frac{\sqrt{9-4x^2}}{2x},\ \sec A = \frac{3}{\sqrt{9-4x^2}},$$
$$\csc A = \frac{3}{2x}.$$

6. Si A es agudo y $\tan A = x = x/1$, determínense los valores de las otras funciones.

Constrúyase un triángulo rectángulo ABC tal que $a = x$ y $b = 1$, como en la Fig. (c).

Entonces, $c = \sqrt{x^2 + 1}$ y

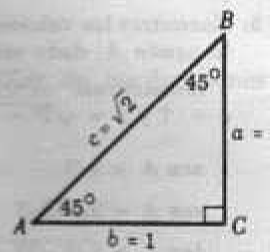
$$\operatorname{sen} A = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ \cos A = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ \tan A = x,\ \cot A = \frac{1}{x},\ \sec A = \sqrt{x^2+1},\ \csc A = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

7. Si A es un ángulo agudo: *a*) ¿Por qué sen $A < 1$? *b*) ¿Cuándo sen $A = \cos A$? *c*) ¿Por qué sen $A < \csc A$? *d*) ¿Por qué sen $A < \tan A$? *e*) ¿Cuándo sen $A < \cos A$? *f*) ¿Cuándo $\tan A > 1$?

En todo triángulo rectángulo ABC:

a) El lado $a <$ el lado c; por tanto, sen $A = a/c < 1$.
b) Sen $A = \cos A$ cuando $a/c = b/c$; entonces $a = b$, $A = B$ y $A = 45°$.
c) Sen $A < 1$ (según *a*) y $\csc A = 1/\text{sen } A > 1$.
d) Sen $A = a/c$, $\tan A = a/b$, y $b < c$; por tanto $a/c < a/b$ o sen $A < \tan A$.
e) Sen $A < \cos A$ cuando $a < b$; entonces $A < B$ o $A < 90° - A$, y $A < 45°$.
f) Tan $A = a/b > 1$ cuando $a > b$; entonces, $A > B$ y $A > 45°$.

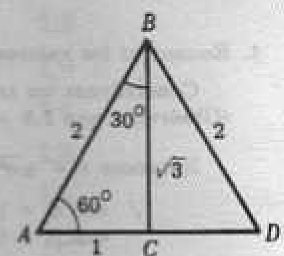
8. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de 45°.



En todo triángulo rectángulo isósceles ABC, $A = B = 45°$ y $a = b$. Sea $a = b = 1$; entonces $c = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ y

$$\text{sen } 45° = 1/\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \cot 45° = 1$$
$$\cos 45° = 1/\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \qquad \sec 45° = \sqrt{2}$$
$$\tan 45° = 1/1 = 1 \qquad \csc 45° = \sqrt{2}.$$

9. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de 30° y 60°.



En todo triángulo equilátero ABD, cada ángulo mide 60°. La bisectriz de un ángulo cualquiera, (por ejemplo, de B) es la mediatriz del lado opuesto. Supóngase que la longitud de los lados del triángulo equilátero es de dos unidades. Entonces en el triángulo rectángulo ABC, $AB = 2$, $AC = 1$, y $BC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

$$\text{sen } 30° = 1/2 = \cos 60° \qquad \cot 30° = \sqrt{3} = \tan 60°$$
$$\cos 30° = \sqrt{3}/2 = \text{sen } 60° \qquad \sec 30° = 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3 = \csc 60°$$
$$\tan 30° = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3 = \cot 60° \qquad \csc 30° = 2 = \sec 60°.$$

10. ¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada por un edificio de 150 m de altura cuando el Sol se ha elevado 20° sobre el horizonte?

En la Fig. (*d*), $A = 20°$ y $CB = 150$. Entonces $\cot A = AC/CB$ y $AC = CB \cot A = 150 \cot 20° = 150(2{,}7) = 405$ m.

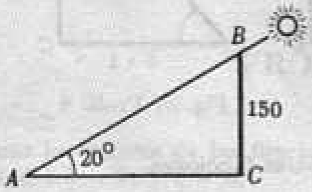


Fig. (*d*) Prob. 10

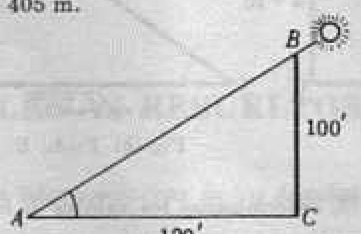


Fig. (*e*) Prob. 11

Fig. (*f*) Prob. 12

11. Un edificio de 100 m de altura proyecta una sombra de 120 m de longitud. Encontrar el ángulo de elevación del Sol.

En la Fig. (*e*), $CB = 100$ y $AC = 120$. Entonces $\tan A = CB/AC = 100/120 = 0{,}83$ y $A = 40°$.

12. Una escalera de mano está apoyada contra la pared de un edificio, de modo que del pie de la escalera al edificio hay doce unidades. ¿A qué altura del suelo se encuentra el extremo superior de la escalera, y cuál es la longitud de la misma, si forma un ángulo de 70° con el suelo?

Según la Fig. (*f*), $\tan A = CB/AC$; entonces $CB = AC \tan A = 12 \tan 70° = 12(2{,}7) = 32{,}4$. El extremo superior de la escalera está a 32 unidades del suelo.

Sec $A = AB/AC$; entonces $AB = AC \sec A = 12 \sec 70° = 12(2{,}9) = 34{,}8$.

La longitud de la escalera es de 35 unidades.

13. Desde lo alto de un faro, cuya altura sobre el nivel del mar es de 120 pies, el ángulo de depresión de una embarcación es de 15°. ¿A qué distancia del faro está la embarcación?

En el triángulo ABC de la Fig. (*g*), $A = 15°$ y $CB = 120$; entonces $\cot A = AC/CB$ y $AC = CB \cot A = 120 \cot 15° = 120(3{,}7) = 444$ pies.

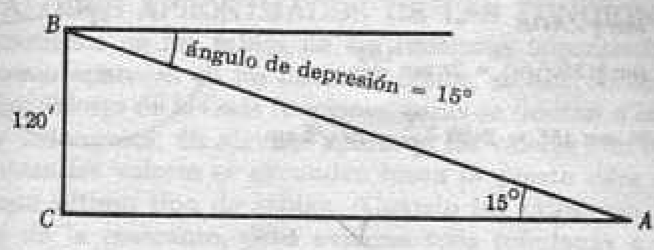


Fig. (*g*) Prob. 13

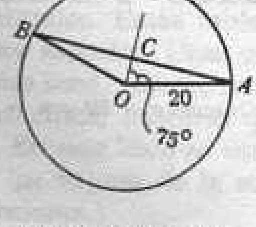


Fig. (*h*) Prob. 14

14. Encontrar la longitud de la cuerda subtendida por un ángulo central de 150° en una circunferencia de 20 cm de radio.

En la Fig. (*h*), OC es bisectriz del $\angle AOB$. Entonces $BC = AC$ y OAC es un triángulo rectángulo. En $\triangle OAC$, sen $\angle COA = AC/OA$ y $AC = OA$ sen $\angle COA = 20$ sen $75° = 20(0{,}97) = 19{,}4$.

Por tanto $BA = 38{,}8$ y la longitud de la cuerda es de 39 cm.

15. Encontrar la altura de un árbol si el ángulo de elevación de su extremo superior crece desde 20° hasta 40° cuando un observador avanza 75 m hacia el pie del árbol. Véase la Fig. (*i*).

En el triángulo rectángulo ABC, $\cot A = AC/CB$; entonces $AC = CB \cot A$ o $DC + 75 = CB \cot 20°$.

En el triángulo rectángulo DBC, $\cot D = DC/CB$; entonces $DC = CB \cot 40°$.

Por consiguiente: $DC = CB \cot 20° - 75 = CB \cot 40°$, $CB(\cot 20° - \cot 40°) = 75$,
$$CB(2{,}7 - 1{,}2) = 75, \quad \text{y} \quad CB = 75/1{,}5 = 50 \text{ m}.$$

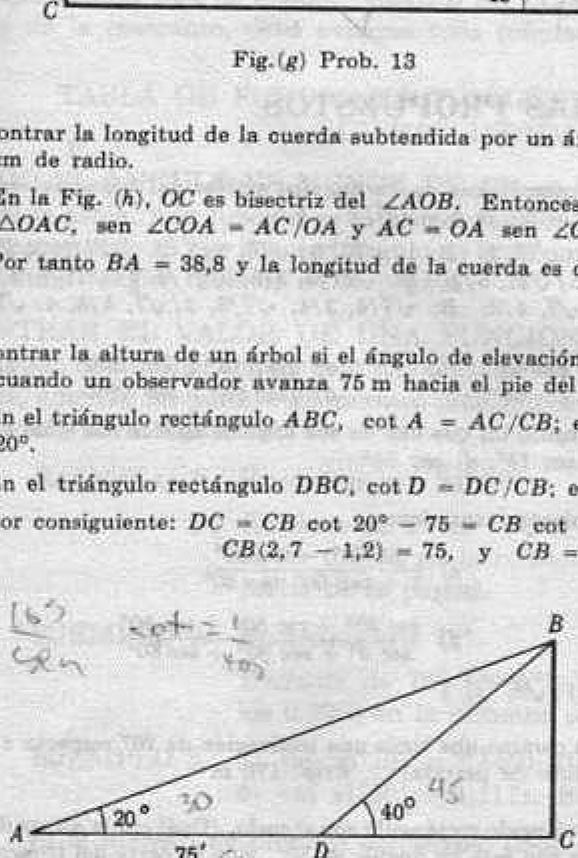


Fig. (*i*) Prob. 15

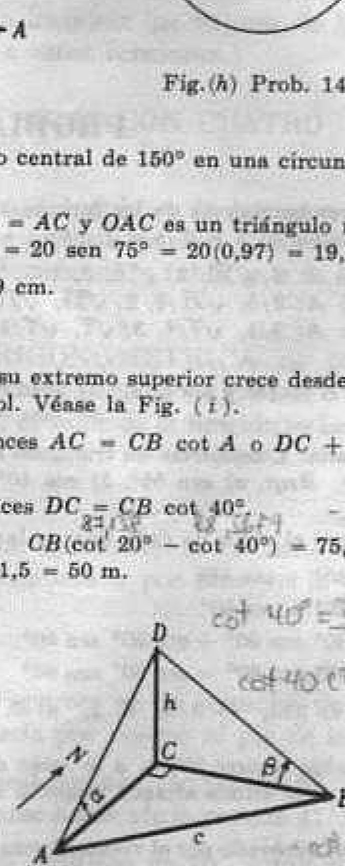


Fig. (*j*) Prob. 16

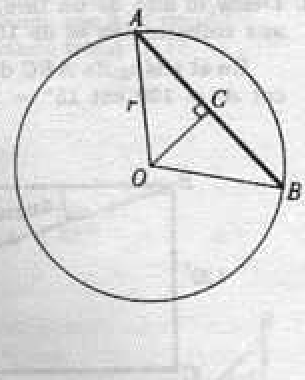
16. Una torre está situada en un terreno llano directamente al norte del punto A y al oeste de un punto B. La distancia entre los puntos A y B es de c metros. Si los ángulos de elevación del extremo superior de la torre medidos desde A y B, son α y β respectivamente, encontrar la altura h de la torre.

En el triángulo rectángulo ACD de la Fig. (*j*) $\cot \alpha = AC/h$; y en el triángulo rectángulo BCD, $\cot \beta = BC/h$. Entonces, $AC = h \cot \alpha$ y $BC = h \cot \beta$.

Como ABC es un triángulo rectángulo, $(AC)^2 + (BC)^2 = c^2 = h^2(\cot \alpha)^2 + h^2(\cot \beta)^2$ y
$$h = \frac{c}{\sqrt{(\cot \alpha)^2 + (\cot \beta)^2}}.$$

17. Sobre una circunferencia se abren agujeros separados entre sí por arcos iguales. Demostrar que la distancia d, entre los centros de dos agujeros sucesivos, viene dada por $d = 2r$ sen $180°/n$, donde r = radio de la circunferencia y n = número de agujeros. Encontrar d cuando $r = 20$ cm y $n = 4$.

Sean A y B los centros de dos agujeros consecutivos en una circunferencia de radio r y centro O. Trácese la bisectriz del ángulo O del triángulo AOB, y sea C el punto de intersección de la bisectriz con la cuerda AB. En el triángulo rectángulo AOC.



$$\text{sen } \angle AOC = AC/r = \tfrac{1}{2}d/r = d/2r.$$

Entonces $d = 2r \text{ sen } \angle AOC = 2r \text{ sen} \tfrac{1}{2}\angle AOB$

$$= 2r \text{ sen} \tfrac{1}{2}(360°/n) = 2r \text{ sen} \frac{180°}{n}.$$

Cuando $r = 20$ y $n = 4$, $d = 2\cdot 20 \text{ sen } 45° = 2\cdot 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$ cm.

PROBLEMAS PROPUESTOS

18. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo ABC, dados a) $a = 3, b = 1$; b) $a = 2, c = 5$; c) $b = \sqrt{7}, c = 4$.

    Resp. a) A: $3/\sqrt{10}$, $1/\sqrt{10}$, 3, $1/3$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{10}/3$; B: $1/\sqrt{10}$, $3/\sqrt{10}$, $1/3$, 3, $\sqrt{10}/3$, $\sqrt{10}$
    b) A: $2/5$, $\sqrt{21}/5$, $2/\sqrt{21}$, $\sqrt{21}/2$, $5/\sqrt{21}$, $5/2$; B: $\sqrt{21}/5$, $2/5$, $\sqrt{21}/2$, $2/\sqrt{21}$, $5/2$, $5/\sqrt{21}$
    c) A: $3/4$, $\sqrt{7}/4$, $3/\sqrt{7}$, $\sqrt{7}/3$, $4/\sqrt{7}$, $4/3$; B: $\sqrt{7}/4$, $3/4$, $\sqrt{7}/3$, $3/\sqrt{7}$, $4/3$, $4/\sqrt{7}$

19. Cuál es el mayor y por qué: a) ¿sen 55° o cos 55°? b) ¿sen 40° o cos 40°? c) ¿tan 15° o cot 15°? d) ¿sec 55° o csc 55°?

    Sugerencia: Considérese un triángulo rectángulo tal que uno de sus ángulos agudos sea igual al ángulo dado. *Resp.* a) sen 55°, b) cos 40°, c) cot 15°, d) sec 55°

20. Encontrar el valor de cada una de las siguientes expresiones:

    a) $\text{sen } 30° + \tan 45°$
    b) $\cot 45° + \cos 60°$
    c) $\text{sen } 30° \cos 60° + \cos 30° \text{ sen } 60°$
    d) $\cos 30° \cos 60° - \text{sen } 30° \text{ sen } 60°$
    e) $\dfrac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60° \tan 30°}$
    f) $\dfrac{\csc 30° + \csc 60° + \csc 90°}{\sec 0° + \sec 30° + \sec 60°}$

    Resp. a) 3/2, b) 3/2, c) 1, d) 0, e) $1/\sqrt{3}$, f) 1

21. Un hombre recorre 500 m a lo largo de un camino que tiene una inclinación de 20° respecto a la horizontal. ¿Qué altura alcanza respecto al punto de partida? *Resp.* 170 m

22. Un árbol quebrado por el viento, forma un triángulo rectángulo con el suelo. ¿Cuál era la altura del árbol, si la parte que ha caído hacia el suelo forma con éste un ángulo de 50°, y si la parte del tronco que ha quedado en pie tiene una altura de 20 m? *Resp.* 56 m

23. Dos caminos rectos que se cortan, forman un ángulo de 75°. En uno de los caminos y a 1000 m del cruce, hay una estación de gasolina. Encontrar la menor distancia desde la estación hasta el otro camino. *Resp.* 970 m

24. La distancia entre 2 edificios de tejado plano es de 60 m. Desde la azotea del menor de los edificios, cuya altura es de 40 m se observa la azotea del otro con un ángulo de elevación de 40°. ¿Cuál es la altura del edificio más alto? *Resp.* 90 m

25. Una escalera de mano, cuyo pie está en la calle, forma un ángulo de 30° con el suelo cuando su extremo superior se apoya en un edificio situado en uno de los lados de la calle, y forma un ángulo de 40° cuando se apoya en un edificio situado en el otro lado de la calle. Si la longitud de la escalera es de 50 m, ¿cuál es el ancho de la calle? *Resp.* 82 m

26. Encontrar el perímetro de un triángulo isósceles cuya base mide 40 cm si los ángulos de la base miden 70°. *Resp.* 156 cm

CAPITULO 4

Tablas de funciones trigonométricas

RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS

LOS VALORES APROXIMADOS DE LAS FUNCIONES de los ángulos agudos se encuentran en las tablas de las funciones trigonométricas naturales. Estas tablas, tal como aparecen en los distintos textos, se diferencian en varios aspectos. Unas ofrecen los valores de las seis funciones, otras se limitan a las funciones seno, coseno, tangente y cotangente; en algunas aparecen los valores con sólo cuatro cifras, mientras que en otras los valores se extienden hasta la cuarta cifra decimal. En este libro se utilizará este último tipo de tablas. (Cuando las tablas no incluyen los valores de la secante y de la cosecante, debe evitarse toda referencia a estas funciones.)

TABLA DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS CON CUATRO CIFRAS DECIMALES

CUANDO EL ANGULO ES MENOR DE 45°, se busca el ángulo en la columna izquierda de la tabla, y la función en el primer renglón superior de la página. Cuando el ángulo es mayor de 45°, se busca el ángulo en la columna derecha de la tabla, y la función en el último renglón inferior de la página.

ENCONTRAR EL VALOR DE UNA FUNCION TRIGONOMETRICA de un ángulo agudo dado. Si el ángulo contiene únicamente un número exacto de grados, o si contiene, además, un número de minutos múltiplo de 10′, el valor de la función se lee directamente en la tabla.

EJEMPLO 1. Encontrar sen 24°40′.

Enfrente de 24°40′ (<45°), que aparece en la columna izquierda, se lee 0,4173 en la columna encabezada por seno en la parte superior de la página.

EJEMPLO 2. Encontrar cos 72°.

Enfrente de 72° (>45°), que aparece en la columna derecha, se lee 0,3090 en la columna señalada por coseno al pie de la página.

EJEMPLO 3. *a*) tan 55°20′ = 1,4460. Búsquese ***hacia arriba*** porque 55°20′ >45°.
b) cot 41°50′ = 1,1171. Búsquese ***hacia abajo*** porque 41°50′ <45°.

Si el número de minutos del ángulo dado no es múltiplo de 10, como sucede en 24°43′, se hace necesaria una interpolación entre los valores de las funciones de los dos ángulos próximos al ángulo dado (24°40′ y 24°50′) mediante el método de partes proporcionales.

EJEMPLO 4. Encontrar sen 24°43′.

Se obtiene sen 24°40′ = 0,4173
sen 24°50′ = 0,4200
Diferencia en 10′ = 0,0027 = diferencia tabular

Corrección = diferencia de 3′ = 0,3(0,0027) = 0,00081 o 0,0008 cuando se redondea en la cuarta cifra decimal.
Como el ángulo crece, el seno del ángulo crece; así,
sen 24°43′ = 0,4173 + 0,0008 = 0,4181.

Si se dispone de una tabla con cinco cifras decimales, se puede leer directamente en ella el valor 0,41813 y redondearlo en 0,4181.

EJEMPLO 5. Encontrar cos 64°26′.

Se obtiene

$$\begin{array}{rcl} \cos 64°20' &=& 0{,}4331 \\ \cos 64°30' &=& \underline{0{,}4305} \\ \text{Diferencia tabular} &=& 0{,}0026 \end{array}$$

Corrección = 0,6(0,0026) = 0,00156 o 0,0016 con cuatro cifras decimales.

Como el ángulo crece, el coseno decrece. Por tanto,

$$\cos 64°26' = 0{,}4331 - 0{,}0016 = 0{,}4315.$$

Para ahorrar tiempo, en el ejemplo 4 se procederá de la siguiente manera:

a) Localícese sen 24°40′ = 0,4173. Por ahora, omítase la coma decimal y considérese únicamente el número 4173.

b) Búsquese (mentalmente) la diferencia tabular 27, es decir, la diferencia entre el número 4173, correspondiente a 24°40′ y el número 4200 correspondiente a 24°50′.

c) Calcúlese 0,3(27) = 8,1 y redondéese en el entero más próximo. Esta es la corrección.

d) Añádase (puesto que se trata de un seno) la corrección a 4173. Así se obtiene el número 4181. Entonces, sen 24°43′ = 0,4181.

Cuando, como ocurre en el ejemplo anterior, la interpolación se efectúa del ángulo menor hacia el mayor : 1) Se añade la corrección para encontrar el seno, la tangente y la secante. 2) Se resta la corrección para encontrar el coseno, la cotangente y la cosecante.

(Véase también el problema 1.)

ENCONTRAR EL ANGULO CUANDO SE CONOCE UNA DE SUS FUNCIONES. El proceso es el inverso del que se expuso anteriormente.

EJEMPLO 6. De la lectura directamente de la tabla se obtiene 0,2924 = sen 17°, 2,7725 = tan 70°10′.

EJEMPLO 7. Encontrar A, dado sen A = 0,4234.

El valor dado no aparece en la tabla. Sin embargo se tiene que

$$\begin{array}{lcl} & & 0{,}4226 = \text{sen } 25°\ 0' \qquad 0{,}4226 = \text{sen } 25°0' \\ & & \underline{0{,}4253} = \text{sen } 25°10' \qquad \underline{0{,}4234} = \text{sen } A \\ \text{Diferencia tabular} &=& 0{,}0027 \qquad\qquad\qquad\quad 0{,}0008 = \text{diferencia parcial} \end{array}$$

Corrección = $\dfrac{0{,}0008}{0{,}0027}(10') = \dfrac{8}{27}(10') = 3'$, aproximada al minuto más cercano.

Cuando se suma la corrección (ya que es un seno), se obtiene

$$25°0' + 3' = 25°3' = A.$$

EJEMPLO 8. Encontrar A, dada cot A = 0,6345.

$$\begin{array}{lcl} \text{Se encuentra} & & 0{,}6330 = \cot 57°40' \qquad 0{,}6330 = \cot 57°40' \\ & & \underline{0{,}6371} = \cot 57°30' \qquad \underline{0{,}6345} = \cot A \\ \text{Diferencia tabular} &=& 0{,}0041 \qquad\qquad\qquad\quad 0{,}0015 = \text{diferencia parcial} \end{array}$$

$$\text{Corrección} = \frac{0{,}0015}{0{,}0041}(10') = \frac{15}{41}(10') = 4', \text{ aproximada al minuto más cercano.}$$

Cuando se sustrae la corrección (ya que es una cotangente), se obtiene

$$57°40' - 4' = 57°36' = A.$$

Para ahorrar tiempo, en el ejemplo 7 se puede proceder de la siguiente manera:

a) Localícese el valor más cercano, 0,4226 = sen 25°0'. Omítase la coma decimal y considérese únicamente el número 4226.

b) Búsquese la diferencia tabular, 27.

c) Búsquese la diferencia parcial, 8, entre 4226 y el número 4234 correspondiente al valor dado.

d) Calcúlese $\frac{8}{27}(10') = 3'$ y súmese a 25°0'.

(Véase el problema 3.)

LOS ERRORES EN LOS RESULTADOS CALCULADOS provienen de:

a) Errores en los datos. Estos errores están siempre presentes en los datos que provienen de mediciones.

b) El uso de las tablas de las funciones trigonométricas naturales. Los valores que aparecen en las tablas son generalmente aproximaciones de expresiones decimales infinitas.

Cuando en la medición se registran 35 m, se está indicando que el resultado es correcto en lo que se refiere al metro más cercano, es decir, que la verdadera longitud está comprendida entre 34,5 y 35,5 metros. Del mismo modo, al registrarse una longitud de 35,0 metros, se indica que la verdadera longitud está comprendida entre 34,95 y 35,05 metros; una anotación correspondiente a 35,8 metros significa que la verdadera longitud está entre 35,75 y 35,85 metros; una anotación de 35,80 metros significa que la verdadera longitud está entre 35,795 y 35,805 metros, y así sucesivamente.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS. En el número 35 hay dos cifras significativas, 3 y 5. También hay dos cifras significativas en 3,5, 0,35, 0,035, 0,0035 pero no en 35,0, 3,50, 0,350, 0,0350. En los números 35,0, 3,50, 0,350, 0,0350 hay tres cifras significativas, 3, 5 y 0. Este es otro modo de decir que 35 y 35,0 no expresan la misma medición.

Es imposible determinar las cifras significativas en mediciones registradas como 350, 3500, 35000, ... Por ejemplo, 350 puede significar que el verdadero resultado está entre 345 y 355, o entre 349,5 y 350,5.

EXACTITUD EN LOS RESULTADOS CALCULADOS. Un resultado no debe tener más cifras decimales que las que tiene el menos exacto de los datos obtenidos en una medición. Es importante tener en cuenta aquí las siguientes relaciones entre el grado de exactitud de las longitudes y los ángulos:

a) Distancias expresadas con dos cifras significativas y ángulos expresados con aproximación al grado más cercano.

b) Distancias expresadas con 3 cifras significativas y ángulos expresados con aproximación al múltiplo más cercano de 10'.

c) Distancias expresadas con 4 cifras significativas y ángulos expresados con aproximación de 1'.

d) Distancias expresadas con 5 cifras significativas y ángulos expresados con aproximación de 0,1'.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. $a)$ sen $56°34' = 0{,}8345$; $\quad 8339 + 0{,}4(16) = 8339 + 6$
   $b)$ cos $19°45' = 0{,}9412$; $\quad 9417 - 0{,}5(10) = 9417 - 5$
   $c)$ tan $77°12' = 4{,}4016$; $\quad 43897 + 0{,}2(597) = 43897 + 119$
   $d)$ cot $40°36' = 1{,}1667$; $\quad 11708 - 0{,}6(68) = 11708 - 41$
   $e)$ sec $23°47' = 1{,}0928$; $\quad 10918 + 0{,}7(14) = 10918 + 10$
   $f)$ csc $60°4' = 1{,}1539$; $\quad 11547 - 0{,}4(19) = 11547 - 8$

2. Si la corrección es 6,5, 13,5, 10,5, etc., se debe redondear el resultado final de modo que termine en cifra par.
   $a)$ sen $28°37' = 0{,}4790$; $\quad 4772 + 0{,}7(25) = 4772 + 17{,}5$
   $b)$ cot $65°53' = 0{,}4476$; $\quad 4487 - 0{,}3(35) = 4487 - 10{,}5$
   $c)$ cos $35°25' = 0{,}8150$; $\quad 8158 - 0{,}5(17) = 8158 - 8{,}5$
   $d)$ sec $39°35' = 1{,}2976$; $\quad 12960 + 0{,}5(31) = 12960 + 15{,}5$

3. $a)$ $\operatorname{sen} A = 0{,}6826,\quad A = 43°3'\ ;\ 43°0' + \frac{6}{21}(10') = 43°0' + 3'$

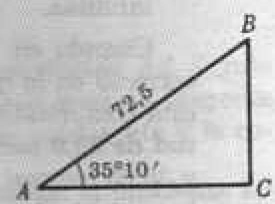
   $b)$ $\cos A = 0{,}5957,\quad A = 53°26';\ 53°30' - \frac{9}{24}(10') = 53°30' - 4'$

   $c)$ $\tan A = 0{,}9470,\quad A = 43°26';\ 43°20' + \frac{35}{55}(10') = 43°20' + 6'$

   $d)$ $\cot A = 1{,}7580,\quad A = 29°38';\ 29°40' - \frac{24}{119}(10') = 29°40' - 2'$

   $e)$ $\sec A = 2{,}3198,\quad A = 64°28';\ 64°20' + \frac{110}{140}(10') = 64°20' + 8'$

   $f)$ $\csc A = 1{,}5651,\quad A = 39°43';\ 39°50' - \frac{40}{55}(10') = 39°50' - 7'$



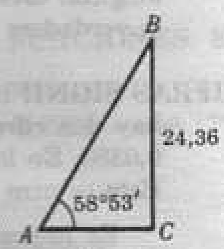
4. Resolver el triángulo rectángulo en el cual $A = 35°10'$ y $c = 72{,}5$.

   Solución $\quad B = 90° - 35°10' = 54°50'$.

   $a/c = \operatorname{sen} A,\quad a = c \operatorname{sen} A = 72{,}5(0{,}5760) = 41{,}8$.

   $b/c = \cos A,\quad b = c \cos A = 72{,}5(0{,}8175) = 59{,}3$.

   Comprobación: $a/b = \tan A,\quad a = b \tan A = 59{,}3(0{,}7046) = 41{,}8$.



5. Resolver el triángulo rectángulo en el cual $a = 24{,}36$, $A = 58°53'$.

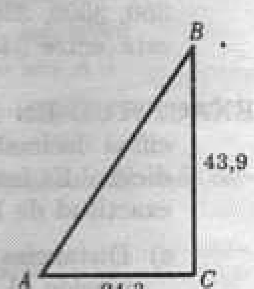
   Solución $\quad B = 90° - 58°53' = 31°7'$.

   $b/a = \cot A,\quad b = a \cot A = 24{,}36(0{,}6036) = 14{,}70$.

   $c/a = \csc A,\quad c = a \csc A = 24{,}36(1{,}1681) = 28{,}45$, o

   $a/c = \operatorname{sen} A,\quad c = a/\operatorname{sen} A = 24{,}36/0{,}8562 = 28{,}45$.

   Comprobación: $b/c = \cos A,\quad b = c \cos A = 28{,}45(0{,}5168) = 14{,}70$.



6. Resolver el triángulo rectángulo ABC, donde $a = 43{,}9$, $b = 24{,}3$.

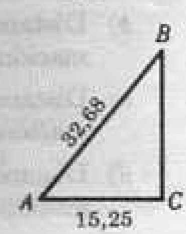
   Solución: $\quad \tan A = \frac{43{,}9}{24{,}3} = 1{,}8066\ ;\quad A = 61°2',\ B = 90° - A = 28°58'$.

   $c/a = \csc A,\quad c = a \csc A = 43{,}9(1{,}1430) = 50{,}2$, o

   $a/c = \operatorname{sen} A,\quad c = a/\operatorname{sen} A = 43{,}9/0{,}8749 = 50{,}2$.

   Comprobación: $c/b = \sec A,\quad c = b/\sec A = 24{,}3(2{,}0649) = 50{,}2$, o

   $b/c = \cos A,\quad c = b/\cos A = 24{,}3/0{,}4843 = 50{,}2$.



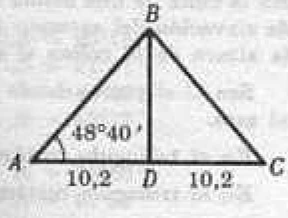
7. Resolver el triángulo rectángulo ABC, donde $b = 15{,}25$, $c = 32{,}68$.

   Solución: $\quad \operatorname{sen} B = \frac{15{,}25}{32{,}68} = 0{,}4666;\quad B = 27°49',\quad A = 90° - B = 62°11'$.

   $a/b = \cot B,\quad a = b \cot B = 15{,}25(1{,}8953) = 28{,}90$.

   Comprobación: $a/c = \cos B,\quad a = c \cos B = 32{,}68(0{,}8844) = 28{,}90$.

8. La base de un triángulo isósceles mide 20,4, y los ángulos de la base miden 48°40′. Encontrar los lados iguales y la altura del triángulo.



En la figura, BD es perpendicular a la base AC y la biseca.

En el triángulo rectángulo ABD,

$AB/AD = \sec A$, $\quad AB = 10{,}2(1{,}5141) = 15{,}4$.

$AD/AB = \cos A$, $\quad AB = 10{,}2/0{,}6604 = 15{,}4$.

$DB/AD = \tan A$, $\quad DB = 10{,}2(1{,}1369) = 11{,}6$.

9. Considérese la Tierra como una esfera de 3960 millas de radio. Encontrar el radio r correspondiente al paralelo cuya latitud es de 40°. Véase la Fig. (*a*).

En el triángulo rectángulo OCB, $\angle OBC = 40°$ y $OB = 3960$.

Entonces $\cos \angle OBC = CB/OB$ y $r = CB = 3960 \cos 40° = 3960(0{,}7660) = 3030$ millas.

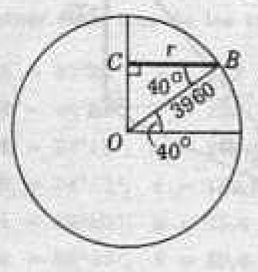


Fig. (*a*) Prob. 9

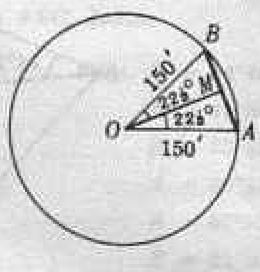


Fig. (*b*) Prob. 10

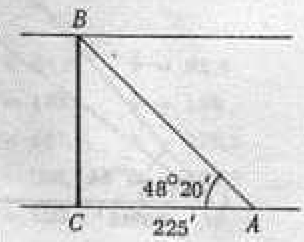


Fig. (*c*) Prob. 11

10. Encontrar el perímetro de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 150 cm de radio.

En la figura (*b*), se han unido con el vértice O de la circunferencia dos vértices consecutivos, A y B, del octógono. El triángulo OAB es isósceles. Los lados iguales miden 150 y $\angle AOB = 360°/8 = 45°$.

Como en el problema 8, se biseca $\angle AOB$ para formar el triángulo rectángulo MOB.

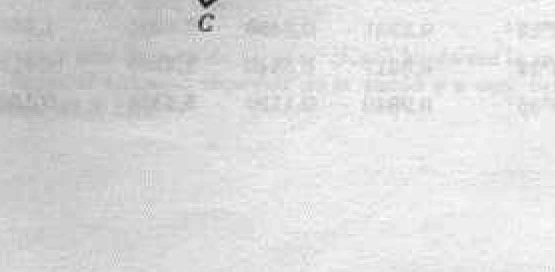
Entonces $MB = OB \operatorname{sen} \angle MOB = 150 \operatorname{sen} 22°30' = 150(0{,}3827) = 57{,}4$, y el perímetro del octógono $16\,MB = 16(57{,}4) = 918$ cm.

11. Al calcular el ancho de un río, un topógrafo coloca su tránsito en un punto C de una de las orillas y localiza un punto B en la orilla opuesta. Después, gira un ángulo de 90° y determina una distancia $CA = 225$ m. Por último, sitúa el tránsito en A y comprueba que $\angle CAB$ mide 48°20′. Encontrar el ancho del río.

Véase la Fig. (*c*). En el triángulo rectángulo ACB,

$$CB = AC \tan \angle CAB = 225 \tan 48°20' = 225(1{,}1237) = 253 \text{ m}.$$

12. La recta AD de la figura adjunta atraviesa un pantano. Para localizar un punto de esta recta, al otro lado del pantano, un topógrafo se sitúa en el punto A, gira un ángulo de 51°16′ y determina una distancia de 1585 m hasta un punto C. Por último, con el tránsito en C, gira un ángulo de 90° para determinar la recta CB. Si el punto B está situado en la recta AD, ¿qué distancia ha de recorrer el topógrafo para ir desde C hasta B?



$CB = AC \tan 51°16'$
$\quad = 1585(1{,}2467) = 1976$ m.

13. En la cima de una colina hay un asta de bandera. Desde un punto A, en el terreno llano, los ángulos de elevación del extremo D y del pie B del asta miden, respectivamente, 47°54′ y 39°45′. Encontrar la altura de la colina si el asta mide 115,5 dm. Véase la Fig. (*d*).

Sea C el punto donde la recta horizontal que pasa por A corta a la recta vertical que atraviesa el asta.

En el triángulo rectángulo ACD, $AC = DC \cot 47°54' = (115{,}5 + BC)(0{,}9036)$.

En el triángulo rectángulo ACB, $AC = BC \cot 39°45' = BC(1{,}2024)$.

Entonces $(115{,}5 + BC)(0{,}9036) = BC(1{,}2024)$

$$\text{y} \quad BC = \frac{115{,}5(0{,}9036)}{1{,}2024 - 0{,}9036} = 349{,}3$$

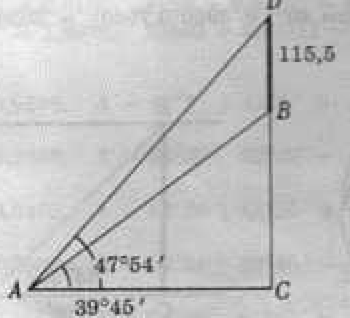


Fig.(*d*) Prob. 13

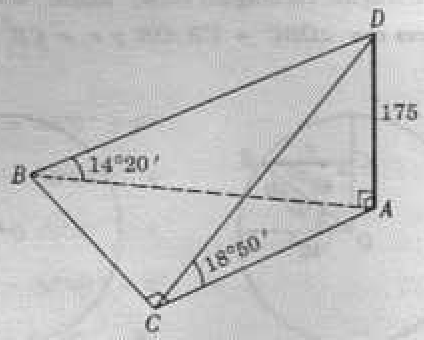


Fig.(*e*) Prob. 14

14. Desde lo alto de un faro, a 175 pies sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de un barco situado directamente al sur, es 18°50′. Dos minutos más tarde el ángulo de depresión es 14°20′. Calcular la velocidad del barco si se observa que navega directamente hacia el oeste.

En la Fig. (*e*), AD es el faro, C es el punto situado directamente al sur del faro donde se encontraba el barco cuando fue observado la primera vez, y B es la posición del barco dos minutos más tarde.

En el triángulo rectángulo CAD, $AC = AD \cot \angle ACD = 175 \cot 18°50' = 175(2{,}9319) = 513$.

En el triángulo rectángulo BAD, $AB = AD \cot \angle ABD = 175 \cot 14°20' = 175(3{,}9136) = 685$.

En el triángulo ABC, $BC = \sqrt{(AB)^2 - (AC)^2} = \sqrt{(685)^2 - (513)^2} = 454$.

El barco recorre 454 pies en 2 minutos; su velocidad es 227 pies/min.

PROBLEMAS PROPUESTOS

15. Encontrar las funciones trigonométricas de cada uno de los ángulos siguientes:

a) 18°47′, *b*) 32°13′, *c*) 58°24′, *d*) 79°45′.

Resp.	seno	coseno	tangente	cotangente	secante	cosecante
a) 18°47′	0,3220	0,9468	0,3401	2,9403	1,0563	3,1057
b) 32°13′	0,5331	0,8460	0,6301	1,5869	1,1820	1,8757
c) 58°24′	0,8517	0,5240	1,6255	0,6152	1,9084	1,1741
d) 79°45′	0,9840	0,1780	5,5304	0,1808	5,6201	1,0162

16. Encontrar el ángulo (agudo) A, dado:

a) sen $A = 0{,}5741$	*Resp.* $A = 35°\ 2'$	*e*) cos $A = 0{,}9382$	*Resp.* $A = 20°15'$
b) sen $A = 0{,}9468$	$A = 71°13'$	*f*) cos $A = 0{,}6200$	$A = 51°41'$
c) sen $A = 0{,}3510$	$A = 20°33'$	*g*) cos $A = 0{,}7120$	$A = 44°36'$
d) sen $A = 0{,}8900$	$A = 62°52'$	*h*) cos $A = 0{,}4651$	$A = 62°17'$
i) tan $A = 0{,}2725$	$A = 15°15'$	*m*) cot $A = 0{,}2315$	$A = 76°58'$
j) tan $A = 1{,}1652$	$A = 49°22'$	*n*) cot $A = 2{,}9715$	$A = 18°36'$
k) tan $A = 0{,}5200$	$A = 27°28'$	*o*) cot $A = 0{,}7148$	$A = 54°27'$
l) tan $A = 2{,}7775$	$A = 70°12'$	*p*) cot $A = 1{,}7040$	$A = 30°24'$
q) sec $A = 1{,}1161$	$A = 26°22'$	*u*) csc $A = 3{,}6882$	$A = 15°4$[illegible]$'$
r) sec $A = 1{,}4382$	$A = 45°57'$	*v*) csc $A = 1{,}0547$	$A = 71°28'$
s) sec $A = 1{,}2618$	$A = 37°35'$	*w*) csc $A = 1{,}7631$	$A =$ [illegible]$°33'$
t) sec $A = 2{,}1584$	$A = 62°24'$	*x*) csc $A = 1{,}3436$	$A = 48°\ 6'$

17. Resolver cada uno de los triángulos ABC, dados:

a) $A = 35°20'$, $c = 112$	*Resp.*	$B = 54°40'$,	$a = 64{,}8$,	$b = 91{,}4$
b) $B = 48°40'$, $c = 225$		$A = 41°20'$,	$a = 149$,	$b = 169$
c) $A = 23°18'$, $c = 346{,}4$		$B = 66°42'$,	$a = 137{,}0$,	$b = 318{,}1$
d) $B = 54°12'$, $c = 182{,}5$		$A = 35°48'$,	$a = 106{,}7$,	$b = 148{,}0$
e) $A = 32°10'$, $a = 75{,}4$		$B = 57°50'$,	$b = 120$,	$c = 142$
f) $A = 58°40'$, $b = 38{,}6$		$B = 31°20'$,	$a = 63{,}4$,	$c = 74{,}2$
g) $B = 49°14'$, $b = 222{,}2$		$A = 40°46'$,	$a = 191{,}6$,	$c = 293{,}4$
h) $A = 66°36'$, $a = 112{,}6$		$B = 23°24'$,	$b = 48{,}73$,	$c = 122{,}7$
i) $A = 29°48'$, $b = 458{,}2$		$B = 60°12'$,	$a = 262{,}4$,	$c = 528{,}0$
j) $a = 25{,}4$, $b = 38{,}2$		$A = 33°37'$,	$B = 56°23'$,	$c = 45{,}9$
k) $a = 45{,}6$, $b = 84{,}8$		$A = 28°16'$,	$B = 61°44'$,	$c = 96{,}3$
l) $a = 38{,}64$, $b = 48{,}74$		$A = 38°24'$,	$B = 51°36'$,	$c = 62{,}21$
m) $a = 506{,}2$, $c = 984{,}8$		$A = 30°56'$,	$B = 59°\ 4'$,	$b = 844{,}7$
n) $b = 672{,}9$, $c = 888{,}1$		$A = 40°44'$,	$B = 49°16'$,	$a = 579{,}4$

18. Encontrar la base y la altura de un triángulo isósceles cuyo ángulo del vértice mide 65° y cuyos lados iguales miden 415 cm. *Resp.* Base = 446 cm, altura 350 cm

19. Un triángulo isósceles tiene una base de 15,90 cm, y los ángulos de su base miden 54°28′. Encontrar los lados iguales y la altura. *Resp.* Lado = 13,68 cm, altura = 11,13 cm

20. El radio de una circunferencia mide 21,4 m. Encontrar *a*) la longitud de la cuerda subtendida por un ángulo central de 110°40′ y *b*) la distancia entre dos cuerdas paralelas, situadas a un mismo lado del centro, si están subtendidas por ángulos centrales de 118°40′ y 52°20′.
Resp. *a*) 35,2 m, *b*) 8,29 m

21. Demostrar que si, en un triángulo isósceles, b es la base del triángulo, a es la medida de los lados iguales y θ es el ángulo del vértice, entonces $b = 2a \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta$.

22. Demostrar que el perímetro P de un polígono regular de n lados inscritos en una circunferencia de radio r viene dado por $P = 2nr \operatorname{sen}(180°/n)$.

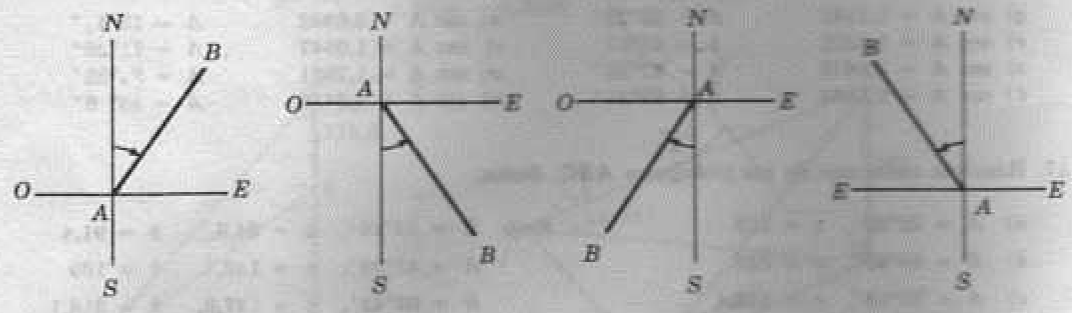
23. Una rueda de 5 dm de diámetro, asciende por un plano cuya inclinación, respecto a la horizontal, es de 18°20′. ¿A qué altura, respecto a la base del plano inclinado, se encuentra el centro de la rueda cuando ésta ha recorrido 5 dm a lo largo del plano? *Resp.* 3,95 dm

24. La distancia entre una pared de 15 pies de altura y una casa es de 10 pies. ¿Cuál ha de ser la menor longitud de una escalera de mano que permita llegar al extremo superior de la pared y a una ventana de la casa situada a 20,5 pies de altura? *Resp.* 42,5 pies

CAPITULO 5

Aplicaciones prácticas

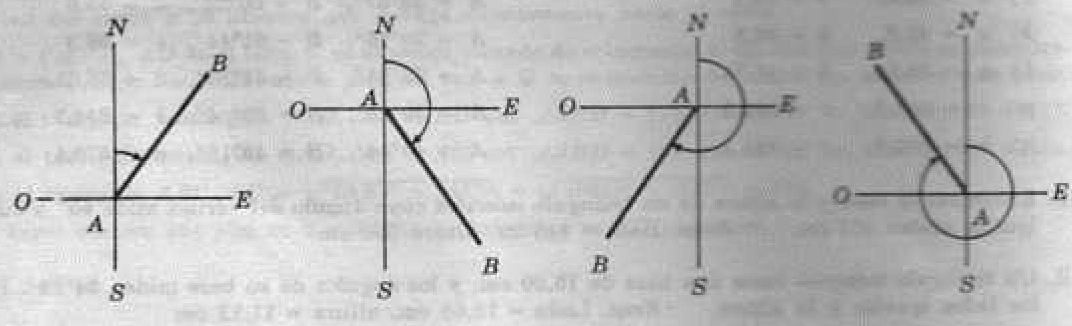
LA ORIENTACION DE UN PUNTO B **RESPECTO A UN PUNTO** A, en un plano horizontal, se define, generalmente, como el ángulo (siempre agudo) que forman la recta norte-sur que pasa por A y la semi-recta cuyo origen es A y que pasa por B. La orientación se lee, entonces, desde las semi-rectas norte o sur hacia el este o hacia el oeste.



Orientación: N 35° E — S 35° E — S 35° O — N 35° O

Fig. 5-A

En aeronáutica, la orientación de B respecto de A suele expresarse como el ángulo formado por la semi-recta AB y la semi-recta que, orientada hacia el norte, tiene su origen en A. Este ángulo se mide, a partir del norte, en el mismo sentido que el del movimiento de las agujas del reloj (es decir, desde el norte hacia el este). Por ejemplo,



Orientación: 35° — 145° — 215° — 325°

Fig. 5-B

VECTORES. Toda cantidad física, como la fuerza o la velocidad, que posee magnitud, dirección y sentido, recibe el nombre de *cantidad vectorial*. Una cantidad vectorial se puede representar mediante un segmento de recta dirigido (flecha) llamado *vector*. La *dirección* y *sentido* del vector son los de la cantidad dada, y la longitud del vector es proporcional a la magnitud de la cantidad.

EJEMPLO 1. La velocidad de un aeroplano es de 200 millas/hora N 40° E. Su velocidad aparece representada por el vector AB de la Fig. 5-C.

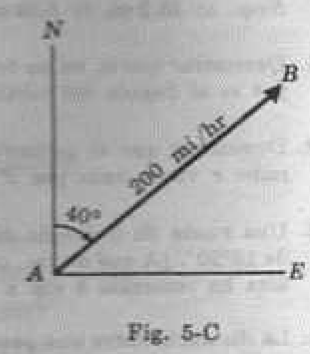


Fig. 5-C

EJEMPLO 2. Un bote de motor que en aguas tranquilas navega a razón de 12 kilómetros/hora, se dirige directamente a través de un río de una orilla a otra. La velocidad de las aguas del río es de 4 kilómetros/hora. En la Fig. 5-D, el vector CD representa la velocidad del río y el vector AB representa, en la misma escala, la velocidad del bote en aguas tranquilas. Así, la longitud del vector AB es tres veces la del vector CD.

3 veces $\vec{AB}$ de $\vec{CD}$

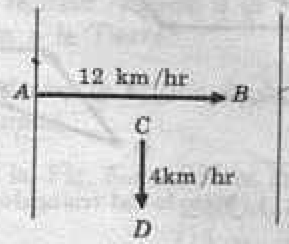


Fig. 5-D

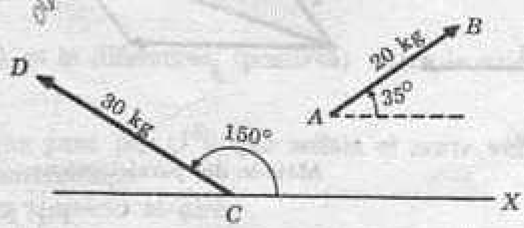


Fig. 5-E

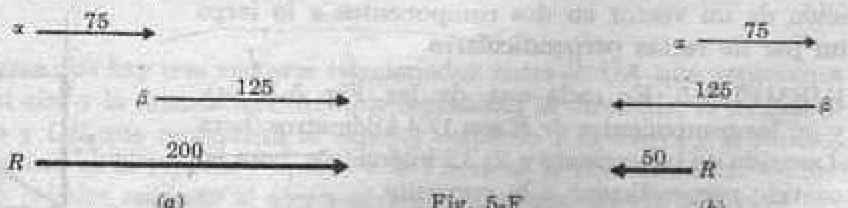
EJEMPLO 3. En la Fig. 5-E, el vector AB representa una fuerza de 20 kg que forma un ángulo de 35° con el sentido positivo del eje de las X, y el vector CD representa una fuerza de 30 kg que forma un ángulo de 150° con el sentido positivo del eje de las X. Se ha utilizado la misma escala para ambos vectores.

Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud, la misma dirección y el mismo sentido. Un vector no tiene una posición fija en un plano; puede moverse en él, siempre que conserve su magnitud, dirección y sentido.

ADICION DE VECTORES. La *resultante* o *vector suma* de varios vectores, situados todos en un mismo plano, es el vector del plano que produce el mismo efecto que el producido por todos los vectores originales cuando actúan conjuntamente.

Si dos vectores α y β son paralelos y del mismo sentido, su resultante es un vector R cuya magnitud es igual a la suma de las magnitudes de los dos vectores y cuyo sentido es el de los vectores dados. Véase la Fig. 5-F (a).

Si dos vectores paralelos tienen sentidos opuestos, su resultante es un vector R cuya magnitud es la diferencia (magnitud del mayor − magnitud del menor) de las magnitudes de los dos vectores y cuyo sentido es el del vector de mayor magnitud. Véase la Fig. 5-F (b).

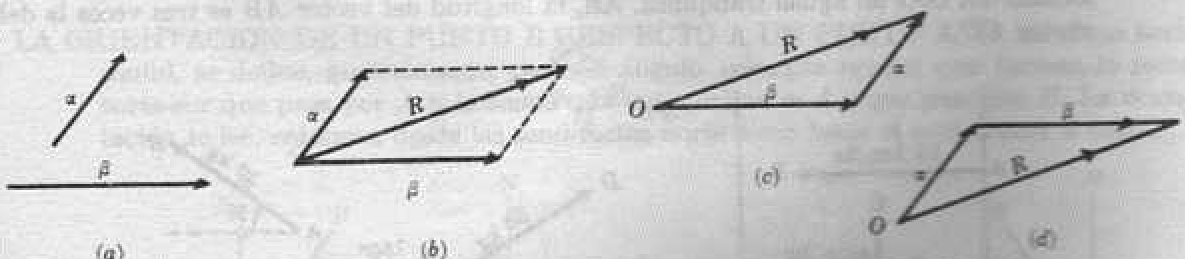


(a) Fig. 5-F (b)

En todos los otros casos, la magnitud, la dirección y el sentido de la resultante se obtienen mediante cualquiera de los dos métodos siguientes.

1) METODO DEL PARALELOGRAMO. Colóquense los orígenes de ambos vectores en un punto cualquiera O de su plano y complétese el paralelogramo que tiene a estos vectores por lados adyacentes. La diagonal dirigida cuyo origen es O es la resultante o vector suma de los vectores dados. Así, en la Fig. 5-G (b), el vector R es la resultante de los vectores α y β de la Fig. 5-G (a).

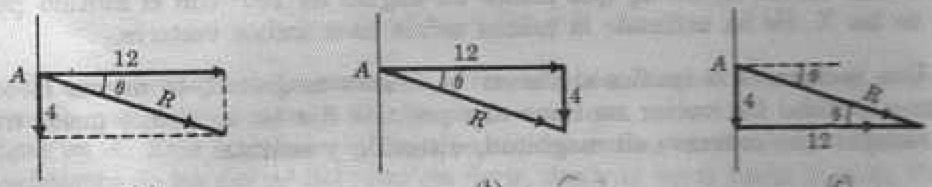
2) METODO DEL TRIANGULO. Escójase uno de los vectores y desígnese su origen por O. Colóquese el otro vector en el extremo del primero. La resultante es, entonces, el segmento de recta dirigido que completa el triángulo y cuyo origen es O. Así, en la Fig. 5-G (c) y Fig. 5-G (d), R es la resultante de los vectores α y β.



(a) (b)
Método del paralelogramo — Método del triángulo

Fig. 5-G

EJEMPLO 4. La resultante R de los dos vectores del ejemplo 2 representa la rapidez, la dirección y el sentido del movimiento del bote. La Fig. 5-H (a) ilustra el método del paralelogramo; la Fig. 5-H (b) y la Fig. 5-H (c) ilustran el método del triángulo.



(a) (b) (c)

Fig. 5-H

La magnitud de $R = \sqrt{(12)^2 + 4^2} = 12{,}6$ kilómetros/hora.

Entonces, el bote se mueve, a favor de la corriente, a lo largo de una recta que forma un ángulo $\theta = 18°30'$ con la dirección original que había tomado, o un ángulo $90° - \theta = 71°30'$ con la orilla del río.

Según las Fig. 5-H (a) o 5-H (b), $\tan\theta = 4/12 = 0{,}3333$ y $\theta = 18°30'$.

LA COMPONENTE DE UN VECTOR α sobre una recta L es la proyección perpendicular del vector α sobre L. Con frecuencia es útil la descomposición de un vector en dos componentes a lo largo de un par de rectas perpendiculares.

EJEMPLO 5. En cada una de las Fig. 5-H (a), (b) y (c) las componentes de R son 1) 4 kilómetros/hora en el sentido de la corriente y 2) 12 kilómetros/hora en un sentido perpendicular a la corriente.

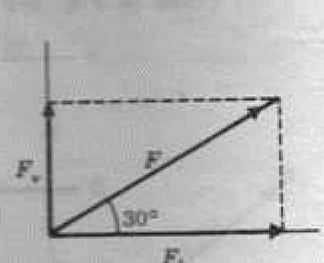


Fig. 5-I

EJEMPLO 6. En la Fig. 5-I, la fuerza F tiene por componente horizontal $F_h = F\cos 30°$ y por componente vertical $F_v = F \text{ sen } 30°$. Obsérvese que F es el vector suma o resultante de F_h y F_v.

NAVEGACION AEREA. La *orientación* de un aeroplano es la dirección (determinada por una lectura de la brújula) en la que está enfilado el aeroplano. La orientación se mide, a partir del norte, en el mismo sentido que el del movimiento de las agujas de un reloj.

La *rapidez respecto al aire* (determinada por una lectura del indicador de velocidad en el aire) es la magnitud de la velocidad del aeroplano en aire tranquilo.

La *derrota* (o rumbo) de un aeroplano es la dirección y sentido en que se mueve respecto a la Tierra. El rumbo se mide, a partir del norte, en el mismo sentido que el del movimiento de las agujas de un reloj.

La *rapidez respecto a la Tierra* es la magnitud de la velocidad del aeroplano con relación a la Tierra.

La *deriva* (o ángulo de desviación) es la diferencia (positiva) entre la orientación y el rumbo.

En la Fig. 5-J: ON es la recta que pasa por O y que señala el norte verdadero,
$\angle NOA$ es la orientación,
$OA =$ la rapidez respecto al aire,
AN es la recta que pasa por A y que señala el norte verdadero,
$\angle NAO$ es la dirección del viento, medida a partir de la recta que señala el norte,
$AB =$ la rapidez del viento,
$\angle NOB$ es el rumbo,
$OB =$ la rapidez respecto a la Tierra,
$\angle AOB$ es el ángulo de desviación.

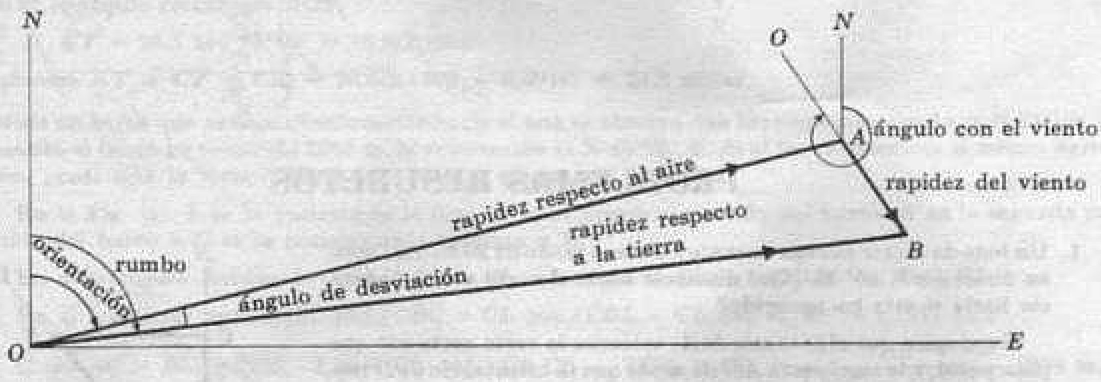


Fig. 5-J

Obsérvese que hay tres vectores relacionados entre sí: OA que representa la rapidez respecto al aire y la orientación, AB que representa la dirección, el sentido y la rapidez del viento y OB que representa la rapidez respecto a la Tierra y el rumbo. El vector cuya magnitud es la rapidez respecto a la Tierra es la resultante del vector correspondiente a la rapidez respecto al aire y el vector correspondiente a la rapidez del viento.

EJEMPLO 7. La Fig. 5-K ilustra el caso en que un aeroplano vuela a 240 millas/hora con una orientación de 60° cuando el viento sopla desde 330° a 30 millas/hora.

Para construir la figura, colóquese en O el vector correspondiente a la rapidez respecto al aire; trácese a continuación (obsérvense los sentidos de las flechas) el vector correspondiente a la rapidez del viento y, por último, ciérrese el triángulo. Obsérvese, además, que el vector correspondiente a la rapidez respecto a la Tierra no se ha trazado a partir del vector correspondiente a la rapidez del viento.

En el triángulo resultante:

La rapidez respecto a la Tierra $= \sqrt{(240)^2 + (30)^2} = 242$ mph.

$\text{Tan } \theta = 30/240 = 0{,}1250$ y $\theta = 7°10'$.

$\text{Rumbo} = 60° + \theta = 67°10'$.

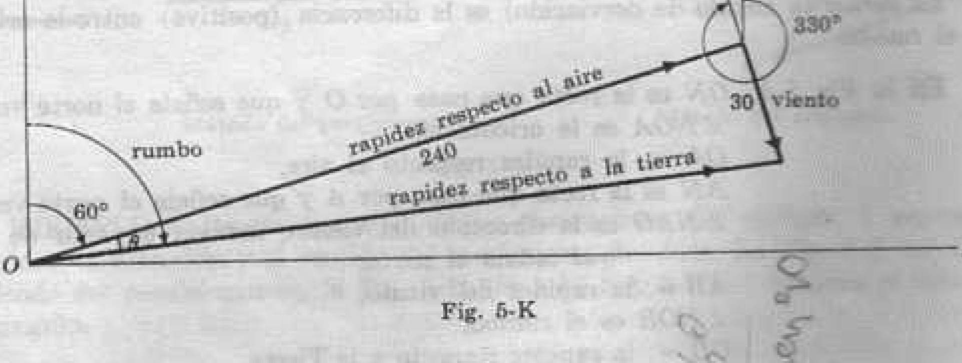
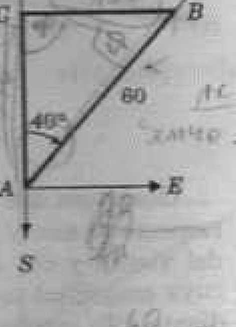


Fig. 5-K

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un bote de motor navega durante 3 horas a razón de 20 millas/hora en dirección N 40° E. ¿Qué distancia hacia el norte y qué distancia hacia el este ha recorrido?



Supóngase que el bote sale de A; trácense la recta norte-sur que pasa por A y la semi-recta AD de modo que la orientación de D respecto al punto A sea N 40° E. Localícese sobre AD un punto B tal que $AB = 3(20) = 60$ millas. Desde B trácese la perpendicular a la recta NAS; sea C el pie de la perpendicular. En el triángulo rectángulo ABC,

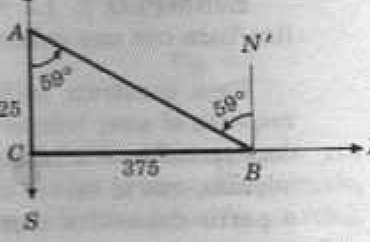
$$AC = AB \cos A = 60 \cos 40° = 60(0{,}7660) = 45{,}96$$

y

$$CB = AB \text{ sen } A = 60 \text{ sen } 40° = 60(0{,}6428) = 38{,}57.$$

El bote ha recorrido 46 millas hacia el norte y 39 millas hacia el este.

2. Tres barcos están situados de tal manera que A se encuentra a 225 millas directamente al norte de C, y B a 375 millas directamente al este de C. ¿Cuál es la orientación *a*) de B respecto de A? *b*) de A respecto de B?

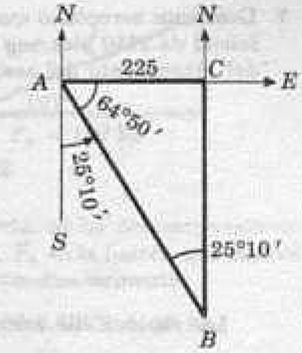


En el triángulo rectángulo ABC, $\tan \angle CAB = 375/225 = 1{,}6667$ y $\angle CAB = 59°0'$.

a) La orientación de B respecto de A (ángulo SAB) es S 59°0′ E.

b) La orientación de A respecto de B (ángulo $N'BA$) es N 59°0′ O.

3. Tres barcos están situados de tal manera que A se encuentra a 225 millas al oeste de C, mientras que la orientación de B (situado directamente al sur de C) respecto de A es S 25°10′ E. *a*) ¿Cuál es la distancia entre B y A? *b*) ¿Cuál es la distancia entre B y C? *c*) ¿Cuál es la orientación de A respecto de B?



Según la figura, $\angle SAB = 25°10'$ y $\angle BAC = 64°50'$. Entonces

$AB = AC \sec \angle BAC = 225 \sec 64°50' = 225(2{,}3515) = 529{,}1$ o

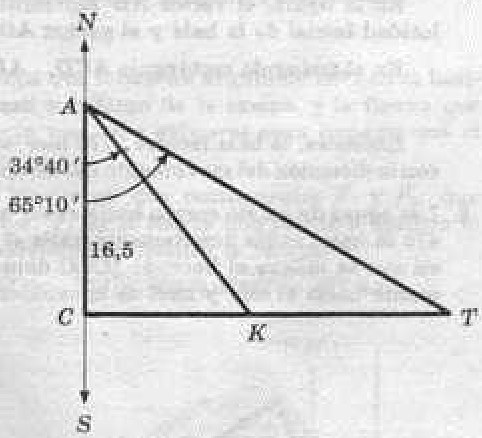
$AB = AC/\cos \angle BAC = 225/\cos 64°50' = 225/0{,}4253 = 529{,}0$ y

$CB = AC \tan \angle BAC = 225 \tan 64°50' = 225(2{,}1283) = 478{,}9$.

a) B se encuentra a 529 millas de A. *b*) B se encuentra a 479 millas de C.

c) Como $\angle CBA = 25°10'$, la orientación de A respecto de B es N 25°10′ O.

4. Desde un barco que navega a 16,5 millas/hora hacia el norte, se observan directamente hacia el este los restos de un naufragio K y una torre de observación T. Una hora más tarde, la orientación del barco respecto a los restos del naufragio es S 34°40′ E y respecto a la torre es S 65°10′ E. Encontrar la distancia entre los restos del naufragio y la torre.



En la figura, C, K y T representan, respectivamente, el barco, los restos del naufragio y la torre cuando estaban alineados. Una hora más tarde, el barco se encuentra en el punto A, 16,5 millas al norte de C. En el triángulo rectángulo ACK,

$$CK = 16{,}5 \tan 34°40' = 16{,}5(0{,}6916).$$

En el triángulo rectángulo ACT,

$$CT = 16{,}5 \tan 65°10' = 16{,}5(2{,}1609).$$

Entonces $KT = CT - CK = 16{,}5(2{,}1609 - 0{,}6916) = 24{,}2$ millas.

5. Desde un barco que navega directamente hacia el este se observa una luz cuya orientación es N 62°10′ E. Cuando el barco ha recorrido 2250 m, la orientación es N 48°25′ E. Si el barco mantiene el mismo derrotero, ¿cuál será la menor distancia a que se encontrará la luz?

En la Fig. (*a*), L es la posición de la luz, A es la primera posición del barco, B es la segunda posición del barco y C es la posición más próxima a L.

En el triángulo rectángulo ACL, $AC = CL \cot \angle CAL = CL \cot 27°50' = 1{,}8940\ CL$.

En el triángulo rectángulo BCL, $BC = CL \cot \angle CBL = CL \cot 41°35' = 1{,}1270\ CL$.

Como $AC = BC + 2250$, $1{,}8940\ CL = 1{,}1270\ CL + 2250$, y $CL = \dfrac{2250}{1{,}8940 - 1{,}1270} = 2934$ m.

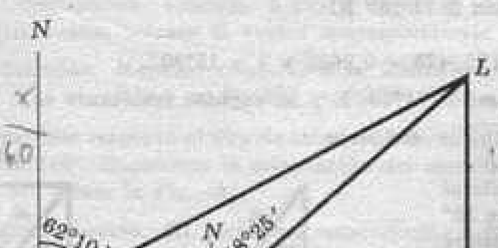


Fig. (*a*) Prob. 5

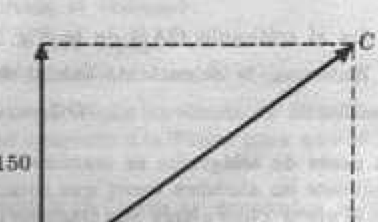


Fig. (*b*) Prob. 6

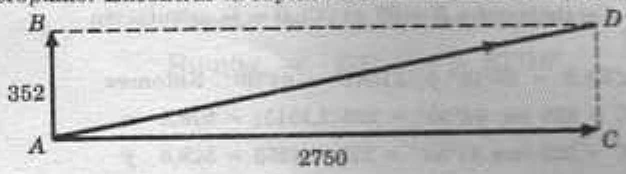
6. En el punto O de la Fig. (*b*), está situado un cuerpo sobre el que actúan dos fuerzas: una de 150 kg hacia el norte y otra de 200 kg hacia el este. Encontrar la magnitud, la dirección y el sentido de la resultante.

En el triángulo rectángulo OBC, $OC = \sqrt{(OB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{(200)^2 + (150)^2} = 250$ kg

$\tan \angle BOC = 150/200 = 0{,}7500$ y $\angle BOC = 36°50'$.

La magnitud de la fuerza resultante es 250 kg y su orientación es N 53°10′ E.

7. Desde un aeroplano que vuela horizontalmente a 240 millas/hora se dispara una bala con una rapidez inicial de 2750 pies/seg y de tal manera que su trayectoria inicial forma un ángulo recto con la dirección del movimiento del aeroplano. Encontrar la rapidez resultante de la bala, su dirección y sentido.



La rapidez del aeroplano es 240 mi/hr $= \dfrac{240(5280)}{60(60)}$ pies/seg = 352 pies/seg.

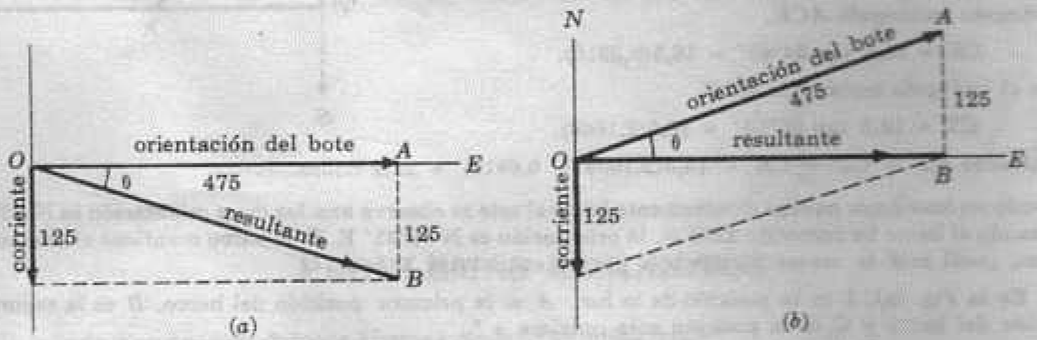
En la figura, el vector AB representa la velocidad del aeroplano, el vector AC representa la velocidad inicial de la bala y el vector AD representa la velocidad resultante de la bala.

En el triángulo rectángulo ACD, $AD = \sqrt{(352)^2 + (2750)^2} = 2770$ pies/seg.

$\tan \angle CAD = 352/2750 = 0{,}1280$ y $\angle CAD = 7°20'$.

Entonces, la bala recorre 2770 pies/seg a lo largo de una trayectoria que forma un ángulo de 82°40′ con la dirección del movimiento del aeroplano.

8. Las aguas de un río corren hacia el sur a 125 m/min. Un bote de motor, que en aguas tranquilas recorre 475 m/min, enfila directamente hacia el este para atravesar el río. *a*) Encontrar la rapidez y la dirección en que se mueve el bote. *b*) ¿Cuál debe ser la orientación inicial del bote para atravesar el río directamente hacia el este y cuál es la rapidez resultante en este caso?



a) En el triángulo rectángulo OAB de la Fig. (*a*) $OB = \sqrt{(475)^2 + (125)^2} = 491$.

$\tan\theta = 125/475 = 0{,}2632$ y $\theta = 14°40'$.

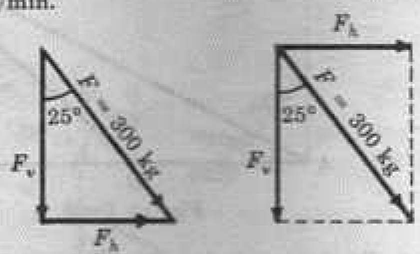
Entonces, el bote recorre 491 m/min en dirección S 75°20′ E.

b) En el triángulo OAB de la Fig. (*b*), $\operatorname{sen}\theta = 125/475 = 0{,}2632$ y $\theta = 15°20'$.

Entonces, la orientación inicial del bote ha de ser N 74°40′E y su rapidez resultante es

$$OB = \sqrt{(475)^2 - (125)^2} = 458 \text{ m/min.}$$

9. Un poste de telégrafos se mantiene en posición vertical mediante un alambre tenso que forma un ángulo de 25° con el poste y que ejerce una tracción de $F = 300$ kg sobre el extremo superior del mismo. Encontrar las componentes horizontal y vertical F_h y F_v de la tracción F.

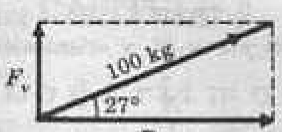


$F_h = 300 \operatorname{sen} 25° = 300(0{,}4226) = 127$ kg

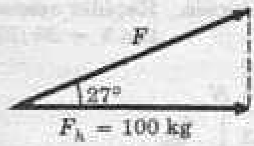
$F_v = 300 \cos 25° = 300(0{,}9063) = 272$ kg

10. Un hombre tira de una cuerda que está atada a un trineo con una fuerza de 100 kg. La cuerda forma un ángulo de 27° con el suelo. *a*) Encontrar la tracción efectiva que obliga al trineo a deslizarse a lo largo del suelo y la tracción efectiva que tiende a levantar verticalmente el trineo. *b*) Encontrar la fuerza que el hombre debe ejercer para que la tracción efectiva que obliga al trineo a deslizarse horizontalmente sea de 100 kg.

(c)



(d)



(e)

a) En las Fig. (c) y (d), la tracción de 100 kg ejercida a lo largo de la cuerda, se ha descompuesto en sus componentes horizontal y vertical, F_h y F_v respectivamente. Entonces, F_h es la fuerza que mueve el trineo a lo largo del suelo y F_v es la fuerza que tiende a levantarlo perpendicularmente.

$$F_h = 100 \cos 27° = 100(0{,}8910) = 89 \text{ kg}, \quad F_v = 100 \text{ sen } 27° = 100(0{,}4540) = 45 \text{ kg}.$$

b) En la Fig. (e), $F_h = 100$ kg es la componente horizontal de la fuerza buscada F. Entonces

$$F = 100/\cos 27° = 100/0{,}8910 = 112 \text{ kg}.$$

11. Un bloque, cuyo peso es $W = 500$ kg, descansa sobre una rampa que forma un ángulo de 29° con la horizontal. a) Encontrar la fuerza que tiende a deslizar el bloque a lo largo de la rampa, y la fuerza que el bloque ejerce contra la rampa. b) ¿Cuál es la menor fuerza que debe aplicarse para impedir que el bloque se deslice a lo largo de la rampa? Despréciese la fricción.

a) Considérese la Fig. (f). Descompóngase el peso W del bloque en dos componentes F_1 y F_2, que sean, respectivamente, paralela y perpendicular a la rampa. F_1 es la fuerza que tiende a deslizar el bloque a lo largo de la rampa y F_2 es la fuerza que el bloque ejerce contra la rampa.

$$F_1 = W \text{ sen } 29° = 500(0{,}4848) = 242 \text{ kg}, \quad F_2 = W \cos 29° = 500(0{,}8746) = 437 \text{ kg}.$$

b) 242 kg a lo largo de la rampa pero hacia arriba.

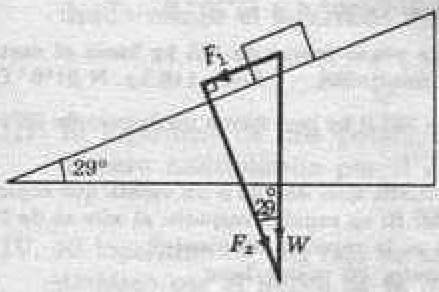


Fig. (f) Prob. 11

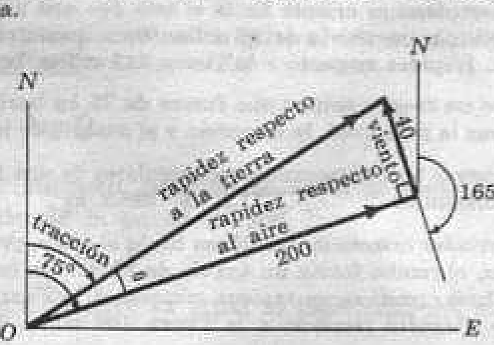


Fig. (g) Prob. 12

12. La orientación de un aeroplano es 75° y su rapidez respecto al aire es de 200 millas/hora. Encontrar la rapidez respecto a la Tierra y el rumbo si sopla un viento de 40 millas/hora desde 165°. Véase la Fig. (g).

Construcción. Trácese, a partir de O, el vector correspondiente a la rapidez respecto al aire y, a continuación, trácese el vector correspondiente al viento. Ciérrese el triángulo.

Solución. Rapidez respecto a la Tierra $= \sqrt{(200)^2 + (40)^2} = 204$ mph,
$\tan\theta = 40/200 = 0{,}2000$ y $\theta = 11°20'$, y rumbo $= 75° - \theta = 63°40'$.

13. La rapidez respecto al aire de un aeroplano es de 200 millas por hora. Sopla un viento de 30 millas/hora desde 270°. Encontrar la orientación del aeroplano y la rapidez respecto a la Tierra para que el rumbo sea 0°. Véase la Fig. (h).

Construcción. El vector correspondiente a la rapidez respecto a la Tierra se encuentra sobre ON. Trácese a partir de O, el vector correspondiente al viento y, a continuación, el vector correspondiente a la rapidez respecto al aire (200 unidades, desde el extremo del vector del viento hasta un punto de ON); ciérrese el triángulo.

Solución. Rapidez respecto a la Tierra $= \sqrt{(200)^2 - (30)^2} = 198$ mph,
$\text{sen }\theta = 30/200 = 0{,}1500$ y $\theta = 8°40'$, y orientación $= 360° - \theta = 351°20'$.

14. Desde 320° sopla un viento de 35 millas/hora. Encontrar la rapidez respecto al aire y la orientación para que la rapidez respecto a la Tierra y el rumbo sean, respectivamente, 250 millas por hora y 50°. Véase la Fig. (i).

Construcción. Trácense, con sus orígenes en O, los vectores correspondientes a la velocidad respecto a la Tierra y el viento. Ciérrese el triángulo.

Solución. Rapidez respecto al aire $= \sqrt{(250)^2 + (35)^2} = 252$ mph,
$\tan\theta = 35/250 = 0{,}1400$ y $\theta = 8°$, y orientación $= 50° - 8° = 42°$.

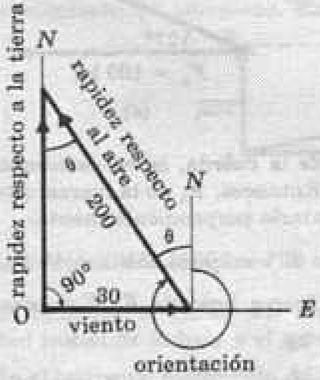


Fig.(*h*) Prob. 13

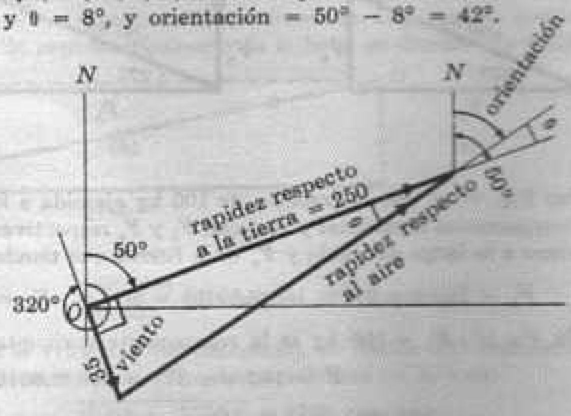


Fig.(*i*) Prob. 14

PROBLEMAS PROPUESTOS

15. Un aeroplano vuela 100 millas en dirección S 38°10′ E. ¿Qué distancia hacia el sur y qué distancia hacia el este ha recorrido? *Resp.* 78,6 millas hacia el sur; 61,8 millas hacia el este

16. Un aeroplano se orienta hacia el este con una rapidez respecto al aire de 240 millas/hora. Si desde el norte sopla un viento de 40 millas/hora, encontrar la rapidez respecto a la Tierra y el rumbo.
Resp. Rapidez respecto a la Tierra, 243 millas/hora; rumbo, 99°30′ ó S 80°30′ E

17. Sobre un cuerpo actúan una fuerza de 75 kg hacia el oeste y una fuerza de 125 kg hacia el norte. Encontrar la magnitud, la dirección y el sentido de la fuerza resultante. *Resp.* 146 kg, N 31°0′ O

18. Encontrar las componentes rectangulares de una fuerza de 525,0 kg que forma un ángulo de 38°25′ con la horizontal. *Resp.* 411,3 kg; 326,2 kg

19. Un aviador orienta su aeroplano hacia el oeste, pero comprueba que, debido a un viento que sopla desde el sur, el rumbo forma un ángulo de 20° con la orientación. Si su rapidez respecto al aire es de 100 millas/hora, ¿cuál es su rapidez respecto a la Tierra y cuál es la rapidez del viento?
Resp. Rapidez respecto a la Tierra, 106 millas/hora; viento, 36 millas/hora

20. Se orienta un aeroplano hacia el oeste mientras sopla, desde el sur, un viento de 40 millas. ¿Cuál es la rapidez respecto al aire que se necesita para seguir un rumbo de N 72° O y cuál es la rapidez respecto a la Tierra? *Resp.* Rapidez respecto al aire, 123 millas/hora; rapidez respecto a la Tierra, 129 millas/hora

21. Se remolca un lanchón, hacia el norte, a 18 millas/hora. Un hombre atraviesa la cubierta desde el oeste hacia el este a razón de 6 m/seg. Encontrar la magnitud y la dirección de la velocidad resultante.
Resp. 27 m/seg, N 12°50′ E

22. Un barco ha de navegar desde un punto *A* hasta un punto *C* situado a 56 millas al norte y 258 millas al este de *A*. Después de recorrer 120 millas en dirección N 25°10′ E hasta un punto *P*, el barco se orienta hacia *C*. Encontrar la distancia entre *P* y *C*, y el rumbo que ha de tomar para llegar a *C*.
Resp. 214 millas, S 75°40′ E

23. Un alambre tenso de 78 dm de largo se extiende desde el extremo superior de un poste de 56 dm de altura hasta el suelo, y ejerce sobre el poste una tracción de 290 kg. ¿Cuál es la tracción horizontal en el extremo superior del poste? *Resp.* 202 kg

24. Un peso de 200 kg está colocado en un plano que carece de fricción y que forma un ángulo de 38° con la horizontal. Una cuerda, paralela a la superficie y asegurada por una clavija, mantiene el peso en su sitio. Encontrar la tracción ejercida sobre la cuerda. *Resp.* 123 kg

25. Un hombre desea subir un peso de 300 libras hasta lo alto de una pared de 20 pies de altura. Para ello quiere empujar el peso a lo largo de un plano inclinado. ¿Cuál es la longitud del menor plano inclinado que puede utilizar si su fuerza de empuje es de 140 libras? *Resp.* 43 pies

26. Por una pista, inclinada 40° respecto a la horizontal, se arrastra hacia arriba una bomba de 150 kg. Encontrar *a*) la fuerza que la bomba ejerce contra la pista y *b*) la fuerza necesaria para subir la bomba.
Resp. *a*) 115 kg, *b*) 96 kg

CAPITULO 6

Logaritmos

EL LOGARITMO COMUN O VULGAR de un número dado N (se expresa, $\log N$), es el exponente correspondiente a la potencia de 10 que equivale al número dado. Por ejemplo,

$$\log 1 = 0 \text{ puesto que } 10^0 = 1, \qquad \log 100 = 2 \text{ puesto que } 10^2 = 100,$$
$$\log 10 = 1 \text{ puesto que } 10^1 = 10, \qquad \log 0{,}001 = -3 \text{ puesto que } 10^{-3} = 0{,}001$$

mientras que $\qquad \log P = p$ si $10^p = P$.

LEYES FUNDAMENTALES DE LOS LOGARITMOS

I. El logaritmo del producto de dos o más números positivos es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de dichos números. Así,

$$\log P{\cdot}Q = \log P + \log Q,$$
$$\log P{\cdot}Q{\cdot}R = \log P + \log Q + \log R, \text{ etc.}$$

II. El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor. Así,

$$\log \frac{P}{Q} = \log P - \log Q.$$

III. El logaritmo de una potencia de un número positivo es igual al logaritmo del número multiplicado por el exponente de la potencia. Así,

$$\log (P^n) = n \log P.$$

IV. El logaritmo de una raíz de un número positivo es igual al logaritmo del número dividido por el índice de la raíz. Así,

$$\log \sqrt[n]{P} = \frac{1}{n} \log P.$$

Las demostraciones de estas leyes aparecen en el problema 1.

El logaritmo de una expresión que contiene dos o más operaciones de las relacionadas en las leyes I-IV se obtiene combinando los resultados de las distintas leyes. Así,

$$\log \frac{P{\cdot}Q}{R} = \log (P{\cdot}Q) - \log R = \log P + \log Q - \log R.$$

Otros ejemplos se encuentran en los problemas 2-4.

EL LOGARITMO COMUN de un número positivo (por ejemplo, $\log 300 = 2{,}47712$ y $\log 0{,}2 = 9{,}30103 - 10$) consta de dos partes: una parte entera llamada *característica*, y una parte decimal llamada *mantisa*.

En los problemas 3 y 4 se verá que la característica depende únicamente de la posición que ocupa la coma decimal en el número. Por ejemplo,

$$\log 2 = 0{,}30103 \quad \text{y} \quad \log 200 = 2{,}30103,$$
$$\log 25 = 1{,}39794 \quad \text{y} \quad \log 2{,}5 = 0{,}39794.$$

La característica del logaritmo común de un número cualquiera mayor que 1 es una unidad menor que el número de cifras que aparecen a la izquierda de la coma decimal del número dado.

La característica del logaritmo común de un número positivo cualquiera menor que 1 se obtiene sustrayendo de 9 el número de ceros que aparecen inmediatamente a la derecha de la coma decimal del número dado y escribiendo a continuación -10. Así, la característica del logaritmo común de 0,2 es $9-10$, de 0,04 es $8-10$, de 0,0005 es $6-10$. (Véase, además, el problema 5.)

La mantisa del logaritmo común de un número positivo es generalmente un decimal no periódico. En este libro nos referiremos a tablas de logaritmos donde aparezcan cinco cifras decimales para las mantisas.

ENCONTRAR EL LOGARITMO DE UN NUMERO POSITIVO DADO:

a) Escríbase la mantisa de acuerdo a las reglas dadas anteriormente.

*b*₁) Cuando el número dado consta de cuatro cifras significativas o de menos, léase directamente la mantisa en la tabla.

EJEMPLO 1. Encontrar log 32,86.
La característica es 1. Para encontrar la mantisa localícese el número 51667 en la fila correspondiente al número 328, en la columna encabezada por 6. Entonces log 32,86 = 1,51667.

EJEMPLO 2. Encontrar log 5,25.
La característica es 0. Como 5,25 = 5,250, localizamos la mantisa, 72016, en la fila correspondiente al número 525 y en la columna encabezada por 0. Entonces log 5,25 = 0,72016.

*b*₂) Cuando el número consta de cinco cifras, se efectúa una interpolación mediante una proporcionalidad.

EJEMPLO 3. Encontrar log 654,82.
La característica es 2. Para encontrar la mantisa, computamos:

$$\begin{aligned} \text{mantisa log } 65480 &= 0{,}81611 \\ \text{mantisa log } 65490 &= \underline{0{,}81617} \\ \text{diferencia tabular} &= 0{,}00006 \end{aligned}$$

$0{,}2 \times$ diferencia tabular $= 0{,}000012$ ó $0{,}00001$ hasta la quinta cifra decimal
mantisa log 65482 $= 0{,}81611 + 0{,}00001 = 0{,}81612$.

Entonces log 654,82 = 2,81612.

Obsérvese que aquí el cómputo esencial es $81611 + 0{,}2 \times 6 = 81612{,}2$ u 81612.

(Véanse además los problemas 6-7.)

ENCONTRAR EL NUMERO CORRESPONDIENTE A UN LOGARITMO COMUN DADO:

a) Cuando la mantisa aparece en la tabla, escríbase el número que encabeza la fila, seguido del número que encabeza la columna. Después, colóquese la coma decimal de acuerdo a las reglas dadas para la característica. El número encontrado recibe el nombre de *antilogaritmo* (antilog) del logaritmo dado.

EJEMPLO 4. Antilog 1,88053 = 75,95.
La mantisa 0,88053 se encuentra en la fila encabezada por 759 y en la columna encabezada por 5. Como la característica es 1, hay dos cifras a la izquierda de la coma decimal.

b) Cuando la mantisa dada no aparece en la tabla, se requiere una interpolación.

EJEMPLO 5. Antilog 9,56577 − 10 = 0,36793.

$$\begin{aligned} \text{Mantisa de log } 36790 &= 0{,}56573 \\ \text{Mantisa de log } 36800 &= \underline{0{,}56585} \\ \text{Diferencia tabular} &= 0{,}00012 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \text{Mantisa dada} &= 0{,}56577 \\ \text{Mantisa menor hallada} &= \underline{0{,}56573} \\ \text{Diferencia} &= 0{,}00004 \end{aligned}$$

Corrección $= \frac{0,00004}{0,00012}(0,00010) = 0,000033$ ó $0,00003$ hasta la quinta cifra decimal.

Entonces antilog $9,56577 - 10 = 0,36790 + 0,00003 = 0,36793$.

Obsérvese que aquí el cómputo esencial es $\frac{4 \times 10}{12} = 3,3$ ó 3.

(Véase además, el problema 8.)

EL COLOGARITMO de un número positivo N (se expresa colog N) es el logaritmo de su inverso $\frac{1}{N}$. Así, $\text{colog } N = \log \frac{1}{N} = \log 1 - \log N = -\log N$.

EJEMPLO 6. Colog $38,386 = 8,41583 - 10$.

$$\text{colog } 38,386 = \log \frac{1}{38,386} = \log 1 - \log 38,386$$

$$\begin{array}{rl} \log 1 & = 10,00000 - 10 \\ (-) \log 38,386 & = \underline{1,58417} \\ & 8,41583 - 10 \end{array}$$

Obsérvese que colog N puede obtenerse si se resta de 9 cada cifra de log N (comenzando por la izquierda), excepto la última que se resta de 10. Si N es mayor que uno, se escribe a continuación -10. Por ejemplo:

a) $\log 3163 = 3,50010$; $\text{colog } 3163 = 6,49990 - 10$.
b) $\log 0,0399 = 8,60097 - 10$; $\text{colog } 0,0399 = 1,39903$.

(Véanse además los problemas 12-13.)

LOGARITMOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS. Nos referimos a una tabla de cinco cifras decimales de logaritmos de las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente y cotangente, para ángulos desde 0° hasta 90° con intervalos de un minuto.

El procedimiento para la utilización de esta tabla es básicamente el mismo que se utiliza en la tabla de las funciones trigonométricas naturales.

EJEMPLO 7.

a) $\log \text{sen } 22°34' = 9,58406 - 10$

b) $\log \tan 72°18' = 0,49602$

c) $\log \text{sen } 22°34,8' = 9,58430 - 10$

$$\begin{array}{rl} \log \text{sen } 22°34' & = 9,58406 - 10 \\ \log \text{sen } 22°35' & = \underline{9,58436 - 10} \\ \text{Diferencia tabular} & = 0,00030 \end{array}$$

Corrección $= 0,8 \times$ diferencia tabular $= 0,00024$.

Se añade la diferencia puesto que se trata de un seno,

$$\log \text{sen } 22°34,8' = 9,58406 - 10 + 0,00024 = 9,58430 - 10.$$

Aquí el cómputo esencial es $58406 + 0,8(30) = 58406 + 24 = 58430$.

d) $\log \cos 66°42,4' = 9,59708 - 10$

$$\log \cos 66°42' = 9,59720 - 10$$

$$\text{Diferencia tabular} = 30$$

Corrección $= 0,4 \times$ diferencia tabular $= 0,4(30) = 12$.

Se resta la corrección, puesto que se trata de un coseno,

$$\log \cos 66°42,4' = 9,59708 - 10.$$

(Véase además el problema 14.)

EJEMPLO 8.

a) Si $\log \operatorname{sen} A = 9{,}66197 - 10$, entonces $A = 27°20'$.

b) Si $\log \cot A = 0{,}15262$, entonces $A = 35°8'$.

c) Si $\log \operatorname{sen} A = 9{,}95472 - 10$, entonces $A = 64°17{,}3'$.

$$\begin{array}{ll} \log \operatorname{sen} 64°17' = 9{,}95470 - 10 & \log \operatorname{sen} 64°17' = 9{,}95470 - 10 \\ \log \operatorname{sen} 64°18' = \underline{9{,}95476 - 10} & \log \operatorname{sen} A = \underline{9{,}95472 - 10} \\ \text{Diferencia tabular} = 0{,}00006 & \text{Diferencia} = 0{,}00002 \end{array}$$

$$\text{Corrección} = \frac{0{,}00002}{0{,}00006}(1') = \frac{2}{6}(1') = 0{,}3'.$$

Se añade la corrección por tratarse de un seno, $A = 64°17{,}3'$.

d) Si $\log \cos A = 9{,}97888 - 10$, entonces $A = 17°43{,}5'$.
$\log \cos 17°44' = 9{,}97886 - 10$ (el menor logaritmo más próximo).

Diferencia tabular = 4; diferencia = 2.

Corrección $= \frac{2}{4}(1') = 0{,}5'$. Se resta la corrección por tratarse de un coseno, $A = 17°43{,}5'$.

e) Si $\log \tan A = 0{,}24372$, entonces $A = 60°17{,}6'$.
$\log \tan 60°17' = 0{,}24353$ (el menor logaritmo más próximo).

Diferencia tabular = 30; diferencia = 19.

Corrección $= \frac{19}{30}(1') = 0{,}6'$. Se añade por tratarse de una tangente, $A = 60°17{,}6'$.

f) Si $\log \cot A = 9{,}41640 - 10$, entonces $A = 75°22{,}8'$.
$\log \cot 75°23' = 9{,}41629 - 10$

Diferencia tabular = 52; diferencia = 11.

Corrección $= \frac{11}{52}(1') = 0{,}2'$. Se resta la corrección por tratarse de una cotangente, $A = 75°22{,}8'$.

(Véase además, el problema 15.)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar las leyes de los logaritmos.

Limitada la demostración a los logaritmos comunes se tiene que si $P = 10^p$ y $Q = 10^q$; entonces $\log P = p$ y $\log Q = q$.

I. Puesto que $P\cdot Q = 10^p \cdot 10^q = 10^{p+q}$, entonces $\log P\cdot Q = p + q = \log P + \log Q$.

II. Puesto que $P/Q = 10^p/10^q = 10^{p-q}$, entonces $\log P/Q = p - q = \log P - \log Q$.

III. Puesto que $P^n = (10^p)^n = 10^{np}$, entonces $\log P^n = np = n \log P$.

IV. Puesto que $\sqrt[n]{P} = (10^p)^{1/n} = 10^{p/n}$, entonces $\log \sqrt[n]{P} = p/n = \frac{1}{n}\log P$.

2. Expresar los logaritmos de las expresiones dadas en términos de cada una de las letras o números que aparecen en ellas.

a) $\log \dfrac{P\cdot Q}{R\cdot S} = \log (P\cdot Q) - \log (R\cdot S) = (\log P + \log Q) - (\log R + \log S)$

$$= \log P + \log Q - \log R - \log S.$$

b) $\log \frac{\sqrt[3]{P}}{Q^4} = \log \sqrt[3]{P} - \log Q^4 = \frac{1}{3}\log P - 4\log Q$

c) $\log \frac{34(104)^2}{(49)^3} = \log 34 + 2\log 104 - 3\log 49$

d) $\log \frac{(34{,}2)^2\sqrt[3]{1{,}06}}{(9{,}8)^3\sqrt{2{,}33}} = 2\log 34{,}2 + \frac{1}{3}\log 1{,}06 - 3\log 9{,}8 - \frac{1}{2}\log 2{,}33$

3. Dados $\log 2 = 0{,}30103$ y $\log 3 = 0{,}47712$, encontrar el logaritmo de:

a) 30, *b*) 200, *c*) 25, *d*) 120, *e*) 2,5, *f*) $\sqrt{6}$, *g*) $\sqrt[3]{24}$.

a) $30 = 3 \times 10$; $\log 30 = \log 3 + \log 10 = 0{,}47712 + 1{,}00000 = 1{,}47712$

b) $200 = 2 \times 10^2$; $\log 200 = \log 2 + 2\log 10 = 0{,}30103 + 2{,}00000 = 2{,}30103$

c) $25 = 10^2/2^2$; $\log 25 = 2\log 10 - 2\log 2 = 2{,}00000 - 0{,}60206 = 1{,}39794$

d) $120 = 2^2 \cdot 3 \cdot 10$; $\log 120 = 2\log 2 + \log 3 + \log 10 = 0{,}60206 + 0{,}47712 + 1{,}00000 = 2{,}07918$

e) $2{,}5 = 10/2^2$; $\log 2{,}5 = \log 10 - 2\log 2 = 1{,}00000 - 0{,}60206 = 0{,}39794$

f) $\sqrt{6} = (2 \times 3)^{1/2}$; $\log \sqrt{6} = \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3) = \frac{1}{2}(0{,}77815) = 0{,}38908$

g) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$; $\log \sqrt[3]{24} = \log 2 + \frac{1}{3}\log 3 = 0{,}30103 + \frac{1}{3}(0{,}47712) = 0{,}46007$

4. Dados $\log 2 = 0{,}30103$ y $\log 3 = 0{,}47712$, encontrar el logaritmo de:

a) 0,2, *b*) 0,003, *c*) 0,5, *d*) $(0{,}02)^3$, *e*) $\sqrt[4]{0{,}006}$

a) $0{,}2 = 2/10$; $\log 0{,}2 = \log 2 - \log 10 = 0{,}30103 - 1{,}00000 = -1 + 0{,}30103$.

Esta última expresión se escribe $9{,}30103 - 10$.

b) $0{,}003 = 3/10^3$; $\log 0{,}003 = \log 3 - 3\log 10 = -3 + 0{,}47712 = 7{,}47712 - 10$

c) $0{,}5 = 1/2$; $\log 0{,}5 = \log 1 - \log 2 = 0{,}00000 - 0{,}30103 = (10{,}00000 - 10) - 0{,}30103 = 9{,}69897 - 10$

d) $(0{,}02)^3 = (2/10^2)^3$; $\log (0{,}02)^3 = 3\log 2 - 6\log 10 = 0{,}90309 - 6{,}00000 = (10{,}90309 - 10) - 6{,}00000 = 4{,}90309 - 10$

e) $\sqrt[4]{0{,}006} = \sqrt[4]{2 \times 3/10^3}$; $\log \sqrt[4]{0{,}006} = \frac{1}{4}(\log 2 + \log 3 - 3\log 10)$

$$= \frac{1}{4}(0{,}30103 + 0{,}47712 - 3{,}00000)$$

$$= \frac{1}{4}(7{,}77815 - 10) = \frac{1}{4}(37{,}77815 - 40) = 9{,}44454 - 10$$

5. Determinar la característica del logaritmo común de cada uno de los números siguientes:

a) 3864 *c*) 8,746 *e*) 0,3874 *g*) 0,07295 *i*) 2,3567 *k*) 0,44636

b) 286 *d*) 982600 *f*) 0,00826 *h*) 0,000023 *j*) 88,725 *l*) 0,00072358.

Las características son:

a) 3 *c*) 0 *e*) 9 − 10 *g*) 8 − 10 *i*) 0 *k*) 9 − 10

b) 2 *d*) 5 *f*) 7 − 10 *h*) 5 − 10 *j*) 1 *l*) 6 − 10.

6. Verificar cada uno de los logaritmos siguientes:

a) $\log 38{,}64 = 1{,}58704$

b) $\log 286 = 2{,}45637$

c) $\log 0{,}3874 = 9{,}58816 - 10$

d) $\log 0{,}00826 = 7{,}91698 - 10$

e) $\log 2{,}3567 = 0{,}37231$ (37218 + 12,6)

f) $\log 88{,}725 = 1{,}94804$ (94802 + 2,5)

g) $\log 0{,}44636 = 9{,}64968 - 10$ (64963 + 5,4)

h) $\log 0{,}00072358 = 6{,}85949 - 10$ (85944 + 4,8)

7. Verificar cada uno de los logaritmos siguientes:

a) $\log (0{,}07324 \times 0{,}0006235) = \log 0{,}07324 + \log 0{,}0006235$
$= 8{,}86475 - 10 + 6{,}79484 - 10 = 15{,}65959 - 20 = 5{,}65959 - 10$

b) $\log (8{,}7633 \times 0{,}0074288) = \log 8{,}7633 + \log 0{,}0074288$
$= 0{,}94266 + 7{,}87092 - 10 = 8{,}81358 - 10$

c) $\log 34{,}72/5{,}384 = \log 34{,}72 - \log 5{,}384$
$= 1{,}54058 - 0{,}73111 = 0{,}80947$

d) $\log 7218/0{,}0235 = \log 7218 - \log 0{,}0235$
$= 3{,}85842 - 8{,}37107 - 10 = 13{,}85842 - 10 - 8{,}37107 - 10 = 5{,}48735$

e) $\log (24{,}56)^3 = 3 \log 24{,}56 = 3(1{,}39023) = 4{,}17069$

f) $\log (0{,}4893)^4 = 4 \log 0{,}4893 = 4(9{,}68958 - 10) = 38{,}75832 - 40 = 8{,}75832 - 10$

g) $\log \sqrt{876{,}4} = \frac{1}{2} \log 876{,}4 = \frac{1}{2}(2{,}94270) = 1{,}47135$

h) $\log \sqrt[3]{66{,}75} = \frac{1}{3} \log 66{,}75 = \frac{1}{3}(1{,}82445) = 0{,}60815$

i) $\log \sqrt{0{,}9494} = \frac{1}{2} \log 0{,}9494 = \frac{1}{2}(9{,}97745 - 10) = \frac{1}{2}(19{,}97745 - 20) = 9{,}98872 - 10$

8. Verificar cada una de las siguientes igualdades:

a) Antilog 2,56158 = 364,40

b) Antilog 5,69002 = 489800

c) Antilog 8,81358 − 10 = 0,06510. Del problema 7*b*), $8{,}7633 \times 0{,}0074288 = 0{,}06510$.

d) Antilog 1,43654 = 27,324 $(6 \times 10/16 = 4)$

e) Antilog 8,69157 − 10 = 0,049156 $(5 \times 10/9 = 6)$

f) Antilog 4,17069 = 14814 $(13 \times 10/29 = 4)$. Del problema 7*e*), $(24{,}56)^3 = 14814$.

g) Antilog 1,47135 = 29,604 $(6 \times 10/15 = 4)$. Del problema 7*g*), $\sqrt{876{,}4} = 29{,}604$.

Evaluar mediante logaritmos, cada una de las expresiones siguientes:

9. $N = 36{,}234 \times 2{,}6748 \times 0{,}0071756$

$$\begin{array}{rll} & \log 36{,}234 & = 1{,}55912 \\ (+) & \log 2{,}6748 & = 0{,}42729 \\ (+) & \log 0{,}0071756 & = \underline{7{,}85586 - 10} \\ & \log N & = 9{,}84227 - 10 \\ & N & = 0{,}69546 \end{array}$$

10. $N = \dfrac{47{,}75 \times 8{,}643}{6467}$

$$\begin{array}{rll} & \log 47{,}75 & = 1{,}67897 \\ (+) & \log 8{,}643 & = \underline{0{,}93666} \\ & & 12{,}61563 - 10 \qquad (2{,}61563 = 12{,}61563 - 10) \\ (-) & \log 6467 & = \underline{3{,}81070} \\ & \log N & = 8{,}80493 - 10 \\ & N & = 0{,}063816 \end{array}$$

11. $N = \sqrt[3]{0{,}48476}$.

$$\begin{array}{rl} \log N & = \frac{1}{3} \log 0{,}48476 \\ \log 0{,}48476 & = 9{,}68552 - 10 \\ & = 29{,}68552 - 30 \\ \log N & = 9{,}89517 - 10 \\ N & = 0{,}78554 \end{array}$$

12. Resolver el problema 10 mediante el uso de cologaritmos. $N = 47{,}75 \times 8{,}643 \times \frac{1}{6467}$

$$\begin{aligned} \log 47{,}75 &= 1{,}67897 \\ (+)\ \log 8{,}643 &= 0{,}93666 \\ (+)\ \text{colog}\ 6467 &= 6{,}18930 - 10 \qquad (\log 6467 = 3{,}81070) \\ \log N &= 8{,}80493 - 10 \\ N &= 0{,}063816 \end{aligned}$$

13. $\dfrac{74{,}72}{\sqrt{8{,}394}\ \sqrt[3]{0{,}002877}} = N.$ $\quad \log N = \log 74{,}72 + \frac{1}{2}\ \text{colog}\ 8{,}394 + \frac{1}{3}\ \text{colog}\ 0{,}002877$

$$\begin{aligned} \log 74{,}72 &= 1{,}87344 \\ (+)\ \tfrac{1}{2}\ \text{colog}\ 8{,}394 &= 9{,}53802 - 10 \\ (+)\ \tfrac{1}{3}\ \text{colog}\ 0{,}002877 &= 0{,}84702 \\ \log N &= 12{,}25848 - 10 \\ &= 2{,}25848 \\ N &= 181{,}33 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 8{,}394 &= 0{,}92397 \\ \text{colog}\ 8{,}394 &= 9{,}07603 - 10 \\ \log 0{,}002877 &= 7{,}45894 - 10 \\ \text{colog}\ 0{,}002877 &= 2{,}54106 \end{aligned}$$

14. Verificar cada uno de los logaritmos siguientes:

a) $\log \text{sen}\ 14°28{,}3' = 9{,}39777 - 10$ $\quad (39762 + 0{,}3 \times 39)$

b) $\log \cos 66°44{,}8' = 9{,}59638 - 10$ $\quad (59661 - 0{,}8 \times 29)$

c) $\log \tan 31°26{,}4' = 9{,}78630 - 10$ $\quad (78618 + 0{,}4 \times 29)$

d) $\log \cot 45°54{,}6' = 9{,}98620 - 10$ $\quad (98635 - 0{,}6 \times 25)$

e) $\log \text{sen}\ 62°29{,}1' = 9{,}94787 - 10$ $\quad (94786 + 0{,}1 \times 7)$

f) $\log \cos 23°33{,}7' = 9{,}96220 - 10$ $\quad (96223 - 0{,}7 \times 5)$

g) $\log \tan 70°20{,}6' = 0{,}44709$ $\quad (44685 + 0{,}6 \times 40)$

h) $\log \cot 11°17{,}3' = 0{,}69982$ $\quad (70002 - 0{,}3 \times 66)$

15. Verificar cada uno de los logaritmos siguientes:

a) $\log \text{sen}\ A = 9{,}90020 - 10$, entonces $A = 52°37{,}6'$ $\quad (\frac{6}{10} \times 1' = 0{,}6')$

b) $\log \cos A = 9{,}93602 - 10$, entonces $A = 30°20{,}6'$ $\quad (\frac{3}{7} \times 1' = 0{,}4')$

c) $\log \tan A = 9{,}87150 - 10$, entonces $A = 36°38{,}7'$ $\quad (\frac{18}{26} \times 1' = 0{,}7')$

d) $\log \cot A = 0{,}01245$, entonces $A = 44°10{,}7'$ $\quad (\frac{7}{25} \times 1' = 0{,}3')$

e) $\log \text{sen}\ A = 9{,}80172 - 10$, entonces $A = 39°18{,}4'$ $\quad (\frac{6}{16} \times 1' = 0{,}4')$

f) $\log \cos A = 9{,}55215 - 10$, entonces $A = 69°6{,}6'$ $\quad (\frac{13}{33} \times 1' = 0{,}4')$

g) $\log \tan A = 0{,}44372$, entonces $A = 70°12{,}1'$ $\quad (\frac{5}{40} \times 1' = 0{,}1')$

h) $\log \cot A = 9{,}31142 - 10$, entonces $A = 78°25{,}4'$ $\quad (\frac{38}{64} \times 1' = 0{,}6')$

PROBLEMAS PROPUESTOS

16. Encontrar:

a) log 211 = 2,32428
b) log 9,17 = 0,96237
c) log 0,00466 = 7,66839 − 10
d) log 0,6754 = 9,82956 − 10
e) log 32,86 = 1,51667
f) log 264,76 = 2,42285
g) log 7,1775 = 0,85597
h) log 0,96634 = 9,98513 − 10
i) log 4287,6 = 3,63221
j) log 0,0055558 = 7,74474 − 10
k) log 0,097147 = 8,98743 − 10
l) log 2,1222 = 0,32679
m) log 66,985 = 1,82598
n) log 781,59 = 2,89298
o) log 2348,9 = 3,37086
p) log 0,091233 = 8,96016 − 10

17. Encontrar:

a) antilog 1,98646 = 96,930
b) antilog 0,75005 = 5,6240
c) antilog 8,62086 − 10 = 0,041770
d) antilog 1,09706 = 12,504
e) antilog 2,65612 = 453,02
f) antilog 0,91821 = 8,2834
g) antilog 8,11848 − 10 = 0,013136
h) antilog 3,66626 = 4637,2
i) antilog 1,12078 = 13,206
j) antilog 2,62821 = 424,83
k) antilog 0,95846 = 9,0878
l) antilog 9,61299 − 10 = 0,41019
m) antilog 2,23958 = 173,61
n) antilog 1,22251 = 16,692
o) antilog 4,84033 = 69236
p) antilog 2,67183 = 469,71

18. Evaluar:

a) $\dfrac{819(748)}{3670} = 166{,}9$, *b*) $\dfrac{827{,}6}{518{,}3} = 1{,}597$, *c*) $\dfrac{48{,}62}{77{,}65} = 0{,}6261$, *d*) $787{,}97(0{,}0033238) = 2{,}6190$

e) $\dfrac{(227{,}3)^2\sqrt[3]{0{,}007764}}{(86{,}35)^3\sqrt{0{,}3848}} = 0{,}02562$, *f*) $\sqrt[3]{\dfrac{781{,}58(3{,}4342)}{852{,}74(586{,}76)}} = 0{,}17505$

19. Encontrar:

a) log sen 53°18′ = 9,90405 − 10
b) log cos 18°17′ = 9,97750 − 10
c) log tan 42°47′ = 9,96636 − 10
d) log cot 68°14′ = 9,60130 − 10
e) log sen 71°9,6′ = 9,97608 − 10
f) log cos 56°44,4′ = 9,73913 − 10
g) log tan 67°0,3′ = 0,37226
h) log cot 76°9,3′ = 9,39174 − 10
i) log sen 72°15,4′ = 9,97884 − 10
j) log cos 20° 9,2′ = 9,97256 − 10
k) log tan 84°47,1′ = 1,03967
l) log cot 74° 4,2′ = 9,45549 − 10
m) log sen 22°15,8′ = 9,57849 − 10
n) log cos 66°17,4′ = 9,60434 − 10
o) log tan 11°19,8′ = 9,30182 − 10
p) log cot 25°10,6′ = 0,32784

20. Encontrar el ángulo agudo A, dado:

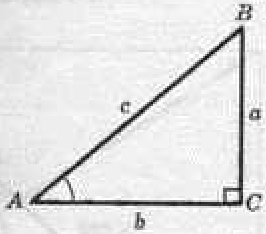
a) log sen A = 9,28705 − 10, A = 11°10,0′
b) log cos A = 9,48881 − 10, A = 72° 3,0′
c) log tan A = 9,82325 − 10, A = 33°39,0′
d) log cot A = 9,91765 − 10, A = 50°24,0′
e) log sen A = 9,53928 − 10, A = 20°15,2′
f) log cos A = 9,89900 − 10, A = 37°34,8′
g) log tan A = 9,53042 − 10, A = 18°44,1′
h) log cot A = 0,18960, A = 32°52,4′
i) log sen A = 9,86000 − 10, A = 46°25,3′
j) log cos A = 9,75529 − 10, A = 55°18,2′
k) log tan A = 9,80888 − 10, A = 81°10,4′
l) log cot A = 9,67240 − 10, A = 64°48,7′
m) log sen A = 9,80513 − 10, A = 39°40,6′
n) log cos A = 9,86892 − 10, A = 42°18,8′
o) log tan A = 0,06510, A = 49°16,7′
p) log cot A = 9,71700 − 10, A = 62°28,3′

CAPITULO 7

Resolución logarítmica de triángulos rectángulos

CUALQUIER TRIANGULO RECTANGULO puede resolverse, y la solución puede comprobarse parcialmente, mediante la relación angular $A + B = 90°$ y las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente o cotangente de uno de los ángulos agudos. En general, la relación $c^2 = a^2 + b^2$ ofrece una mejor comprobación de la solución.

EJEMPLO. Supóngase que se conocen los lados a y b del triángulo rectángulo ABC.



1) Para encontrar el ángulo A, aplíquese $\tan A = a/b$; entonces, $B = 90° - A$.
2) Para encontrar el lado c, aplíquese $c = a/\text{sen } A$.
3) Para la comprobación, aplíquese

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$$
$$\text{ó} \quad b^2 = c^2 - a^2 = (c-a)(c+a).$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Resolver y comprobar el triángulo rectángulo ABC, dados $a = 48{,}620$ y $b = 37{,}640$. Véase la Fig. (a).

$\tan A = a/b$	$c = a/\text{sen } A$	Comprobación: $a^2 = (c-b)(c+b)$	
$\log a = 1{,}68681$	$\log a = 1{,}68681$	$c = 61{,}487$	$\log(c-b) = 1{,}37744$
$(-) \log b = 1{,}57565$	$(-)\log \text{sen } A = 9{,}89803-10$	$b = 37{,}640$	$(+)\log(c+b) = 1{,}99620$
$\log \tan A = 0{,}11116$	$\log c = 1{,}78878$	$c-b = 23{,}847$	$2 \log a = 3{,}37364$
$A = 52°15{,}2'$	$c = 61{,}487$	$c+b = 99{,}127$	$\log a = 1{,}68682$
$B = 37°44{,}8'$			

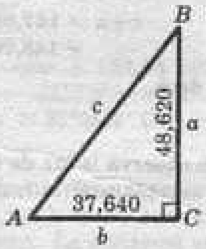


Fig.(a) Prob. 1

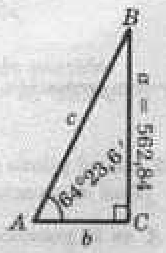


Fig.(b) Prob. 2

2. Resolver el triángulo rectángulo ABC, dados $a = 562{,}84$ y $A = 64°23{,}6'$. Véase la Fig. (b).

$B = 90° - A = 25°36{,}4'$.

$b = a/\tan A$	$c = a/\text{sen } A$	Comprobación: $a^2 = (c-b)(c+b)$	
$\log a = 2{,}75038$	$\log a = 2{,}75038$	$c = 624{,}13$	$\log(c-b) = 2{,}54948$
$(-)\log \tan A = 0{,}31943$	$(-)\log \text{sen } A = 9{,}95511-10$	$b = 269{,}74$	$(+)\log(c+b) = 2{,}95128$
$\log b = 2{,}43095$	$\log c = 2{,}79527$	$c-b = 354{,}39$	$2 \log a = 5{,}50076$
$b = 269{,}74$	$c = 624{,}13$	$c+b = 893{,}87$	$\log a = 2{,}75038$

3. Resolver y comprobar el triángulo rectángulo ABC, dados $b = 583{,}62$ y $c = 794{,}86$. Véase la Fig. (c).

$\cos A = b/c$ $\qquad a = c \operatorname{sen} A \qquad$ Comprobación: $b^2 = (c-a)(c+a)$

$$\begin{array}{rl} \log b &= 2{,}76613 \\ (-)\log c &= \underline{2{,}90029} \\ \log \cos A &= 9{,}86584-10 \\ A &= 42°45{,}4' \\ B &= 47°14{,}6' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log c &= 2{,}90029 \\ (+)\log \operatorname{sen} A &= \underline{9{,}83180-10} \\ \log a &= 2{,}73209 \\ a &= 539{,}62 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} c &= 794{,}86 \\ a &= \underline{539{,}62} \\ c-a &= 255{,}24 \\ c+a &= 1334{,}48 \\ & \ 1334{,}5 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log(c-a) &= 2{,}40695 \\ (+)\log(c+a) &= \underline{3{,}12532} \\ 2\log b &= 5{,}53227 \\ \log b &= 2{,}76614 \end{array}$$

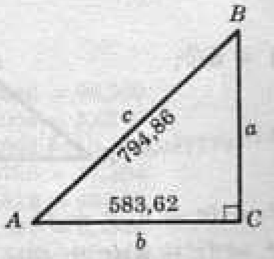


Fig. (c) Prob. 3

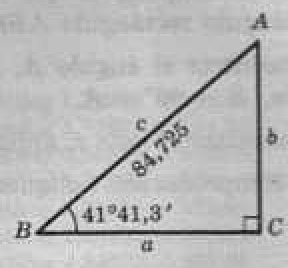


Fig. (d) Prob. 4

4. Resolver y comprobar el triángulo rectángulo ABC, dados $c = 84{,}725$ y $B = 41°41{,}3'$. Véase la Fig. (d).

$A = 90° - B = 48°18{,}7'$.

$b = c \operatorname{sen} B \qquad a = c \cos B \qquad$ Comprobación: $b^2 = (c-a)(c+a)$

$$\begin{array}{rl} \log c &= 1{,}92802 \\ (+)\log \operatorname{sen} B &= \underline{9{,}82287-10} \\ \log b &= 1{,}75089 \\ b &= 56{,}350 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log c &= 1{,}92802 \\ (+)\log \cos B &= \underline{9{,}87319-10} \\ \log a &= 1{,}80121 \\ a &= 63{,}271 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} c &= 84{,}725 \\ a &= \underline{63{,}271} \\ c-a &= 21{,}454 \\ c+a &= 147{,}996 \\ &= 148{,}00 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log(c-a) &= 1{,}33151 \\ (+)\log(c+a) &= \underline{2{,}17026} \\ 2\log b &= 3{,}50177 \\ \log b &= 1{,}75088 \end{array}$$

Obsérvese que ésta es una comprobación de $\log b$ y no de b.

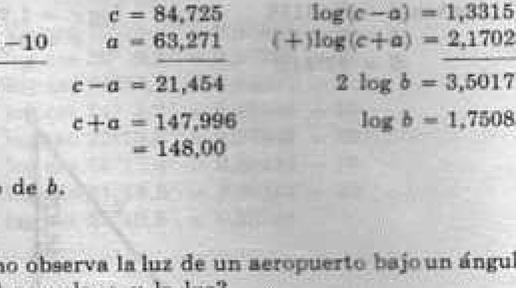
5. Desde una altura de 23.245 pies el piloto de un aeroplano observa la luz de un aeropuerto bajo un ángulo de depresión de $28°45{,}2'$. ¿Qué distancia hay entre el aeroplano y la luz?

En la figura adjunta, A es la posición de la luz, B es la posición del piloto, y $c = AB$ es la distancia buscada. Entonces,

$$c = a/\operatorname{sen} A$$

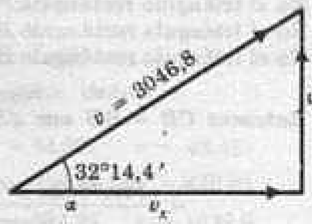
$$\begin{array}{rl} \log a &= 4{,}36633 \\ (-)\log \operatorname{sen} A &= \underline{9{,}68218-10} \\ \log c &= 4{,}68415 \\ c &= 48.322 \end{array}$$

La distancia buscada es de 48.322 pies.



6. Se lanza una granada con una velocidad inicial de 3046,8 m/seg. y con un ángulo de elevación de $32°14{,}4'$. Encontrar las velocidades iniciales vertical y horizontal.

De acuerdo a la figura, $v = 3046{,}8$, $\alpha = 32°14{,}4'$, y

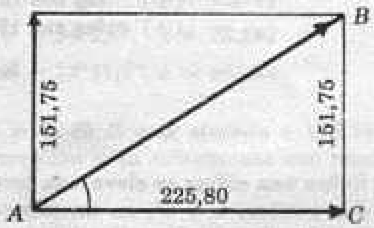


$v_x = v \cos \alpha$ $\qquad\qquad$ $v_y = v \operatorname{sen} \alpha$

$$\begin{array}{rl} \log v = & 3{,}48384 \\ (+)\log \cos \alpha = & \underline{9{,}92728-10} \\ \log v_x = & 3{,}41112 \\ v_x = & 2577{,}1 \text{ m/seg} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log v = & 3{,}48384 \\ (+)\log \operatorname{sen} \alpha = & \underline{9{,}72711-10} \\ \log v_y = & 3{,}21095 \\ v_y = & 1625{,}4 \text{ m/seg} \end{array}$$

7. Sobre un punto A están aplicadas, en ángulo recto, dos fuerzas de 151,75 kg, y 225,80 kg. Encontrar la magnitud de la resultante y el ángulo que forma con la mayor de las fuerzas.

En el triángulo rectángulo ABC de la figura adjunta,



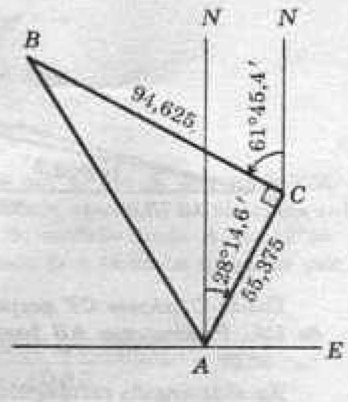
$\tan A = CB/AC$ $\qquad\qquad$ $AB = CB/\operatorname{sen} A$

$$\begin{array}{rl} \log CB = & 2{,}18113 \\ (-)\log AC = & \underline{2{,}35372} \\ \log \tan A = & 9{,}82741-10 \\ A = & 33°54{,}2' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log CB = & 2{,}18113 \\ (-)\log \operatorname{sen} A = & \underline{9{,}74648-10} \\ \log AB = & 2{,}43465 \\ AB = & 272{,}05 \end{array}$$

La magnitud de la fuerza resultante es de 272,05 kg, y el ángulo que forma con la fuerza mayor mide 33°54,2'.

8. Un barco navega 55,375 millas con dirección N 28°14,6' E y después navega 94,625 millas con dirección N 61°45,4' O. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida, y cuál es su orientación respecto a dicho punto?

En la figura, el barco navega desde A hasta C, y, después, desde C hasta B. En el triángulo rectángulo ABC,

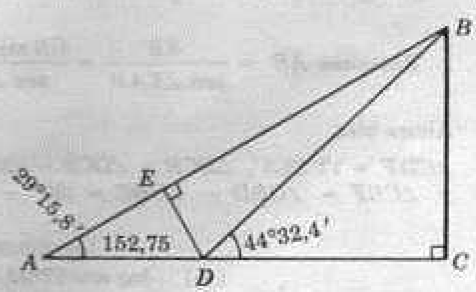


$\tan \angle CAB = BC/AC$ $\qquad\qquad$ $AB = BC/\operatorname{sen} \angle CAB$

$$\begin{array}{rl} \log BC = & 1{,}97600 \\ (-)\log AC = & \underline{1{,}74331} \\ \log \tan \angle CAB = & 0{,}23269 \\ \angle CAB = & 59°39{,}8' \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log BC = & 1{,}97600 \\ (-)\log \operatorname{sen} \angle CAB = & \underline{9{,}93605-10} \\ \log AB = & 2{,}03995 \\ AB = & 109{,}64 \end{array}$$

El barco se halla entonces a 109,64 millas del punto de partida. Como $\angle NAB = \angle CAB - \angle CAN = 59°39{,}8' - 28°14{,}6' = 31°25{,}2'$, la orientación buscada es N 31°25,2' O.

9. Para calcular la altura de un risco inaccesible CB, se determinan dos puntos A y D, en un terreno llano, directamente al oeste del risco. La distancia entre A y D es de 152,75 m. El ángulo de elevación del extremo superior del risco, medido desde D, es de 44°32,4' y medido desde A es de 29°15,8'. ¿A qué altura sobre el llano se encuentra el extremo superior del risco?



Para resolver un problema semejante a éste (problema 15, capítulo 3) se utilizó la relación

$$CB = \frac{AD}{\cot \angle BAC - \cot \angle BDC}.$$

Ahora, sin embargo, se debe buscar un procedimiento más adaptable a los cálculos con logaritmos.

En la figura, DE es perpendicular a AB. Entonces,

$$\angle DBE = \angle CBA - \angle CBD = (90° - \angle BAC) - (90° - \angle BDC) = \angle BDC - \angle BAC = 15°16{,}6'.$$

En el triángulo rectángulo AED, $DE = AD$ sen $\angle BAC$.
En el triángulo rectángulo BCD, $CB = BD$ sen $\angle BDC$.
En el triángulo rectángulo BED, $BD = DE/$sen $\angle DBE$.

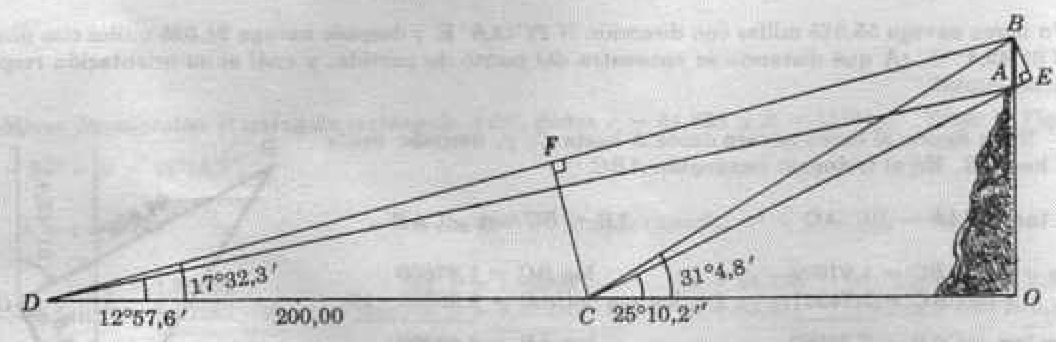
$$\text{Entonces } CB = BD \text{ sen } \angle BDC = \frac{DE \text{ sen } \angle BDC}{\text{sen } \angle DBE} = \frac{AD \text{ sen } \angle BAC \cdot \text{sen } \angle BDC}{\text{sen } \angle DBE}$$

$$= \frac{152{,}75 \text{ sen } 29°15{,}8' \cdot \text{sen } 44°32{,}4'}{\text{sen } 15°16{,}6'}.$$

log 152,75 = 2,18398
(+) log sen 29°15,8′ = 9,68915 − 10
(+) log sen 44°32,4′ = 9,84597 − 10
(+) colog sen 15°16,6′ = 0,57925 (log sen 15°16,6′ = 9,42075 − 10)

log CB = 2,29835
CB = 198,77 m

10. Sobre una colina se eleva una torre AB. En un terreno llano que se extiende al pie de la colina se sitúan dos puntos, C y D, en un mismo plano vertical con AB. La distancia entre C y D es de 200,00 m. Los ángulos de elevación del pie y del extremo superior de AB, medidos desde C son, respectivamente, 25°10,2′ y 31°4,8′, mientras que medidos desde D son 12°57,6′ y 17°32,3′. Encontrar la altura de la torre.



Desde C trácese CF perpendicular a BD y desde B trácese la perpendicular BE a la prolongación de CA. Prolónguese AB hasta encontrar la prolongación de DC en O.

En el triángulo rectángulo AEB, $AB = EB/$sen $\angle EAB$.
En el triángulo rectángulo CEB, $EB = CB$ sen $\angle ECB$.
En el triángulo rectángulo CFB, $CB = CF/$sen $\angle CBF$.
En el triángulo rectángulo CDF, $CF = CD$ sen $\angle CDF$.

$$\text{Entonces } AB = \frac{EB}{\text{sen } \angle EAB} = \frac{CB \text{ sen } \angle ECB}{\text{sen } \angle EAB} = \frac{CF \text{ sen } \angle ECB}{\text{sen } \angle EAB \cdot \text{sen } \angle CBF} = \frac{CD \text{ sen } \angle CDF \cdot \text{sen } \angle ECB}{\text{sen } \angle EAB \cdot \text{sen } \angle CBF}$$

Ahora bien

$\angle CDF = 17°32{,}3'$, $\angle ECB = \angle OCB - \angle OCA = 5°54{,}6'$, $\angle EAB = \angle OAC = 90° - \angle OCA = 64°49{,}8'$, y $\angle CBF = \angle OBD - \angle OBC = (90° - \angle ODB) - (90° - \angle OCB) = \angle OCB - \angle ODB = 13°32{,}5'$.

log 200,00 = 2,30103
(+) log sen 17°32,3′ = 9,47906 − 10
(+) log sen 5°54,6′ = 9,01269 − 10
(+) colog sen 64°49,8′ = 0,04333 (log sen 64°49,8′ = 9,95667 − 10)
(+) colog sen 13°32,5′ = 0,63050 (log sen 13°32,5′ = 9,36950 − 10)

log AB = 1,46661
AB = 29,283 m

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver y comprobar cada uno de los siguientes triángulos rectángulos, dados:

11. $a = 25{,}72$, $A = 36°20'$ *Resp.* $B = 53°40'$, $b = 34{,}97$, $c = 43{,}41$
12. $a = 342{,}86$, $A = 55°32{,}8'$ *Resp.* $B = 34°27{,}2'$, $b = 235{,}23$, $c = 415{,}81$
13. $a = 574{,}16$, $B = 56°20{,}6'$ *Resp.* $A = 33°39{,}4'$, $b = 862{,}32$, $c = 1036{,}0$
14. $c = 44{,}26$, $A = 56°14'$ *Resp.* $B = 33°46'$, $a = 36{,}79$, $b = 24{,}60$
15. $c = 287{,}68$, $A = 38°10{,}2'$ *Resp.* $B = 51°49{,}8'$, $a = 177{,}78$, $b = 226{,}17$
16. $c = 67{,}546$, $B = 47°25{,}6'$ *Resp.* $A = 42°34{,}4'$, $a = 45{,}697$, $b = 49{,}741$
17. $a = 42{,}420$, $b = 58{,}480$ *Resp.* $A = 35°57{,}4'$, $B = 54°2{,}6'$, $c = 72{,}243$
18. $a = 384{,}66$, $b = 254{,}88$ *Resp.* $A = 56°28{,}3'$, $B = 33°31{,}7'$, $c = 461{,}44$

19. Se va a construir una carretera recta para unir las ciudades A y B. Si B está situada a 133,75 km al este y 256,78 km al norte de A, encontrar la longitud de la carretera y su orientación con respecto a la ciudad A. *Resp.* 289,53 km, N 27°30,8′ E

20. Se ejercen, en ángulo recto, dos fuerzas de 281,66 kg y 323,54 kg. Encontrar la magnitud de la fuerza resultante y el ángulo que ésta forma con la fuerza mayor. *Resp.* 428,97 kg, 41°2,5′

21. Calcular la longitud de la base de un triángulo isósceles si el ángulo del vértice mide 48°27,4′ y los lados iguales miden 168,14. *Resp.* 138,00

22. Dada una circunferencia de 417,12 cm de radio, calcular el lado y el área
    a) del decágono regular inscrito. *Resp.* 257,80 cm, 511,340 cm²
    b) del decágono regular circunscrito. *Resp.* 271,06 cm, 565,320 cm²

23. Dada una circunferencia de 336,48 cm de radio, calcular el lado y el área
    a) del octógono regular inscrito. *Resp.* 257,52 cm, 320,240 cm²
    b) del octógono regular circunscrito. *Resp.* 278,74 cm, 375,170 cm²

24. Dos puntos, A y D, están situados en una recta horizontal que pasa por el pie de una torre CB, de tal manera que A se encuentra hacia un lado de la torre, y B hacia el lado opuesto. La distancia entre A y D es de 535,4 m, y el ángulo de elevación del extremo superior B, medido desde A, es 12°46′ y, medido desde D, es 18°38′. Considérese la perpendicular trazada desde D a la recta que pasa por A y B. Sea E el pie de dicha perpendicular. Demuéstrese que

$$CB = BD \text{ sen } \angle BDC = \frac{DE \text{ sen } \angle BDC}{\text{sen } \angle DBE} = \frac{AD \text{ sen } \angle BAC \text{ sen } \angle BDC}{\text{sen } \angle DBE} = 72{,}56 \text{ m.}$$

CAPITULO 8

Reducciones a funciones de ángulos agudos positivos

ANGULOS COFINALES. Sea θ un ángulo cualquiera; entonces,

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\theta + n\,360^\circ) = \operatorname{sen}\theta & \cot(\theta + n\,360^\circ) = \cot\theta \\ \cos(\theta + n\,360^\circ) = \cos\theta & \sec(\theta + n\,360^\circ) = \sec\theta \\ \tan(\theta + n\,360^\circ) = \tan\theta & \csc(\theta + n\,360^\circ) = \csc\theta \end{array}$$

donde n es cualquier número entero positivo, negativo o cero.

Ejemplos. $\operatorname{sen} 400^\circ = \operatorname{sen}(40^\circ + 360^\circ) = \operatorname{sen} 40^\circ$
$\cos 850^\circ = \cos(130^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \cos 130^\circ$
$\tan(-1000^\circ) = \tan(80^\circ - 3 \cdot 360^\circ) = \tan 80^\circ$

FUNCIONES DE UN ANGULO NEGATIVO. Sea θ un ángulo cualquiera; entonces,

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta & \cot(-\theta) = -\cot\theta \\ \cos(-\theta) = \cos\theta & \sec(-\theta) = \sec\theta \\ \tan(-\theta) = -\tan\theta & \csc(-\theta) = -\csc\theta \end{array}$$

Ejemplos. $\operatorname{sen}(-50^\circ) = -\operatorname{sen} 50^\circ$, $\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ$, $\tan(-200^\circ) = -\tan 200^\circ$.

Las demostraciones de estas relaciones se encuentran en el problema 1.

FORMULA DE REDUCCIONES. Sea θ un ángulo cualquiera; entonces,

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(90^\circ - \theta) = \cos\theta & \operatorname{sen}(90^\circ + \theta) = \cos\theta \\ \cos(90^\circ - \theta) = \operatorname{sen}\theta & \cos(90^\circ + \theta) = -\operatorname{sen}\theta \\ \tan(90^\circ - \theta) = \cos\theta & \tan(90^\circ + \theta) = -\cot\theta \\ \cot(90^\circ - \theta) = \tan\theta & \cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta \\ \sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta & \sec(90^\circ + \theta) = -\csc\theta \\ \csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta & \csc(90^\circ + \theta) = \sec\theta \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}(180^\circ + \theta) = -\operatorname{sen}\theta \\ \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta & \cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta \\ \tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta & \tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta \\ \cot(180^\circ - \theta) = -\cot\theta & \cot(180^\circ + \theta) = \cot\theta \\ \sec(180^\circ - \theta) = -\sec\theta & \sec(180^\circ + \theta) = -\sec\theta \\ \csc(180^\circ - \theta) = \csc\theta & \csc(180^\circ + \theta) = -\csc\theta \end{array}$$

Las demostraciones de estas relaciones se encuentran en los problemas 2, 3, 4 y 5.

FORMULA GENERAL DE REDUCCION. Toda función trigonométrica de $(n \cdot 90^\circ \pm \theta)$, donde θ es un ángulo cualquiera, es *numéricamente* igual a

a) la misma función de θ si n es par,
b) la correspondiente cofunción de θ si n es impar.

En cada caso, el signo algebraico es el igual al signo que tiene la función dada en el cuadrante al que pertenece $n \cdot 90^\circ \pm \theta$ cuando θ es un ángulo agudo positivo.

La verificación de estas fórmulas se encuentra en el problema 6.

Ejemplos.

1) $\operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = \operatorname{sen}(2 \cdot 90^\circ - \theta) = \operatorname{sen} \theta$ puesto que 180° es un múltiplo par de 90° y, cuando θ es un ángulo agudo positivo, el lado final (terminal) de $180^\circ - \theta$ cae en el cuadrante II.

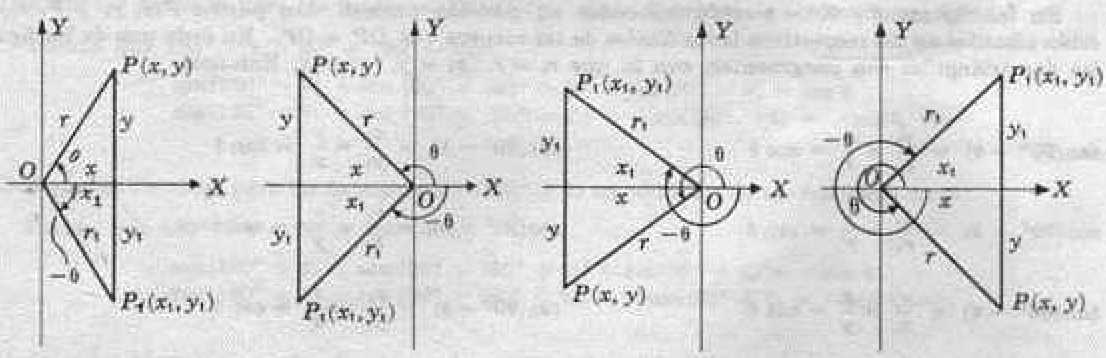
2) $\cos(180^\circ + \theta) = \cos(2 \cdot 90^\circ + \theta) = -\cos \theta$ puesto que 180° es un múltiplo par de 90° y, cuando θ es un ángulo agudo positivo, el lado final de $180^\circ + \theta$ cae en el cuadrante III.

3) $\tan(270^\circ - \theta) = \tan(3 \cdot 90^\circ - \theta) = \cot \theta$ puesto que 270° es un múltiplo impar de 90° y, cuando θ es un ángulo agudo positivo, el lado final de $270^\circ - \theta$ cae en el cuadrante III.

4) $\cos(270^\circ + \theta) = \cos(3 \cdot 90^\circ + \theta) = \operatorname{sen} \theta$ puesto que 270° es un múltiplo impar de 90° y, cuando θ es un ángulo agudo positivo, el lado final de $270^\circ + \theta$ cae en el cuadrante IV.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir las fórmulas para las funciones de $(-\theta)$ en términos de las funciones de θ.



En las figuras, θ y $-\theta$ están colocados en posición normal y son numéricamente iguales. Los puntos $P(x, y)$ y $P_1(x_1, y_1)$ están situados en los respectivos lados finales de tal manera que $OP = OP_1$. En cada una de las figuras los dos triángulos son congruentes, con lo que $r_1 = r$, $x_1 = x$, $y_1 = -y$. Entonces,

$$\operatorname{sen}(-\theta) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cot(-\theta) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\cot\theta$$

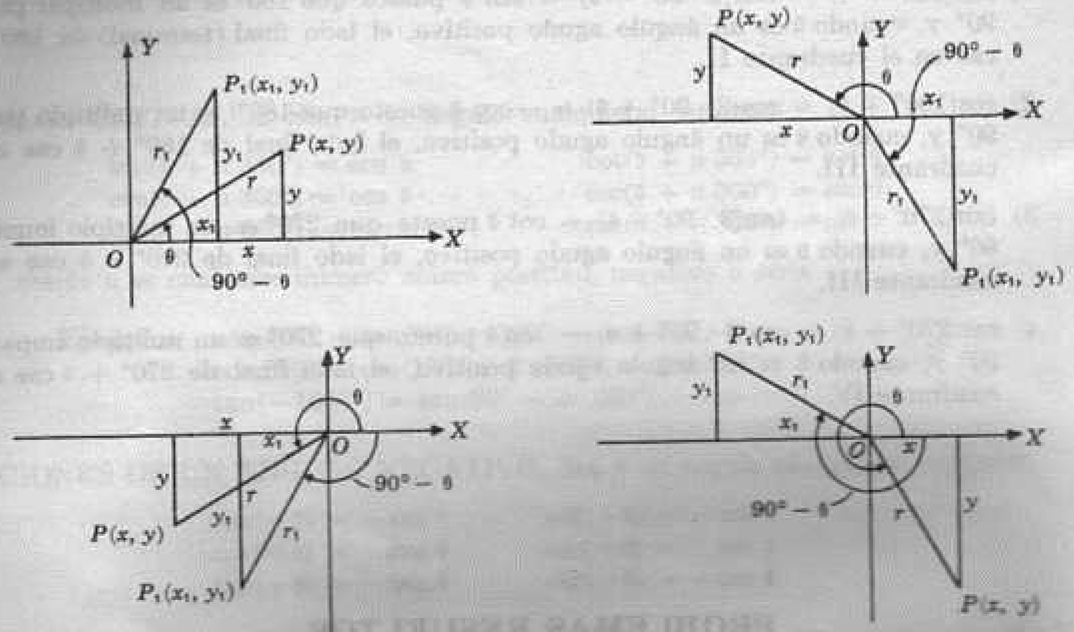
$$\cos(-\theta) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos\theta \qquad \sec(-\theta) = \frac{r_1}{x_1} = \frac{r}{x} = \sec\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta \qquad \csc(-\theta) = \frac{r_1}{y_1} = \frac{r}{-y} = -\frac{r}{y} = -\csc\theta$$

Excepto en los casos en que alguna función no esté definida, las relaciones anteriores son válidas también cuando θ es un ángulo de un cuadrante; lo que puede verificarse si se tiene en cuenta que -0° y 0°, -90° y 270°, -180° y 180°, -270° y 90° son cofinales.

Por ejemplo, $\operatorname{sen}(-0^\circ) = \operatorname{sen} 0^\circ = 0 = -\operatorname{sen} 0^\circ$, $\operatorname{sen}(-90^\circ) = \operatorname{sen} 270^\circ = -1 = -\operatorname{sen} 90^\circ$, $\cos(-180^\circ) = \cos 180^\circ$ y $\cot(-270^\circ) = \cot 90^\circ = 0 = -\cot 270^\circ$.

2. Deducir las fórmulas para las funciones de $(90° - \theta)$ en términos de las funciones de θ.



En las figuras, θ y $90° - \theta$ están colocados en posición normal. Los puntos $P(x, y)$ y $P_1(x_1, y_1)$ están situados en los respectivos lados finales de tal manera que $OP = OP_1$. En cada una de las figuras los dos triángulos son congruentes, con lo que $r_1 = r$, $x_1 = y$, $y_1 = x$. Entonces,

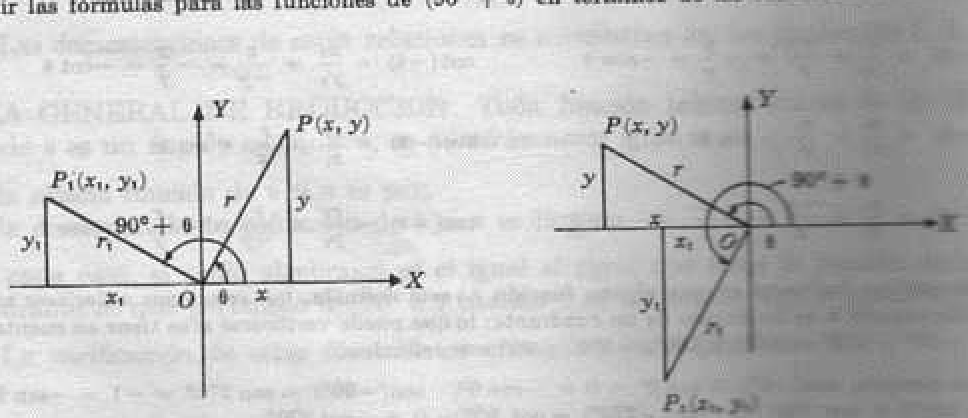
$$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos\theta \qquad \cot(90° - \theta) = \frac{x_1}{y_1} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

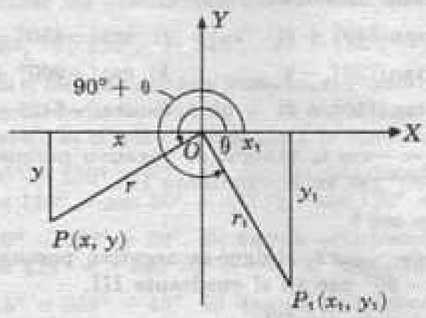
$$\cos(90° - \theta) = \frac{x_1}{r_1} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta \qquad \sec(90° - \theta) = \frac{r_1}{x_1} = \frac{r}{y} = \csc\theta$$

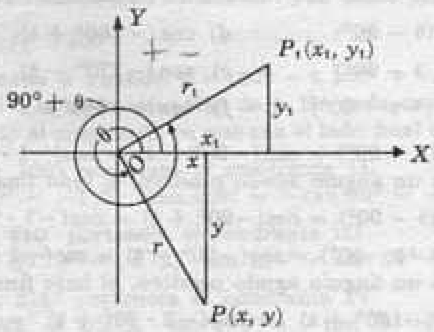
$$\tan(90° - \theta) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{y} = \cot\theta \qquad \csc(90° - \theta) = \frac{r_1}{y_1} = \frac{r}{x} = \sec\theta$$

Como sucede en las fórmulas del problema 1, algunas de estas relaciones carecen de significado cuando θ es un ángulo de un cuadrante.

3. Deducir las fórmulas para las funciones de $(90° + \theta)$ en términos de las funciones de θ.







En las figuras, θ y $90° + \theta$ están colocados en posición normal. Los puntos $P(x, y)$ y $P_1(x_1, y_1)$ están situados en los respectivos lados finales de tal manera que $OP = OP_1$. En cada una de las figuras los dos triángulos son congruentes, con lo que $r_1 = r$, $x_1 = -y$, $y_1 = x$. Entonces,

$$\operatorname{sen}(90° + \theta) = \frac{y_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos\theta \qquad \cot(90° + \theta) = \frac{x_1}{y_1} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$$

$$\cos(90° + \theta) = \frac{x_1}{r_1} = -\frac{y}{r} = -\operatorname{sen}\theta \qquad \sec(90° + \theta) = \frac{r_1}{x_1} = -\frac{r}{y} = -\csc\theta$$

$$\tan(90° + \theta) = \frac{y_1}{x_1} = -\frac{x}{y} = -\cot\theta \qquad \csc(90° + \theta) = \frac{r_1}{y_1} = \frac{r}{x} = \sec\theta$$

4. Deducir las fórmulas para las funciones de $(180° - \theta)$ en términos de las funciones de θ.

Puesto que $180° - \theta = 90° + (90° - \theta)$,

$$\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}[90° + (90° - \theta)] = \cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(180° - \theta) = \cos[90° + (90° - \theta)] = -\operatorname{sen}(90° - \theta) = -\cos\theta, \text{ etc.}$$

5. Deducir las fórmulas para las funciones de $(180° + \theta)$ en términos de las funciones de θ.

Puesto que $180° + \theta = 90° + (90° + \theta)$,

$$\operatorname{sen}(180° + \theta) = \operatorname{sen}[90° + (90° + \theta)] = \cos(90° + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(180° + \theta) = \cos[90° + (90° + \theta)] = -\operatorname{sen}(90° + \theta) = -\cos\theta, \text{ etc.}$$

6. Deducir las fórmulas para las funciones de $(270° - \theta)$ en términos de las funciones de θ.

Puesto que $270° - \theta = 180° + (90° - \theta)$,

$$\operatorname{sen}(270° - \theta) = \operatorname{sen}[180° + (90° - \theta)] = -\operatorname{sen}(90° - \theta) = -\cos\theta \qquad \cot(270° - \theta) = \tan\theta$$
$$\cos(270° - \theta) = \cos[180° + (90° - \theta)] = -\cos(90° - \theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \sec(270° - \theta) = -\csc\theta$$
$$\tan(270° - \theta) = \tan[180° + (90° - \theta)] = \tan(90° - \theta) = \cot\theta \qquad \csc(270° - \theta) = -\sec\theta.$$

7. Deducir las fórmulas para las funciones de $(270° + \theta)$ en términos de las funciones de θ.

Puesto que $270° + \theta = 180° + (90° + \theta)$,

$$\operatorname{sen}(270° + \theta) = \operatorname{sen}[180° + (90° + \theta)] = -\operatorname{sen}(90° + \theta) = -\cos\theta \qquad \cot(270° + \theta) = -\tan\theta$$
$$\cos(270° + \theta) = \cos[180° + (90° + \theta)] = -\cos(90° + \theta) = \operatorname{sen}\theta \qquad \sec(270° + \theta) = \csc\theta$$
$$\tan(270° + \theta) = \tan[180° + (90° + \theta)] = \tan(90° + \theta) = -\cot\theta \qquad \csc(270° + \theta) = -\sec\theta.$$

8. Deducir la fórmula general de reducción.

Al examinar las fórmulas deducidas en los problemas 1-7, se observa que la fórmula general de reducción es válida para los enteros $n = 1, 2, 3$. Se concluye entonces que la fórmula es válida para cualquier entero n porque $n \cdot 90° \pm \theta$ es cofinal con alguno de los ángulos $\pm\theta$, $90° \pm \theta$, $180° \pm \theta$, $270° \pm \theta$.

9. Expresar como una función de θ cada una de las siguientes funciones:

$a)$ $\text{sen}(\theta - 90°)$ $d)$ $\cos(-180° + \theta)$ $g)$ $\text{sen}(540° + \theta)$ $j)$ $\cos(-450° - \theta)$
$b)$ $\cos(\theta - 90°)$ $e)$ $\text{sen}(-270° - \theta)$ $h)$ $\tan(720° - \theta)$ $k)$ $\csc(-900° + \theta)$
$c)$ $\sec(-\theta - 90°)$ $f)$ $\tan(\theta - 360°)$ $i)$ $\tan(720° + \theta)$ $l)$ $\text{sen}(-540° - \theta)$.

$a)$ $\text{sen}(\theta - 90°) = \text{sen}(-90° + \theta) = \text{sen}(-1 \cdot 90° + \theta) = -\cos\theta$, el signo es negativo porque, cuando θ es un ángulo agudo positivo, el lado final de $\theta - 90°$ cae en el cuadrante IV.

$b)$ $\cos(\theta - 90°) = \cos(-90° + \theta) = \cos(-1 \cdot 90° + \theta) = \text{sen}\,\theta$.

$c)$ $\sec(-\theta - 90°) = \sec(-90° - \theta) = \sec(-1 \cdot 90° - \theta) = -\csc\theta$, el signo es negativo porque, cuando θ es un ángulo agudo positivo, el lado final de $-\theta - 90°$ cae en el cuadrante III.

$d)$ $\cos(-180° + \theta) = \cos(-2 \cdot 90° + \theta) = -\cos\theta$. (cuadrante III)

$e)$ $\text{sen}(-270° - \theta) = \text{sen}(-3 \cdot 90° - \theta) = \cos\theta$. (cuadrante I)

$f)$ $\tan(\theta - 360°) = \tan(-4 \cdot 90° + \theta) = \tan\theta$. (cuadrante I)

$g)$ $\text{sen}(540° + \theta) = \text{sen}(6 \cdot 90° + \theta) = -\text{sen}\,\theta$. (cuadrante III)

$h)$ $\tan(720° - \theta) = \tan(8 \cdot 90° - \theta) = -\tan\theta$
$= \tan(2 \cdot 360° - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$.

$i)$ $\tan(720° + \theta) = \tan(8 \cdot 90° + \theta) = \tan\theta$
$= \tan(2 \cdot 360° + \theta) = \tan\theta$.

$j)$ $\cos(-450° - \theta) = \cos(-5 \cdot 90° - \theta) = -\text{sen}\,\theta$.

$k)$ $\csc(-900° + \theta) = \csc(-10 \cdot 90° + \theta) = -\csc\theta$.

$l)$ $\text{sen}(-540° - \theta) = \text{sen}(-6 \cdot 90° - \theta) = \text{sen}\,\theta$.

10. Expresar como funciones de un ángulo positivo, en dos formas diferentes, cada una de las siguientes funciones:

✓$a)$ $\text{sen}\,130°$ $c)$ $\text{sen}\,200°$ $e)$ $\tan 165°$ ✓$g)$ $\text{sen}\,670°$ $i)$ $\csc 865°$ $k)$ $\cos(-680°)$
$b)$ $\tan 325°$ ✓$d)$ $\cos 310°$ $f)$ $\sec 250°$ $h)$ $\cot 930°$ $j)$ $\text{sen}(-100°)$ $l)$ $\tan(-290°)$.

$a)$ $\text{sen}\,130° = \text{sen}(2 \cdot 90° - 50°) = \text{sen}\,50°$
$= \text{sen}(1 \cdot 90° + 40°) = \cos 40°$

$b)$ $\tan 325° = \tan(4 \cdot 90° - 35°) = -\tan 35°$
$= \tan(3 \cdot 90° + 55°) = -\cot 55°$

$c)$ $\text{sen}\,200° = \text{sen}(2 \cdot 90° + 20°) = -\text{sen}\,20°$
$= \text{sen}(3 \cdot 90° - 70°) = -\cos 70°$

$d)$ $\cos 310° = \cos(4 \cdot 90° - 50°) = \cos 50°$
$= \cos(3 \cdot 90° + 40°) = \text{sen}\,40°$

$e)$ $\tan 165° = \tan(2 \cdot 90° - 15°) = -\tan 15°$
$= \tan(1 \cdot 90° + 75°) = -\cot 75°$

$f)$ $\sec 250° = \sec(2 \cdot 90° + 70°) = -\sec 70°$
$= \sec(3 \cdot 90° - 20°) = -\csc 20°$

$g)$ $\text{sen}\,670° = \text{sen}(8 \cdot 90° - 50°) = -\text{sen}\,50°$
$= \text{sen}(7 \cdot 90° + 40°) = -\cos 40°$

o $\text{sen}\,670° = \text{sen}(310° + 360°) = \text{sen}\,310° = \text{sen}(4 \cdot 90° - 50°) = -\text{sen}\,50°$

$h)$ $\cot 930° = \cot(10 \cdot 90° + 30°) = \cot 30°$
$= \cot(11 \cdot 90° - 60°) = \tan 60°$

o $\cot 930° = \cot(210° + 2 \cdot 360°) = \cot 210° = \cot(2 \cdot 90° + 30°) = \cot 30°$

$i)$ $\csc 865° = \csc(10 \cdot 90° - 35°) = \csc 35°$
$= \csc(9 \cdot 90° + 55°) = \sec 55°$

o $\csc 865° = \csc(145° + 2 \cdot 360°) = \csc 145° = \csc(2 \cdot 90° - 35°) = \csc 35°$

$j)$ $\text{sen}(-100°) = \text{sen}(-2 \cdot 90° + 80°) = -\text{sen}\,80°$
$= \text{sen}(-1 \cdot 90° - 10°) = -\cos 10°$

o $\text{sen}(-100°) = -\text{sen}\,100° = -\text{sen}(2 \cdot 90° - 80°) = -\text{sen}\,80°$

o $\text{sen}(-100°) = \text{sen}(-100° + 360°) = \text{sen}\,260° = \text{sen}(2 \cdot 90° + 80°) = -\text{sen}\,80°$

$k)$ $\cos(-680°) = \cos(-8 \cdot 90° + 40°) = \cos 40°$
$= \cos(-7 \cdot 90° - 50°) = \text{sen}\,50°$

o $\cos(-680°) = \cos(-680° + 2 \cdot 360°) = \cos 40°$

$l)$ $\tan(-290°) = \tan(-4 \cdot 90° + 70°) = \tan 70°$
$= \tan(-3 \cdot 90° - 20°) = \cot 20°$

o $\tan(-290°) = \tan(-290° + 360°) = \tan 70°$

11. Encontrar los valores exactos del seno, del coseno y de la tangente de:

a) $120°$, *b*) $210°$, *c*) $315°$, *d*) $-135°$, *e*) $-240°$, *f*) $-330°$.

Sea θ, siempre agudo y positivo, el *ángulo relacionado* con ϕ cuando $\phi = 180° - \theta, 180° + \theta$ ó $360° - \theta$. Entonces, toda función de ϕ es numéricamente igual a la misma función de θ. En cada caso, el signo algebraico es el que corresponde a la función de acuerdo al cuadrante en que cae el lado final de ϕ.

a) $120° = 180° - 60°$. El ángulo relacionado es $60°$; $120°$ pertenece al cuadrante II.
$\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \sqrt{3}/2$, $\cos 120° = -\cos 60° = -1/2$, $\tan 120° = -\tan 60° = -\sqrt{3}$.

b) $210° = 180° + 30°$. El ángulo relacionado es $30°$; $210°$ pertenece al cuadrante III.
$\text{sen } 210° = -\text{sen } 30° = -1/2$, $\cos 210° = -\cos 30° = -\sqrt{3}/2$, $\tan 210° = \tan 30° = \sqrt{3}/3$.

c) $315° = 360° - 45°$. El ángulo relacionado es $45°$; $315°$ pertenece al cuadrante IV.
$\text{sen } 315° = -\text{sen } 45° = -\sqrt{2}/2$, $\cos 315° = \cos 45° = \sqrt{2}/2$, $\tan 315° = -\tan 45° = -1$.

d) Cualquier función de $-135°$ es igual a la misma función de $-135° + 360° = 225° = \phi$.
$225° = 180° + 45°$. El ángulo relacionado es $45°$; $225°$ pertenece al cuadrante III.
$\text{sen}(-135°) = -\text{sen } 45° = -\sqrt{2}/2$, $\cos(-135°) = -\cos 45° = -\sqrt{2}/2$, $\tan(-135°) = 1$.

e) Cualquier función de $-240°$ es igual a la misma función de $-240° + 360° = 120°$.
$120° = 180° - 60°$. El ángulo relacionado es $60°$; $120°$ pertenece al cuadrante II.
$\text{sen}(-240°) = \text{sen } 60° = \sqrt{3}/2$, $\cos(-240°) = -\cos 60° = -1/2$, $\tan(-240°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$.

f) Cualquier función de $-330°$ es igual a la misma función de $-330° + 360° = 30°$.
$\text{sen}(-330°) = \text{sen } 30° = 1/2$, $\cos(-330°) = \cos 30° = \sqrt{3}/2$, $\tan(-330°) = \tan 30° = \sqrt{3}/3$.

12. Encontrar en la tabla de funciones naturales los valores correspondientes a:

a) $\text{sen } 125°14' = \text{sen}(180° - 54°46') = \text{sen } 54°46' = 0{,}8168$
b) $\cos 169°40' = \cos(180° - 10°20') = -\cos 10°20' = -0{,}9838$
c) $\tan 200°23' = \tan(180° + 20°23') = \tan 20°23' = 0{,}3716$
d) $\cot 250°44' = \cot(180° + 70°44') = \cot 70°44' = 0{,}3495$
e) $\cos 313°18' = \cos(360° - 46°42') = \cos 46°42' = 0{,}6858$
f) $\text{sen } 341°52' = \text{sen}(360° - 18°8') = -\text{sen } 18°8' = -0{,}3112$

13. Si $\tan 25° = a$, encontrar:

a) $$\frac{\tan 155° - \tan 115°}{1 + \tan 155° \tan 115°} = \frac{-\tan 25° - (-\cot 25°)}{1 + (-\tan 25°)(-\cot 25°)} = \frac{-a + 1/a}{1 + a(1/a)} = \frac{-a^2 + 1}{a + a} = \frac{1 - a^2}{2a}.$$

b) $$\frac{\tan 205° - \tan 115°}{\tan 245° + \tan 335°} = \frac{\tan 25° - (-\cot 25°)}{\cot 25° + (-\tan 25°)} = \frac{a + 1/a}{1/a - a} = \frac{a^2 + 1}{1 - a^2}.$$

14. Si $A + B + C = 180°$, entonces

a) $\text{sen}(B + C) = \text{sen}(180° - A) = \text{sen } A$.

b) $\text{sen}\frac{1}{2}(B + C) = \text{sen}\frac{1}{2}(180° - A) = \text{sen}(90° - \frac{1}{2}A) = \cos\frac{1}{2}A$.

15. Demostrar que $\text{sen } \theta$ y $\tan\frac{1}{2}\theta$ tienen el mismo signo.

a) Supóngase que $\theta = n \cdot 180°$. Si n es par (incluido el cero), por ejemplo $2m$, entonces $\text{sen}(2m \cdot 180°) = \tan(m \cdot 180°) = 0$. Se excluye el caso en que n es impar porque entonces $\tan\frac{1}{2}\theta$ no está definida.

b) Supóngase que $\theta = n \cdot 180° + \phi$, donde $0 < \phi < 180°$. Si n es par (incluido el cero), θ pertenece al cuadrante I o al cuadrante II y $\text{sen } \theta$ es positivo, mientras que $\frac{1}{2}\theta$ pertenece al cuadrante I o al cuadrante III y $\tan\frac{1}{2}\theta$ es positiva. Si n es impar, θ pertenece al cuadrante III o al cuadrante IV y $\text{sen } \theta$ es negativo, mientras que $\frac{1}{2}\theta$ pertenece al cuadrante II o al cuadrante IV y $\tan\frac{1}{2}\theta$ es negativa.

16. Encontrar todos los valores positivos de θ menores que $360°$ tales que $\text{sen } \theta = -\frac{1}{2}$.

Existen dos ángulos (véase el capítulo 2), uno en el tercer cuadrante y otro en el cuarto cuadrante. El ángulo relacionado con cada uno de ellos (véase el problema 11) es $30°$ cuyo seno es $+\frac{1}{2}$.

Así, los ángulos buscados son $\theta = 180° + 30° = 210°$ y $\theta = 360° - 30° = 330°$.

Nota. Para obtener *todos* los valores de θ tales que $\text{sen } \theta = -\frac{1}{2}$, añádase $n \cdot 360°$ a cada una de las soluciones conseguidas; esto es, $\theta = 210° + n \cdot 360°$ y $\theta = 330° + n \cdot 360°$, donde n es un entero cualquiera.

17. Encontrar todos los valores positivos de θ menores que 360° tales que $\cos\theta = 0{,}9063$.

Hay dos soluciones, $\theta = 25°$ en el primer cuadrante y $\theta = 360° - 25° = 335°$ en el cuarto cuadrante.

18. Encontrar todos los valores positivos de $\frac{1}{4}\theta$ menores que 360°, tales que $\operatorname{sen}\theta = 0{,}6428$.

Los ángulos positivos menores que 360° tales que $\operatorname{sen}\theta = 0{,}6428$ son $\theta = 40°$ y $\theta = 180° - 40° = 140°$. Ahora bien, si $\frac{1}{4}\theta$ ha de incluir todos los valores menores que 360°, θ comprende todos los valores menores que $4 \cdot 360° = 1440°$. Por tanto, son valores de θ los dos ángulos encontrados y todos los cofinales con ellos que sean, a su vez, menores que 1440°; esto es,

$$\theta = 40°, 400°, 760°, 1120°;\ 140°, 500°, 860°, 1220° \quad \text{y}$$

$$\tfrac{1}{4}\theta = 10°, 100°, 190°, 280°;\ 35°, 125°, 215°, 305°.$$

19. Encontrar todos los valores positivos de θ menores que 360° tales que $\operatorname{sen} 2\theta = \cos\frac{1}{2}\theta$.

Puesto que $\cos\frac{1}{2}\theta = \operatorname{sen}(90° - \frac{1}{2}\theta) = \operatorname{sen} 2\theta$, $2\theta = 90° - \frac{1}{2}\theta, 450° - \frac{1}{2}\theta, 810° - \frac{1}{2}\theta, 1170° - \frac{1}{2}\theta, \ldots$

Entonces $\frac{5}{2}\theta = 90°, 450°, 810°, 1170°, \ldots$ y $\theta = 36°, 180°, 324°, 468°, \ldots$

Puesto que $\frac{1}{2}\theta = \operatorname{sen}(90° + \frac{1}{2}\theta) = \operatorname{sen} 2\theta$, $2\theta = 90° + \frac{1}{2}\theta, 450° + \frac{1}{2}\theta, 810° + \frac{1}{2}\theta, \ldots$

Entonces $\frac{3}{2}\theta = 90°, 450°, 810°, \ldots$ y $\theta = 60°, 300°, 540°, \ldots$

Las soluciones buscadas son: 36°, 180°, 324°; 60°, 300°.

PROBLEMAS PROPUESTOS

20. Expresar como funciones de un ángulo agudo positivo.

a) sen 145° *b*) cos 215° *c*) tan 440° *d*) cot 155° *e*) sec 325° *f*) csc 190° *g*) sen(−200°) *h*) cos(−760°) *i*) tan(−1385°) *j*) cot 610° *k*) sec 455° *l*) csc 825°

Resp. *a*) sen 35° ó cos 55°
b) −cos 35° ó −sen 55°
c) tan 80° ó cot 10°
d) −cot 25° ó −tan 65°
e) sec 35° ó csc 55°
f) −csc 10° ó −sec 80°
g) sen 20° ó cos 70°
h) cos 40° ó sen 50°
i) tan 55° ó cot 35°
j) cot 70° ó tan 20°
k) −sec 85° ó −csc 5°
l) csc 75° ó sec 15°

21. Encontrar los valores exactos del seno, del coseno y de la tangente de:

a) 150°, *b*) 225°, *c*) 300°, *d*) −120°, *e*) −210°, *f*) −315°.

Resp. *a*) $1/2,\ -\sqrt{3}/2,\ -1/\sqrt{3}$
b) $-\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}/2,\ 1$
c) $-\sqrt{3}/2,\ 1/2,\ -\sqrt{3}$
d) $-\sqrt{3}/2,\ -1/2,\ \sqrt{3}$
e) $1/2,\ -\sqrt{3}/2,\ -1/\sqrt{3}$
f) $\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2,\ 1$

22. Encontrar en las tablas apropiadas los valores de:

a) sen 155°13′ = 0,4192
b) cos 104°38′ = −0,2526
c) tan 305°24′ = −1,4071
d) sen 114°18′ = 0,9114
e) cos 166°51′ = −0,9738
f) log sen 129°44,8′ = 9,88586 − 10
g) log sen 110°32,7′ = 9,97146 − 10
h) log sen 162°35,6′ = 9,47589 − 10
i) log sen 138°30,5′ = 9,82119 − 10
j) log sen 174°22,7′ = 8,99104 − 10

23. Encontrar todos los ángulos, $0 \leqq \theta < 360°$, tales que:

a) $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}/2$, *b*) $\cos\theta = -1$, *c*) $\operatorname{sen}\theta = -0{,}6180$, *d*) $\cos\theta = 0{,}5125$, *e*) $\tan\theta = -1{,}5301$

Resp. *a*) 45°, 135° *b*) 180° *c*) 218°10′, 321°50′ *d*) 59°10′, 300°50′ *e*) 123°10′, 303°10′

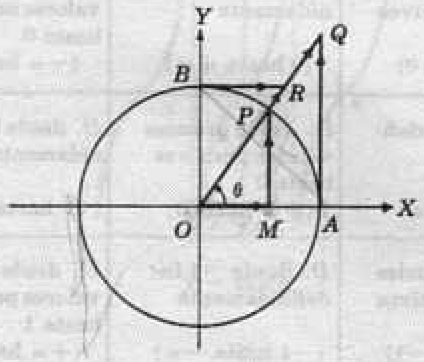
24. Demostrar que cuando θ es un ángulo del segundo cuadrante, tal que $\tan\theta = -2/3$, entonces

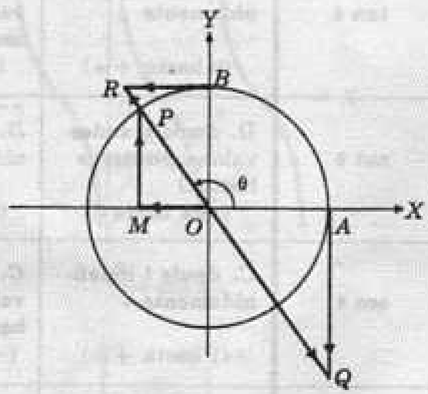
a) $\dfrac{\operatorname{sen}(90° - \theta) - \cos(180° - \theta)}{\tan(270° + \theta) + \cot(360° - \theta)} = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, *b*) $\dfrac{\tan(90° + \theta) + \cos(180° + \theta)}{\operatorname{sen}(270° - \theta) - \cot(-\theta)} = \dfrac{2 + \sqrt{13}}{2 - \sqrt{13}}$

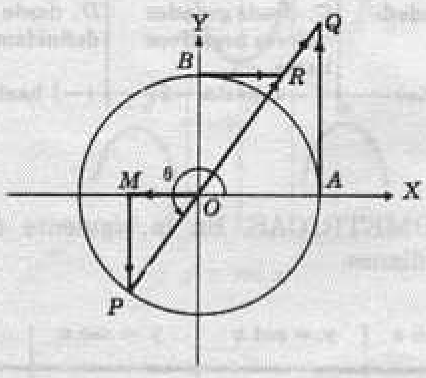
CAPITULO 9

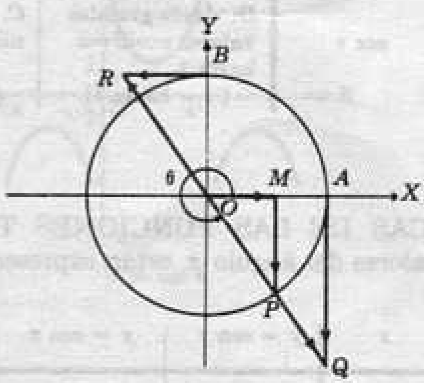
Variaciones y gráficas de las funciones trigonométricas

REPRESENTACIONES LINEALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS. Sea θ un ángulo cualquiera dado, en posición normal. (En las figuras que aparecen a continuación se muestra θ en cada uno de los cuadrantes.) Descríbase una circunferencia con centro en el vértice O, y cuyo radio se tome como unidad. Esta circunferencia corta el lado inicial OX de θ en A, el semi-eje positivo de las Y en B, y el lado final de θ en P. Trácese MP perpendicular a OX; trácense también las tangentes a la circunferencia en A y B. Las tangentes trazadas cortan el lado final de θ (o su prolongación en sentido contrario a partir de O) en los puntos Q y R respectivamente.









En cada una de las figuras, los triángulos rectángulos OMP, OAQ y OBR son semejantes y, en consecuencia,

$$\text{sen}\,\theta = MP/OP = MP \qquad \cot\theta = OM/MP = BR/OB = BR$$
$$\cos\theta = OM/OP = OM \qquad \sec\theta = OP/OM = OQ/OA = OQ$$
$$\tan\theta = MP/OM = AQ/OA = AQ \qquad \csc\theta = OP/MP = OR/OB = OR.$$

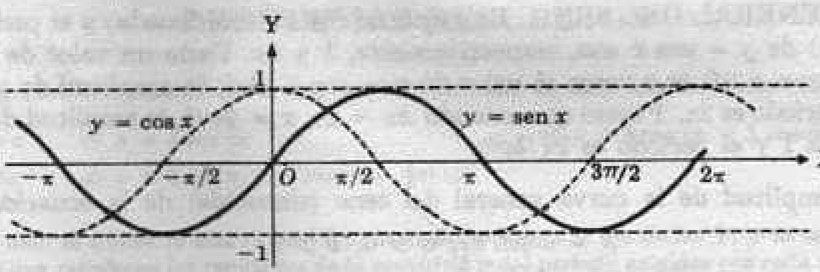
Los segmentos de recta MP, OM, AQ, etc., son segmentos dirigidos tales que la magnitud de cada función viene dada por la longitud del segmento respectivo, y el signo de la función corresponde al sentido indicado. Los segmentos dirigidos OQ y OR se consideran positivos cuando están determinados sobre el lado final del ángulo, y negativos cuando están determinados sobre la prolongación, en sentido contrario, del lado final.

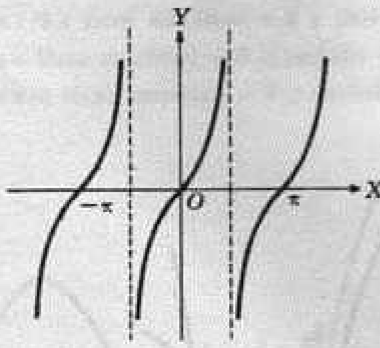
VARIACIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS. Sea P un punto que se mueve en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj, a partir de A, sobre la circunferencia unidad, de tal manera que $\theta = \angle XOP$ varía continuamente desde 0° hasta 360°. En las figuras anteriores se observa que ($C.$ = crece, $D.$ = decrece):

Cuando θ crece desde	0° hasta 90°	90° hasta 180°	180° hasta 270°	270° hasta 360°
sen θ	$C.$ desde 0 hasta 1	$D.$ desde 1 hasta 0	$D.$ desde 0 hasta -1	$C.$ desde -1 hasta 0
cos θ	$D.$ desde 1 hasta 0	$D.$ desde 0 hasta -1	$C.$ desde -1 hasta 0	$C.$ desde 0 hasta 1
tan θ	$C.$ desde 0 indefinidamente (0 hasta $+\infty$)	$C.$ desde grandes valores negativos hasta 0 ($-\infty$ hasta 0)	$C.$ desde 0 indefinidamente (0 hasta $+\infty$)	$C.$ desde grandes valores negativos hasta 0 ($-\infty$ hasta 0)
cot θ	$D.$ desde grandes valores positivos hasta 0 ($+\infty$ hasta 0)	$D.$ desde 0 indefinidamente (0 hasta $-\infty$)	$D.$ desde grandes valores positivos hasta 0 ($+\infty$ hasta 0)	$D.$ desde 0 indefinidamente (0 hasta $-\infty$)
sec θ	$C.$ desde 1 indefinidamente (1 hasta $+\infty$)	$C.$ desde grandes valores negativos hasta -1 ($-\infty$ hasta -1)	$D.$ desde -1 indefinidamente (-1 hasta $-\infty$)	$D.$ desde grandes valores positivos hasta 1 ($+\infty$ hasta 1)
csc θ	$D.$ desde grandes valores positivos hasta 1 ($+\infty$ hasta 1)	$C.$ desde 1 indefinidamente (1 hasta $+\infty$)	$C.$ desde grandes valores negativos hasta -1 ($-\infty$ hasta -1)	$D.$ desde -1 indefinidamente (-1 hasta $-\infty$)

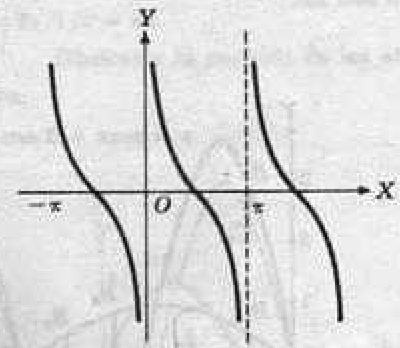
GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS. En la siguiente tabla los valores del ángulo x están expresados en radianes.

x	$y = \text{sen } x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$	$y = \sec x$	$y = \csc x$
0	0	1,00	0	$\pm\infty$	1,00	$\pm\infty$
$\pi/6$	0,50	0,87	0,58	1,73	1,15	2,00
$\pi/4$	0,71	0,71	1,00	1,00	1,41	1,41
$\pi/3$	0,87	0,50	1,73	0,58	2,00	1,15
$\pi/2$	1,00	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1,00
$2\pi/3$	0,87	$-0,50$	$-1,73$	$-0,58$	$-2,00$	1,15
$3\pi/4$	0,71	$-0,71$	$-1,00$	$-1,00$	$-1,41$	1,41
$5\pi/6$	0,50	$-0,87$	$-0,58$	$-1,73$	$-1,15$	2,00
π	0	$-1,00$	0	$\pm\infty$	$-1,00$	$\pm\infty$
$7\pi/6$	$-0,50$	$-0,87$	0,58	1,73	$-1,15$	$-2,00$
$5\pi/4$	$-0,71$	$-0,71$	1,00	1,00	$-1,41$	$-1,41$
$4\pi/3$	$-0,87$	$-0,50$	1,73	0,58	$-2,00$	$-1,15$
$3\pi/2$	$-1,00$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	$-1,00$
$5\pi/3$	$-0,87$	0,50	$-1,73$	$-0,58$	2,00	$-1,15$
$7\pi/4$	$-0,71$	0,71	$-1,00$	$-1,00$	1,41	$-1,41$
$11\pi/6$	$-0,50$	0,87	$-0,58$	$-1,73$	1,15	$-2,00$
2π	0	1,00	0	$\pm\infty$	1,00	$\pm\infty$

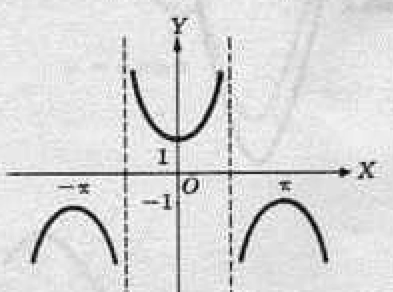




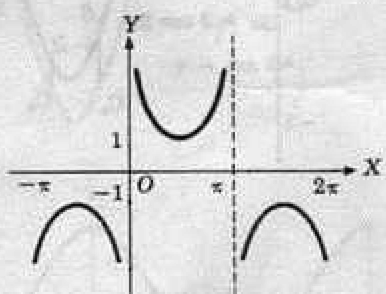
$y = \tan x$



$y = \cot x$



$y = \sec x$



$y = \csc x$

Nota 1. Puesto que sen $(1/2\pi + x) = \cos x$ la gráfica de $y = \cos x$ se puede obtener más fácilmente con sólo correr la gráfica de $y = \text{sen } x$ una distancia igual a $\pi/2$, hacia la izquierda.

Nota 2. Puesto que $\csc(1/2\pi + x) = \sec x$, la gráfica de $y = \csc x$ se puede obtener más fácilmente con sólo correr la gráfica de $y = \sec x$ una distância igual a $\pi/2$, hacia la derecha.

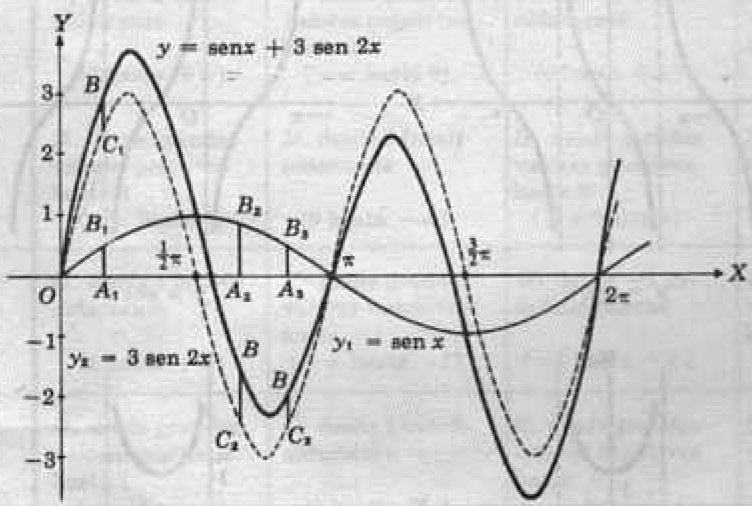
FUNCIONES PERIODICAS. Toda función de una variable x, $f(x)$, que repite sus valores en ciclos definidos recibe el nombre de función *periódica*. El menor conjunto de valores de x correspondiente a un ciclo completo de valores de la función se denomina período de la función. De la observación de las gráficas de las funciones trigonométricas se hace evidente que el período de las funciones seno, coseno, secante y cosecante es 2π, mientras que el de la tangente y el de la cotangente es π.

LA CURVA GENERAL DEL SENO. La *amplitud* (máxima ordenada) y el período (longitud de onda) de $y = \operatorname{sen} x$ son, respectivamente, 1 y 2π. Dado un valor de x, el valor de $y = a \operatorname{sen} x$, $a>0$, es a veces el valor de $y = \operatorname{sen} x$. Así, la amplitud de $y = a \operatorname{sen} x$ es a, y el período es 2π. Puesto que, cuando $bx = 2\pi$, $x = 2\pi/b$, la amplitud de $y = \operatorname{sen} bx$, $b > 0$, es 1 y el período es $2\pi/b$.

La amplitud de la curva general del seno (sinusoide) de la ecuación

$$y = a \operatorname{sen} bx, \; a > 0, \; b > 0,$$

es a, y el período es $2\pi/b$. Así, la amplitud de la gráfica $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ es 3, y el período es $2\pi/2 = \pi$. La figura (a) muestra, sobre los mismos ejes las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = 3 \operatorname{sen} 2x$.



(a)

COMPOSICIONES DE SINUSOIDES. Mediante la combinación de dos o más sinusoides se pueden obtener formas más complicadas de movimientos ondulatorios. El siguiente ejemplo ilustra el método de sumar las correspondientes ordenadas.

EJEMPLO. Construir la gráfica de $y = \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} 2x$. Véase la figura ($a$).

Primero se construyen en los mismos ejes las gráficas de $y_1 = \operatorname{sen} x$ y $y_2 = 3 \operatorname{sen} 2x$. Entonces, dado un valor $x = OA_1$, la correspondiente ordenada de A_1B de $y = \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} 2x$ es la suma *algebraica* de las ordenadas A_1B_1 de $y_1 = \operatorname{sen} x$ y A_1C_1 de $y_2 = 3 \operatorname{sen} 2x$. También, $A_2B = A_2B_2 + A_2C_2$, $A_3B = A_3B_3 + A_3C_3$, etc.

6
73
83

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Delinear la gráfica correspondiente a una longitud de onda de cada una de las curvas siguientes.

$a)$ $y = 4 \operatorname{sen} x$ $c)$ $y = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ $e)$ $y = 3 \cos \frac{1}{2}x = 3 \operatorname{sen}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\pi)$

$b)$ $y = \operatorname{sen} 3x$ $d)$ $y = 2 \cos x = 2 \operatorname{sen}(x + \frac{1}{2}\pi)$

En cada caso se utiliza la misma curva y, después, se coloca el eje de las Y, y se escogen en los ejes las unidades que satisfacen los requisitos de la amplitud y del período exigidos por cada una de las curvas.

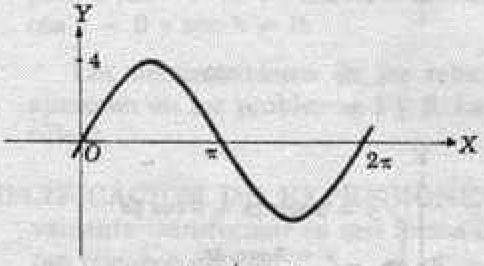
$a)$ $y = 4 \operatorname{sen} x$ tiene amplitud $= 4$ y período $= 2\pi$.

$b)$ $y = \operatorname{sen} 3x$ tiene amplitud $= 1$ y período $= 2\pi/3$.

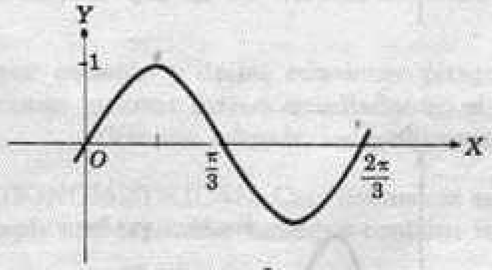
$c)$ $y = 3 \operatorname{sen} 1/2\, x$ tiene amplitud $= 3$ y período $= 2\pi/1/2 = 4\pi$.

$d)$ $y = 2 \cos x$ tiene amplitud $= 2$ y período $= 2\pi$. Obsérvese la posición de las abscisas.

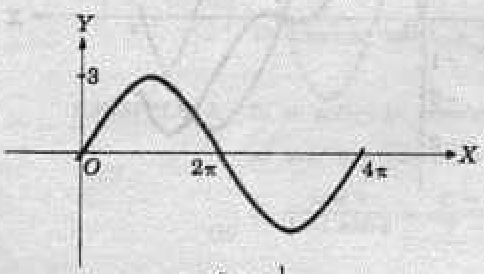
$e)$ $y = 3 \cos x/2$ tiene amplitud $= 3$ y período $= 4\pi$.



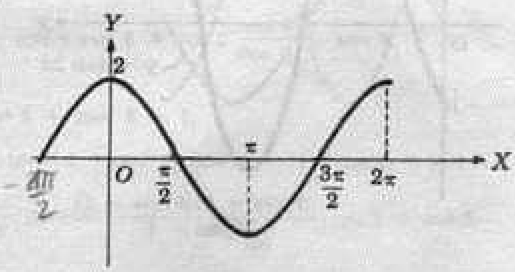
$y = 4 \operatorname{sen} x$



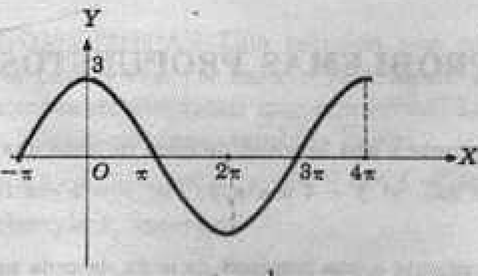
$y = \operatorname{sen} 3x$



$y = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$



$y = 2 \cos x$

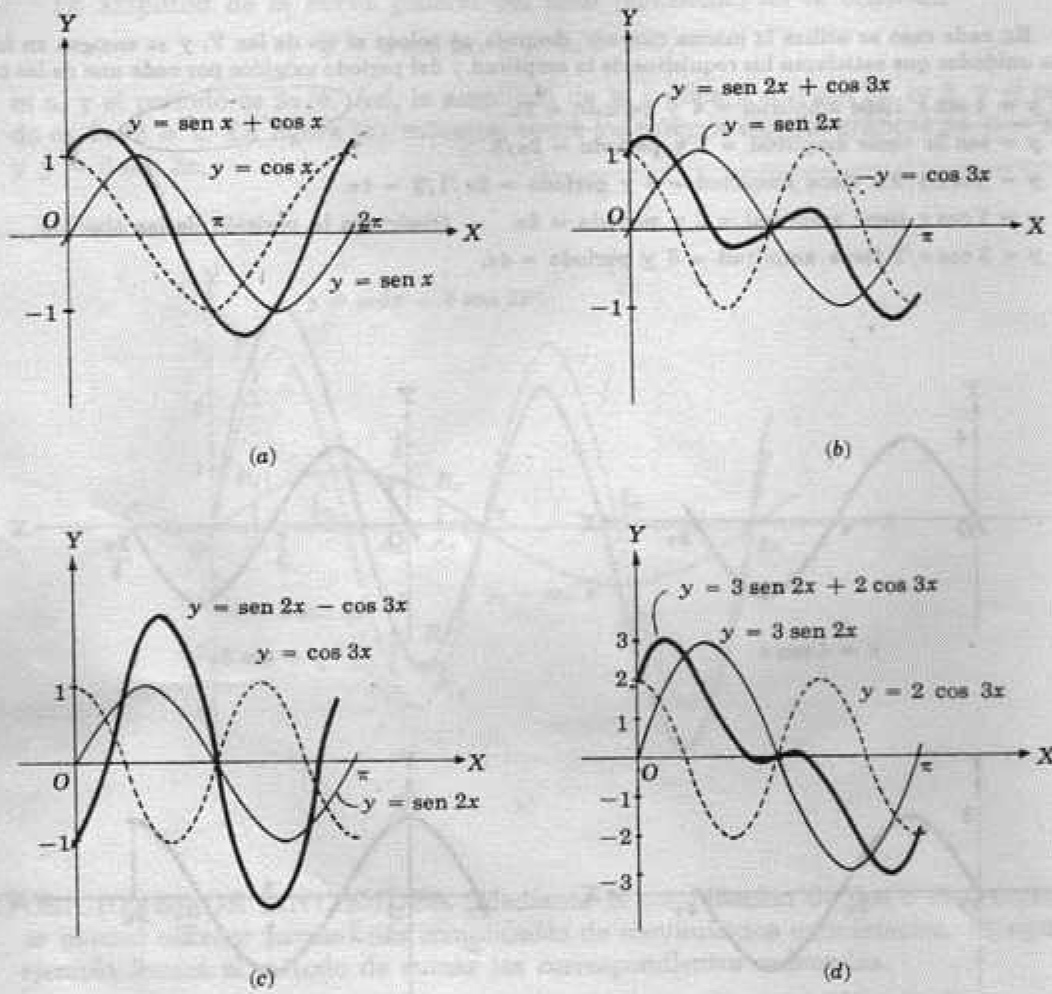


$y = 3 \cos \frac{1}{2}x$

2. Construir la gráfica de cada una de las curvas siguientes.

$a)$ $y = \text{sen}\, x + \cos x$ $\quad$ $c)$ $y = \text{sen}\, 2x - \cos 3x$

$b)$ $y = \text{sen}\, 2x + \cos 3x$ $\quad$ $d)$ $y = 3\,\text{sen}\, 2x + 2\cos 3x$



PROBLEMAS PROPUESTOS

3. Delinear la gráfica correspondiente a una longitud de onda de cada una de las siguientes curvas:

$a)$ $y = 3\,\text{sen}\, x$, $\quad b)$ $y = \text{sen}\, 2x$, $\quad c)$ $y = 4\,\text{sen}\, x/2$, $\quad d)$ $y = 4\cos x$, $\quad e)$ $y = 2\cos x/3$.

4. Construir la gráfica correspondiente a una longitud de onda de cada una de las siguientes curvas:

$a)$ $y = \text{sen}\, x + 2\cos x$ $\quad$ $d)$ $y = \text{sen}\, 2x + \text{sen}\, 3x$

$b)$ $y = \text{sen}\, 3x + \cos 2x$ $\quad$ $e)$ $y = \text{sen}\, 3x - \cos 2x$

$c)$ $y = \text{sen}\, x + \text{sen}\, 2x$ $\quad$ $f)$ $y = 2\,\text{sen}\, 3x + 3\cos 2x$

CAPITULO 10

Relaciones fundamentales e identidades

RELACIONES FUNDAMENTALES.

Relaciones inversas	Relaciones por cociente	Relaciones pitagóricas
$\csc\theta = 1/\operatorname{sen}\theta$	$\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$	$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$
$\sec\theta = 1/\cos\theta$	$\cot\theta = \cos\theta/\operatorname{sen}\theta$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\cot\theta = 1/\tan\theta$		$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

Estas relaciones son válidas para todos los valores de θ en los que las funciones contenidas en ellas están definidas.

Así, $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ es válida para todo valor de θ, mientras que $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$ es válida para todos los valores de θ en los que θ está definida; es decir, para todo $\theta \neq n\cdot 90$ donde n es impar. Obsérvese que en los valores excluidos de θ, $\cos\theta = 0$ y $\operatorname{sen}\theta \neq 0$.

Las demostraciones de las relaciones por cociente y de las relaciones pitagóricas aparecen en los problemas 1 y 2. Las relaciones inversas fueron estudiadas en el capítulo 2. (Véanse, además, los problemas 3-6.)

SIMPLIFICACION DE EXPRESIONES TRIGONOMETRICAS. Con frecuencia es conveniente transformar en una forma más simple una expresión dada que contiene funciones trigonométricas.

EJEMPLO 1. *a*) Usando $\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, $\cos\theta\csc\theta = \cos\theta\,\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta$.

b) Usando $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, $\cos\theta\tan\theta = \cos\theta\,\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \operatorname{sen}\theta$.

EJEMPLO 2. Si se aplica la relación $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$,

a) $\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta = (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)\operatorname{sen}\theta = (1)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$.

b) $\dfrac{\cos^2\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{(1 - \operatorname{sen}\theta)(1 + \operatorname{sen}\theta)}{1 - \operatorname{sen}\theta} = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

Nota. La relación $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$ puede expresarse como $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ y como $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$. Ambas formas son igualmente útiles.

(Véanse los problemas 7-9.)

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS. Una relación que contiene funciones trigonométricas y que es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones recibe el nombre de identidad trigonométrica. Las ocho relaciones fundamentales son identidades trigonométricas; también lo son

$$\cos\theta\csc\theta = \cot\theta \quad \text{y} \quad \cos\theta\tan\theta = \operatorname{sen}\theta$$

que aparecen en el ejemplo 1, anterior.

Para verificar una identidad trigonométrica se transforma uno de los miembros de la igualdad (cualquiera de los dos) en el otro. En general, se comienza por el miembro más complicado.

Para tener éxito en la verificación de identidades se requiere:
a) Completa familiaridad con las relaciones fundamentales.
b) Completa familiaridad con los procedimientos de factorización, suma de fracciones, etc.
c) Práctica.

(Véanse los problemas 10-18.)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar las relaciones: $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$,
$\cot\theta = \cos\theta/\operatorname{sen}\theta$.

Para todo ángulo θ, $\operatorname{sen}\theta = y/r$, $\cos\theta = x/r$, $\tan\theta = y/x$, y $\cot\theta = x/y$, donde $P(x, y)$ es un punto cualquiera del lado final de θ situado a una distancia r del origen.

Entonces $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y/r}{x/r} = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$ y $\cot\theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{x/r}{y/r} = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

(También, $\cot\theta = 1/\tan\theta = \cos\theta/\operatorname{sen}\theta$.)

2. Demostrar las relaciones pitagóricas:

a) $\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1,}$ b) $\boxed{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta,}$ c) $\boxed{1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta.}$

Para $P(x, y)$, tal como se definió en el problema 1, se tiene $A)\ x^2 + y^2 = r^2$.

a) Se divide $A)$ por r^2, $(x/r)^2 + (y/r)^2 = 1$ y $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

b) Se divide $A)$ por x^2, $1 + (y/x)^2 = (r/x)^2$ y $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$.

También se divide $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ por $\cos^2\theta$, $(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta})^2 + 1 = (\dfrac{1}{\cos\theta})^2$ ó $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$.

c) Se divide $A)$ por y^2, $(x/y)^2 + 1 = (r/y)^2$ y $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$.

También se divide $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ por $\operatorname{sen}^2\theta$, $1 + (\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta})^2 = (\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta})^2$ ó $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.

3. Expresar cada una de las demás funciones de θ en términos de $\operatorname{sen}\theta$.

$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta \quad y \quad \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta},$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta},$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}}, \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Obsérvese que $\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$. Al escribir $\cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$ se restringe el ángulo θ a los cuadrantes (primero y cuarto) en los que el coseno es positivo.

4. Expresar cada una de las demás funciones de θ en términos de $\tan\theta$.

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \quad y \quad \sec\theta = \pm\sqrt{1 + \tan^2\theta}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \tan^2\theta}},$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \quad y \quad \operatorname{sen}\theta = \tan\theta\cos\theta = \tan\theta\,\frac{1}{\pm\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{\tan\theta}{\pm\sqrt{1 + \tan^2\theta}},$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\pm\sqrt{1 + \tan^2\theta}}{\tan\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}.$$

5. Utilizar las relaciones fundamentales para encontrar los valores de las funciones de θ, dado $\operatorname{sen}\theta = 3/5$.

A partir de $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$, $\cos\theta = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \pm\sqrt{1-(3/5)^2} = \pm\sqrt{16/25} = \pm 4/5$.

Ahora bien, $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, son ambos positivos cuando θ pertenece al primer cuadrante, mientras que $\operatorname{sen}\theta = +$ y $\cos\theta = -$, cuando θ pertenece al segundo cuadrante. Entonces,

primer cuadrante		segundo cuadrante	
$\operatorname{sen}\theta = 3/5$	$\cot\theta = 4/3$	$\operatorname{sen}\theta = 3/5$	$\cot\theta = -4/3$
$\cos\theta = 4/5$	$\sec\theta = 5/4$	$\cos\theta = -4/5$	$\sec\theta = -5/4$
$\tan\theta = \dfrac{3/5}{4/5} = 3/4$	$\csc\theta = 5/3$	$\tan\theta = -3/4$	$\csc\theta = 5/3$

6. Utilizar las relaciones fundamentales para encontrar los valores de las funciones de θ, dada $\tan\theta = -5/12$.

Como $\tan\theta = -$, θ pertenecerá al segundo o al cuarto cuadrante.

segundo cuadrante	cuarto cuadrante
$\tan\theta = -5/12$	$\tan\theta = -5/12$
$\cot\theta = 1/\tan\theta = -12/5$	$\cot\theta = -12/5$
$\sec\theta = -\sqrt{1+\tan^2\theta} = -13/12$	$\sec\theta = 13/12$
$\cos\theta = 1/\sec\theta = -12/13$	$\cos\theta = 12/13$
$\csc\theta = \sqrt{1+\cot^2\theta} = 13/5$	$\csc\theta = -13/5$
$\operatorname{sen}\theta = 1/\csc\theta = 5/13$	$\operatorname{sen}\theta = -5/13$

7. Efectuar las operaciones indicadas.

a) $(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$

b) $(\operatorname{sen} A + \cos A)^2 = \operatorname{sen}^2 A + 2\operatorname{sen} A\cos A + \cos^2 A$

c) $(\operatorname{sen} x + \cos y)(\operatorname{sen} y - \cos x) = \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen} y\cos y - \cos x\cos y$

d) $(\tan^2 A - \cot A)^2 = \tan^4 A - 2\tan^2 A\cot A + \cot^2 A$

e) $1 + \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

f) $1 - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{2}{\cos^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2}{\cos^2\theta}$

8. Descomponer en factores.

a) $\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)$

b) $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta(1+\cos^2\theta)$

c) $\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta\sec\theta - 6\sec^2\theta = (\operatorname{sen}\theta + 3\sec\theta)(\operatorname{sen}\theta - 2\sec\theta)$

d) $\operatorname{sen}^3\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos^3\theta + \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta = \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta(\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta + 1)$

e) $\operatorname{sen}^4\theta - \cos^4\theta = (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta) = (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$

9. Simplificar cada una de las siguientes expresiones.

a) $\sec\theta - \sec\theta\operatorname{sen}^2\theta = \sec\theta(1-\operatorname{sen}^2\theta) = \sec\theta\cos^2\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}\cos^2\theta = \cos\theta$

b) $\operatorname{sen}\theta\sec\theta\cot\theta = \operatorname{sen}\theta\dfrac{1}{\cos\theta}\,\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta} = 1$

c) $\operatorname{sen}^2\theta(1+\cot^2\theta) = \operatorname{sen}^2\theta\csc^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = 1$

d) $\operatorname{sen}^2\theta \sec^2\theta - \sec^2\theta = (\operatorname{sen}^2\theta - 1)\sec^2\theta = -\cos^2\theta \sec^2\theta = -\cos^2\theta \dfrac{1}{\cos^2\theta} = -1$

e) $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)^2 = \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

$$- 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = 2$$

f) $\tan^2\theta\cos^2\theta + \cot^2\theta\operatorname{sen}^2\theta = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}\cos^2\theta + \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\operatorname{sen}^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

g) $\tan\theta + \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)}$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

Verificar las siguientes identidades.

10. $\sec^2\theta\csc^2\theta = \sec^2\theta + \csc^2\theta$

$$\sec^2\theta + \csc^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\quad\cos^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\;\frac{1}{\cos^2\theta} = \csc^2\theta\sec^2\theta$$

11. $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

$\tan^4\theta + \tan^2\theta = \tan^2\theta\,(\tan^2\theta + 1) = \boxed{\tan^2\theta\sec^2\theta} = (\sec^2\theta - 1)\sec^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$ ó

$\sec^4\theta - \sec^2\theta = \sec^2\theta\,(\sec^2\theta - 1) = \boxed{\sec^2\theta\tan^2\theta} = (1+\tan^2\theta)\tan^2\theta = \tan^2\theta + \tan^4\theta$

12. $2\csc x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} + \dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} + \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + (1+\cos x)^2}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + 1 + 2\cos x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)}$$

$$= \frac{2 + 2\cos x}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} = \frac{2(1+\cos x)}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} = \frac{2}{\operatorname{sen} x} = 2\csc x$$

13. $\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$

$$\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)} = \frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)} = \frac{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

14. $\dfrac{\sec A - \csc A}{\sec A + \csc A} = \dfrac{\tan A - 1}{\tan A + 1}$

$$\frac{\sec A - \csc A}{\sec A + \csc A} = \frac{\dfrac{1}{\cos A} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} A}}{\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} A}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A} - 1}{\dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A} + 1} = \frac{\tan A - 1}{\tan A + 1}$$

15. $\dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \dfrac{\sec x}{1+\cos x}$

$$\frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x\cos x}{\cos x\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\operatorname{sen} x\,(1-\cos x)}{\cos x\operatorname{sen}^3 x}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\cos x\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1-\cos x}{\cos x\,(1-\cos^2 x)} = \frac{1}{\cos x\,(1+\cos x)} = \frac{\sec x}{1+\cos x}$$

16. $\dfrac{\cos A \cot A - \operatorname{sen} A \tan A}{\csc A - \sec A} = 1 + \operatorname{sen} A \cos A$

$$\frac{\cos A \cot A - \operatorname{sen} A \tan A}{\csc A - \sec A} = \frac{\cos A \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A} - \operatorname{sen} A \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} A} - \dfrac{1}{\cos A}} = \frac{\cos^3 A - \operatorname{sen}^3 A}{\cos A - \operatorname{sen} A}$$

$$= \frac{(\cos A - \operatorname{sen} A)(\cos^2 A + \cos A \operatorname{sen} A + \operatorname{sen}^2 A)}{\cos A - \operatorname{sen} A} = \cos^2 A + \cos A \operatorname{sen} A + \operatorname{sen}^2 A = 1 + \cos A \operatorname{sen} A$$

17. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 1}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta}$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta} = \frac{(\operatorname{sen}\theta + 1)(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1)}{\cos\theta(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1)} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta - 1}{\cos\theta(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1)}$$

$$= \frac{-\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos\theta}{\cos\theta(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1)} = \frac{\cos\theta(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 1)}{\cos\theta(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1)} = \frac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 1}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1}$$

18. $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$

$$\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{\tan\theta + \sec\theta + \tan^2\theta - \sec^2\theta}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{(\tan\theta + \sec\theta)(1 + \tan\theta - \sec\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \tan\theta + \sec\theta$$

ó

$$\tan\theta + \sec\theta = (\tan\theta + \sec\theta)\,\frac{\tan\theta - \sec\theta + 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{\tan^2\theta - \sec^2\theta + \tan\theta + \sec\theta}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{-1 + \tan\theta + \sec\theta}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

Nota. Cuando se expresan en términos de sen θ y cos θ, estas identidades se convierten en las identidades del problema 17.

PROBLEMAS PROPUESTOS

19. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de θ, dado sen $\theta = 2/3$.

Resp. Cuadrante I: $2/3$, $\sqrt{5}/3$, $2/\sqrt{5}$, $\sqrt{5}/2$, $3/\sqrt{5}$, $3/2$
Cuadrante II: $2/3$, $-\sqrt{5}/3$, $-2/\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}/2$, $-3/\sqrt{5}$, $3/2$

20. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de θ, dado $\cos\theta = -5/6$.

Resp. Cuadrante II: $\sqrt{11}/6$, $-5/6$, $-\sqrt{11}/5$, $-5/\sqrt{11}$, $-6/5$, $6/\sqrt{11}$
Cuadrante III: $-\sqrt{11}/6$, $-5/6$, $\sqrt{11}/5$, $5/\sqrt{11}$, $-6/5$, $-6/\sqrt{11}$

21. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de θ, dada $\tan\theta = 5/4$.

Resp. Cuadrante I: $5/\sqrt{41}$, $4/\sqrt{41}$, $5/4$, $4/5$, $\sqrt{41}/4$, $\sqrt{41}/5$
Cuadrante III: $-5/\sqrt{41}$, $-4/\sqrt{41}$, $5/4$, $4/5$, $-\sqrt{41}/4$, $-\sqrt{41}/5$

22. Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de θ, dada $\cot\theta = -\sqrt{3}$.

Resp. Cuadrante II: $1/2$, $-\sqrt{3}/2$, $-1/\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $-2/\sqrt{3}$, 2
Cuadrante IV: $-1/2$, $\sqrt{3}/2$, $-1/\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $2/\sqrt{3}$, -2

23. Encontrar el valor de $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - \tan\theta}{\sec\theta + \csc\theta - \cot\theta}$ cuando $\tan\theta = -4/3$.

Resp. Cuadrante II: $23/5$; cuadrante IV: $34/35$

Verificar las siguientes identidades.

24. $\operatorname{sen}\theta \sec\theta = \tan\theta$

25. $(1 - \operatorname{sen}^2 A)(1 + \tan^2 A) = 1$

26. $(1 - \cos\theta)(1 + \sec\theta)\cot\theta = \operatorname{sen}\theta$

27. $\csc^2 x\,(1 - \cos^2 x) = 1$

28. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sec\theta} = 1$

29. $\dfrac{1 - 2\cos^2 A}{\operatorname{sen} A \cos A} = \tan A - \cot A$

30. $\tan^2 x \csc^2 x \cot^2 x \operatorname{sen}^2 x = 1$

31. $\operatorname{sen} A \cos A\,(\tan A + \cot A) = 1$

32. $1 - \dfrac{\cos^2\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \operatorname{sen}\theta$

33. $\dfrac{1}{\sec\theta + \tan\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

34. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} A} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} A} = 2\sec^2 A$

35. $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1} = (\cot x - \csc x)^2$

36. $\tan\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \sec\theta$

37. $\tan\theta - \csc\theta \sec\theta\,(1 - 2\cos^2\theta) = \cot\theta$

38. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = \dfrac{\sec\theta}{\sec\theta + \csc\theta}$

39. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \tan x}{\cot x + \csc x} = \operatorname{sen} x \tan x$

40. $\dfrac{\sec x + \csc x}{\tan x + \cot x} = \operatorname{sen} x + \cos x$

41. $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = 1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta$

42. $\cot\theta + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta} = \csc\theta$

43. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

44. $(\tan x + \tan y)(1 - \cot x \cot y) + (\cot x + \cot y)(1 - \tan x \tan y) = 0$

45. $(x \operatorname{sen}\theta - y\cos\theta)^2 + (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)^2 = x^2 + y^2$

46. $(2r \operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2 + r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)^2 = r^2$

47. $(r \operatorname{sen}\theta\cos\phi)^2 + (r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)^2 + (r\cos\theta)^2 = r^2$

CAPITULO 11

Funciones trigonométricas de dos ángulos

FORMULAS PARA LA SUMA.

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Las demostraciones de estas fórmulas se encuentran en los problemas 1-3.

FORMULAS PARA LA DIFERENCIA.

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Las demostraciones se encuentran en el problema 4.

FORMULAS PARA EL ANGULO DUPLO.

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Las demostraciones se encuentran en el problema 10.

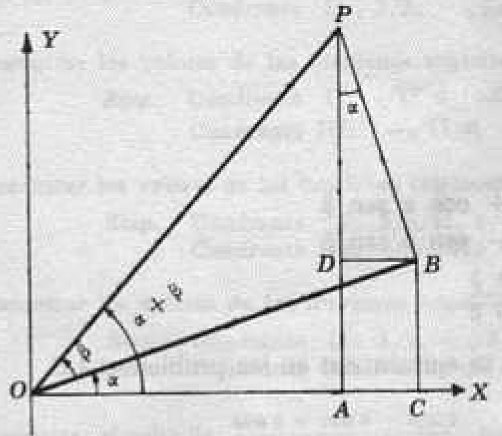
FORMULAS PARA EL ANGULO MITAD.

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$\tan\tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

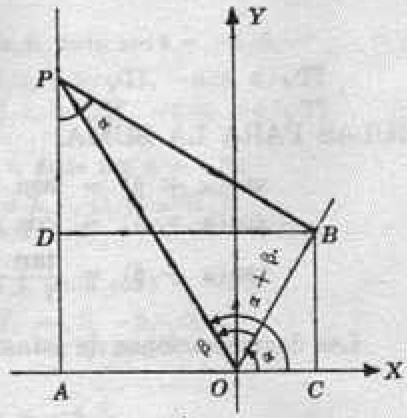
Las demostraciones se encuentran en el problema 11.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que 1) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$
y 2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$ cuando α y β son ángulos agudos positivos.



(a)



(b)

Sean α y β dos ángulos positivos agudos tales que $\alpha + \beta < 90°$ (Fig. a) y $\alpha + \beta > 90°$ (Fig. b).

Para construir estas figuras colóquese el ángulo α en posición normal y, después, colóquese el ángulo β de tal manera que su vértice caiga en O y que su lado inicial coincida con el lado final del ángulo α. Sea P un punto cualquiera del lado final del ángulo $(\alpha + \beta)$. Trácense los segmentos PA, PB, BC y BD de tal manera que PA sea perpendicular a OX y BD perpendicular a AP.

Entonces, $\angle APB = \alpha$ porque sus lados correspondientes (OA y AP, OB y BP) son perpendiculares. De donde,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{AP}{OP} = \frac{AD + DP}{OP} = \frac{CB + DP}{OP} = \frac{CB}{OP} + \frac{DP}{OP} = \frac{CB}{OB}\cdot\frac{OB}{OP} + \frac{DP}{BP}\cdot\frac{BP}{OP}$$

$$= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

y
$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{OA}{OP} = \frac{OC - AC}{OP} = \frac{OC - DB}{OP} = \frac{OC}{OP} - \frac{DB}{OP} = \frac{OC}{OB}\cdot\frac{OB}{OP} - \frac{DB}{BP}\cdot\frac{BP}{OP}$$

$$= \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta.$$

2. Demostrar que las fórmulas 1) y 2) del problema 1 son válidas cuando α y β son ángulos cualesquiera.

Primero se comprueban las fórmulas para el caso $\alpha = 0°$, $\beta = 0°$. Puesto que

$$\operatorname{sen}(0° + 0°) = \operatorname{sen} 0° \cos 0° + \cos 0° \operatorname{sen} 0° = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0 = \operatorname{sen} 0°$$

y
$$\cos(0° + 0°) = \cos 0° \cos 0° - \operatorname{sen} 0° \operatorname{sen} 0° = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1 = \cos 0°,$$

las fórmulas son válidas en este caso.

Ahora se demostrará que, si 1) y 2) son válidas para dos ángulos cualesquiera α y β, son válidas también cuando, por ejemplo, α se aumenta en 90°. Sean α y β dos ángulos cualesquiera para los cuales son válidas las fórmulas 1) y 2), y considérense las fórmulas

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta + 90°) = \operatorname{sen}(\alpha + 90°) \cos\beta + \cos(\alpha + 90°) \operatorname{sen}\beta$

y b) $\cos(\alpha + \beta + 90°) = \cos(\alpha + 90°) \cos\beta - \operatorname{sen}(\alpha + 90°) \operatorname{sen}\beta$.

Conforme a las fórmulas de reducción estudiadas en el capítulo 8,

$\operatorname{sen}(\theta + 90°) = \cos\theta$, $\cos(\theta + 90°) = -\operatorname{sen}\theta$, se sigue que

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta + 90°) = \cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta + 90°) = -\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$. Entonces, ($a$ y b) se reducen a

a') $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta + (-\operatorname{sen}\alpha) \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

y $\quad b')\quad -\text{sen}(\alpha+\beta) = -\text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta\quad$ ó

$$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

que, conforme a lo que se ha supuesto, son relaciones válidas. Así, *a*) y *b*) son relaciones válidas.

Estos mismos argumentos pueden emplearse para demostrar que, si 1) y 2) son válidas para dos ángulos α y β, son válidas también cuando β se aumenta en 90°. Con esto, las fórmulas son válidas cuando tanto α como β se aumentan en 90°. Por otra parte, cualquier ángulo positivo puede expresarse como un múltiplo de 90° más θ, donde θ es 0° o es un ángulo agudo. De este modo, mediante un número finito de repeticiones de los mismos argumentos, se prueba que las fórmulas son válidas para dos ángulos positivos cualesquiera dados.

Se deja al lector la demostración correspondiente al caso en que, en vez de aumentar el ángulo, éste disminuye en 90°, con lo que podrá probar que, cuando un ángulo es positivo y el otro negativo o cuando ambos son negativos, continúan siendo válidas las fórmulas 1) y 2).

3. Demostrar: $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

4. Demostrar las fórmulas para la diferencia.

$$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\,[\,\alpha+(-\beta)\,] = \text{sen}\,\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\,\text{sen}(-\beta)$$
$$= \text{sen}\,\alpha\,(\cos\beta)+\cos\alpha\,(-\text{sen}\,\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta-\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\,[\,\alpha+(-\beta)\,] = \cos\alpha\cos(-\beta)-\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}(-\beta)$$
$$= \cos\alpha\,(\cos\beta)-\text{sen}\,\alpha\,(-\text{sen}\,\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \tan[\,\alpha+(-\beta)\,] = \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$
$$= \frac{\tan\alpha+(-\tan\beta)}{1-\tan\alpha\,(-\tan\beta)} = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

5. Encontrar los valores del seno, del coseno y de la tangente de 15°, mediante *a*) 15° = 45° − 30° y *b*) 15° = 60° − 45°.

a) $\text{sen}\,15° = \text{sen}(45°-30°) = \text{sen}\,45°\cos 30°-\cos 45°\,\text{sen}\,30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45°\cos 30°+\text{sen}\,45°\,\text{sen}\,30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$$\tan 15° = \tan(45°-30°) = \frac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°} = \frac{1-1/\sqrt{3}}{1+1(1/\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$$

b) $\text{sen}\,15° = \text{sen}(60°-45°) = \text{sen}\,60°\cos 45°-\cos 60°\,\text{sen}\,45° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

$\cos 15° = \cos(60°-45°) = \cos 60°\cos 45°+\text{sen}\,60°\,\text{sen}\,45° = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

$$\tan 15° = \tan(60°-45°) = \frac{\tan 60°-\tan 45°}{1+\tan 60°\tan 45°} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}$$

6. Demostrar: *a*) $\operatorname{sen}(45^\circ + \theta) - \operatorname{sen}(45^\circ - \theta) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$, *b*) $\operatorname{sen}(30^\circ + \theta) + \cos(60^\circ + \theta) = \cos\theta$.

a) $\operatorname{sen}(45^\circ + \theta) - \operatorname{sen}(45^\circ - \theta) = (\operatorname{sen}45^\circ\cos\theta + \cos 45^\circ\operatorname{sen}\theta) - (\operatorname{sen}45^\circ\cos\theta - \cos 45^\circ\operatorname{sen}\theta)$

$$= 2\cos 45^\circ \operatorname{sen}\theta = 2\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$$

b) $\operatorname{sen}(30^\circ + \theta) + \cos(60^\circ + \theta) = (\operatorname{sen}30^\circ\cos\theta + \cos 30^\circ\operatorname{sen}\theta) + (\cos 60^\circ\cos\theta - \operatorname{sen}60^\circ\operatorname{sen}\theta)$

$$= (\tfrac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta) + (\tfrac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta) = \cos\theta$$

7. Simplificar: *a*) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$, *b*) $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$, *c*) $\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}$,
d) $(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)^2$.

a) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta) + (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)$
$= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

b) $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) - (\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)$
$= -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

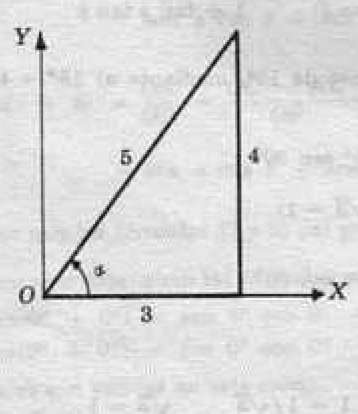
c) $\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha} = \tan[(\alpha+\beta)-\alpha] = \tan\beta$

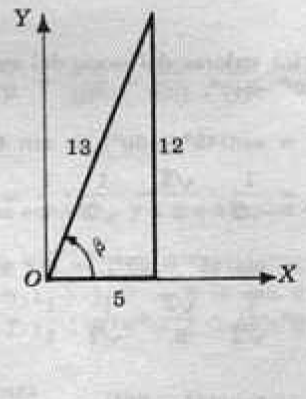
d) $(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)^2 = \operatorname{sen}^2(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) = 1$

8. Encontrar $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ y determinar los cuadrantes a que pertenecen $(\alpha+\beta)$ y $(\alpha-\beta)$, dados

a) $\operatorname{sen}\alpha = 4/5$, $\cos\beta = 5/13$; α y β en el cuadrante I.
b) $\operatorname{sen}\alpha = 2/3$, $\cos\beta = 3/4$; α en el cuadrante II, β en el cuadrante IV.

a) $\cos\alpha = 3/5$ y $\operatorname{sen}\beta = 12/13$.





$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} + \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} = \frac{56}{65}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} - \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} = -\frac{33}{65}$$

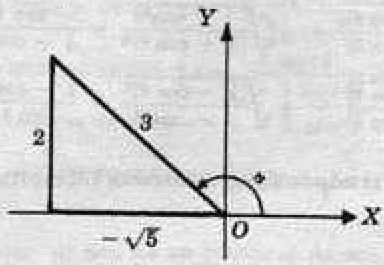
$(\alpha+\beta)$ en el cuadrante II

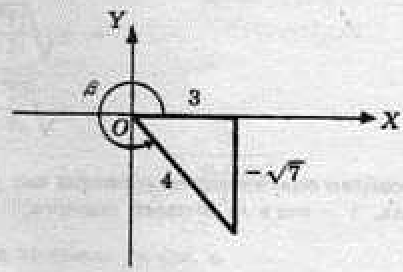
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13} - \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} = -\frac{16}{65}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13} + \frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} = \frac{63}{65}$$

$(\alpha-\beta)$ en el cuadrante IV

b) $\cos\alpha = -\sqrt{5}/3$ y $\operatorname{sen}\beta = -\sqrt{7}/4$.





$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{6+\sqrt{35}}{12}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{-3\sqrt{5}+2\sqrt{7}}{12}$$ ($\alpha+\beta$) en el cuadrante II

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{6-\sqrt{35}}{12}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{-3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12}$$ ($\alpha-\beta$) en el cuadrante II

9. Demostrar: *a*) $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$, *b*) $\cot(\alpha-\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$.

a) $$\cot(\alpha+\beta) = \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} = \frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta} = \frac{1-\dfrac{1}{\cot\alpha\cot\beta}}{\dfrac{1}{\cot\alpha}+\dfrac{1}{\cot\beta}} = \frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$$

b) $$\cot(\alpha-\beta) = \cot[\alpha+(-\beta)] = \frac{\cot\alpha\cot(-\beta)-1}{\cot(-\beta)+\cot\alpha} = \frac{-\cot\alpha\cot\beta-1}{-\cot\beta+\cot\alpha} = \frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

10. Demostrar las fórmulas para el ángulo duplo.

En $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ y

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ tómese $\beta = \alpha$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}2\alpha = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha,$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = (1-\operatorname{sen}^2\alpha) - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \\ &= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1,\end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

11. Demostrar las fórmulas para el ángulo mitad.

En $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$, tómese $\alpha = \frac{1}{2}\theta$. Entonces,

$$\cos\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\theta,\quad \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}\theta = \frac{1-\cos\theta}{2}\quad \text{y}\quad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}.$$

En $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, tómese $\alpha = \frac{1}{2}\theta$. Entonces,

$$\cos\theta = 2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta - 1,\quad \cos^2\tfrac{1}{2}\theta = \frac{1+\cos\theta}{2}\quad \text{y}\quad \cos\tfrac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}.$$

Por último, $\tan\frac{1}{2}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

$$= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

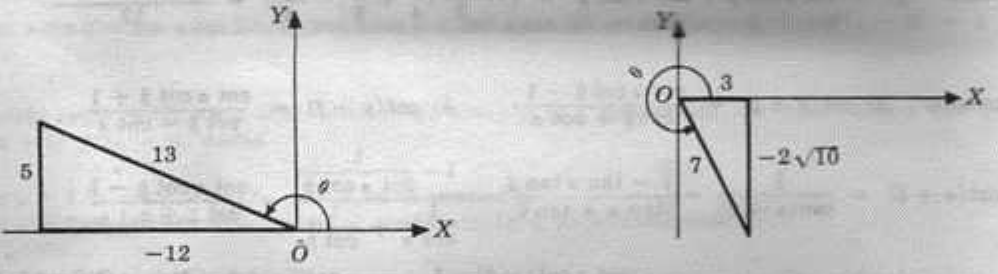
No se necesitan aquí los signos $\pm$ porque $\tan\frac{1}{2}\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ tienen el mismo signo (problema 15, capítulo 8) y, además, $1-\cos\theta$ es siempre positivo.

12. Utilizar las fórmulas para el ángulo mitad para encontrar los valores exactos de *a*) sen 15°, *b*) sen $292\frac{1}{2}°$.

a) $\operatorname{sen} 15° = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{3}/2}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

b) $\operatorname{sen} 292\frac{1}{2}° = -\sqrt{\dfrac{1-\cos 585°}{2}} = -\sqrt{\dfrac{1-\cos 225°}{2}} = -\sqrt{\dfrac{1+1/\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

13. Encontrar los valores del seno, del coseno y de la tangente de $\frac{1}{2}\theta$, dados *a*) $\operatorname{sen}\theta = 5/13$, θ en el cuadrante II y *b*) $\cos\theta = 3/7$, θ en el cuadrante IV.



(*a*) (*b*)

a) $\operatorname{sen}\theta = 5/13$, $\cos\theta = -12/13$ y $\frac{1}{2}\theta$ en el cuadrante I.

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+12/13}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-12/13}{2}} = \sqrt{\frac{1}{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\theta = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1+12/13}{5/13} = 5$$

b) $\operatorname{sen}\theta = -2\sqrt{10}/7$, $\cos\theta = 3/7$ y $\frac{1}{2}\theta$ en el cuadrante II.

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-3/7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+3/7}{2}} = -\frac{\sqrt{35}}{7}, \quad \tan\tfrac{1}{2}\theta = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1-3/7}{-2\sqrt{10}/7} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

14. Demostrar que: *a*) $\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ *d*) $\cos 6\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2 3\theta$

b) $\operatorname{sen} A = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2A}{2}}$ *e*) $\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)$, $\cos^2\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$.

c) $\tan 4x = \dfrac{\operatorname{sen} 8x}{1+\cos 8x}$

a) Se obtiene de $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ cuando $\alpha = \frac{1}{2}\theta$.

b) Se obtiene de $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ cuando $\theta = 2A$.

c) Se obtiene de $\tan \frac{1}{2}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$ cuando $\theta = 8x$.

d) Se obtiene de $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$ cuando $\alpha = 3\theta$.

e) Se obtiene cuando $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ y $\cos\frac{1}{2}\theta = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$.

15. Expresar *a*) $\operatorname{sen} 3\alpha$ en términos de $\operatorname{sen}\alpha$, *b*) $\cos 4\alpha$ en términos de $\cos\alpha$.

a)
$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 3\alpha &= \operatorname{sen}(2\alpha+\alpha) = \operatorname{sen} 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha \operatorname{sen}\alpha\\ &= (2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)\cos\alpha + (1-2\operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha + (1-2\operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha\\ &= 2\operatorname{sen}\alpha(1-\operatorname{sen}^2\alpha) + (1-2\operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha.\end{aligned}$$

b) $\cos 4\alpha = \cos 2(2\alpha) = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(2\cos^2\alpha - 1)^2 - 1 = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$

16. Demostrar que $\cos 2x = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x$.

$$\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$$

17. Demostrar que $1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} &= \frac{\cancel{(\operatorname{sen} x + \cos x)}(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x\cos x + \cos^2 x)}{\cancel{\operatorname{sen} x + \cos x}}\\ &= 1 - \operatorname{sen} x\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}(2\operatorname{sen} x\cos x) = 1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\end{aligned}$$

18. Demostrar que $\cos\theta = \operatorname{sen}(\theta + 30°) + \cos(\theta + 60°)$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\theta+30°) + \cos(\theta+60°) &= (\operatorname{sen}\theta\cos 30° + \cos\theta\operatorname{sen} 30°) + (\cos\theta\cos 60° - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} 60°)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta\end{aligned}$$

19. Demostrar que $\cos x = \dfrac{1 - \tan^2\frac{1}{2}x}{1 + \tan^2\frac{1}{2}x}$.

$$\frac{1-\tan^2\frac{1}{2}x}{1+\tan^2\frac{1}{2}x} = \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x}}{\sec^2\frac{1}{2}x} = \frac{\left(1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}x}\right)\cos^2\frac{1}{2}x}{\sec^2\frac{1}{2}x\cos^2\frac{1}{2}x} = \cos^2\tfrac{1}{2}x - \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}x = \cos x$$

20. Demostrar que $2\tan 2x = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}$.

$$\begin{aligned}\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} &= \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 - (\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)}\\ &= \frac{(\cos^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen}^2 x) - (\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}\\ &= \frac{4\operatorname{sen} x\cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = 2\tan 2x\end{aligned}$$

21. Demostrar que $\operatorname{sen}^4 A = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\cos 2A + \dfrac{1}{8}\cos 4A$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^4 A &= (\operatorname{sen}^2 A)^2 = \left(\frac{1-\cos 2A}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2\cos 2A + \cos^2 2A}{4}\\ &= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2A + \frac{1+\cos 4A}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2A + \frac{1}{8}\cos 4A\end{aligned}$$

22. Demostrar que $\tan^6 x = \tan^4 x \sec^2 x - \tan^2 x \sec^2 x + \sec^2 x - 1$.

$$\begin{aligned}\tan^6 x &= \tan^4 x \tan^2 x = \tan^4 x\,(\sec^2 x - 1) = \tan^4 x \sec^2 x - \tan^2 x \tan^2 x \\ &= \tan^4 x \sec^2 x - \tan^2 x\,(\sec^2 x - 1) = \tan^4 x \sec^2 x - \tan^2 x \sec^2 x + \tan^2 x \\ &= \tan^4 x \sec^2 x - \tan^2 x \sec^2 x + \sec^2 x - 1\end{aligned}$$

23. Demostrar que $A + B + C = 180°$, si $\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$.

Puesto que $C = 180° - (A + B)$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C &= \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen}[360° - 2(A + B)] \\ &= \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B - \operatorname{sen} 2(A + B) \\ &= \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B - \operatorname{sen} 2A \cos 2B - \cos 2A \operatorname{sen} 2B \\ &= (\operatorname{sen} 2A)(1 - \cos 2B) + (\operatorname{sen} 2B)(1 - \cos 2A) \\ &= 2 \operatorname{sen} 2A \operatorname{sen}^2 B + 2 \operatorname{sen} 2B \operatorname{sen}^2 A \\ &= 4 \operatorname{sen} A \cos A \operatorname{sen}^2 B + 4 \operatorname{sen} B \cos B \operatorname{sen}^2 A \\ &= 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B (\operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B) \\ &= 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen}(A + B) \\ &= 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen}[180° - (A + B)] = 4 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.\end{aligned}$$

24. Cuando $A + B + C = 180°$, demostrar que $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

Puesto que $C = 180° - (A + B)$,

$$\begin{aligned}\tan A + \tan B + \tan C &= \tan A + \tan B + \tan[180° - (A + B)] = \tan A + \tan B - \tan(A + B) \\ &= \tan A + \tan B - \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = (\tan A + \tan B)\left(1 - \frac{1}{1 - \tan A \tan B}\right) \\ &= (\tan A + \tan B)\left(-\frac{\tan A \tan B}{1 - \tan A \tan B}\right) = -\tan A \tan B \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= -\tan A \tan B \tan(A + B) = \tan A \tan B \tan[180° - (A + B)] = \tan A \tan B \tan C.\end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

25. Encontrar los valores del seno, del coseno y de la tangente de *a*) 75°, *b*) 255°.

Resp. *a*) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$, $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$, $2 + \sqrt{3}$ *b*) $-\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$, $-\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$, $2 + \sqrt{3}$

26. Encontrar los valores de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ y $\tan(\alpha + \beta)$, dados:

a) $\operatorname{sen} \alpha = 3/5$, $\cos \beta = 5/13$, α y β en el cuadrante I. *Resp.* $63/65$, $-16/65$, $-63/16$

b) $\operatorname{sen} \alpha = 8/17$, $\tan \beta = 5/12$, α y β en el cuadrante I. *Resp.* $171/221$, $140/221$, $171/140$

c) $\cos \alpha = -12/13$, $\cot \beta = 24/7$, α en el cuadrante II, β en el cuadrante III.

Resp. $-36/325$, $323/325$, $-36/323$

d) $\operatorname{sen} \alpha = 1/3$, $\operatorname{sen} \beta = 2/5$, α en el cuadrante I, β en el cuadrante II.

Resp. $\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{21}}{15}$, $-\frac{2 + 2\sqrt{42}}{15}$, $-\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{21}}{2 + 2\sqrt{42}}$

27. Encontrar los valores de $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ y $\tan(\alpha - \beta)$, dados:

a) $\operatorname{sen}\alpha = 3/5$, $\operatorname{sen}\beta = 5/13$, α y β en el cuadrante I. *Resp.* 16/65, 63/65, 16/63

b) $\operatorname{sen}\alpha = 8/17$, $\tan\beta = 5/12$, α y β en el cuadrante I. *Resp.* 21/221, 220/221, 21/220

c) $\cos\alpha = -12/13$, $\cot\beta = 24/7$, α en el cuadrante II, β en el cuadrante I. *Resp.* 204/325, $-253/325$, $-204/253$

d) $\operatorname{sen}\alpha = 1/3$, $\operatorname{sen}\beta = 2/5$, α en el cuadrante II, β en el cuadrante I.

Resp. $\dfrac{4\sqrt{2} + \sqrt{21}}{15}$, $-\dfrac{2\sqrt{42} - 2}{15}$, $-\dfrac{4\sqrt{2} + \sqrt{21}}{2\sqrt{42} - 2}$

28. Demostrar:

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

b) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

c) $\tan(45° - \theta) = \dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$

d) $\dfrac{\tan(\alpha + \beta)}{\cot(\alpha - \beta)} = \dfrac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{1 - \tan^2\alpha\tan^2\beta}$

e) $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \tan[(\alpha + \beta) + \gamma] = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1 - \tan\alpha\tan\beta - \tan\beta\tan\gamma - \tan\gamma\tan\alpha}$

f) $\dfrac{\operatorname{sen}(x + y)}{\cos(x - y)} = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x\tan y}$

g) $\tan(45° + \theta) = \dfrac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

h) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$

29. Si A y B son ángulos agudos, encontrar $A + B$, dados:

a) $\tan A = 1/4$, $\tan B = 3/5$. Sugerencia: $\tan(A + B) = 1$. *Resp.* 45°

b) $\tan A = 5/3$, $\tan B = 4$. *Resp.* 135°

30. Si $\tan(x + y) = 33$ y $\tan x = 3$, demostrar que $\tan y = 0{,}3$.

31. Encontrar los valores de $\operatorname{sen}2\theta$, $\cos 2\theta$ y $\tan 2\theta$, dados:

a) $\operatorname{sen}\theta = 3/5$, θ en el cuadrante I. *Resp.* 24/25, 7/25, 24/7

b) $\operatorname{sen}\theta = 3/5$, θ en el cuadrante II. *Resp.* $-24/25$, 7/25, $-24/7$

c) $\operatorname{sen}\theta = -1/2$, θ en el cuadrante IV. *Resp.* $-\sqrt{3}/2$, 1/2, $-\sqrt{3}$

d) $\tan\theta = -1/5$, θ en el cuadrante II. *Resp.* $-5/13$, 12/13, $-5/12$

e) $\tan\theta = u$, θ en el cuadrante I. *Resp.* $\dfrac{2u}{1 + u^2}$, $\dfrac{1 - u^2}{1 + u^2}$, $\dfrac{2u}{1 - u^2}$

32. Demostrar:

a) $\tan\theta\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}^2\theta$

b) $\cot\theta\operatorname{sen}2\theta = 1 + \cos 2\theta$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}{\operatorname{sen}x - \cos x} = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x$

d) $\dfrac{1 - \operatorname{sen}2A}{\cos 2A} = \dfrac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$

e) $\cos 2\theta = \dfrac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$

f) $\dfrac{1 + \cos 2\theta}{\operatorname{sen}2\theta} = \cot\theta$

g) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

h) $\cos^4 x = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{8}\cos 4x$

33. Encontrar los valores del seno, del coseno y de la tangente de

a) 30°, dado $\cos 60° = 1/2$. *Resp.* 1/2, $\sqrt{3}/2$, $1/\sqrt{3}$

b) 105°, dado $\cos 210° = -\sqrt{3}/2$. *Resp.* $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $-(2 + \sqrt{3})$

c) $\frac{1}{2}\theta$, dado $\operatorname{sen}\theta = 3/5$, θ en el cuadrante I. *Resp.* $1/\sqrt{10}$, $3/\sqrt{10}$, 1/3

d) θ, dado $\cot 2\theta = 7/24$, 2θ en el cuadrante I. *Resp.* 3/5, 4/5, 3/4

e) θ, dado $\cot 2\theta = -5/12$, 2θ en el cuadrante II. *Resp.* $3/\sqrt{13}$, $2/\sqrt{13}$, 3/2

34. Demostrar:

a) $\cos x = 2\cos^2\frac{1}{2}x - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}x$

b) $\text{sen}\ x = 2\,\text{sen}\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x$

c) $(\text{sen}\frac{1}{2}\theta - \cos\frac{1}{2}\theta)^2 = 1 - \text{sen}\ \theta$

d) $\tan\frac{1}{2}\theta = \csc\theta - \cot\theta$

e) $\dfrac{1 - \tan\frac{1}{2}\theta}{1 + \tan\frac{1}{2}\theta} = \dfrac{1 - \text{sen}\ \theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1 + \text{sen}\ \theta}$

f) $\dfrac{2\tan\frac{1}{2}x}{1 + \tan^2\frac{1}{2}x} = \text{sen}\ x$

35. Demostrar que en un triángulo rectángulo ABC, donde C es el ángulo recto:

$$\text{sen}\ 2A = \frac{2ab}{c^2},\quad \cos 2A = \frac{b^2 - a^2}{c^2},\quad \text{sen}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{c-b}{2c}},\quad \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{c+b}{2c}}.$$

36. Demostrar que: a) $\dfrac{\text{sen}\ 3x}{\text{sen}\ x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$, b) $\tan 50^\circ - \tan 40^\circ = 2\tan 10^\circ$.

37. Si $A + B + C = 180^\circ$, demostrar que:

a) $\text{sen}\ A + \text{sen}\ B + \text{sen}\ C = 4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\,\text{sen}\frac{1}{2}A\,\text{sen}\frac{1}{2}B\,\text{sen}\frac{1}{2}C$

c) $\text{sen}^2 A + \text{sen}^2 B - \text{sen}^2 C = 2\,\text{sen}\ A\,\text{sen}\ B\cos C$

d) $\tan\frac{1}{2}A\tan\frac{1}{2}B + \tan\frac{1}{2}B\tan\frac{1}{2}C + \tan\frac{1}{2}C\tan\frac{1}{2}A = 1.$

CAPITULO 12

Fórmulas para sumas, diferencias y productos

PRODUCTOS DE SENOS Y COSENOS.

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = -\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

Las demostraciones de estas fórmulas aparecen en el problema 1.

SUMA Y DIFERENCIA DE SENOS Y COSENOS.

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$\cos A - \cos B = -2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A-B)$$

Las demostraciones de estas fórmulas aparecen en el problema 2.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir las fórmulas de los productos.

Puesto que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta) + (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$,

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)].$$

Puesto que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$,

$$\cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta)].$$

Puesto que $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) + (\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$,

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)].$$

Puesto que $\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$,

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = -\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)].$$

2. Deducir las fórmulas de las sumas y diferencias.

Sean $\alpha+\beta = A$ y $\alpha-\beta = B$ tales que $\alpha = \tfrac{1}{2}(A+B)$ y $\beta = \tfrac{1}{2}(A-B)$. Entonces (ver problema 1)

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ puesto que $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$,

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ puesto que $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(A-B)$,

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ puesto que $\cos A+\cos B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$,

$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ puesto que $\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)$.

3. Expresar como suma o diferencia:

a) sen 40° cos 30°, *b*) cos 110° sen 55°, *c*) cos 50° cos 35°, *d*) sen 55° sen 40°.

a) $\operatorname{sen}40^\circ\cos30^\circ=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(40^\circ+30^\circ)+\operatorname{sen}(40^\circ-30^\circ)]=\frac{1}{2}(\operatorname{sen}70^\circ+\operatorname{sen}10^\circ)$

b) $\cos110^\circ\operatorname{sen}55^\circ=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(110^\circ+55^\circ)-\operatorname{sen}(110^\circ-55^\circ)]=\frac{1}{2}(\operatorname{sen}165^\circ-\operatorname{sen}55^\circ)$

c) $\cos50^\circ\cos35^\circ=\frac{1}{2}[\cos(50^\circ+35^\circ)+\cos(50^\circ-35^\circ)]=\frac{1}{2}(\cos85^\circ+\cos15^\circ)$

d) $\operatorname{sen}55^\circ\operatorname{sen}40^\circ=-\frac{1}{2}[\cos(55^\circ+40^\circ)-\cos(55^\circ-40^\circ)]=-\frac{1}{2}(\cos95^\circ-\cos15^\circ)$

4. Expresar como producto:

a) sen 50° + sen 40°, *b*) sen 70° − sen 20°, *c*) cos 55° + cos 25°, *d*) cos 35° − cos 75°.

a) $\operatorname{sen}50^\circ+\operatorname{sen}40^\circ=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(50^\circ+40^\circ)\cos\frac{1}{2}(50^\circ-40^\circ)=2\operatorname{sen}45^\circ\cos5^\circ$

b) $\operatorname{sen}70^\circ-\operatorname{sen}20^\circ=2\cos\frac{1}{2}(70^\circ+20^\circ)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(70^\circ-20^\circ)=2\cos45^\circ\operatorname{sen}25^\circ$

c) $\cos55^\circ+\cos25^\circ=2\cos\frac{1}{2}(55^\circ+25^\circ)\cos\frac{1}{2}(55^\circ-25^\circ)=2\cos40^\circ\cos15^\circ$

d) $\cos35^\circ-\cos75^\circ=-2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(35^\circ+75^\circ)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(35^\circ-75^\circ)=-2\operatorname{sen}55^\circ\operatorname{sen}(-20^\circ)$
$=2\operatorname{sen}55^\circ\operatorname{sen}20^\circ$

5. Demostrar que: $\dfrac{\operatorname{sen}4A+\operatorname{sen}2A}{\cos4A+\cos2A}=\tan3A$.

$$\frac{\operatorname{sen}4A+\operatorname{sen}2A}{\cos4A+\cos2A}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(4A+2A)\cos\frac{1}{2}(4A-2A)}{2\cos\frac{1}{2}(4A+2A)\cos\frac{1}{2}(4A-2A)}=\frac{\operatorname{sen}3A}{\cos3A}=\tan3A$$

6. Demostrar que: $\dfrac{\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}=\dfrac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$.

$$\frac{\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\cot\tfrac{1}{2}(A+B)\tan\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

7. Demostrar que: $\cos^3x\operatorname{sen}^2x=\dfrac{1}{16}(2\cos x-\cos3x-\cos5x)$.

$$\begin{aligned}\cos^3x\operatorname{sen}^2x&=(\operatorname{sen}x\cos x)^2\cos x=\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x\cos x=\frac{1}{4}(\operatorname{sen}2x)(\operatorname{sen}2x\cos x)\\&=\frac{1}{4}(\operatorname{sen}2x)[\tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x)]=\frac{1}{8}(\operatorname{sen}3x\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}x)\\&=\frac{1}{8}\{-\tfrac{1}{2}(\cos5x-\cos x)+[-\tfrac{1}{2}(\cos3x-\cos x)]\}\\&=\frac{1}{16}(2\cos x-\cos3x-\cos5x)\end{aligned}$$

8. Demostrar que: $1+\cos2x+\cos4x+\cos6x=4\cos x\cos2x\cos3x$.

$$\begin{aligned}1+(\cos2x+\cos4x)+\cos6x&=1+2\cos3x\cos x+\cos6x=(1+\cos6x)+2\cos3x\cos x\\&=2\cos^2 3x+2\cos3x\cos x=2\cos3x(\cos3x+\cos x)\\&=2\cos3x(2\cos2x\cos x)=4\cos x\cos2x\cos3x\end{aligned}$$

9. Expresar $4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$ en la forma $c \cos(x - \alpha)$.

Puesto que $c \cos(x - \alpha) = c(\cos x \cos \alpha + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \alpha)$, se toma $c \cos \alpha = 4$ y $c \operatorname{sen} \alpha = 3$.

Entonces $\cos \alpha = 4/c$ y $\operatorname{sen} \alpha = 3/c$. Puesto que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $c = 5$ y -5.

Ya que $c = 5$, $\cos \alpha = 4/5$, $\operatorname{sen} \alpha = 3/5$, y $\alpha = 36°52'$. Así,

$$4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x = 5 \cos(x - 36°52').$$

Puesto que $c = -5$, $\alpha = 216°52'$ y

$$4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x = -5 \cos(x - 216°52').$$

10. Encontrar los valores máximo y mínimo de $4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

Según el problema 9, $4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x = 5 \cos(x - 36°52')$.

Ahora bien, en el intervalo dado, $\cos \theta$ alcanza su valor máximo 1 cuando $\theta = 0$, y su valor mínimo -1 cuando $\theta = \pi$. Entonces, el valor máximo de $4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$ es 5 que se obtiene cuando $x - 36°52' = 0$ o cuando $x = 36°52'$, mientras que el valor mínimo es -5 que se obtiene cuando $x - 36°52' = \pi$ ó cuando $x = 216°52'$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

11. Expresar como suma o diferencia de senos o de cosenos cada uno de los productos siguientes.

a) $\operatorname{sen} 35° \cos 25° = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 60° + \operatorname{sen} 10°)$

b) $\operatorname{sen} 25° \cos 75° = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 100° - \operatorname{sen} 50°)$

c) $\cos 50° \cos 70° = \frac{1}{2}(\cos 120° + \cos 20°)$

d) $\operatorname{sen} 130° \operatorname{sen} 55° = -\frac{1}{2}(\cos 185° - \cos 75°)$

e) $\operatorname{sen} 4x \cos 2x = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 2x)$

f) $\operatorname{sen} x/2 \cos 3x/2 = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} x)$

g) $\cos 7x \cos 4x = \frac{1}{2}(\cos 11x + \cos 3x)$

h) $\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} 4x = -\frac{1}{2}(\cos 9x - \cos x)$

12. Demostrar que:

a) $2 \operatorname{sen} 45° \cos 15° = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$ y $\cos 15° = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$.

b) $2 \operatorname{sen} 82\frac{1}{2}° \cos 37\frac{1}{2}° = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$, *c*) $2 \operatorname{sen} 127\frac{1}{2}° \operatorname{sen} 97\frac{1}{2}° = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

13. Expresar como producto.

a) $\operatorname{sen} 50° + \operatorname{sen} 20° = 2 \operatorname{sen} 35° \cos 15°$

b) $\operatorname{sen} 75° - \operatorname{sen} 35° = 2 \cos 55° \operatorname{sen} 20°$

c) $\cos 65° + \cos 15° = 2 \cos 40° \cos 25°$

d) $\cos 80° - \cos 70° = -2 \operatorname{sen} 75° \operatorname{sen} 5°$

e) $\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} 3x \cos x$

f) $\operatorname{sen} 7\theta - \operatorname{sen} 3\theta = 2 \cos 5\theta \operatorname{sen} 2\theta$

g) $\cos 6\theta + \cos 2\theta = 2 \cos 4\theta \cos 2\theta$

h) $\cos 3x/2 - \cos 9x/2 = 2 \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 3x/2$

14. Demostrar que:

a) $\operatorname{sen} 40° + \operatorname{sen} 20° = \cos 10°$,

b) $\operatorname{sen} 105° + \operatorname{sen} 15° = \sqrt{6}/2$,

c) $\cos 465° + \cos 165° = -\sqrt{6}/2$,

d) $\dfrac{\operatorname{sen} 75° - \operatorname{sen} 15°}{\cos 75° + \cos 15°} = 1/\sqrt{3}$.

15. Demostrar que:

a) $\dfrac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 3A}{\cos A + \cos 3A} = \tan 2A$ b) $\dfrac{\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 4A}{\cos 2A + \cos 4A} = \tan 3A$

c) $\dfrac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \dfrac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$ d) $\dfrac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = -\cot \frac{1}{2}(A-B) \cot \frac{1}{2}(A+B)$

e) $\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 3\theta = \operatorname{sen} 2\theta + (\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta) = \operatorname{sen} 2\theta\,(1 + 2\cos\theta)$

f) $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = \cos 2\theta\,(1 + 2\cos\theta)$

g) $\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 6\theta = (\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 4\theta) + 2 \operatorname{sen} 3\theta \cos 3\theta$
$= 4\cos\theta \cos 2\theta \operatorname{sen} 3\theta$

h) $\dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 9x}{\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x} = \dfrac{(\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 9x) + (\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 7x)}{(\cos 3x + \cos 9x) + (\cos 5x + \cos 7x)} = \tan 6x$

16. Demostrar que:

a) $\cos 130^\circ + \cos 110^\circ + \cos 10^\circ = 0$, b) $\cos 220^\circ + \cos 100^\circ + \cos 20^\circ = 0$.

17. Demostrar que:

a) $\cos^2\theta \operatorname{sen}^3\theta = \dfrac{1}{16}(2 \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen} 5\theta)$

b) $\cos^2\theta \operatorname{sen}^4\theta = \dfrac{1}{32}(2 - \cos 2\theta - 2\cos 4\theta + \cos 6\theta)$

c) $\cos^5\theta = \dfrac{1}{16}(10\cos\theta + 5\cos 3\theta + \cos 5\theta)$

d) $\operatorname{sen}^5\theta = \dfrac{1}{16}(10 \operatorname{sen}\theta - 5 \operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\theta)$

18. Expresar:

a) $4\cos x + 3 \operatorname{sen} x$ en la forma $c \operatorname{sen}(x + \alpha)$. *Resp.* $5 \operatorname{sen}(x + 53^\circ 8')$

b) $4\cos x + 3 \operatorname{sen} x$ en la forma $c \operatorname{sen}(x - \alpha)$. *Resp.* $5 \operatorname{sen}(x - 306^\circ 52')$

c) $\operatorname{sen} x - \cos x$ en la forma $c \operatorname{sen}(x - \alpha)$. *Resp.* $\sqrt{2} \operatorname{sen}(x - 45^\circ)$

d) $5\cos 3t + 12 \operatorname{sen} 3t$ en la forma $c\cos(3t - \alpha)$. *Resp.* $13\cos(3t - 67^\circ 23')$

19. Encontrar los valores máximo y mínimo de cada una de las sumas del problema 18, y los valores de x o de t, entre 0 y 2π, donde aquellos se obtienen.

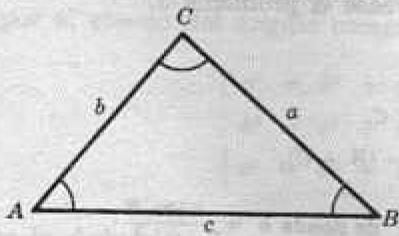
Resp. a) Máximo $= 5$, cuando $x = 36^\circ 52'$ (por ejemplo, cuando $x + 53^\circ 8' = 90^\circ$); mínimo $= -5$, cuando $x = 216^\circ 52'$.
b) Lo mismo que a).
c) Máximo $= \sqrt{2}$, cuando $x = 135^\circ$; mínimo $= -\sqrt{2}$, cuando $x = 315^\circ$.
d) Máximo $= 13$, cuando $t = 22^\circ 28'$; mínimo $= -13$, cuando $t = 82^\circ 28'$.

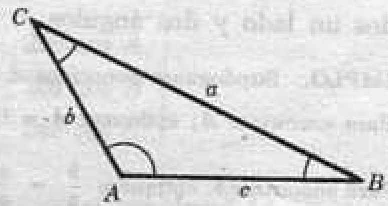
CAPITULO 13

Triángulos oblicuángulos. Resoluciones no-logarítmicas

TRIANGULO OBLICUANGULO es aquél en que no es recto ninguno de sus ángulos. En un triángulo oblicuángulo, los tres ángulos son agudos o dos son agudos y el tercero es obtusángulo.

Los ángulos se llamarán aquí A, B y C, y las longitudes de los correspondientes lados opuestos se llamarán a, b y c.





Un triángulo queda perfectamente determinado cuando se conocen tres cualesquiera de sus elementos, no todos ángulos, excepto en un caso que se explicará más adelante. Los cuatro casos de triángulos oblicuángulos son:

Caso I. Dados un lado y dos ángulos.
Caso II. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
Caso III. Dados dos lados y el ángulo comprendido.
Caso IV. Dados los tres lados.

LEY DE LOS SENOS. En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos; esto es,

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}}$$

Son inmediatas las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}, \qquad \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}, \qquad \frac{c}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

La demostración de la ley de los senos aparece en el problema 1.

FORMULAS DE MOLLWEIDE. En todo triángulo ABC, son válidas las relaciones siguientes:

$$\boxed{\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}}, \qquad \boxed{\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}}$$

conjuntamente con las que se obtienen mediante un cambio cíclico de las letras; es decir,

$$\boxed{\frac{b+c}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}A}}, \qquad \boxed{\frac{b-c}{a} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A}}$$

$$\boxed{\frac{c+a}{b} = \frac{\cos\frac{1}{2}(C-A)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}B}}, \qquad \boxed{\frac{c-a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(C-A)}{\cos\frac{1}{2}B}}$$

y las obtenidas al intercambiar las dos letras (minúscula y mayúscula) que aparecen en los numeradores de cada relación.

Para la deducción de estas fórmulas, véase el problema 2.

FORMULAS DE LA PROYECCION. En todo triángulo ABC,

$$\boxed{\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A. \end{aligned}}$$

Para la deducción de estas fórmulas véase el problema 3.

CASO I. Dados un lado y dos ángulos.

EJEMPLO. Supónganse conocidos a, B y C.

Para encontrar A, aplíquese $A = 180° - (B + C)$.

Para encontrar b, aplíquese $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$ de donde $b = \dfrac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$.

Para encontrar c, aplíquese $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$ de donde $c = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$.

Para la comprobación, utilícese una de las fórmulas de Mollweide o una de las fórmulas de la proyección.

(Véanse los problemas 4-8.)

CASO II. Dados dos lados y el lado opuesto a uno de ellos.

EJEMPLO. Supónganse conocidos b, c y B.

De $\dfrac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{b}$, $\quad \operatorname{sen} C = \dfrac{c \operatorname{sen} B}{b}$.

Si $\operatorname{sen} C > 1$, el ángulo C no está determinado.
Si $\operatorname{sen} C = 1$, $C = 90°$ y queda determinado un triángulo rectángulo.
Si $\operatorname{sen} C < 1$, quedan determinados dos ángulos: un ángulo agudo C y un ángulo obtuso $C' = 180° - C$. Así, puede quedar determinado un solo triángulo, o pueden quedar determinados dos triángulos.

Este caso se discute geométricamente en el problema 9. Los resultados obtenidos se pueden resumir así:

Cuando el ángulo dado es *agudo*, sucede que

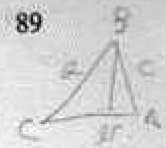
a) existe *una* solución si el lado opuesto al ángulo dado es igual o mayor que el otro lado dado,
b) *no* hay solución, existe *una* solución (triángulo rectángulo) o existen *dos* soluciones si el lado opuesto al ángulo dado es menor que el otro lado dado.

Cuando el ángulo dado es *obtuso*, sucede que

c) *no* hay solución si el lado opuesto al ángulo dado es igual o menor que el otro lado dado,
d) existe *una* solución si el lado opuesto al ángulo dado es mayor que el otro lado dado.

EJEMPLO. 1) Cuando $b = 30$, $c = 20$ y $B = 40°$, existe una solución porque B es agudo y $b > c$.

2) Cuando $b = 20$, $c = 30$ y $B = 40°$, puede suceder que no haya solución o que haya una o dos soluciones. El subcaso particular se determina después de calcular $\operatorname{sen} C = \dfrac{c \operatorname{sen} B}{b}$.



3) Cuando $b = 30$, $c = 20$ y $B = 140°$, existe una solución.
4) Cuando $b = 20$, $c = 30$ y $B = 140°$, no existe solución.

Este caso, llamado ambiguo, se resuelve mediante la ley de los senos y se comprueba por las fórmulas de Mollweide o por las fórmulas de la proyección.

(Véanse los problemas 10-13.)

LEY DE LOS COSENOS. En todo triángulo ABC, el cuadrado de un lado cualquiera es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido; es decir,

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \end{aligned}}$$

Para la deducción de estas fórmulas, véase el problema 14.

CASO III. Dados dos lados y el ángulo comprendido.

EJEMPLO. Supónganse conocidos a, b y C.

Para encontrar c, aplíquese $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Para encontrar A, aplíquese $\operatorname{sen} A = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{c}$.

Para encontrar B, aplíquese $\operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} C}{c}$.

Para la comprobación, aplíquese $A + B + C = 180°$.

(Véanse los problemas 15-18.)

CASO IV. Dados los tres lados.

EJEMPLO. Conocidos a, b y c, despéjese convenientemente la ley de los cosenos para cada uno de los ángulos.

Para encontrar los ángulos, aplíquese

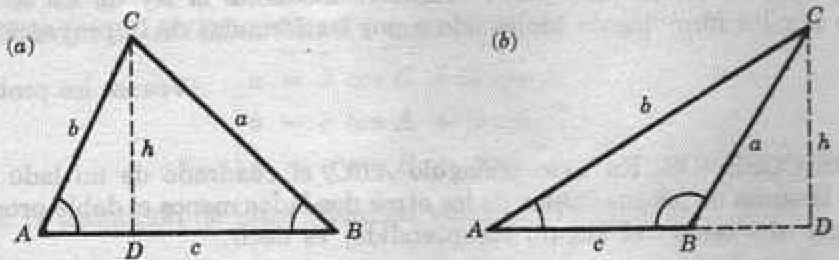
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Para la comprobación, aplíquese $A + B + C = 180°$.

(Véanse los problemas 19-21.)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir la ley de los senos.



Sea ABC un triángulo oblicuángulo cualquiera. En la Fig. (a), los ángulos A y B son agudos, mientras que en la Fig. (b), el ángulo B es obtuso. Trácese CD perpendicular a AB o a su prolongación. Sea h la longitud de CD.

En cualquiera de las dos figuras se tiene que, en el triángulo rectángulo ACD, $h = b \operatorname{sen} A$, mientras que, en el triángulo rectángulo BCD, $h = a \operatorname{sen} B$ ya que en la Fig. (b),

$$h = a \operatorname{sen} \angle DBC = a \operatorname{sen}(180^\circ - B) = a \operatorname{sen} B.$$

Entonces, $$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A \quad \text{ó} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}.$$

De manera semejante, si se traza una perpendicular desde B a AC, o desde A a BC, se obtiene

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad \text{ó} \quad \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Así, finalmente, $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

2. Deducir un par de fórmulas de Mollweide.

De la ley de los senos se obtiene, $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$ y $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$.

Entonces $$\frac{a+b}{c} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}C},$$

puesto que $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(180^\circ - C) = \operatorname{sen}(90^\circ - \frac{1}{2}C) = \cos \frac{1}{2}C$.

Del mismo modo, $$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C},$$

puesto que $\cos \frac{1}{2}(A+B) = \cos(90^\circ - \frac{1}{2}C) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}C$.

3. Deducir una de las fórmulas de la proyección.

Considérense las figuras del problema 1. En el triángulo rectángulo ACD de cualquiera de las dos figuras, $AD = b \cos A$.

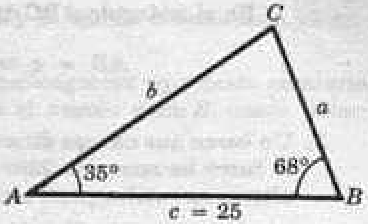
En el triángulo rectángulo BCD de la Fig. (a), $DB = a \cos B$. Entonces, en la Fig. (a),

$$c = AB = AD + DB = b \cos A + a \cos B = a \cos B + b \cos A.$$

En el triángulo rectángulo BCD de la Fig. (b), $BD = a \cos \angle DBC = a \cos(180^\circ - B) = -a \cos B$. Entonces, en la Fig. (b),

$$c = AB = AD - BD = b \cos A - (-a \cos B) = a \cos B + b \cos A.$$

CASO I.



4. Resolver el triángulo ABC, dados $c = 25$, $A = 35°$ y $B = 68°$.

Para encontrar C: $C = 180° - (A + B) = 180° - 103° = 77°$.

Para encontrar a: $a = \dfrac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C} = \dfrac{25 \text{ sen } 35°}{\text{sen } 77°} = \dfrac{25(0{,}5736)}{0{,}9744} = 15.$

Para encontrar b: $b = \dfrac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C} = \dfrac{25 \text{ sen } 68°}{\text{sen } 77°} = \dfrac{25(0{,}9272)}{0{,}9744} = 24.$

Para comprobar según la fórmula de Mollweide:

$$\frac{b+a}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B-A)}{\text{sen } \frac{1}{2}C} \quad \text{ó} \quad (b+a) \text{ sen } \tfrac{1}{2}C = c \cos \tfrac{1}{2}(B-A)$$

$$(b+a) \text{ sen } \tfrac{1}{2}C = 39 \text{ sen } 38°30' = 39(0{,}6225) = 24{,}3$$
$$c \cos \tfrac{1}{2}(B-A) = 25 \cos 16°30' = 25(0{,}9588) = 24{,}0$$

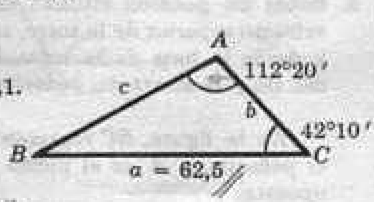
Para comprobar según la fórmula de la proyección:

$$c = a \cos B + b \cos A = 15 \cos 68° + 24 \cos 35°$$
$$= 15(0{,}3746) + 24(0{,}8192) = 25{,}3.$$

Los elementos buscados son $a = 15$, $b = 24$ y $C = 77°$.

5. Resolver el triángulo ABC, dados $a = 62{,}5$, $A = 112°20'$ y $C = 42°10'$.

Para B: $B = 180° - (C + A) = 180° - 154°30' = 25°30'$.



Para b: $b = \dfrac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A} = \dfrac{62{,}5 \text{ sen } 25°30'}{\text{sen } 112°20'} = \dfrac{62{,}5(0{,}4305)}{0{,}9250} = 29{,}1.$

$(\text{sen } 112°20' = \text{sen}(180° - 112°20') = \text{sen } 67°40')$

Para c: $c = \dfrac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \dfrac{62{,}5 \text{ sen } 42°10'}{\text{sen } 112°20'} = \dfrac{62{,}5(0{,}6713)}{0{,}9250} = 45{,}4.$

Comprobación: $(c + b) \text{ sen } \frac{1}{2}A = a \cos \frac{1}{2}(C - B)$

$$(c+b) \text{ sen } \tfrac{1}{2}A = 74{,}5 \text{ sen } 56°10' = 74{,}5(0{,}8307) = 61{,}89$$
$$a \cos \tfrac{1}{2}(C-B) = 62{,}5 \cos 8°20' = 62{,}5(0{,}9894) = 61{,}84;$$

$$\text{ó} \quad a = b \cos C + c \cos B = 29{,}1(0{,}7412) + 45{,}4(0{,}9026) = 62{,}55.$$

Los elementos buscados son $b = 291$, $c = 45{,}4$ y $B = 25°30'$.

6. En las orillas opuestas de un río se sitúan dos puntos A y B. En la orilla donde está situado el punto A se determina un segmento de recta $AC = 275$ m y se miden los ángulos $CAB = 125°40'$ y $ACB = 48°50'$. Encontrar la longitud de AB.

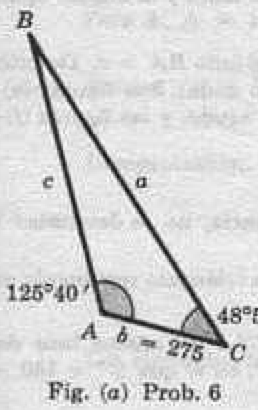


Fig. (a) Prob. 6

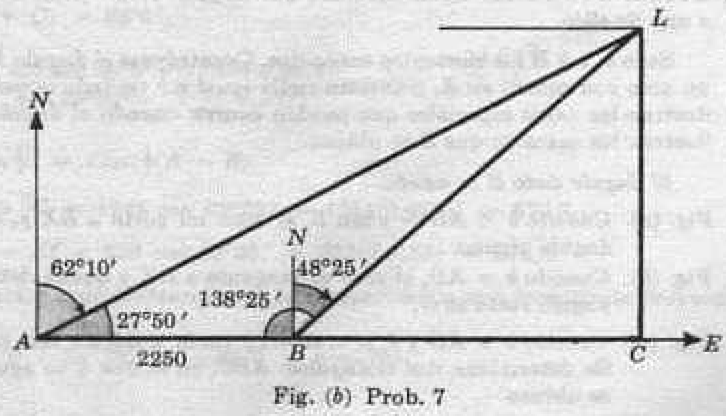


Fig. (b) Prob. 7

En el triángulo ABC de la Fig. (*a*), $B = 180° - (C + A) = 5°30'$ y

$$AB = c = \frac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B} = \frac{275 \text{ sen } 48°50'}{\text{sen } 5°30'} = \frac{275(0{,}7528)}{0{,}0958} = 2160 \text{ m.}$$

7. Un barco que navega directamente hacia el este observa un faro con una orientación N 62°10′ E. Cuando el barco ha recorrido 2250 m, la orientación del faro es N 48°25′ E. Si el barco continúa navegando sin alterar su rumbo, ¿cuál será la menor distancia a que pasará del faro? (Véase el problema 5, capítulo 5.)

Considérese la Fig. (*b*).

En el triángulo oblicuángulo ABL: $AB = 2250$, $\angle BAL = 27°50'$ y $\angle ABL = 138°25'$.

$$\angle ALB = 180° - (\angle BAL + \angle ABL) = 13°45'.$$

$$BL = \frac{AB \text{ sen } \angle BAL}{\text{sen } \angle ALB} = \frac{2250 \text{ sen } 27°50'}{\text{sen } 13°45'} = \frac{2250(0{,}4669)}{0{,}2377} = 4420.$$

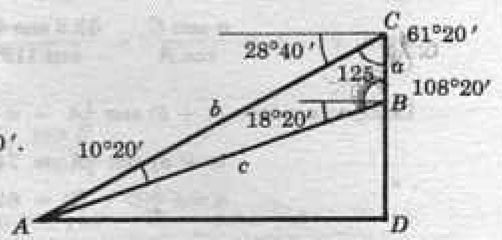
En el triángulo rectángulo BLC: $BL = 4420$ y $\angle CBL = 90° - 48°25' = 41°35'$.

$$CL = BL \text{ sen } \angle CBL = 4420 \text{ sen } 41°35' = 4420(0{,}6637) = 2934 \text{ m.}$$

Otro posible procedimiento para resolver el problema consiste en encontrar AL en el triángulo oblicuángulo ABL y, después, encontrar CL en el triángulo rectángulo ALC.

8. Sobre un peñasco situado en la ribera de un río se levanta una torre de 125 m de altura. Desde el extremo superior de la torre, el ángulo de depresión de un punto situado en la orilla opuesta es de 28°40′ y desde la base de la torre, el ángulo de depresión del mismo punto es de 18°20′. Encontrar el ancho del río y la altura del peñasco.

En la figura, BC representa la torre, DB representa el peñasco, y A es el punto de referencia en la orilla opuesta.



En el triángulo ABC,
$$C = 90° - 28°40' = 61°20',$$
$$B = 90° + 18°20' = 108°20',$$
$$A = 180° - (B + C) = 10°20'.$$

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \frac{125 \text{ sen } 61°20'}{\text{sen } 10°20'} = \frac{125(0{,}8774)}{0{,}1794} = 611.$$

En el triángulo rectángulo ABD,
$$DB = c \text{ sen } 18°20' = 611(0{,}3145) = 192,$$
$$AD = c \cos 18°20' = 611(0{,}9492) = 580.$$

El río mide 580 m de ancho, y el peñasco 192 m de altura.

9. Discutir los distintos casos especiales que se presentan cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Sean b, c y B los elementos conocidos. Constrúyase el ángulo B y trácese el lado $BA = c$. Descríbase un arco con centro en A, y con un radio igual a b (el lado opuesto al ángulo dado). Las figuras (*a*)-(*e*) ilustran los casos especiales que pueden ocurrir cuando el ángulo dado B es agudo, y las figuras (*f*)-(*g*) ilustran los casos en que B es obtuso.

El ángulo dado B es agudo.

Fig. (*a*). Cuando $b < AD = c \text{ sen } B$, el arco no corta a BX y, en consecuencia, no se determina triángulo alguno.

Fig. (*b*). Cuando $b = AD$, el arco es tangente a BX y queda determinado un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto es C.

Fig. (*c*). Cuando $b > AD$ y $b < c$, el arco corta a BX en dos puntos, C y C' a un mismo lado de B. Se determinan dos triángulos: ABC, en el que C es agudo, y ABC', en el que $C' = 180 - C$ es obtuso.

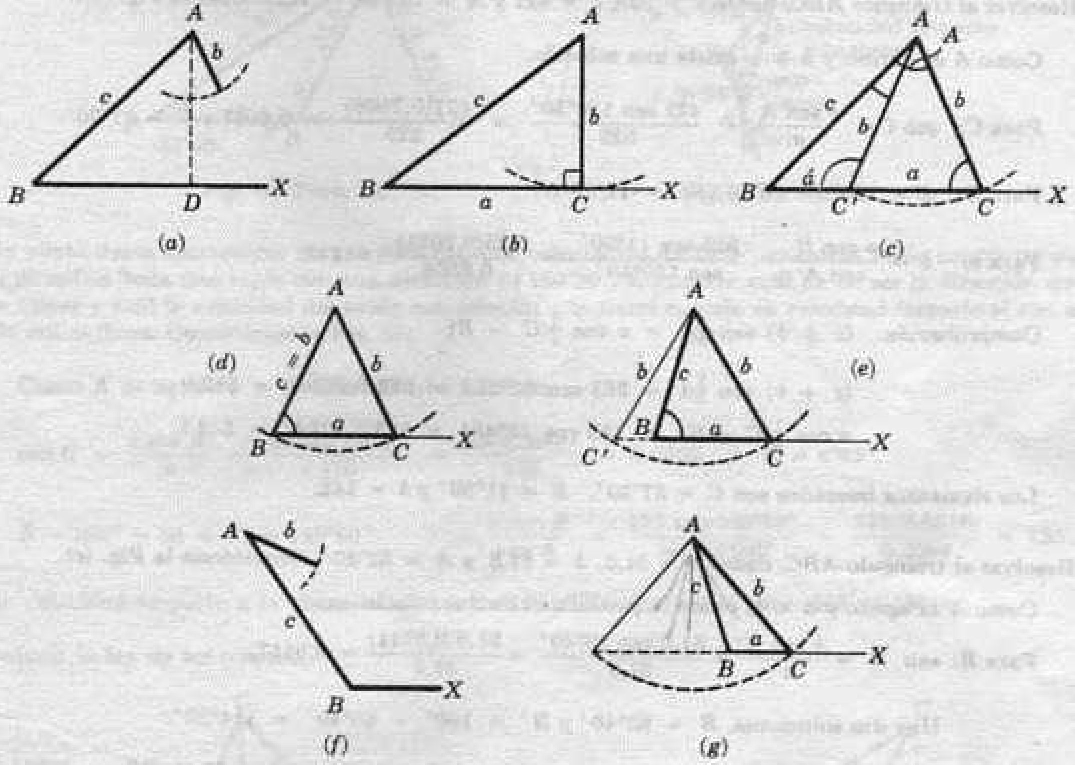
Fig. (*d*). Cuando $b > AD$ y $b = c$, el arco corta a BX en los puntos C y B. Queda determinado un triángulo (isósceles).

Fig. (*e*). Cuando $b > c$, el arco corta a BX en el punto C y corta la prolongación en sentido contrario de BX en el punto C'. Como el triángulo ABC' no contiene el ángulo dado B, queda determinado solamente el triángulo ABC.

El ángulo dado es obtuso.

Fig. (*f*). Cuando $b < c$ ó $b = c$, no se determina triángulo alguno.

Fig. (*g*). Cuando $b > c$, se determina un solo triángulo como en la Fig. (*e*).



CASO II.

10. Resolver el triángulo ABC, dados $c = 628$, $b = 480$ y $C = 55°10'$. Considérese la Fig. (*a*).

Como C es agudo y $c > b$, la solución es única.

Para B: $\operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} C}{c} = \dfrac{480 \operatorname{sen} 55°10'}{628} = \dfrac{480(0{,}8208)}{628} = 0{,}6274$ y $B = 38°50'$.

Para A: $A = 180° - (B + C) = 86°0'$.

Para a: $a = \dfrac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{480 \operatorname{sen} 86°0'}{\operatorname{sen} 38°50'} = \dfrac{480(0{,}9976)}{0{,}6271} = 764$.

Comprobación: $(a + b) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}C = c \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$

$(a + b) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}C = 1244 \operatorname{sen} 27°35' = 1244(0{,}4630) = 576{,}0$

$c \cos \tfrac{1}{2}(A - B) = 628 \cos 23°35' = 628(0{,}9165) = 575{,}6$.

Si se prefiere, puede utilizarse para la comprobación una fórmula de proyección.

Los elementos buscados son $B = 38°50'$, $A = 86°0'$ y $a = 764$.

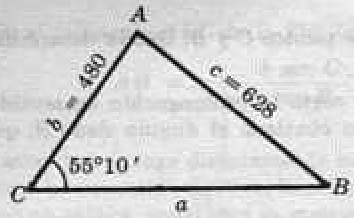


Fig. (a) Prob. 10

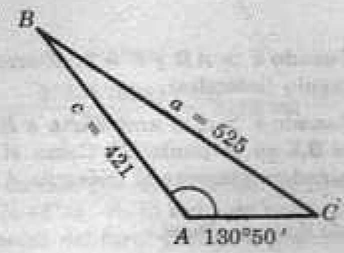


Fig. (b) Prob. 11

11. Resolver el triángulo ABC, dados $a = 525$, $c = 421$ y $A = 130°50'$. Considérese la Fig. (b).

Como A es obtuso y $a > c$, existe una solución.

Para C: $\text{sen}\, C = \dfrac{c\,\text{sen}\, A}{a} = \dfrac{421\,\text{sen}\, 130°50'}{525} = \dfrac{421(0{,}7566)}{525} = 0{,}6067$ y $C = 37°20'$.

Para B: $B = 180° - (C + A) = 11°50'$.

Para b: $b = \dfrac{a\,\text{sen}\, B}{\text{sen}\, A} = \dfrac{525\,\text{sen}\, 11°50'}{\text{sen}\, 130°50'} = \dfrac{525(0{,}2051)}{0{,}7566} = 142.$

Comprobación: $(c + b)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}A = a\cos\frac{1}{2}(C - B)$

$$(c + b)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}A = 563\,\text{sen}\, 65°25' = 563(0{,}9094) = 512{,}0$$
$$a\cos\tfrac{1}{2}(C - B) = 525\cos 12°45' = 525(0{,}9754) = 512{,}1.$$

Los elementos buscados son $C = 37°20'$, $B = 11°50'$ y $b = 142$.

12. Resolver el triángulo ABC, dados $a = 31{,}5$, $b = 51{,}8$ y $A = 33°40'$. Considérese la Fig. (c).

Como A es agudo y $a < b$, existe la posibilidad de dos soluciones.

Para B: $\text{sen}\, B = \dfrac{b\,\text{sen}\, A}{a} = \dfrac{51{,}8\,\text{sen}\, 33°40'}{31{,}5} = \dfrac{51{,}8(0{,}5544)}{31{,}5} = 0{,}9117.$

Hay dos soluciones, $B = 65°40'$ y $B' = 180° - 65°40' = 114°20'$.

Para C: $C = 180° - (A + B) = 80°40'$. Para C': $C' = 180° - (A + B') = 32°0'$.

Para c: $c = \dfrac{a\,\text{sen}\, C}{\text{sen}\, A} = \dfrac{31{,}5\,\text{sen}\, 80°40'}{\text{sen}\, 33°40'} = \dfrac{31{,}5(0{,}9868)}{0{,}5544} = 56{,}1.$

Para c': $c' = \dfrac{a\,\text{sen}\, C'}{\text{sen}\, A} = \dfrac{31{,}5\,\text{sen}\, 32°0'}{\text{sen}\, 33°40'} = \dfrac{31{,}5(0{,}5299)}{0{,}5544} = 30{,}1.$

Comprobación: $(c + b)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}A = a\cos(\frac{1}{2}C - B)$

$$\begin{aligned}(c + b)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}A &= 107{,}9\,\text{sen}\, 16°50'\\ &= 107{,}9(0{,}2896)\\ &= 31{,}25\\ a\cos\tfrac{1}{2}(C - B) &= 31{,}5\cos 7°30'\\ &= 31{,}5(0{,}9914)\\ &= 31{,}23.\end{aligned}$$

Comprobación: $(b + c')\,\text{sen}\,\frac{1}{2}A = a\cos\frac{1}{2}(B' - C')$

$$\begin{aligned}(b + c')\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}A &= 81{,}9\,\text{sen}\, 16°50'\\ &= 81{,}9(0{,}2896)\\ &= 23{,}72\end{aligned}$$

$$a \cos \tfrac{1}{2}(B' - C') = 31{,}5 \cos 41°10' = 31{,}5(0{,}7528) = 23{,}71.$$

Los elementos buscados son

en el triángulo ABC: $B = 65°40'$, $C = 80°40'$ y $c = 56{,}1$.

en el triángulo ABC': $B' = 114°20'$, $C' = 32°0'$ y $c' = 30{,}1$.

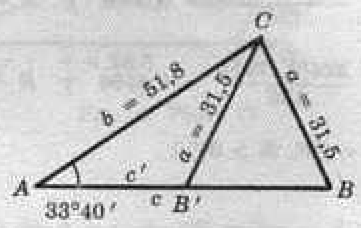


Fig. (c) Prob. 12

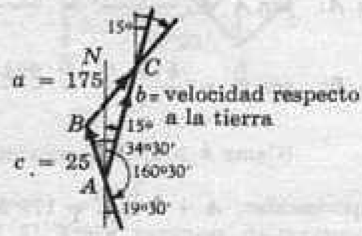


Fig. (d) Prob. 13

13. Un piloto desea mantenerse en una ruta con una orientación de 15°0', mientras vuela contra un viento de 25 millas/hora que sopla con una dirección de 160°30'. Encontrar cuál ha de ser la dirección que ha de tomar y cuál la velocidad del avión con relación a la tierra cuando su velocidad respecto al aire es de 175 millas/hora. Considérese la Fig. (*d*).

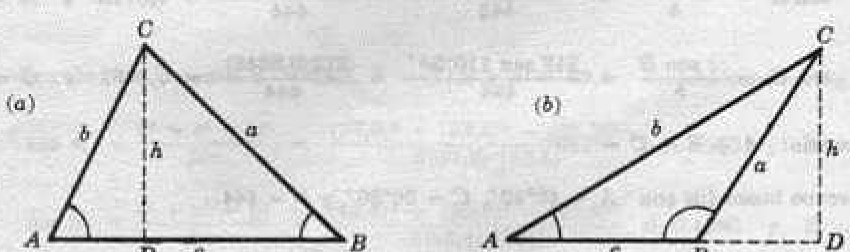
Como A es agudo y $a > c$, existe una solución.

$$\operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} A}{a} = \frac{25 \operatorname{sen} 34°30'}{175} = \frac{25(0{,}5664)}{175} = 0{,}0809 \quad \text{y} \quad C = 4°40'.$$

$$B = 180° - (A + C) = 140°50'. \qquad b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{175 \operatorname{sen} 140°50'}{\operatorname{sen} 34°30'} = \frac{175(0{,}6316)}{0{,}5664} = 195.$$

La velocidad respecto a la tierra ha de ser de 195 millas/hora y la dirección de 19°40'.

14. Deducir la ley de los cosenos.



En el triángulo rectángulo ACD de cualquiera de las dos figuras, $b^2 = h^2 + (AD)^2$.

En el triángulo rectángulo BCD de la Fig. (*a*), $h = a \operatorname{sen} B$ y $DB = a \cos B$.

Entonces $$AD = AB - DB = c - a \cos B$$

y $$b^2 = h^2 + (AD)^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 B + c^2 - 2ca \cos B + a^2 \cos^2 B$$
$$= a^2(\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B) + c^2 - 2ca \cos B = c^2 + a^2 - 2ca \cos B.$$

En el triángulo rectángulo BCD de la Fig. (*b*),

$$h = a \operatorname{sen} \angle CBD = a \operatorname{sen}(180° - B) = a \operatorname{sen} B \quad \text{y}$$
$$BD = a \cos \angle CBD = a \cos(180° - B) = -a \cos B$$

Entonces $AD = AB + BD = c - a \cos B$ y $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$.

Las otras relaciones pueden obtenerse mediante un cambio cíclico de las letras.

CASO III.

15. Resolver el triángulo ABC, dados $a = 132$, $b = 224$ y $C = 28°40'$. Considérese la Fig. (c).

Para c: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
$= (132)^2 + (224)^2 - 2(132)(224)\cos 28°40'$
$= (132)^2 + (224)^2 - 2(132)(224)(0{,}8774) = 15714$ y $c = 125$.

Para A: $\operatorname{sen} A = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{c} = \dfrac{132 \operatorname{sen} 28°40'}{125} = \dfrac{132(0{,}4797)}{125} = 0{,}5066$ y $A = 30°30'$.

Para B: $\operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} C}{c} = \dfrac{224 \operatorname{sen} 28°40'}{125} = \dfrac{224(0{,}4797)}{125} = 0{,}8596$ y $B = 120°40'$.

(Como $b > a$, A es agudo; como $A + C < 90°$, $B > 90°$.)

Comprobación: $A + B + C = 179°50'$.

Los elementos buscados son $A = 30°30'$, $B = 120°40'$, $c = 125$.

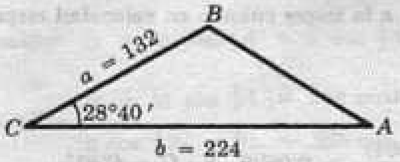


Fig. (c) Prob. 15

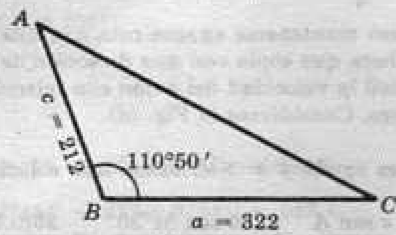


Fig. (d) Prob. 16

16. Resolver el triángulo ABC, dados $a = 322$, $c = 212$ y $B = 110°50'$. Considérese la Fig. (d).

Para b: $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ $\quad[\cos 110°50' = -\cos(180° - 110°50') = -\cos 69°10']$
$= (212)^2 + (322)^2 - 2(212)(322)(-0{,}3557) = 197191$ y $b = 444$.

Para A: $\operatorname{sen} A = \dfrac{a \operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{322 \operatorname{sen} 110°50'}{444} = \dfrac{322(0{,}9346)}{444} = 0{,}6778$ y $A = 42°40'$.

Para C: $\operatorname{sen} C = \dfrac{c \operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{212 \operatorname{sen} 110°50'}{444} = \dfrac{212(0{,}9346)}{444} = 0{,}4463$ y $C = 26°30'$.

Comprobación: $A + B + C = 180°$.

Los elementos buscados son $A = 42°40'$, $C = 26°30'$ y $b = 444$.

17. Sobre un cuerpo se ejercen dos fuerzas de 17,5 kg y 22,5 kg. Si las direcciones de las fuerzas forman un ángulo de 50°10′, encontrar la magnitud de la fuerza resultante y el ángulo que forma con la fuerza mayor.

Considérese la Fig. (e).

En el paralelogramo $ABCD$, $A + B = C + D = 180°$ y $B = 180° - 50°10' = 129°50'$.

En el triángulo ABC,

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ $\quad[\cos 129°50' = -\cos(180° - 129°50') = -\cos 50°10']$
$= (22{,}5)^2 + (17{,}5)^2 - 2(22{,}5)(17{,}5)(-0{,}6406) = 1317$ y $b = 36{,}3$.

$$\operatorname{sen} A = \frac{a \operatorname{sen} B}{b} = \frac{17{,}5 \operatorname{sen} 129°50'}{36{,}3} = \frac{17{,}5(0{,}7679)}{36{,}3} = 0{,}3702 \text{ y } A = 21°40'.$$

La resultante es una fuerza de 36,3 kg; el ángulo buscado es de 21°40′.

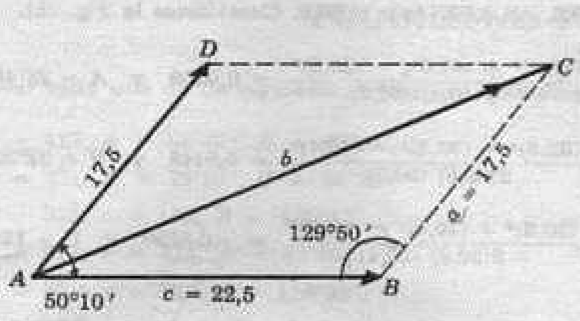


Fig. (e) Prob. 17

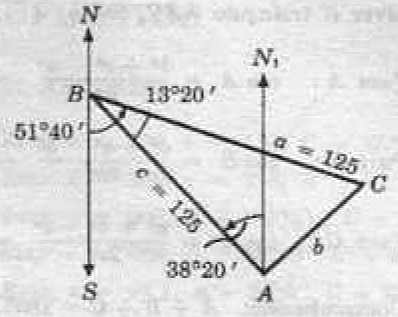


Fig. (f) Prob. 18

18. Un piloto sale de A y vuela 125 millas en dirección N 38°20′ O. Trata, entonces, de regresar al punto de partida, pero, por un error, vuela 125 millas en dirección S 51°40′ E. Calcular a qué distancia se encuentra de A y cuál ha de ser la dirección que ha de tomar ahora para llegar a A.

Considérese la Fig. (f).

Llámese B al punto donde inicia el regreso, y C su posición final.

En el triángulo ABC,

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ &= (125)^2 + (125)^2 - 2(125)(125)\cos 13°20' \\ &= 2(125)^2(1 - 0{,}9730) = 843{,}7 \quad y \quad b = 29{,}0. \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{a \operatorname{sen} B}{b} = \frac{125 \operatorname{sen} 13°20'}{29{,}0} = \frac{125(0{,}2306)}{29{,}0} = 0{,}9940 \quad y \quad A = 83°40'.$$

Puesto que $\angle CAN_1 = A - \angle N_1AB = 45°20'$, el piloto debe volar 29,0 millas en dirección S 45°20′ O para ir desde C hasta A.

CASO IV.

19. Resolver el triángulo ABC, dados $a = 25{,}2$, $b = 37{,}8$ y $c = 43{,}4$. Considérese la Fig. (g).

Para A: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(37{,}8)^2 + (43{,}4)^2 - (25{,}2)^2}{2(37{,}8)(43{,}4)} = 0{,}8160$ y $A = 35°20'$.

Para B: $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \dfrac{(43{,}4)^2 + (25{,}2)^2 - (37{,}8)^2}{2(43{,}4)(25{,}2)} = 0{,}4982$ y $B = 60°10'$.

Para C: $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{(25{,}2)^2 + (37{,}8)^2 - (43{,}4)^2}{2(25{,}2)(37{,}8)} = 0{,}0947$ y $C = 84°30'$.

Comprobación: $A + B + C = 180°$.

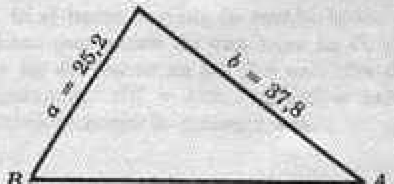


Fig. (g) Prob. 19

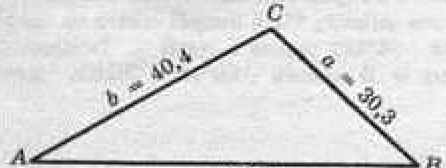


Fig. (h) Prob. 20

20. Resolver el triángulo ABC, dados $a = 30{,}3$, $b = 40{,}4$ y $c = 62{,}6$. Considérese la Fig. (h).

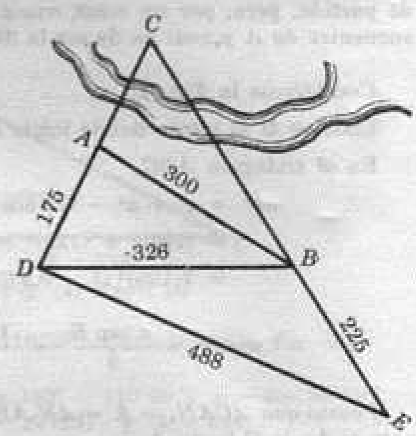
Para A: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{(40{,}4)^2 + (62{,}6)^2 - (30{,}3)^2}{2(40{,}4)\,(62{,}6)} = 0{,}9159$ y $A = 23°40'$.

Para B: $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \dfrac{(62{,}6)^2 + (30{,}3)^2 - (40{,}4)^2}{2(62{,}6)\,(30{,}3)} = 0{,}8448$ y $B = 32°20'$.

Para C: $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{(30{,}3)^2 + (40{,}4)^2 - (62{,}6)^2}{2(30{,}3)\,(40{,}4)} = -0{,}5590$ y $C = 124°0'$.

Comprobación: $A + B + C = 180°$.

21. Es necesario conocer las distancias desde un punto C hasta dos puntos A y B, pero estas distancias no pueden medirse directamente. El segmento CA se prolonga 175 m hasta un punto D; el segmento CB se prolonga 225 m hasta el punto E. Se miden las distancias $AB = 300$ m, $DB = 326$ m y $DE = 488$ m. Encontrar AC y BC.



Los elementos buscados del triángulo ABC pueden encontrarse una vez que se hayan calculado los ángulos $\angle BAC$ y $\angle ABC$. El primer ángulo es el suplemento de $\angle BAD$ y el segundo es el suplemento de la suma de $\angle ABD$ y $\angle DBE$.

En el triángulo ABD, cuyos lados son conocidos,

$$\cos \angle BAD = \frac{(175)^2 + (300)^2 - (326)^2}{2(175)\,(300)} = 0{,}1367 \text{ y}$$

$$\angle BAD = 82°10'.$$

$$\cos \angle ABD = \frac{(300)^2 + (326)^2 - (175)^2}{2(300)\,(326)} = 0{,}8469 \text{ y}$$

$$\angle ABD = 32°10',$$

En el triángulo BDE, cuyos lados son conocidos,

$$\cos \angle DBE = \frac{(225)^2 + (326)^2 - (488)^2}{2(225)\,(326)} = -0{,}5538 \quad \text{y} \quad \angle DBE = 123°40'.$$

En el triángulo ABC: $AB = 300$, $\angle BAC = 180° - \angle BAD = 97°50'$,
$\angle ABC = 180° - (\angle ABD + \angle DBE) = 24°10'$,
$\angle ACB = 180° - (\angle BAC + \angle ABC) = 58°0'$.

Entonces $$AC = \frac{AB \operatorname{sen} \angle ABC}{\operatorname{sen} \angle ACB} = \frac{300 \operatorname{sen} 24°10'}{\operatorname{sen} 58°0'} = \frac{300(0{,}4094)}{0{,}8480} = 145$$

y $$BC = \frac{AB \operatorname{sen} \angle BAC}{\operatorname{sen} \angle ACB} = \frac{300 \operatorname{sen} 97°50'}{\operatorname{sen} 58°0'} = \frac{300(0{,}9907)}{0{,}8480} = 350.$$

Las distancias buscadas son $AC = 145$ m y $BC = 350$ m.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver cada uno de los siguientes triángulos oblicuángulos ABC, dados:

22. $a = 125$, $A = 54°40'$, $B = 65°10'$. *Resp.* $b = 139$, $c = 133$, $C = 60°10'$
23. $b = 321$, $A = 75°20'$, $C = 38°30'$. *Resp.* $a = 339$, $c = 218$, $B = 66°10'$
24. $b = 215$, $c = 150$, $B = 42°40'$. *Resp.* $a = 300$, $A = 109°10'$, $C = 28°10'$
25. $a = 512$, $b = 426$, $A = 48°50'$. *Resp.* $c = 680$, $B = 38°50'$, $C = 92°20'$
26. $b = 50{,}4$, $c = 33{,}3$, $B = 118°30'$. *Resp.* $a = 25{,}1$, $A = 26°0'$, $C = 35°30'$
27. $b = 40{,}2$, $a = 31{,}5$, $B = 112°20'$. *Resp.* $c = 15{,}7$, $A = 46°30'$, $C = 21°10'$
28. $b = 51{,}5$, $a = 62{,}5$, $B = 40°40'$. *Resp.* $c = 78{,}9$, $A = 52°20'$, $C = 87°0'$
    $c' = 16{,}0$, $A' = 127°40'$, $C' = 11°40'$
29. $a = 320$, $c = 475$, $A = 35°20'$. *Resp.* $b = 552$, $B = 85°30'$, $C = 59°10'$
    $b' = 224$, $B' = 23°50'$, $C' = 120°50'$
30. $b = 120$, $c = 270$, $A = 118°40'$. *Resp.* $a = 344$, $B = 17°50'$, $C = 43°30'$
31. $a = 24{,}5$, $b = 18{,}6$, $c = 26{,}4$. *Resp.* $A = 63°10'$, $B = 42°40'$, $C = 74°10'$
32. $a = 6{,}34$, $b = 7{,}30$, $c = 9{,}98$. *Resp.* $A = 39°20'$, $B = 46°50'$, $C = 93°50'$

33. Dos barcos tienen equipos de radio cuyo alcance es de 200 millas. Uno de los barcos se encuentra a 155 millas N 42°40′ E de una estación costera, y el otro se encuentra a 165 millas N 45°10′ O de la misma estación. ¿Pueden los dos barcos comunicarse entre sí directamente?
Resp. No; la distancia entre ellos es de 222 millas

34. Un barco navega 15,0 millas en dirección S 40°10′ O y, después, 21,0 millas en dirección N 28°20′ O. Encontrar a qué distancia está del punto de partida y cuál es su orientación respecto a dicho punto.
Resp. 20,9 millas, N 70°40′ O

35. Un faro está situado a 10 millas al noroeste de un muelle. Un barco sale del muelle a las 9 a.m. y navega hacia el oeste a razón de 12 millas por hora. ¿A qué hora se encontrará a 8 millas del faro?
Resp. A las 9:16 a.m. y a las 9:54 a.m.

36. La magnitud de la resultante de dos fuerzas de 115 kg y 215 kg es de 275 kg. Encontrar el ángulo formado por las direcciones de las fuerzas componentes. *Resp.* 70°50′

37. Una torre de 150 pies de altura está situada en lo alto de una colina. En un punto, en la falda de la colina, situado a 650 pies de la cima se observa que el ángulo formado por la ladera de la colina y la visual dirigida al extremo superior de la torre es de 12°30′. Encontrar la inclinación de la ladera de la colina respecto a un plano horizontal. *Resp.* 7°50′

38. Tres circunferencias, cuyos radios respectivos miden 115, 150 y 225 cm, son tangentes exteriores entre sí. Encontrar los ángulos que se forman cuando se unen los centros de las circunferencias.
Resp. 43°10′, 61°20′, 75°30′

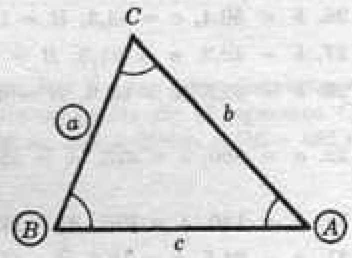
39. Se supone que un barco que sale de A y que toma un rumbo de 255°, ha de llegar a D, situado a 525 millas de A, al cabo de 25 horas. Cuando el barco ha recorrido 125 millas, recibe la orden de dirigirse hacia C, situado a 225 millas de A, en dirección S 60°20′ O, y hacer una escala antes de seguir hacia D. Si el barco cambia de rumbo inmediatamente, mantiene durante el resto del viaje su velocidad inicial y hace una escala de una hora en C, ¿con cuántas horas de atraso llegará a D? ¿Cuáles son los rumbos que ha de tomar en los dos cambios de dirección efectuados? *Resp.* 2 horas; 223°30′, 265°30′
Sugerencia: $BC = 109$, $\angle ABC = 148°30'$; $CD = 312$, $\angle BDC = 10°30'$, siendo B el punto donde cambió el curso la primera vez.

CAPITULO 14

Resolución logarítmica de triángulos oblicuángulos

CASO I. Dados dos ángulos y un lado.

Se resuelve el triángulo mediante la relación angular $A + B + C = 180°$, y una doble aplicación de la ley de los senos. La solución se comprueba por una de las fórmulas de Mollweide.



EJEMPLO 1. Sean dados a, A y B. Entonces,

$$C = 180° - (A + B), \quad b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}, \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

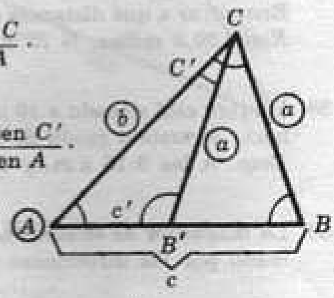
Comprobación: $(b + c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}A = a \cos \frac{1}{2}(B - C)$, si $B > C$;

ó $(c + b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}A = a \cos \frac{1}{2}(C - B)$, si $C > B$.

(Véanse los problemas 1-3.)

CASO II. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Se resuelve el triángulo mediante la ley de los senos y la relación angular. La solución se comprueba por una de las fórmulas de Mollweide.



EJEMPLO 2. Sean dados a, b y A, donde $a < b$. Entonces,

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}, \quad C = 180° - (A + B), \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

Cuando hay dos soluciones,

$$B' = 180° - B, \quad C' = 180° - (A + B'), \quad c' = \frac{a \operatorname{sen} C'}{\operatorname{sen} A}.$$

Comprobación: $(b + a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}C = c \cos \frac{1}{2}(B - A)$,

$(b + a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}C' = c' \cos \frac{1}{2}(B' - A)$.

(Véanse los problemas 4-5.)

LEY DE LAS TANGENTES. La ley de los cosenos, estudiada en el capítulo anterior, no se adapta a los cálculos con logaritmos. Para resolver el caso III, se utiliza la ley de las tangentes

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A - B)}{\tan \frac{1}{2}(A + B)}, \quad \frac{b - c}{b + c} = \frac{\tan \frac{1}{2}(B - C)}{\tan \frac{1}{2}(B + C)}, \quad \frac{c - a}{c + a} = \frac{\tan \frac{1}{2}(C - A)}{\tan \frac{1}{2}(C + A)}.$$

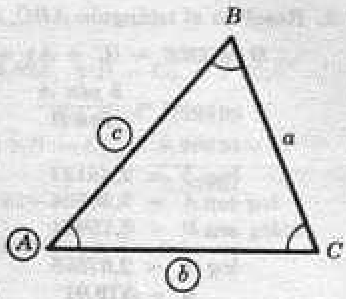
En el problema 6 se encuentra la demostración de esta ley.

Nota. Si, por ejemplo, $b > a$ es más conveniente intercambiar las letras a y b (también A y B) en la primera fórmula.

CASO III. Dados dos lados y el ángulo comprendido.

En la resolución del triángulo se utiliza la ley de las tangentes para encontrar los ángulos desconocidos. Después se aplica la ley de los senos para encontrar el lado desconocido. Se comprueba la solución mediante una de las fórmulas de Mollweide.

EJEMPLO 3. Sean dados $c > b$ y A. Entonces,



$$\tfrac{1}{2}(C + B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}A,$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(C - B) = \frac{c - b}{c + b} \tan \tfrac{1}{2}(C + B), \qquad a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}.$$

Comprobación: $(c + b) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = a \cos \tfrac{1}{2}(C - B)$.

(Véanse los problemas 7-9.)

FORMULAS DEL ANGULO MITAD. En todo triángulo ABC,

$$\tan \tfrac{1}{2}A = \frac{r}{s - a}, \qquad \tan \tfrac{1}{2}B = \frac{r}{s - b}, \qquad \tan \tfrac{1}{2}C = \frac{r}{s - c}$$

donde $s = \tfrac{1}{2}(a + b + c)$ es el semi-perímetro del triángulo

y $r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ es el radio de la circunferencia inscrita.

En el problema 10 se encuentran las demostraciones de estas fórmulas. Para la identificación de r, véase el problema 8, del capítulo 15.

CASO IV. Dados los tres lados.

Se resuelve mediante las fórmulas del ángulo mitad, y se comprueba la solución por medio de la relación angular.

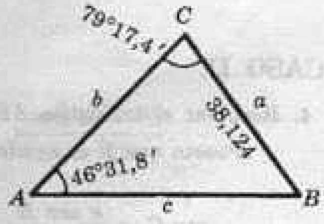
(Véanse los problemas 11-12.)

PROBLEMAS RESUELTOS

CASO I.

1. Resolver el triángulo ABC, dados $a = 38{,}124$, $A = 46^\circ 31{,}8'$ y $C = 79^\circ 17{,}4'$.

$B = 180^\circ - (A + C) = 54^\circ 10{,}8'$.



$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \qquad\qquad b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

$$\begin{array}{rcl} \log a & = & 1{,}58120 \\ \log \operatorname{sen} C & = & 9{,}99237-10 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} A & = & 0{,}13922 \\ \hline \log c & = & 1{,}71279 \\ c & = & 51{,}617 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \log a & = & 1{,}58120 \\ \log \operatorname{sen} B & = & 9{,}90894-10 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} A & = & 0{,}13922 \\ \hline \log b & = & 1{,}62936 \\ b & = & 42{,}595 \end{array}$$

Comprobación: $(c + b) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = a \cos \tfrac{1}{2}(C - B)$

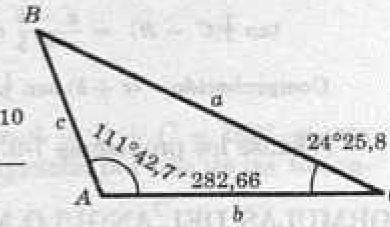
$c + b = 94{,}212$, $\tfrac{1}{2}A = 23^\circ 15{,}9'$ $\qquad$ $a = 38{,}124$, $\tfrac{1}{2}(C - B) = 12^\circ 33{,}3'$

$$\begin{array}{rcl} \log (c + b) & = & 1{,}97411 \\ \log \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A & = & 9{,}59658-10 \\ \hline & & 1{,}57069 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} \log a & = & 1{,}58120 \\ \log \cos \tfrac{1}{2}(C - B) & = & 9{,}98949-10 \\ \hline & & 1{,}57069 \end{array}$$

2. Resolver el triángulo ABC, dados $b = 282{,}66$, $A = 111°42{,}7'$ y $C = 24°25{,}8'$.

$B = 180° - (C + A) = 43°51{,}5'$.

$$a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B} \qquad c = \frac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B}$$



$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}45127 \\ \log \text{sen } A &= 9{,}96804 - 10 \\ \text{colog sen } B &= 0{,}15934 \\ \hline \log a &= 2{,}57865 \\ a &= 379{,}01 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log b &= 2{,}45127 \\ \log \text{sen } C &= 9{,}61656 - 10 \\ \text{colog sen } B &= 0{,}15934 \\ \hline \log c &= 2{,}22717 \\ c &= 168{,}72 \end{aligned}$$

Comprobación: $\qquad (a + c) \text{ sen } \frac{1}{2}B = b \cos \frac{1}{2}(A - C)$

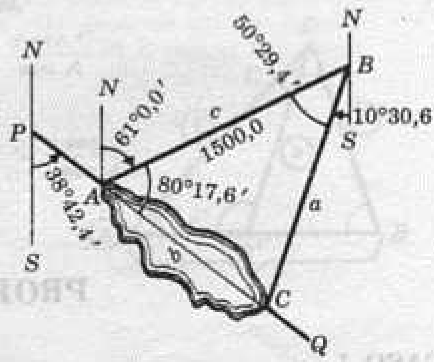
$$\begin{aligned} a + c = 547{,}73, \quad \tfrac{1}{2}B &= 21°55{,}8' \\ \log (a + c) &= 2{,}73856 \\ \log \text{sen } \tfrac{1}{2}B &= 9{,}57226 - 10 \\ \hline & 2{,}31082 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b = 282{,}66, \quad \tfrac{1}{2}(A - C) &= 43°38{,}4' \\ \log b &= 2{,}45127 \\ \log \cos \tfrac{1}{2}(A - C) &= 9{,}85955 - 10 \\ \hline & 2{,}31082 \end{aligned}$$

3. A partir de un punto P, un agrimensor camina a lo largo de una recta PQ, cuya dirección es S 38°42,4′ E, hasta encontrar un pantano. Al llegar al punto A, en la orilla del pantano, cambia su dirección hacia N 61°0,0′ E y recorre 1500,0 m hasta un punto B. Desde este punto localiza la otra orilla del pantano en una dirección S 10°30,6′ O. Si esta recta corta a PQ en el punto C, encontrar la distancia entre B y C, el ángulo que debe girar desde BC para continuar su recorrido sobre la recta original, y la distancia AC a través del pantano.

En el triángulo ABC,

$A = 80°17{,}6'$, $B = 50°29{,}4'$ y $c = 1500{,}0$ m.

Entonces $C = 180° - (A + B) = 49°13{,}0'$.



$$a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C} \qquad b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C}$$

$$\begin{aligned} \log c &= 3{,}17609 \\ \log \text{sen } A &= 9{,}99374 - 10 \\ \text{colog sen } C &= 0{,}12080 \\ \hline \log a &= 3{,}29063 \\ a &= 1952{,}7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log c &= 3{,}17609 \\ \log \text{sen } B &= 9{,}88734 - 10 \\ \text{colog sen } C &= 0{,}12080 \\ \hline \log b &= 3{,}18423 \\ b &= 1528{,}4 \end{aligned}$$

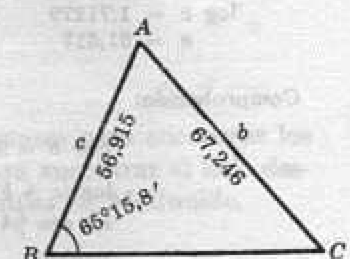
La distancia desde B hasta C es de 1952,7 m. El ángulo que el agrimensor debe girar al llegar a C es $\angle BCQ = 180° - \angle ACB = 130°47{,}0'$. La distancia a través del pantano es de 1528,4 m.

CASO II.

4. Resolver el triángulo ABC, dados $b = 67{,}246$, $c = 56{,}915$ y $B = 65°15{,}8'$.

Puesto que B es agudo y $b > c$, la solución es única.

$$\text{sen } C = \frac{c \text{ sen } B}{b} \qquad a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B}$$



$$\begin{aligned} \log c &= 1{,}75522 \\ \log \text{sen } B &= 9{,}95820 - 10 \\ \text{colog } b &= 8{,}17233 - 10 \\ \hline \log \text{sen } C &= 9{,}88575 - 10 \\ C &= 50°14{,}2' \\ A &= 180° - (B + C) = 64°30{,}0' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log b &= 1{,}82767 \\ \log \text{sen } A &= 9{,}95549 - 10 \\ \text{colog sen } B &= 0{,}04180 \\ \hline \log a &= 1{,}82496 \\ a &= 66{,}828 \end{aligned}$$

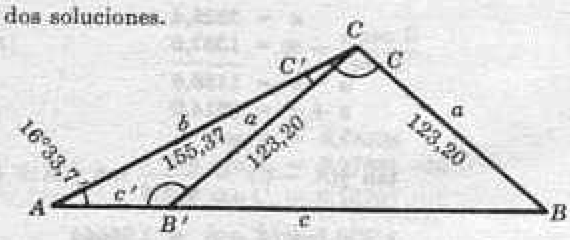
Comprobación: $(b+c)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}A = a\cos\frac{1}{2}(B-C)$

$b+c = 124{,}16,\quad \frac{1}{2}A = 32°15{,}0'$ $\qquad a = 66{,}828,\quad \frac{1}{2}(B-C) = 7°30{,}8'$

$$\begin{array}{rcl} \log\,(b+c) &=& 2{,}09398 \\ \log\text{sen}\,\frac{1}{2}A &=& \underline{9{,}72723-10} \\ && 1{,}82121 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \log a &=& 1{,}82496 \\ \log\cos\frac{1}{2}(B-C) &=& \underline{9{,}99625-10} \\ && 1{,}82121 \end{array}$$

5. Resolver el triángulo ABC, dados $a = 123{,}20$, $b = 155{,}37$, $A = 16°33{,}7'$.

Puesto que A es agudo y $a < b$, pueden existir dos soluciones.



$$\text{sen}\,B = \frac{b\,\text{sen}\,A}{a}$$

$$\begin{array}{rcl} \log b &=& 2{,}19137 \\ \log\text{sen}\,A &=& 9{,}45491-10 \\ \text{colog}\,a &=& \underline{7{,}90939-10} \\ \log\text{sen}\,B &=& 9{,}55567-10 \\ B &=& 21°4{,}1' \\ C &=& 180° - (A+B) = 142°22{,}2' \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} B' &=& 180° - B = 158°55{,}9' \\ C' &=& 180° - (A+B') = 4°30{,}4' \end{array}$$

$$c = \frac{a\,\text{sen}\,C}{\text{sen}\,A} \qquad\qquad c' = \frac{a\,\text{sen}\,C'}{\text{sen}\,A}$$

$$\begin{array}{rcl} \log a &=& 2{,}09061 \\ \log\text{sen}\,C &=& 9{,}78573-10 \\ \text{colog sen}\,A &=& \underline{0{,}54509} \\ \log c &=& 2{,}42143 \\ c &=& 263{,}89 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \log a &=& 2{,}09061 \\ \log\text{sen}\,C' &=& 8{,}89528-10 \\ \text{colog sen}\,A &=& \underline{0{,}54509} \\ \log c' &=& 1{,}53098 \\ c' &=& 33{,}961 \end{array}$$

Comprobación:

$(b+a)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}C = c\cos\frac{1}{2}(B-A)$

$b+a = 278{,}57,\quad \frac{1}{2}C = 71°11{,}1'$

$c = 263{,}89,\quad \frac{1}{2}(B-A) = 2°15{,}2'$

$$\begin{array}{rcl} \log\,(b+a) &=& 2{,}44494 \\ \log\text{sen}\,\frac{1}{2}C &=& \underline{9{,}97615-10} \\ && 2{,}42109 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log c &=& 2{,}42143 \\ \log\cos\frac{1}{2}(B-A) &=& \underline{9{,}99967-10} \\ && 2{,}42110 \end{array}$$

Comprobación:

$(b+a)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}C' = c'\cos\frac{1}{2}(B'-A)$

$b+a = 278{,}57,\quad \frac{1}{2}C' = 2°15{,}2'$

$c' = 33{,}961,\quad \frac{1}{2}(B'-A) = 71°11{,}1'$

$$\begin{array}{rcl} \log\,(b+a) &=& 2{,}44494 \\ \log\text{sen}\,\frac{1}{2}C' &=& \underline{8{,}59459-10} \\ && 1{,}03953 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log c' &=& 1{,}53098 \\ \log\cos\frac{1}{2}(B'-A) &=& \underline{9{,}50854-10} \\ && 1{,}03952 \end{array}$$

6. Deducir la ley de las tangentes.

En todo triángulo ABC son válidas las fórmulas de Mollweide:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} \qquad \text{y} \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}C}.$$

Al dividir la primera por la segunda se obtiene,

$$\frac{a-b}{c}\cdot\frac{c}{a+b} = \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}\cdot\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)} = \tan\tfrac{1}{2}(A-B)\cdot\tan\tfrac{1}{2}C.$$

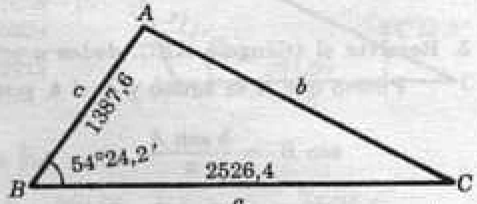
Como $C = 180° - (A+B)$, $\frac{1}{2}C = 90° - \frac{1}{2}(A+B)$ y $\tan\frac{1}{2}C = \cot\frac{1}{2}(A+B) = \dfrac{1}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$.

Así, $$\frac{a-b}{a+b} = \tan\tfrac{1}{2}(A-B)\cdot\tan\tfrac{1}{2}C = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Las otras dos expresiones se pueden obtener por un procedimiento semejante a éste, o por un intercambio cíclico de las letras que aparecen en la fórmula obtenida.

CASO III.

7. Resolver el triángulo ABC, dados $a = 2526{,}4$, $c = 1387{,}6$, $B = 54°24{,}2'$.



$$A + C = 180° - B = 125°35{,}8'$$
$$\tfrac{1}{2}(A + C) = 62°47{,}9'$$

$$\begin{aligned} a &= 2526{,}4 \\ c &= 1387{,}6 \\ a - c &= 1138{,}8 \\ a + c &= 3914{,}0 \end{aligned}$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(A - C) = \frac{a - c}{a + c} \tan \tfrac{1}{2}(A + C)$$

$$\begin{aligned} \log (a - c) &= 3{,}05644 \\ \text{colog } (a + c) &= 6{,}40738 - 10 \\ \log \tan \tfrac{1}{2}(A+C) &= 0{,}28907 \\ \log \tan \tfrac{1}{2}(A-C) &= 9{,}75289 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(A-C) &= 29°30{,}8' \\ \tfrac{1}{2}(A+C) &= 62°47{,}9' \\ A &= 92°18{,}7' \\ C &= 33°17{,}1' \end{aligned}$$

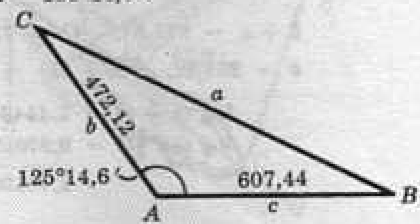
$$b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C}$$

$$\begin{aligned} \log c &= 3{,}14227 \\ \log \text{sen } B &= 9{,}91016 - 10 \\ \text{colog sen } C &= 0{,}26058 \\ \log b &= 3{,}31301 \\ b &= 2056{,}0 \end{aligned}$$

Comprobación: Se deja al estudiante la comprobación de la solución mediante la fórmula de Mollweide,

$$(a + c) \text{ sen } \tfrac{1}{2}B = b \cos \tfrac{1}{2}(A - C).$$

8. Resolver el triángulo ABC, dados $b = 472{,}12$, $c = 607{,}44$, $A = 125°14{,}6'$.



$$C + B = 180° - A = 54°45{,}4'$$
$$\tfrac{1}{2}(C + B) = 27°22{,}7'$$

$$\begin{aligned} c &= 607{,}44 \\ b &= 472{,}12 \\ c - b &= 135{,}32 \\ c + b &= 1079{,}56 = 1079{,}6 \end{aligned}$$

$$\tan \tfrac{1}{2}(C - B) = \frac{c - b}{c + b} \tan \tfrac{1}{2}(C + B)$$

$$\begin{aligned} \log (c - b) &= 2{,}13136 \\ \text{colog } (c + b) &= 6{,}96674 - 10 \\ \log \tan \tfrac{1}{2}(C+B) &= 9{,}71422 - 10 \\ \log \tan \tfrac{1}{2}(C-B) &= 8{,}81232 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(C-B) &= 3°42{,}8' \\ \tfrac{1}{2}(C+B) &= 27°22{,}7' \\ C &= 31°\ 5{,}5' \\ B &= 23°39{,}9' \end{aligned}$$

$$a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{en } B}$$

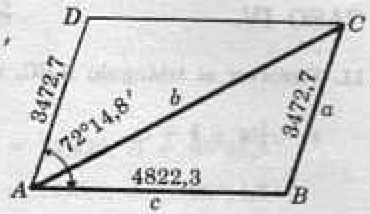
$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}67405 \\ \log \text{sen } A &= 9{,}91207 - 10 \\ \text{colog sen } B &= 0{,}39644 \\ \log a &= 2{,}98256 \\ a &= 960{,}64 \end{aligned}$$

Comprobación: Para comprobar la solución se utiliza la fórmula de Mollweide

$$(c + b) \text{ sen } \tfrac{1}{2}A = a \cos \tfrac{1}{2}(C - B).$$

9. Dos lados adyacentes de un paralelogramo miden 3472,7 y 4822,3 cm respectivamente y el ángulo comprendido mide 72°14,8'. Encontrar la longitud de la diagonal mayor.

En el triángulo ABC: $B = 180° - 72°14{,}8' = 107°45{,}2'$
$C + A = 72°14{,}8'$, $\frac{1}{2}(C+A) = 36°7{,}4'$



$$\begin{aligned} c &= 4822{,}3 \\ a &= 3472{,}7 \\ \hline c-a &= 1349{,}6 \\ c+a &= 8295{,}0. \end{aligned}$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(C-A) = \frac{c-a}{c+a}\tan\tfrac{1}{2}(C+A) \qquad\qquad b = \frac{c\ \text{sen}\ B}{\text{sen}\ C}$$

$$\begin{aligned} \log\,(c-a) &= 3{,}13020 \\ \text{colog}\,(c+a) &= 6{,}08118-10 \\ \log\tan\tfrac{1}{2}(C+A) &= 9{,}86322-10 \\ \hline \log\tan\tfrac{1}{2}(C-A) &= 9{,}07460-10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log c &= 3{,}68326 \\ \log\ \text{sen}\ B &= 9{,}97881-10 \\ \text{colog sen}\ C &= 0{,}16707 \\ \hline \log b &= 3{,}82914 \\ b &= 6747{,}4\ \text{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(C-A) &= 6°46{,}3' \\ \tfrac{1}{2}(C+A) &= 36°\ 7{,}4' \\ \hline C &= 42°53{,}7' \\ A &= 29°21{,}1' \end{aligned}$$

Comprobación: $(c+a)\ \text{sen}\ \frac{1}{2}B = b\cos\frac{1}{2}(C-A)$

$$\begin{aligned} \log\,(c+a) &= 3{,}91882 \\ \log\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}B &= 9{,}90727-10 \\ \hline & \ 3{,}82609 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log b &= 3{,}82914 \\ \log\cos\tfrac{1}{2}(C-A) &= 9{,}99696-10 \\ \hline & \ 3{,}82610 \end{aligned}$$

10. Deducir las fórmulas del ángulo mitad.

Sea ABC un triángulo cualquiera. Entonces, $\tan\frac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$ puesto que $\frac{1}{2}A$ es agudo.

Según la ley de los cosenos, $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ de modo que

$$1-\cos A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc} = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{2bc}$$

$$\text{y}\ \ 1+\cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{2bc}.$$

Sea $a+b+c = 2s$; entonces, $a-b+c = (a+b+c)-2b = 2s-2b = 2(s-b)$, $a+b-c = 2(s-c)$, $b+c-a = 2(s-a)$, y,

$$\tan\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \sqrt{\frac{(a-b+c)\,(a+b-c)}{2bc}\cdot\frac{2bc}{(b+c+a)\,(b+c-a)}} = \sqrt{\frac{2(s-b)\cdot 2(s-c)}{2s\cdot 2(s-a)}}$$

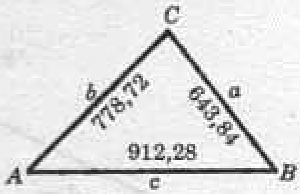
$$= \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s(s-a)^2}} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}.$$

Finalmente, tomando $r = \sqrt{\dfrac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$, $\tan\frac{1}{2}A = \dfrac{r}{s-a}$. Las otras fórmulas se obtienen por un intercambio cíclico de las letras que aparecen en la fórmula obtenida.

CASO IV.

11. Resolver el triángulo ABC, dados $a = 643,84$, $b = 778,72$, $c = 912,28$.

$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ $\qquad$ $r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$



$a = 643,84$	$s-a = 523,58$	$\log(s-a) = 2,71898$
$b = 778,72$	$s-b = 388,70$	$\log(s-b) = 2,58961$
$c = 912,28$	$s-c = 255,14$	$\log(s-c) = 2,40678$
$2s = 2334,84$	$s = 1167,42$	$\text{colog}\ s = 6,93278-10$
$s = 1167,42$		$2\log r = 4,64815$
		$\log r = 2,32408$

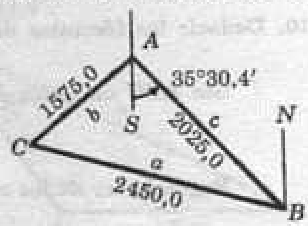
$\tan\frac{1}{2}A = \dfrac{r}{s-a}$ $\qquad$ $\tan\frac{1}{2}B = \dfrac{r}{s-b}$ $\qquad$ $\tan\frac{1}{2}C = \dfrac{r}{s-c}$

$\log r = 2,32408$	$\log r = 2,32408$	$\log r = 2,32408$
$\log(s-a) = 2,71898$	$\log(s-b) = 2,58961$	$\log(s-c) = 2,40678$
$\log\tan\frac{1}{2}A = 9,60510-10$	$\log\tan\frac{1}{2}B = 9,73447-10$	$\log\tan\frac{1}{2}C = 9,91730-10$
$\frac{1}{2}A = 21°56,4'$	$\frac{1}{2}B = 28°29,0'$	$\frac{1}{2}C = 39°34,7'$
$A = 43°52,8'$	$B = 56°58,0'$	$C = 79°9,4'$

Comprobación: $A + B + C = 180°0,2'$.

12. Los lados de un campo triangular miden, respectivamente, 2025,0, 2450,0 y 1575,0 m según se muestra en la figura adjunta. Si la dirección del lado AB es S 35°30,4′ E, encontrar la dirección de los otros dos lados.

$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ $\qquad$ $r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$



$a = 2450,0$	$s-a = 575$	$\log(s-a) = 2,75967$
$b = 1575,0$	$s-b = 1450$	$\log(s-b) = 3,16137$
$c = 2025,0$	$s-c = 1000$	$\log(s-c) = 3,00000$
$2s = 6050,0$	$s = 3025$	$\text{colog}\ s = 6,51927-10$
$s = 3025,0$		$2\log r = 5,44031$
		$\log r = 2,72016$

$\tan\frac{1}{2}A = \dfrac{r}{s-a}$ $\qquad$ $\tan\frac{1}{2}B = \dfrac{r}{s-b}$ $\qquad$ $\tan\frac{1}{2}C = \dfrac{r}{s-c}$

$\log r = 2,72016$	$\log r = 2,72016$	$\log r = 2,72016$
$\log(s-a) = 2,75967$	$\log(s-b) = 3,16137$	$\log(s-c) = 3,00000$
$\log\tan\frac{1}{2}A = 9,96049-10$	$\log\tan\frac{1}{2}B = 9,55879-10$	$\log\tan\frac{1}{2}C = 9,72016-10$
$\frac{1}{2}A = 42°23,8'$	$\frac{1}{2}B = 19°54,2'$	$\frac{1}{2}C = 27°42,0'$
$A = 84°47,6'$	$B = 39°48,4'$	$C = 55°24,0'$

$\angle SAC = 84°47,6' - 35°30,4' = 49°17,2'$; la dirección de AC es S 49°17,2′ O.

$\angle NBC = 35°30,4' + 39°48,4' = 75°18,8'$; la dirección de BC es N 75°18,8′ O.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver cada uno de los triángulos oblicuángulos ABC, dados:

13. $c = 78{,}753$, $A = 33°9{,}9'$, $C = 81°24{,}6'$. *Resp.* $a = 43{,}571$, $b = 72{,}432$, $B = 65°25{,}5'$
14. $b = 730{,}80$, $B = 42°12{,}8'$, $C = 109°32{,}5'$. *Resp.* $a = 514{,}73$, $c = 1025{,}0$, $A = 28°14{,}7'$
15. $a = 31{,}259$, $A = 57°59{,}9'$, $C = 23°36{,}6'$. *Resp.* $b = 36{,}466$, $c = 14{,}763$, $B = 98°23{,}5'$
16. $b = 13{,}218$, $c = 10{,}004$, $B = 25°57{,}2'$. *Resp.* $a = 21{,}467$, $A = 134°42{,}2'$, $C = 19°20{,}6'$
17. $b = 10{,}884$, $c = 35{,}730$, $C = 115°33{,}8'$. *Resp.* $a = 29{,}658$, $A = 48°29{,}2'$, $B = 15°57{,}0'$
18. $b = 86{,}425$, $c = 73{,}463$, $C = 49°18{,}9'$. *Resp.* $a = 89{,}534$, $B = 63°8{,}3'$, $A = 67°32{,}8'$
    $a' = 23{,}147$, $B' = 116°51{,}7'$, $A' = 13°49{,}4'$
19. $a = 12{,}695$, $c = 15{,}873$, $A = 24°7{,}4'$. *Resp.* $b = 25{,}399$, $B = 125°8{,}7'$, $C = 30°43{,}9'$
    $b' = 3{,}5745$, $B' = 6°36{,}5'$, $C' = 149°16{,}1'$
20. $a = 482{,}33$, $c = 395{,}71$, $B = 137°31{,}2'$. *Resp.* $b = 819{,}00$, $A = 23°26{,}2'$, $C = 19°2{,}6'$
21. $b = 561{,}23$, $c = 387{,}19$, $A = 56°43{,}8'$. *Resp.* $a = 475{,}89$, $B = 80°24{,}4'$, $C = 42°51{,}8'$
22. $a = 123{,}79$, $b = 264{,}23$, $c = 256{,}04$. *Resp.* $A = 27°28{,}2'$, $B = 79°57{,}0'$, $C = 72°34{,}8'$
23. $a = 1894{,}3$, $b = 2246{,}5$, $c = 3548{,}8$. *Resp.* $A = 28°11{,}8'$, $B = 34°4{,}8'$, $C = 117°43{,}2'$

24. Un poste, que se aparta $10°15'$ de la vertical hacia la región donde está el Sol, proyecta una sombra de 40,75 pies de longitud, cuando el ángulo de elevación del Sol es de $40°35'$. Encontrar la longitud del poste. *Resp.* 41,97 pies

25. Dos observadores, A y B, se encuentran a una distancia de 2875 m uno del otro en un terreno plano. Ambos observadores miden el ángulo de elevación de un aeroplano que vuela sobre el espacio comprendido entre ellos. El ángulo de elevación medido por A es de $62°45'$, y el medido por B es de $50°54'$. Encontrar las distancias respectivas desde A y B hasta el aeroplano, y la distancia a que éste vuela sobre la superficie de la tierra. *Resp.* 2436 m, 2790 m, 2165 m

26. Se va a construir un túnel a través de una montaña desde A hasta B. Un punto C que es visible desde A y B se encuentra a 384,8 m de A, y 555,6 m de B. ¿Cuál es la longitud del túnel si $\angle ACB = 35°42'$? *Resp.* 330,9 m

27. Supóngase que la distancia de la Tierra al Sol es de 92.897.000 millas, y de Mercurio al Sol es de 35.960.000 millas. Encontrar las posibles distancias entre la Tierra y Mercurio cuando el ángulo formado por Mercurio y el Sol, con la Tierra como vértice, es de $8°24{,}6'$. *Resp.* 58.600.000 ó 125.190.000 millas

28. Un punto B es inaccesible e invisible desde un punto A. Para encontrar la distancia entre A y B, se escogen dos puntos, C y D, alineados con A y que son visibles desde B, de tal manera que $\angle ADB = 55°18'$ y $\angle ACB = 41°36'$. Si $AD = 432{,}3$ m y $AC = 521{,}8$ m, encontrar la longitud de AB. *Resp.* 529,1 m

CAPITULO 15

Areas. Radios de las circunferencias inscrita y circunscrita

EL AREA K DE UN TRIANGULO CUALQUIERA es igual al semi-producto de su base por su altura. A continuación se ofrecen las fórmulas aplicables a cada uno de los cuatro casos de triángulos oblicuángulos.

CASO I. Dados dos ángulos y un lado.

$$K = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A} = \frac{b^2 \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A}{2 \operatorname{sen} B} = \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C}$$

Para la deducción de estas fórmulas véase el problema 2.

(Véase también el problema 5.)

CASO II. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

La ley de los senos permite encontrar un segundo ángulo. Después, se aplica la fórmula correspondiente al caso I.

(Véase el problema 6.)

CASO III. Dados dos lados y el ángulo comprendido.

$$K = \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \tfrac{1}{2}ca \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} C.$$

La deducción de estas fórmulas aparece en el problema 1.

(Véase, además, el problema 4.)

CASO IV. Dados los tres lados.

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ donde } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

La deducción se encuentra en el problema 3.

(Véase, además, el problema 7.)

EN TODO TRIANGULO ABC,

a) el radio R de la circunferencia circunscrita es

$$R = \frac{a}{2 \operatorname{sen} A} = \frac{b}{2 \operatorname{sen} B} = \frac{c}{2 \operatorname{sen} C}.$$

b) el radio r de la circunferencia inscrita es

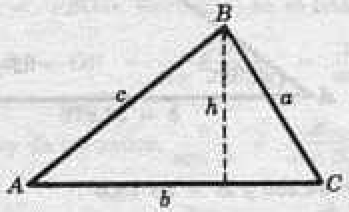
$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \text{ donde } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

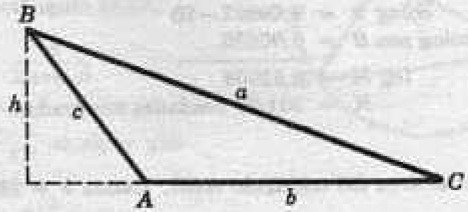
Para la demostración de estas proposiciones véase el problema 8.

(Véanse, además, los problemas 9-10.)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir la fórmula $K = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$.





Denomínese h la altura trazada sobre el lado b del triángulo ABC. En ambas figuras se tiene que $h = c \operatorname{sen} A$. Así, $K = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$.

2. Deducir la fórmula $K = \dfrac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C}$.

Según el problema 1, $K = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$; y, por la ley de los senos, $b = \dfrac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$.

Entonces, $K = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2}\dfrac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}\, c \operatorname{sen} A = \dfrac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C}$.

3. Deducir la fórmula $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

De las deducciones obtenidas en el problema 10, del capítulo 14,

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}(1 - \cos A) = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{2(s-b)\cdot 2(s-c)}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

y $$\cos^2 \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}(1 + \cos A) = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc} = \frac{2s\cdot 2(s-a)}{4bc} = \frac{s(s-a)}{bc}.$$

Puesto que $\frac{1}{2}A < 90°$, $\operatorname{sen} \frac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ y $\cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$. Entonces

$$K = \tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = bc \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}A = bc \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

4. Encontrar el área del triángulo ABC, dados $a = 16{,}384$, $b = 55{,}726$ y $C = 27°15{,}3'$.

Este problema corresponde al caso III, con lo que $K = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$.

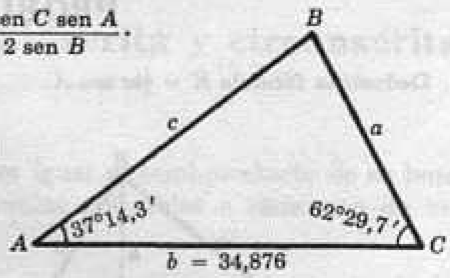
$$\begin{aligned} \log a &= 1{,}21442 \\ \log b &= 1{,}74606 \\ \log \operatorname{sen} C &= 9{,}66082 - 10 \\ \operatorname{colog} 2 &= 9{,}69897 - 10 \\ \hline \log K &= 2{,}32027 \\ K &= 209{,}06 \end{aligned}$$

El área es de 209,06 unidades cuadradas.

5. Encontrar el área del triángulo ABC, dados $A = 37°14{,}3'$, $C = 62°29{,}7'$ y $b = 34{,}876$.

$B = 180° - (A + C) = 80°16{,}0'$.

Este problema corresponde al caso I, con lo que $K = \dfrac{b^2 \text{ sen } C \text{ sen } A}{2 \text{ sen } B}$.

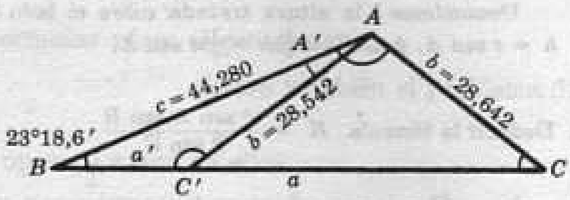


$$\begin{aligned}
2 \log b &= 3{,}08506 \\
\log \text{sen } C &= 9{,}94791-10 \\
\log \text{sen } A &= 9{,}78185-10 \\
\text{colog } 2 &= 9{,}69897-10 \\
\text{colog sen } B &= 0{,}00630 \\
\hline
\log K &= 2{,}52009 \\
K &= 331{,}20 \text{ unidades cuadradas}
\end{aligned}$$

6. Encontrar el área del triángulo ABC, dados $b = 28{,}642$, $c = 44{,}280$ y $B = 23°18{,}6'$.

Este problema corresponde al caso II en el que pueden existir dos soluciones.

$$\text{sen } C = \frac{c \text{ sen } B}{b}$$



$$\begin{aligned}
\log c &= 1{,}64621 \\
\log \text{sen } B &= 9{,}59737-10 \\
\text{colog } b &= 8{,}54300-10 \\
\hline
\log \text{sen } C &= 9{,}78658-10
\end{aligned}$$

$$C = 37°43{,}0' \text{ y } C' = 180° - C = 142°17{,}0'$$
$$A = 180° - (B + C) = 118°58{,}4' \text{ y } A' = 180° - (B + C') = 14°24{,}4'$$

El área de ABC es $K = \dfrac{c^2 \text{ sen } A \text{ sen } B}{2 \text{ sen } C}$.

$$\begin{aligned}
2 \log c &= 3{,}29242 \\
\log \text{sen } A &= 9{,}94193-10 \\
\log \text{sen } B &= 9{,}59737-10 \\
\text{colog } 2 &= 9{,}69897-10 \\
\text{colog sen } C &= 0{,}21342 \\
\hline
\log K &= 2{,}74411 \\
K &= 554{,}76
\end{aligned}$$

El área de ABC' es $K = \dfrac{c^2 \text{ sen } A' \text{ sen } B}{2 \text{ sen } C'}$.

$$\begin{aligned}
2 \log c &= 3{,}29242 \\
\log \text{sen } A' &= 9{,}39586-10 \\
\log \text{sen } B &= 9{,}59737-10 \\
\text{colog } 2 &= 9{,}69897-10 \\
\text{colog sen } C' &= 0{,}21342 \\
\hline
\log K &= 2{,}19804 \\
K &= 157{,}78
\end{aligned}$$

Se han determinado dos triángulos cuyas áreas son, respectivamente, 554,76 y 157,78 unidades cuadradas.

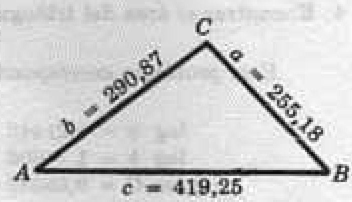
7. Encontrar el área del triángulo ABC, dados $a = 255{,}18$, $b = 290{,}87$ y $c = 419{,}25$.

Este problema corresponde al caso IV, con lo que $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c) \qquad K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\begin{aligned}
a &= 255{,}18 & s - a &= 227{,}47 \\
b &= 290{,}87 & s - b &= 191{,}78 \\
c &= 419{,}25 & s - c &= 63{,}40 \\
\hline
2s &= 965{,}30 & s &= 482{,}65 \\
s &= 482{,}65
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log (s-a) &= 2{,}35692 \\
\log (s-b) &= 2{,}28280 \\
\log (s-c) &= 1{,}80209 \\
\log s &= 2{,}68364 \\
\hline
2 \log K &= 9{,}12545 \\
\log K &= 4{,}56272 \\
K &= 36{,}536
\end{aligned}$$

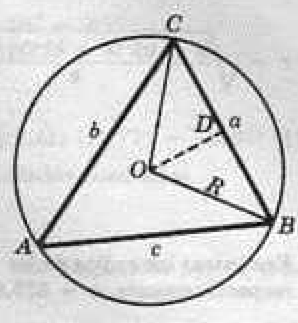


El área es 36,536 unidades cuadradas.

8. Demostrar que, en todo triángulo ABC,

a) el radio R de la circunferencia circunscrita viene dado por $R = \dfrac{a}{2 \text{ sen } A} = \dfrac{b}{2 \text{ sen } B} = \dfrac{c}{2 \text{ sen } C}$ y

b) el radio r de la circunferencia inscrita viene dado por $r = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)/s}$.



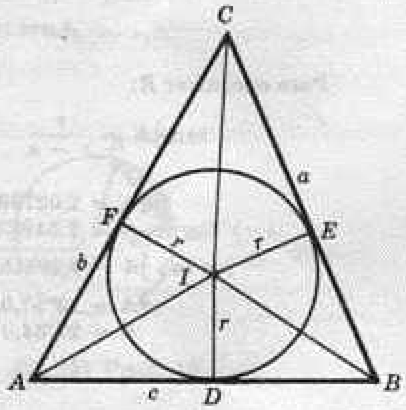
a) Sea O el centro de la circunferencia circunscrita. Unase O con B y con C, trácese desde O una perpendicular a BC. Sea D el pie de esta perpendicular. Puesto que el triángulo OBC es isósceles, OD biseca a BC.

Como $A = \angle BAC$ y $\angle BOC$ comprenden el mismo arco, $A = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BOD$. Entonces, en el triángulo rectángulo BOD,

$$R = OB = \frac{BD}{\text{sen } \angle BOD} = \frac{a/2}{\text{sen } A} = \frac{a}{2 \text{ sen } A}.$$

De la ley de los senos, $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B} = \dfrac{c}{\text{sen } C}$, se sigue que

$$R = \frac{a}{2 \text{ sen } A} = \frac{b}{2 \text{ sen } B} = \frac{c}{2 \text{ sen } C}.$$



b) Denomínese I el centro de la circunferencia inscrita (I es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo ABC), y sean D, E y F los puntos de tangencia de la circunferencia y el triángulo. Como I equidista de los lados del triángulo,

$$ID = IE = IF = r.$$

Entonces K = área ABC = área AIB + área BIC + área CIA

$$= \tfrac{1}{2}cr + \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br$$
$$= \tfrac{1}{2}r(a + b + c) = \tfrac{1}{2}r(2s) = rs.$$

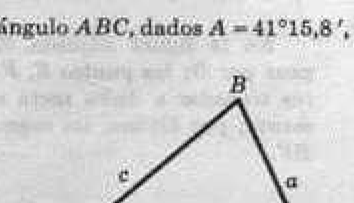
Ahora bien, según el problema 3,

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rs. \text{ Entonces,}$$

$$r = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

9. Encontrar los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita en el triángulo ABC, dados $A = 41°15{,}8'$, $C = 69°52{,}4'$ y $b = 387{,}48$.

$$B = 180° - (C + A) = 68°51{,}8'$$



Para encontrar R: $R = \dfrac{b}{2 \text{ sen } B}$

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}58825 \\ \text{colog } 2 &= 9{,}69897-10 \\ \text{colog sen } B &= 0{,}03025 \\ \hline \log R &= 2{,}31747 \\ R &= 207{,}71 \end{aligned}$$

Para encontrar r:

$$a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B} \qquad\qquad c = \frac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B}$$

$$\begin{aligned} \log b &= 2{,}58825 \\ \log \text{sen } A &= 9{,}81923-10 \\ \text{colog sen } B &= 0{,}03025 \\ \hline \log a &= 2{,}43773 \\ a &= 273{,}99 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \log b &= 2{,}58825 \\ \log \text{sen } C &= 9{,}97264-10 \\ \text{colog sen } B &= 0{,}03025 \\ \hline \log c &= 2{,}59114 \\ c &= 390{,}07 \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$a = 273{,}99$	$s-a = 251{,}78$	$\log(s-a) = 2{,}40102$	
$b = 387{,}48$	$s-b = 138{,}29$	$\log(s-b) = 2{,}14079$	
$c = 390{,}07$	$s-c = 135{,}70$	$\log(s-c) = 2{,}13258$	
$2s = 1051{,}54$	$s = 525{,}77$	$\operatorname{colog} s = 7{,}27920-10$	
$s = 525{,}77$		$2\log r = 3{,}95359$	
		$\log r = 1{,}97680$	
		$r = 94{,}798$	

10. Encontrar los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita en el triángulo ABC, cuyos lados miden, respectivamente, $a = 375{,}68$, $b = 512{,}37$ y $c = 742{,}05$.

Para encontrar r:

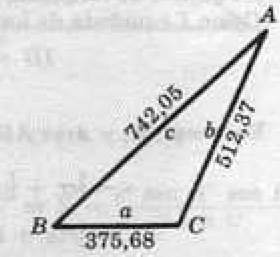
$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$a = 375{,}68$	$s-a = 439{,}37$	$\log(s-a) = 2{,}64283$	
$b = 512{,}37$	$s-b = 302{,}68$	$\log(s-b) = 2{,}48098$	
$c = 742{,}05$	$s-c = 73{,}00$	$\log(s-c) = 1{,}86332$	
$2s = 1630{,}10$	$s = 815{,}05$	$\operatorname{colog} s = 7{,}08882-10$	
$s = 815{,}05$		$2\log r = 4{,}07595$	
		$\log r = 2{,}03798$	
		$r = 109{,}14$	

Para encontrar R:

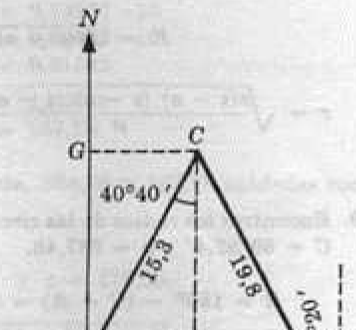
$$\tan \tfrac{1}{2}A = \frac{r}{s-a} \qquad\qquad R = \frac{a}{2 \operatorname{sen} A}$$

$\log r = 2{,}03798$	$\log a = 2{,}57482$
$(-)\ \log(s-a) = 2{,}64283$	$\operatorname{colog} 2 = 9{,}69897-10$
$\log \tan \frac{1}{2}A = 9{,}39515-10$	$\operatorname{colog} \operatorname{sen} A = 0{,}32982$
$\frac{1}{2}A = 13°57{,}0'$	$\log R = 2{,}60361$
$A = 27°54{,}0'$	$R = 401{,}43$



11. En un terreno cuadrangular $ABCD$, el lado AB mide 11,4 unidades lineales con una dirección N 62°10′ E, el lado BC mide 19,8 con una dirección N 22°20′ O, el lado CD mide 15,3 con una dirección S 40°40′ O y el lado DA, cuya longitud no se conoce, tiene una dirección S 32°10′ E. Encontrar:
a) la longitud de DA,
b) el área del terreno.

En la figura adjunta, SN representa la recta norte-sur que pasa por D; los puntos E, F y G son los pies de las perpendiculares trazadas a dicha recta desde los puntos A, B y C respectivamente; por último, los segmentos AH y CI son perpendiculares a BF.



a)
$$\begin{aligned} FB &= FI + IB = GC + IB \\ &= 15{,}3 \operatorname{sen} 40°40' + 19{,}8 \operatorname{sen} 22°20' \\ &= 9{,}97 + 7{,}52 = 17{,}49. \end{aligned}$$
$FB = FH + HB = EA + HB$; de donde
$$\begin{aligned} EA &= FB - HB \\ &= 17{,}49 - 11{,}4 \operatorname{sen} 62°10' = 17{,}49 - 10{,}08 = 7{,}41. \end{aligned}$$

Puesto que $EA = DA \operatorname{sen} 32°10'$, $DA = \dfrac{7{,}41}{\operatorname{sen} 32°10'} = 13{,}9$ unidades lineales.

b)
$$\begin{aligned} \text{Area } ABCD &= \text{área } EABF + \text{área } FBCG - \text{área } EAD - \text{área } GCD \\ &= \tfrac{1}{2}(EA + FB)AH + \tfrac{1}{2}(FB + GC)CI - \tfrac{1}{2}EA \cdot ED - \tfrac{1}{2}GC \cdot GD. \end{aligned}$$

Además, $EA = 7,41$, $FB = 17,49$, $AH = 11,4 \cos 62°10' = 5,32$, $GC = 9,97$,
$CI = 19,8 \cos 22°20' = 18,32$, $ED = 13,9 \cos 32°10' = 11,77$,
$GD = 15,3 \cos 40°40' = 11,61$. Entonces:

$$\text{Area } ABCD = \tfrac{1}{2}(7,41 + 17,49)(5,32) + \tfrac{1}{2}(17,49 + 9,97)(18,32) - \tfrac{1}{2}(7,41)(11,77) - \tfrac{1}{2}(9,97)(11,61)$$
$$= 66,23 + 251,53 - 43,61 - 57,88 = 216,27 \text{ ó } 216 \text{ unidades cuadradas.}$$

12. Demostrar que el área de un cuadrilátero es igual al semi-producto de sus diagonales por el seno del ángulo determinado por ellas. Véase la figura (a).

Sea O el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $ABCD$, y sea θ uno de los ángulos determinados por la intersección de las diagonales. El punto O divide a cada diagonal en dos segmentos cuyas respectivas longitudes son p, q; y r, s, según se muestra en la figura.

$$\begin{aligned}\text{Area } ABCD &= \text{área } AOB + \text{área } AOD + \text{área } BOC + \text{área } DOC \\ &= \tfrac{1}{2}rp \operatorname{sen}\theta + \tfrac{1}{2}qr \operatorname{sen}(180° - \theta) + \tfrac{1}{2}ps \operatorname{sen}(180° - \theta) + \tfrac{1}{2}qs \operatorname{sen}\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(pr + qr + ps + qs)\operatorname{sen}\theta = \tfrac{1}{2}(p+q)(r+s)\operatorname{sen}\theta.\end{aligned}$$

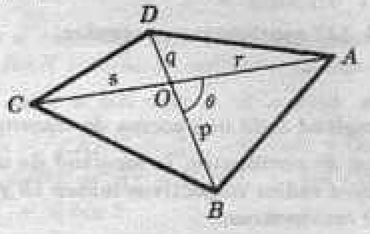


Fig. (a) Prob. 12

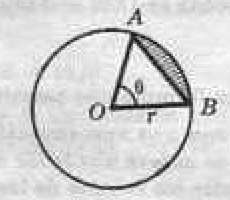


Fig. (b) Prob. 13

13. Demostrar que, en un círculo de radio r y centro O, el área K del segmento menor (sombreado) determinado por la cuerda AB de la figura (b), que aparece anteriormente, viene dada por $K = \frac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, donde θ radianes es el ángulo central correspondiente a dicha cuerda.

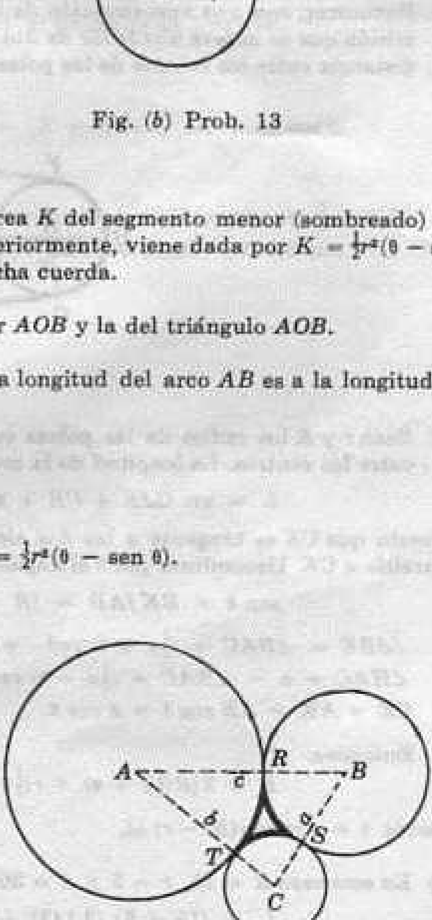
El área buscada es la diferencia entre el área del sector AOB y la del triángulo AOB.

El área S del sector AOB es al área del círculo como la longitud del arco AB es a la longitud de la circunferencia; es decir, $\dfrac{S}{\pi r^2} = \dfrac{r\theta}{2\pi r}$ y $S = \frac{1}{2}r^2\theta$.

El área del triángulo $AOB = \frac{1}{2}r \cdot r \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\theta$.

Entonces, $$K = \tfrac{1}{2}r^2\theta - \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\theta = \tfrac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen}\theta).$$

14. Tres circunferencias que son tangentes exteriores dos a dos tienen por centros los puntos A, B y C. Los radios de las circunferencias miden, respectivamente, 50, 30 y 20 centímetros. Encontrar el área del triángulo *curvilíneo* determinado por las tres circunferencias.



Sean R, S y T los puntos de tangencia de las circunferencias, según se muestra en la figura. El área pedida es la diferencia entre el área del triángulo ABC y la suma de las áreas de los tres sectores ART, BRS y SCT.

Como el segmento que une los centros de dos circunferencias cualesquiera pasa por el punto de tangencia, $a = BC = 50$, $b = CA = 70$ y $c = AB = 80$ cm. Entonces,

$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c) = 100,\quad s-a = 50,\quad s-b = 30,\quad s-c = 20,\ \text{y}$$

$$K = \text{área } ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{100\,(50)\,(30)\,(20)} = 1000\sqrt{3} = 1732.$$

Puesto que $r = K/s = 17{,}32$,

$$\tan\tfrac{1}{2}A = \frac{r}{s-a} = \frac{17{,}32}{50} = 0{,}3464,\quad \tfrac{1}{2}A = 19°6',\quad A = 38°12' = 0{,}667 \text{ rad},$$

$$\tan\tfrac{1}{2}B = \frac{r}{s-b} = \frac{17{,}32}{30} = 0{,}5773,\quad \tfrac{1}{2}B = 30°0',\quad B = 60°0' = 1{,}047 \text{ rad},$$

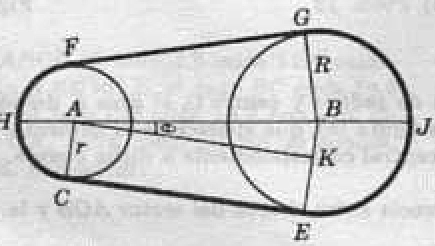
$$\tan\tfrac{1}{2}C = \frac{r}{s-c} = \frac{17{,}32}{20} = 0{,}8660,\quad \tfrac{1}{2}C = 40°54',\ C = 81°48' = 1{,}428 \text{ rad}.$$

Area $ART = \frac{1}{2}r^2\theta = (50)^2\,(0{,}667) = 833{,}75$, área $BRS = (30)^2\,(1{,}047) = 471{,}15$, área $CST = \frac{1}{2}(20)^2\,(1{,}428) = 285{,}60$, cuya suma es $1590{,}50$.

El área buscada es $1732 - 1590{,}50 = 141{,}50$ ó 142 centímetros cuadrados.

15. *a*) Deducir una fórmula que permita calcular la longitud L de una correa de transmisión sencilla.

b) Encontrar, con una aproximación de una décima de centímetro, la longitud de una correa de transmisión que se mueve alrededor de dos poleas cuyos radios respectivos miden 15 y 5 centímetros, si la distancia entre los centros de las poleas es de 30 centímetros.



a) Sean r y R los radios de las poleas cuyos centros son, respectivamente, A y B, y sea d la distancia entre los centros. La longitud de la correa es

$$L = \text{arc } GJE + CE + \text{arc } CHF + FG = 2(\text{arc } JE + \text{arc } CH + CE).$$

Puesto que CE es tangente a las dos circunferencias, AC y BE son paralelos. Trácese el segmento AK paralelo a CE. Denomínese por θ el ángulo BAK medido en radianes. Entonces,

$$\text{sen }\theta = BK/AB = (R-r)/d \quad \text{y} \quad \theta = \text{Arc sen}(R-r)/d.$$

$\angle JBE = \angle BAC = (\frac{1}{2}\pi + \theta)$ rad, y arc $JE = R(\frac{1}{2}\pi + \theta)$ unidades de longitud.
$\angle HAC = \pi - \angle BAC = (\frac{1}{2}\pi - \theta)$ rad, y arc $CH = r(\frac{1}{2}\pi - \theta)$ unidades de longitud.
$CE = AK = AB\cos\theta = d\cos\theta$.

Entonces,

$$L = 2[R(\tfrac{1}{2}\pi + \theta) + r(\tfrac{1}{2}\pi - \theta) + d\cos\theta] = (R+r)\pi + 2(R-r)\theta + 2d\cos\theta,$$

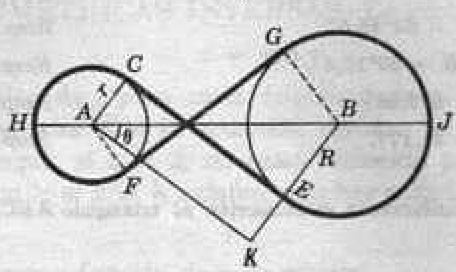
donde $\theta = \text{Arc sen}(R-r)/d$.

b) En este caso $R = 15$, $r = 5$ y $d = 30$; entonces, $\theta = \text{Arc sen}(R-r)/d = \text{Arc sen } 1/3 = 0{,}340$ rad y

$$L = (15+5)\,(3{,}142) + 2(15-5)\,(0{,}340) + 2(30)\,(2\sqrt{2}/3)$$
$$= 62{,}84 + 6{,}80 + 56{,}56 = 126{,}2 \text{ cm}.$$

16. *a*) Deducir una fórmula que permita calcular la longitud L de una correa de transmisión que se cruza entre las poleas.

b) Encontrar, con una aproximación de una décima de centímetro, la longitud de una polea de transmisión cruzada que se mueve alrededor de dos poleas cuyos radios respectivos miden 10 y 5 centímetros, si la distancia entre los centros de las poleas es de 30 centímetros.



a) Sean r y R los radios de las poleas cuyos centros son, respectivamente, A y B, y sea d la distancia entre los centros. La longitud de la correa es

$$L = 2(\text{arc } JE + \text{arc } CH + CE).$$

Prolónguese el radio BE de manera que pueda trazarse el segmento AK paralelo a CE. Denomínese por θ el ángulo BAK medido en radianes. Entonces,

$$\text{sen } \theta = BK/AB = (R + r)/d \quad \text{y} \quad \theta = \text{Arc sen}(R + r)/d.$$

$\angle JBE = \pi - \angle ABE = (\frac{1}{2}\pi + \theta)$ rad, y arc $JE = R(\frac{1}{2}\pi + \theta)$ unidades de longitud.

$\angle HAC = \angle JBE = (\frac{1}{2}\pi + \theta)$ rad, y arc $CH = r(\frac{1}{2}\pi + \theta)$ unidades de longitud.

$CE = AK = d \cos \theta$.

Entonces,

$$L = 2\,[R(\tfrac{1}{2}\pi + \theta) + r(\tfrac{1}{2}\pi + \theta) + d \cos \theta] = (R + r)\,(\pi + 2\theta) + 2d \cos \theta,$$

donde $\theta = \text{Arc sen}(R + r)/d$.

b) En este caso $R = 10$, $r = 5$ y $d = 30$; entonces $\theta = \text{Arc sen}(R + r)/d = \text{Arc sen } \frac{1}{2} = 0{,}524$ rad y

$$L = (10 + 5)\,(\pi + 1{,}048) + 2(30)\,(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) = 62{,}85 + 51{,}96 = 114{,}8 \text{ cm}.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

Encontrar el área del triángulo ABC, dados:

17. $b = 23{,}84$, $c = 35{,}26$, $A = 50°32'$. *Resp.* 324,5 unidades cuadradas
18. $a = 456{,}32$, $b = 586{,}84$, $C = 28°16{,}6'$. *Resp.* 63430 unidades cuadradas
19. $a = 512{,}32$, $B = 52°14{,}6'$, $C = 63°45{,}6'$. *Resp.* 103,550 unidades cuadradas
20. $b = 444{,}85$, $A = 110°15{,}8'$, $B = 30°10{,}4'$. *Resp.* 117,620 unidades cuadradas
21. $a = 384{,}22$, $b = 492{,}86$, $c = 677{,}98$. *Resp.* 93,094 unidades cuadradas
22. $a = 28{,}165$, $b = 60{,}152$, $c = 51{,}177$. *Resp.* 718,85 unidades cuadradas

23. Encontrar el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, si $b = 28{,}944$ y $B = 37°14{,}4'$.
Resp. 23,914

24. Encontrar el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, si $a = 5{,}478$, $b = 4{,}823$ y $c = 6{,}019$.
Resp. 1,532

25. Los lados de un terreno triangular miden, respectivamente, 48,50, 64,70 y 88,80 metros. Encontrar: *a*) el mínimo radio de riego de un rociador automático que pueda alcanzar todos los puntos del terreno, y *b*) el máximo radio que puede tener un jardín circular cultivado dentro del terreno.
Resp. *a*) 45,46 metros, *b*) 15,17 metros

26. Si, dado un triángulo ABC, K es el área del triángulo, R el radio de la circunferencia circunscrita, y r el radio de la circunferencia inscrita, demostrar que:
   a) $K = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$,
   b) $K = abc/4R$,
   c) $K = rR(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)$.

CAPITULO 16

Funciones trigonométricas inversas

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS. La ecuación

1) $$x = \operatorname{sen} y$$

define un único valor de x para cada ángulo dado y. Ahora bien, cuando se da un valor de x, puede suceder que la ecuación carezca de solución o que tenga muchas soluciones. Por ejemplo, si $x = 2$, no existe solución porque el seno de un ángulo no puede ser mayor que 1; si $x = \frac{1}{2}$, existen muchas soluciones $y = 30°, 150°, 390°, 510°, -210°, -330°, \ldots$

Para expresar y como función de x, se escribe

2) $$y = \operatorname{arc\,sen} x.$$

Sin hacer caso de la abreviatura *arc*, la ecuación 2) debe interpretarse como "y es el ángulo cuyo seno es x". Del mismo modo se escribe $y = \operatorname{arc\,cos} x$ si $x = \cos y$, $y = \operatorname{arc\,tan} x$ si $x = \tan y$, etc.

La notación $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, $y = \cos^{-1} x$, etc., (léase "seno inverso de x, coseno inverso de x", etc.) se utiliza con menos frecuencia porque $\operatorname{sen}^{-1} x$ puede confundirse con $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = (\operatorname{sen} x)^{-1}$.

GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS. La gráfica de $y = \operatorname{arc\,sen} x$ es la gráfica de $x = \operatorname{sen} y$, y se diferencia de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ vista en el capítulo 9, en que están intercambiados los papeles de x y y. Así, la gráfica de $y = \operatorname{arc\,sen} x$ es una sinusoide trazada sobre el eje Y en vez de estar trazada sobre el eje X.

Del mismo modo, las gráficas de las restantes funciones trigonométricas inversas son las gráficas de las correspondientes funciones trigonométricas, excepto que están intercambiados los papeles de x y y.

VALORES PRINCIPALES. Es necesario considerar las funciones trigonométricas inversas como funciones unívocas (esto es, un único valor de y para cada valor posible de x). Para conseguir este tipo de relación es necesario escoger un solo ángulo de los muchos que corresponden a un valor dado de x. Por ejemplo, cuando $x = \frac{1}{2}$, se puede seleccionar el valor $y = 30°$, y cuando $x = -\frac{1}{2}$, se puede seleccionar el valor $y = -30°$. Este valor seleccionado recibe el nombre de *valor principal* del arc sen x. Cuando la función trigonométrica inversa se refiere únicamente al valor principal, se escribe Arc sen x, Arc cos x, etc. Las regiones de las gráficas que corresponden a los valores principales de cada una de las funciones trigonométricas inversas se señalan con una línea gruesa en las figuras que aparecen más adelante.

Cuando x es positivo o cero y existe la función inversa, se define el valor principal como el valor de y comprendido entre 0 y $\frac{1}{2}\pi$ inclusive. Por ejemplo:

$$\operatorname{Arc\,sen} \sqrt{3}/2 = \pi/3 \text{ puesto que } \operatorname{sen} \pi/3 = \sqrt{3}/2 \text{ y } 0 < \pi/3 < \pi/2,$$
$$\operatorname{Arc\,cos} \sqrt{3}/2 = \pi/6 \text{ puesto que } \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2 \text{ y } 0 < \pi/6 < \pi/2,$$
$$\operatorname{Arc\,tan} 1 = \pi/4 \quad \text{ puesto que } \tan \pi/4 = 1 \text{ y } 0 < \pi/4 < \pi/2.$$

Cuando x es negativo y existe la función inversa, se define el valor principal como sigue:

$$-\tfrac{1}{2}\pi \leqq \text{Arc sen } x < 0 \qquad \tfrac{1}{2}\pi < \text{Arc cot } x < \pi$$

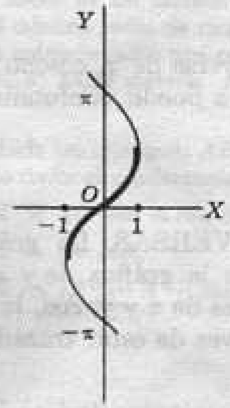
$$\tfrac{1}{2}\pi < \text{Arc cos } x \leqq \pi \qquad -\pi \leqq \text{Arc sec } x < -\tfrac{1}{2}\pi$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \text{Arc tan } x < 0 \qquad -\pi < \text{Arc csc } x \leqq -\tfrac{1}{2}\pi$$

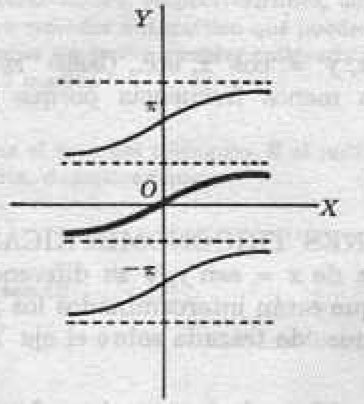
Por ejemplo:

$$\text{Arc sen}(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3 \qquad \text{Arc cot}(-1) = 3\pi/4$$
$$\text{Arc cos}(-1/2) = 2\pi/3 \qquad \text{Arc sec}(-2/\sqrt{3}) = -5\pi/6$$
$$\text{Arc tan}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6 \qquad \text{Arc csc}(-\sqrt{2}) = -3\pi/4$$

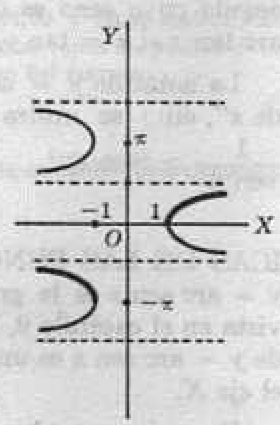
Nota. Existe una diversidad de opiniones en los autores al definir el valor principal de las funciones inversas cuando x es negativo. Las definiciones dadas anteriormente son las más convenientes para el cálculo.



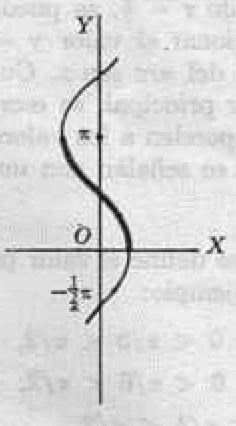
y = arc sen x



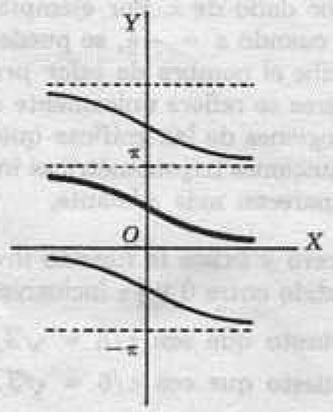
y = arc tan x



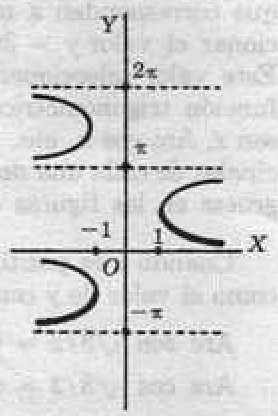
y = arc sec x



y = arc cos x



y = arc cot x



y = arc csc x

VALORES GENERALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS.

Sea y una función trigonométrica inversa de x. Como se conoce el valor de una función trigonométrica de y, quedan determinadas, en general, dos posiciones del lado final del ángulo y (véase el capítulo 2). Sean y_1 y y_2 los ángulos determinados por las dos posiciones posibles del lado final. Entonces, el conjunto de valores posibles de y está constituido por los ángulos y_1, y_2, y por todos los ángulos cofinales con ellos, esto es,

$$y_1 + 2n\pi \quad \text{y} \quad y_2 + 2n\pi$$

donde n es cualquier número entero positivo, negativo o cero.

Uno de los valores de y_1 o y_2 puede tomarse como el valor principal de la función trigonométrica inversa.

EJEMPLO. Expresar el valor general de *a*) arc sen $1/2$, *b*) arc $\cos(-1)$, *c*) arc $\tan(-1)$.

a) El valor principal de arc sen $1/2$ es $\pi/6$, y un segundo valor (que no es cofinal con el valor principal) es $5\pi/6$. El valor general de arc sen $1/2$ viene dado por

$$\pi/6 + 2n\pi, \quad 5\pi/6 + 2n\pi$$

donde n es cualquier número entero positivo, negativo o cero.

b) El valor principal es π y no existe otro valor cofinal con él. Así, el valor general viene dado por $\pi + 2n\pi$, donde n es cualquier entero positivo, negativo o cero.

c) El valor principal es $-\pi/4$, y un segundo valor (que no es cofinal con el valor principal) es $3\pi/4$. Así, el valor general viene dado por

$$-\pi/4 + 2n\pi, \; 3\pi/4 + 2n\pi$$

donde n es cualquier número entero positivo, negativo o cero.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encontrar el valor principal de cada una de las siguientes funciones trigonométricas.

a) Arc sen $0 = 0$
b) Arc $\cos(-1) = \pi$
c) Arc tan $\sqrt{3} = \pi/3$
d) Arc cot $\sqrt{3} = \pi/6$
e) Arc sec $2 = \pi/3$
f) Arc $\csc(-\sqrt{2}) = -3\pi/4$
g) Arc cos $0 = \pi/2$
h) Arc sen$(-1) = -\pi/2$
i) Arc $\tan(-1) = -\pi/4$
j) Arc cot $0 = \pi/2$
k) Arc $\sec(-\sqrt{2}) = -3\pi/4$
l) Arc $\csc(-2) = -5\pi/6$

2. Expresar el valor principal, con aproximación de un minuto, de cada una de las siguientes funciones trigonométricas inversas.

a) Arc sen $0{,}3333 = 19°28'$
b) Arc cos $0{,}4000 = 66°25'$
c) Arc tan $1{,}5000 = 56°19'$
d) Arc cot $1{,}1875 = 40°\ 6'$
e) Arc sec $1{,}0324 = 14°24'$
f) Arc csc $1{,}5082 = 41°32'$
g) Arc sen$(-0{,}6439) = -40°5'$
h) Arc $\cos(-0{,}4519) = 116°52'$
i) Arc $\tan(-1{,}4400) = -55°13'$
j) Arc $\cot(-0{,}7340) = 126°17'$
k) Arc $\sec(-1{,}2067) = -145°58'$
l) Arc $\csc(-4{,}1923) = -166°12'$

3. Verificar cada una de las siguientes igualdades.

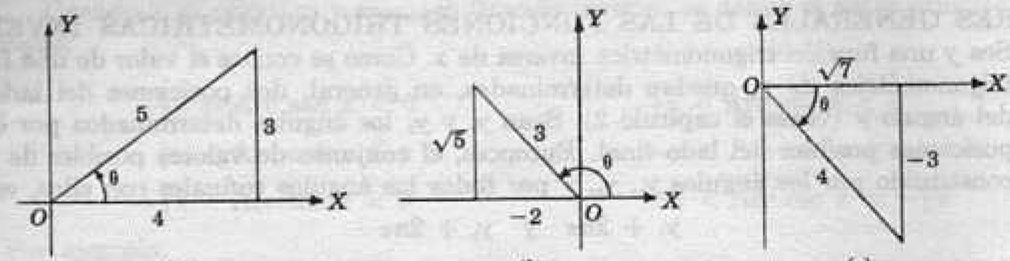
a) sen(Arc sen $1/2$) $=$ sen $\pi/6 = 1/2$
b) cos [Arc $\cos(-1/2)$] $= \cos 2\pi/3 = -1/2$
c) cos [Arc sen$(-\sqrt{2}/2)$] $= \cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$
d) Arc sen(sen $\pi/3$) $=$ Arc sen $\sqrt{3}/2 = \pi/3$
e) Arc cos $[\cos(-\pi/4)] =$ Arc cos $\sqrt{2}/2 = \pi/4$
f) Arc sen(tan $3\pi/4$) $=$ Arc sen$(-1) = -\pi/2$
g) Arc cos $[\tan(-5\pi/4)] =$ Arc $\cos(-1) = \pi$

4. Verificar cada una de las siguientes igualdades.

a) Arc sen $\sqrt{2}/2$ $-$ Arc sen $1/2 = \pi/4 - \pi/6 = \pi/12$
b) Arc cos 0 $+$ Arc $\tan(-1) = \pi/2 + (-\pi/4) = \pi/4 =$ Arc tan 1

5. Evaluar cada una de las siguientes expresiones:

a) cos(Arc sen $3/5$), *b*) sen [Arc $\cos(-2/3)$], *c*) tan [Arc sen$(-3/4)$].



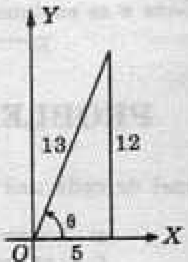
(*a*) (*b*) (*c*)

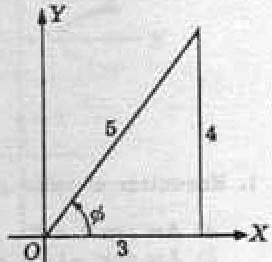
a) Sea $\theta = \text{Arc sen } 3/5$; entonces $\text{sen } \theta = 3/5$, θ en el primer cuadrante. Según la Fig. (*a*),
$$\cos(\text{Arc sen } 3/5) = \cos\theta = 4/5.$$

b) Sea $\theta = \text{Arc cos}(-2/3)$; entonces $\cos\theta = -2/3$, θ en el segundo cuadrante. Según la Fig. (*b*),
$$\text{sen}\,[\text{Arc cos}(-2/3)] = \text{sen}\,\theta = \sqrt{5}/3.$$

c) Sea $\theta = \text{Arc sen}(-3/4)$; entonces $\text{sen}\,\theta = -3/4$, θ en el cuarto cuadrante. Según la Fig. (c),
$$\tan[\,\text{Arc sen}(-3/4)\,] = \tan\theta = -3/\sqrt{7} = -3\sqrt{7}/7.$$

6. Evaluar sen(Arc sen 12/13 + Arc sen 4/5).



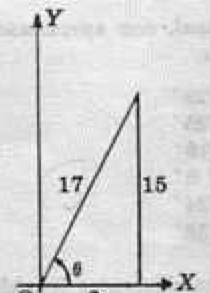


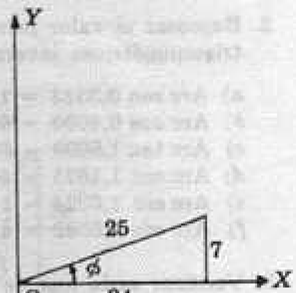
Sea $\theta = \text{Arc sen } 12/13$ y
$\phi = \text{Arc sen } 4/5$.

Entonces $\text{sen}\,\theta = 12/13$ y $\text{sen}\,\phi = 4/5$, θ y ϕ en el primer cuadrante. Según las figuras adjuntas,

$$\begin{aligned}\text{sen}(\text{Arc sen } 12/13 + \text{Arc sen } 4/5) &= \text{sen}(\theta+\phi)\\ &= \text{sen}\,\theta\cos\phi + \cos\theta\,\text{sen}\,\phi\\ &= \frac{12}{13}\cdot\frac{3}{5} + \frac{5}{13}\cdot\frac{4}{5} = \frac{56}{65}.\end{aligned}$$

7. Evaluar cos(Arc tan 15/8 − Arc sen 7/25).





Sea $\theta = \text{Arc tan } 15/8$ y
$\phi = \text{Arc sen } 7/25$.

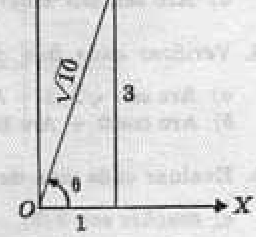
Entonces $\tan\theta = 15/8$ y $\text{sen}\,\phi = 7/25$, θ y ϕ en el primer cuadrante. Según las figuras adjuntas,

$$\begin{aligned}\cos(\text{Arc tan } 15/8 - \text{Arc sen } 7/25) &= \cos(\theta-\phi)\\ &= \cos\theta\cos\phi + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi\\ &= \frac{8}{17}\cdot\frac{24}{25} + \frac{15}{17}\cdot\frac{7}{25} = \frac{297}{425}.\end{aligned}$$

8. Evaluar sen(2 Arc tan 3).

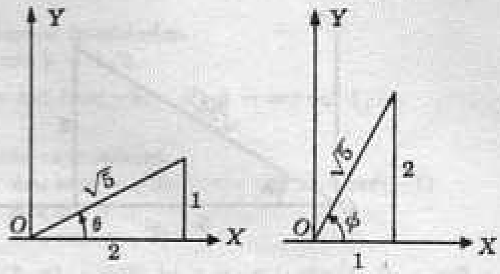
Sea $\theta = \text{Arc tan } 3$; entonces $\tan\theta = 3$, θ en el primer cuadrante.

Según la figura adjunta,
$$\begin{aligned}\text{sen}(2\text{ Arc tan } 3) &= \text{sen}\,2\theta\\ &= 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\\ &= 2(3/\sqrt{10})\,(1/\sqrt{10})\\ &= 3/5\end{aligned}$$



9. Demostrar que Arc sen $1/\sqrt{5}$ + Arc sen $2/\sqrt{5} = \pi/2$.

Sean θ = Arc sen $1/\sqrt{5}$ y ϕ = Arc sen $2/\sqrt{5}$; entonces sen $\theta = 1/\sqrt{5}$ y sen $\phi = 2/\sqrt{5}$, con lo que ambos ángulos pertenecen al primer cuadrante. Hay que probar que $\theta + \phi = \pi/2$ ó, que $\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen} \pi/2$, ya que los senos de ángulos iguales son iguales.



Según las figuras adjuntas,

$$\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta \cos\phi + \cos\theta \operatorname{sen}\phi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 1 \operatorname{sen} \pi/2$$

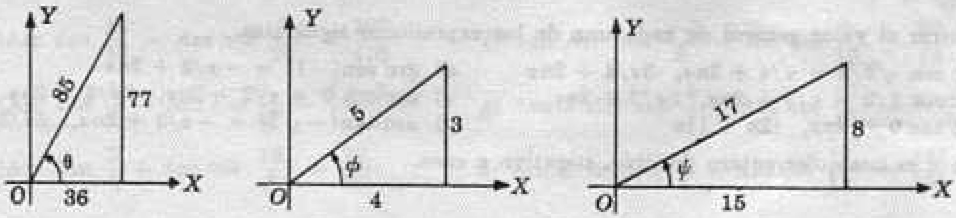
10. Demostrar que 2 Arc tan $1/2$ = Arc tan $4/3$.

Sean θ = Arc tan $1/2$ y ϕ = Arc tan $4/3$; entonces tan $\theta = 1/2$ y tan $\phi = 4/3$.

Hay que probar que $2\theta = \phi$ ó, que $\tan 2\theta = \tan \phi$, ya que las tangentes de ángulos iguales son iguales.

Ahora bien, $\tan 2\theta = \dfrac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2\theta} = \dfrac{2(1/2}{1 - (1/2)^2} = 4/3 = \tan \phi$.

11. Demostrar que Arc sen $75/85$ − Arc sen $3/5$ = Arc cos $15/17$.



Sean θ = Arc sen $77/85$, ϕ = Arc sen $3/5$ y ψ = Arc cos $15/17$; entonces, sen $\theta = 77/85$, sen $\phi = 3/5$ y cos $\psi = 15/17$, con lo que todos los ángulos pertenecen al primer cuadrante. Si se aplica la función seno a cada miembro de la relación, bastará demostrar que $\operatorname{sen}(\theta - \phi) = \operatorname{sen}\psi$. Según las figuras

$$\operatorname{sen}(\theta - \phi) = \operatorname{sen}\theta \cos\phi - \cos\theta \operatorname{sen}\phi = \frac{77}{85} \cdot \frac{4}{5} - \frac{36}{85} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{17} = \operatorname{sen}\psi.$$

12. Demostrar que Arc cot $43/32$ − Arc tan $1/4$ = Arc cos $12/13$.

Sean θ = Arc cot $43/32$ ϕ = Arc tan $1/4$ y ψ = Arc cos $12/13$; entonces cot $\theta = 43/32$ tan $\phi = 1/4$ y cos $\psi = 12/13$, con lo que todos los ángulos pertenecen al primer cuadrante. Si se aplica la función tangente a cada miembro de la relación dada, bastará probar que $\tan(\theta - \phi) = \tan \psi$.

$$\tan(\theta - \phi) = \frac{\tan\theta - \tan\phi}{1 + \tan\theta \tan\phi} = \frac{32/43 - 1/4}{1 + (32/43)(1/4)} = \frac{5}{12} = \tan\psi.$$

13. Demostrar que Arc tan $1/2$ + Arc tan $1/5$ + Arc tan $1/8 = \pi/4$.

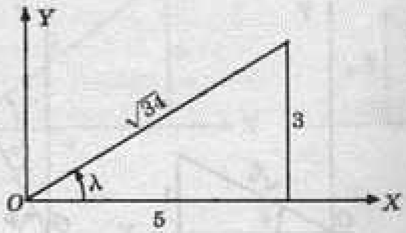
Se probará que Arc tan $1/2$ + Arc tan $1/5 = \pi/4$ − Arc tan $1/8$.

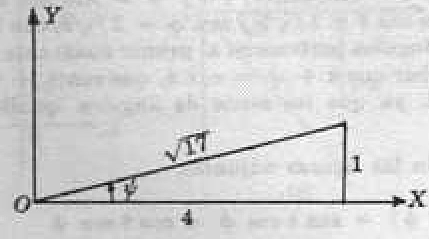
$$\tan(\text{Arc tan } 1/2 + \text{Arc tan } 1/5) = \frac{1/2 + 1/5}{1 - (1/2)(1/5)} = \frac{7}{9}$$

y

$$\tan(\pi/4 - \text{Arc tan } 1/8) = \frac{1 - 1/8}{1 + 1/8} = \frac{7}{9}.$$

14. Demostrar que 2 Arc tan 1/3 + Arc tan 1/7 = Arc sec $\sqrt{34}/5$ + Arc csc $\sqrt{17}$.





Sean θ = Arc tan 1/3, ϕ = Arc tan 1/7, λ = Arc sec $\sqrt{34}/5$ y ψ = Arc csc $\sqrt{17}$; entonces $\tan\theta = 1/3$, $\tan\phi = 1/7$, $\sec\lambda = \sqrt{34}/5$ y $\csc\psi = \sqrt{17}$, con lo que todos los ángulos pertenecen al primer cuadrante.

Si se aplica la función tangente a cada miembro de la relación dada, bastará demostrar que

$$\tan(2\theta+\phi) = \tan(\lambda+\psi).$$

Ahora bien, $\quad \tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2(1/3)}{1-(1/3)^2} = 3/4,$

$$\tan(2\theta+\phi) = \frac{\tan 2\theta + \tan\phi}{1-\tan 2\theta\,\tan\phi} = \frac{3/4+1/7}{1-(3/4)(1/7)} = 1$$

y, según las figuras, $\quad \tan(\lambda+\psi)\ 1 - \dfrac{3/5+1/4}{1-(3/5)(1/4)} = 1.$

15. Encontrar el valor general de cada una de las expresiones siguientes.

a) arc sen $\sqrt{2}/2 = \pi/4 + 2n\pi,\ 3\pi/4 + 2n\pi$

b) arc cos $1/2 = \pi/3 + 2n\pi,\ 5\pi/3 + 2n\pi$

c) arc tan $0 = 2n\pi,\ (2n+1)\pi$

d) arc sen$(-1) = -\pi/2 + 2n\pi$

e) arc cos $0 = \pi/2 + 2n\pi,\ 3\pi/2 + 2n\pi$

f) arc tan$(-\sqrt{3}) = -\pi/3 + 2n\pi,\ 2\pi/3 + 2n\pi$

donde n es cualquier entero positivo, negativo o cero.

16. Demostrar que el valor general de *a*) arc sen $x = n\pi + (-1)^n$ Arc sen x,
b) arc cos $x = 2n\pi \pm$ Arc cos x,
c) arc tan $x = n\pi +$ Arc tan x,

donde n es cualquier entero positivo, negativo o cero.

a) Sea θ = Arc sen x. Entonces, puesto que $\operatorname{sen}(\pi-\theta) = \operatorname{sen}\theta$, todos los valores de arc sen x vienen dados por

$$1)\ \theta + 2m\pi \quad \text{y} \quad 2)\ \pi - \theta + 2m\pi = (2m+1)\pi - \theta.$$

Ahora bien, cuando $n = 2m$, n es un entero par y 1) puede expresarse como $n\pi + \theta = n\pi + (-1)^n\theta$; y cuando $n = 2m+1$, n es un entero impar, y 2) puede expresarse como $n\pi - \theta = n\pi + (-1)^n\theta$. Así, arc sen $x = n\pi + (-1)^n$Arc sen x, donde n es cualquier entero positivo, negativo o cero.

b) Sea θ = Arc cos x. Entonces, puesto que $\cos(-\theta) = \cos\theta$, todos los valores de arc cos x vienen dados por $\theta + 2n\pi$ y $-\theta + 2n\pi$ ó $2n\pi \pm \theta = 2n\pi \pm$ Arc cos x, donde n es cualquier entero positivo, negativo o cero.

c) Sea θ = Arc tan x. Entonces, puesto que $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$, todos los valores de arc tan x vienen dados por $\theta + 2m\pi$ y $(\pi+\theta) + 2m\pi = \theta + (2m+1)\pi$ ó, como en *a*), por $n\pi$ + Arc tan x, donde n es cualquier entero positivo, negativo o cero.

17. Expresar el valor general de cada una de las funciones del problema 15 mediante las formas utilizadas en el problema 16.

a) arc sen $\sqrt{2}/2 = n\pi + (-1)^n\,\pi/4$

b) arc cos $1/2 = 2n\pi \pm \pi/3$

c) arc tan $0 = n\pi$

d) arc sen$(-1) = n\pi + (-1)^n(-\pi/2)$

e) arc cos $0 = 2n\pi \pm \pi/2$

f) arc tan$(-\sqrt{3}) = n\pi - \pi/3$

donde n es cualquier entero positivo, negativo o cero.

PROBLEMAS PROPUESTOS

18. Expresar como funciones inversas cada una de las siguientes igualdades.
a) $\operatorname{sen}\theta = 3/4$, *b)* $\cos x = -1$, *c)* $\tan x = -2$, *d)* $\cot\beta = 1/2$.

Resp. *a)* $\theta = \operatorname{arc\,sen} 3/4$, *b)* $x = \operatorname{arc\,cos}(-1)$, *c)* $x = \operatorname{arc\,tan}(-2)$, *d)* $\beta = \operatorname{arc\,cot} 1/2$

19. Encontrar el valor principal de cada una de las siguientes expresiones.
a) $\operatorname{Arc\,sen}\sqrt{3}/2$
b) $\operatorname{Arc\,cos}(-\sqrt{2}/2)$
c) $\operatorname{Arc\,tan} 1/\sqrt{3}$
d) $\operatorname{Arc\,cot} 1$
e) $\operatorname{Arc\,sen}(-1/2)$
f) $\operatorname{Arc\,cos}(-1/2)$
g) $\operatorname{Arc\,tan}(-\sqrt{3})$
h) $\operatorname{Arc\,cot} 0$
i) $\operatorname{Arc\,sec}(-\sqrt{2})$
j) $\operatorname{Arc\,csc}(-1)$

Resp. *a)* $\pi/3$, *b)* $3\pi/4$, *c)* $\pi/6$, *d)* $\pi/4$, *e)* $-\pi/6$, *f)* $2\pi/3$, *g)* $-\pi/3$, *h)* $\pi/2$, *i)* $-3\pi/4$, *j)* $-\pi/2$

20. Evaluar cada una de las siguientes expresiones.
a) $\operatorname{sen}[\operatorname{Arc\,sen}(-1/2)]$
b) $\cos(\operatorname{Arc\,cos}\sqrt{3}/2)$
c) $\tan[\operatorname{Arc\,tan}(-1)]$
d) $\operatorname{sen}[\operatorname{Arc\,cos}(-\sqrt{3}/2)]$
e) $\tan(\operatorname{Arc\,sen} 0)$
f) $\operatorname{sen}(\operatorname{Arc\,cos} 4/5)$
g) $\cos[\operatorname{Arc\,sen}(-12/13)]$
h) $\operatorname{sen}(\operatorname{Arc\,tan} 2)$
i) $\operatorname{Arc\,cos}(\operatorname{sen} 220°)$
j) $\operatorname{Arc\,sen}[\cos(-105°)]$
k) $\operatorname{Arc\,tan}(\cot 230°)$
l) $\operatorname{Arc\,cot}(\tan 100°)$
m) $\operatorname{sen}(2\operatorname{Arc\,sen} 2/3)$
n) $\cos(2\operatorname{Arc\,sen} 3/5)$
o) $\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\operatorname{Arc\,cos} 4/5)$

Resp. *a)* $-1/2$, *b)* $\sqrt{3}/2$, *c)* -1, *d)* $1/2$, *e)* 0, *f)* $3/5$, *g)* $5/13$, *h)* $2/\sqrt{5}$
i) $130°$, *j)* $-15°$, *k)* $40°$, *l)* $170°$, *m)* $4\sqrt{5}/9$, *n)* $7/25$, *o)* $1/\sqrt{10}$

21. Demostrar que

a) $\operatorname{sen}(\operatorname{Arc\,sen}\frac{5}{13} + \operatorname{Arc\,sen}\frac{4}{5}) = \frac{63}{65}$

b) $\cos(\operatorname{Arc\,cos}\frac{15}{17} - \operatorname{Arc\,cos}\frac{7}{25}) = \frac{297}{425}$

c) $\operatorname{sen}(\operatorname{Arc\,sen}\frac{1}{2} - \operatorname{Arc\,cos}\frac{1}{3}) = \frac{1-2\sqrt{6}}{6}$

d) $\tan(\operatorname{Arc\,tan}\frac{3}{4} + \operatorname{Arc\,cot}\frac{15}{8}) = \frac{77}{36}$

e) $\cos(\operatorname{Arc\,tan}\frac{-4}{3} + \operatorname{Arc\,sen}\frac{12}{13}) = \frac{63}{65}$

f) $\tan(\operatorname{Arc\,sen}\frac{-3}{5} - \operatorname{Arc\,cos}\frac{5}{13}) = \frac{63}{16}$

g) $\tan(2\operatorname{Arc\,sen}\frac{4}{5} + \operatorname{Arc\,cos}\frac{12}{13}) = -\frac{253}{204}$

h) $\operatorname{sen}(2\operatorname{Arc\,sen}\frac{4}{5} - \operatorname{Arc\,cos}\frac{12}{13}) = \frac{323}{325}$.

22. Demostrar que

a) $\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

b) $\operatorname{Arc\,sen}\frac{4}{5} + \operatorname{Arc\,tan}\frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$

c) $\operatorname{Arc\,tan}\frac{4}{3} - \operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$

d) $2\operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$

e) $\operatorname{Arc\,cos}\frac{12}{13} + \operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{4} = \operatorname{Arc\,cot}\frac{43}{32}$

f) $\operatorname{Arc\,sen}\frac{3}{5} + \operatorname{Arc\,sen}\frac{15}{17} = \operatorname{Arc\,cos}\frac{-13}{85}$

g) $\operatorname{Arc\,tan} a + \operatorname{Arc\,tan}\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2}\quad (a > 0)$.

23. Demostrar que, en un círculo de radio r, el área del segmento determinado por una cuerda cuya distancia al centro es d viene dada por $K = r^2\operatorname{Arc\,cos}\frac{d}{r} - d\sqrt{r^2 - d^2}$.

CAPITULO 17

Ecuaciones trigonométricas

LAS ECUACIONES TRIGONOMETRICAS, es decir, las ecuaciones que contienen funciones trigonométricas de ángulos desconocidos, reciben el nombre de:

a) ecuaciones idénticas o *identidades*, cuando son válidas para todos los valores de los ángulos desconocidos en los que estén definidas las funciones;

b) ecuaciones condicionales o ecuaciones, si son válidas únicamente para determinados valores de los ángulos desconocidos.

Por ejemplo: *a*) $\operatorname{sen} x \csc x = 1$ es una identidad porque se cumple para todos los valores de x en los que $\csc x$ está definida;

b) $\operatorname{sen} x = 0$ es una ecuación condicional porque no se cumple para $x = \frac{1}{4}\pi$ ó $\frac{1}{2}\pi$.

En este capítulo se utilizará la palabra "ecuación" en vez de "ecuación condicional"

UNA SOLUCION DE UNA ECUACION TRIGONOMETRICA, como $\operatorname{sen} x = 0$, es un valor del ángulo x que satisface la ecuación. Dos soluciones de $\operatorname{sen} x = 0$ son $x = 0$ y $x = \pi$.

Cuando una ecuación dada tiene una solución, tiene, en general, un conjunto infinito de soluciones. Así, el conjunto de soluciones de $\operatorname{sen} x = 0$ viene dado por

$$x = 0 + 2n\pi, \quad x = \pi + 2n\pi$$

donde n es cualquier entero positivo, negativo o cero.

En este capítulo se ofrecerán únicamente las soluciones particulares en las que $0 \leq x < 2\pi$.

PROCEDIMIENTOS PARA RESOLVER ECUACIONES TRIGONOMETRICAS. No existe un método general para resolver las ecuaciones trigonométricas. A continuación se dan tres procedimientos que pueden servir de modelo y, en los problemas resueltos, aparecen otros.

A) La ecuación puede descomponerse en factores.

EJEMPLO 1. Resolver $\operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0$.

Al descomponer en factores $\operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x\,(1 - 2\cos x) = 0$, e igualar cada factor a cero, se tiene

$$\operatorname{sen} x = 0 \text{ y } x = 0, \pi;$$
$$1 - 2\cos x = 0 \text{ ó } \cos x = \tfrac{1}{2} \text{ y } x = \pi/3, 5\pi/3.$$

Comprobación. Para $x = 0$, $\quad \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0 - 2(0)(1) = 0$;

para $x = \pi/3$, $\quad \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2(\frac{1}{2}\sqrt{3})(\frac{1}{2}) = 0$;

para $x = \pi$, $\quad \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0 - 2(0)(-1) = 0$;

para $x = 5\pi/3$, $\quad \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2(-\frac{1}{2}\sqrt{3})(\frac{1}{2}) = 0$.

Así, las soluciones buscadas $(0 \leq x < 2\pi)$ son $x = 0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$.

B) Las distintas funciones que aparecen en la ecuación se pueden expresar en términos de una sola función.

EJEMPLO 2. Resolver $2\tan^2 x + \sec^2 x = 2$. Al sustituir $\sec^2 x$ por $1 + \tan^2 x$, se tiene

$$2\tan^2 x + (1 + \tan^2 x) = 2, \quad 3\tan^2 x = 1 \quad \text{y} \quad \tan x = \pm 1/\sqrt{3}.$$

De $\tan x = 1/\sqrt{3}$, $x = \pi/6$ y $7\pi/6$; de $\tan x = -1/\sqrt{3}$, $x = 5\pi/6$ y $11\pi/6$. Después de comprobar cada uno de estos valores en la ecuación original, se encuentra que las soluciones buscadas $(0 \leqq x < 2\pi)$ son $x = \pi/6,\ 5\pi/6,\ 7\pi/6,\ 11\pi/6$.

En el ejemplo siguiente se ilustra la necesidad de efectuar la comprobación.

EJEMPLO 3. Resolver $\sec x + \tan x = 0$.

Al multiplicar la ecuación $\sec x + \tan x = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$ por $\cos x$, se tiene $1 + \operatorname{sen} x = 0$ ó $\operatorname{sen} x = -1$; entonces $x = 3\pi/2$. Sin embargo, ni $\sec x$ ni $\tan x$ están definidas cuando $x = 3\pi/2$, con lo que la ecuación no tiene solución.

C) Ambos miembros de la ecuación se elevan al cuadrado.

EJEMPLO 4. Resolver $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$.

Si se aplicara el procedimiento utilizado en *B*), habría que sustituir $\operatorname{sen} x$ por $\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$ o $\cos x$ por $\pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$, lo que introduciría radicales en la ecuación. Para evitar esta dificultad, se escribe la ecuación en la forma $\operatorname{sen} x = 1 - \cos x$ y se elevan ambos miembros al cuadrado. Entonces,

$$1) \qquad \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x,$$

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x + \cos^2 x,$$

$$2\cos^2 x - 2\cos x = 2\cos x\,(\cos x - 1) = 0.$$

De $\cos x = 0$, $x = \pi/2,\ 3\pi/2$; de $\cos x = 1$, $x = 0$.

Comprobación. Para $x = 0$, $\quad \operatorname{sen} x + \cos x = 0 + 1 = 1$;
para $x = \pi/2$, $\quad \operatorname{sen} x + \cos x = 1 + 0 = 1$;
para $x = 3\pi/2$, $\quad \operatorname{sen} x + \cos x = -1 + 0 \neq 1$.

Así, las soluciones buscadas son $x = 0,\ \pi/2$.

El valor $x = 3\pi/2$, llamado *solución extraña*, se introdujo cuando se elevaron al cuadrado ambos miembros de la ecuación. Obsérvese que también se obtiene 1) cuando ambos miembros de $\operatorname{sen} x = \cos x - 1$ se elevan al cuadrado y que $x = 3\pi/2$ satisface esta última relación.

PROBLEMAS RESUELTOS

Resolver las ecuaciones trigonométricas 1-22 para todos los valores de x tales que $0 \leqq x < 2\pi$. (Si se buscan todas las soluciones, añádase $+2n\pi$, a cada resultado obtenido, donde n es cualquier entero positivo, negativo o cero.) En algunos problemas se han omitido los detalles de la comprobación.

1. $2\operatorname{sen} x - 1 = 0$.

   Aquí, $\operatorname{sen} x = 1/2$ y $x = \pi/6,\ 5\pi/6$.

2. $\operatorname{sen} x \cos x = 0$.

   De $\operatorname{sen} x = 0$, $x = 0,\ \pi$; de $\cos x = 0$, $x = \pi/2,\ 3\pi/2$.
   Las soluciones buscadas son $x = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$.

3. $(\tan x - 1)(4\operatorname{sen}^2 x - 3) = 0$.

   De $\tan x - 1 = 0$, $\tan x = 1$ y $x = \pi/4,\ 5\pi/4$; de $4\operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$, $\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{3}/2$ y $x = \pi/3,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3,\ 5\pi/3$.
   Las soluciones buscadas son $x = \pi/4,\ \pi/3,\ 2\pi/3,\ 5\pi/4,\ 4\pi/3,\ 5\pi/3$.

4. $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$.

Se descompone en factores: $(\operatorname{sen} x + 2)(\operatorname{sen} x - 1) = 0$.

De $\operatorname{sen} x + 2 = 0$, $\operatorname{sen} x = -2$ y no existe solución; de $\operatorname{sen} x - 1 = 0$, $\operatorname{sen} x = 1$ y $x = \pi/2$. La solución buscada es $x = \pi/2$.

5. $3\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$.

Primera solución. Al sustituir $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, se obtiene $3\cos^2 x = 1 - \cos^2 x$ ó $4\cos^2 x = 1$. Entonces $\cos x = \pm 1/2$ y las soluciones buscadas son $x = \pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3$.

Segunda solución. Al dividir la ecuación por $\cos^2 x$, se obtiene $3 = \tan^2 x$. Entonces $\tan x = \pm\sqrt{3}$ y se llega a las mismas soluciones obtenidas anteriormente.

6. $2\operatorname{sen} x - \csc x = 1$.

Se multiplica la ecuación por $\operatorname{sen} x$, $2\operatorname{sen}^2 x - 1 = \operatorname{sen} x$, y se reordenan los términos para obtener

$$2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = (2\operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen} x - 1) = 0.$$

De $2\operatorname{sen} x + 1 = 0$, $\operatorname{sen} x = -1/2$ y $x = 7\pi/6, 11\pi/6$; de $\operatorname{sen} x = 1$, $x = \pi/2$.

Comprobación. Para $x = \pi/2$, $2\operatorname{sen} x - \csc x = 2(1) - 1 = 1$;
para $x = 7\pi/6$ y $11\pi/6$, $2\operatorname{sen} x - \csc x = 2(-1/2) - (-2) = 1$.

Las soluciones son $x = \pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6$.

7. $2\sec x = \tan x + \cot x$.

Se expresan las funciones en términos de senos y cosenos y se simplifican las fracciones para obtener

$$\frac{2}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \text{ ó } 2\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Entonces $\operatorname{sen} x = 1/2$ y $x = \pi/6, 5\pi/6$.

8. $\tan x + 3\cot x = 4$.

Se multiplica por $\tan x$ y se reordenan los términos:

$$\tan^2 x - 4\tan x + 3 = (\tan x - 1)(\tan x - 3) = 0.$$

De $\tan x - 1 = 0$, $\tan x = 1$ y $x = \pi/4, 5\pi/4$; de $\tan x - 3 = 0$, $\tan x = 3$ y $x = 71°34', 251°34'$

Comprobación. Para $x = \pi/4$ y $5\pi/4$, $\tan x + 3\cot x = 1 + 3(1) = 4$;
para $x = 71°34'$ y $251°34'$, $\tan x + 3\cot x = 3 + 3(1/3) = 4$.

Las soluciones son $45°, 71°34', 225°, 251°34'$.

9. $\csc x + \cot x = \sqrt{3}$.

Primera solución. Escríbase la ecuación en la forma $\csc x = \sqrt{3} - \cot x$ y elévese al cuadrado para obtener

$$\csc^2 x = 3 - 2\sqrt{3}\cot x + \cot^2 x.$$

Substitúyase $\csc^2 x$ por $1 + \cot^2 x$ y reagrúpense los resultados para llegar a $2\sqrt{3}\cot x - 2 = 0$. Entonces $\cot x = 1/\sqrt{3}$ y $x = \pi/3, 4\pi/3$.

Comprobación. Para $x = \pi/3$, $\csc x + \cot x = 2/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}$;
para $x = 4\pi/3$, $\csc x + \cot x = -2/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3} \neq \sqrt{3}$. La solución buscada es $x = \pi/3$.

Segunda solución. Al efectuar las sustituciones indicadas, la ecuación se transforma en

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \sqrt{3} \text{ y, al simplificar las fracciones, } 1 + \cos x = \sqrt{3}\operatorname{sen} x.$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros, se obtiene $1 + 2\cos x + \cos^2 x = 3\operatorname{sen}^2 x = 3(1 - \cos^2 x)$ o

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 2 = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0.$$

De $2\cos x - 1 = 0$, $\cos x = 1/2$ y $x = \pi/3, 5\pi/3$; de $\cos x + 1 = 0$, $\cos x = -1$ y $x = \pi$.

Ahora bien, $x = \pi/3$ es la solución, porque los valores $x = \pi$ y $5\pi/3$ han de desecharse puesto que $\csc \pi$ no está definida y $\csc 5\pi/3$ y $\cot 5\pi/3$ son ambas negativas.

10. $\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x = 1$.

Primera solución. Si se expresa la ecuación en la forma $\cos x - 1 = \sqrt{3}\,\text{sen}\,x$ y se eleva al cuadrado, se obtiene

$$\cos^2 x - 2\cos x + 1 = 3\,\text{sen}^2 x = 3(1 - \cos^2 x);$$

después, se reagrupa y se descompone en factores:

$$4\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 2(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0.$$

De $2\cos x + 1 = 0$, $\cos x = -1/2$ y $x = 2\pi/3, 4\pi/3$; de $\cos x - 1 = 0$, $\cos x = 1$ y $x = 0$.

Comprobación. Para $x = 0$, $\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x = 1 - \sqrt{3}\,(0) = 1$;

para $x = 2\pi/3$, $\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x = -1/2 - \sqrt{3}\,(\sqrt{3}/2) \neq 1$;

para $x = 4\pi/3$, $\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x = -1/2 - \sqrt{3}\,(-\sqrt{3}/2) = 1$.

Las soluciones buscadas son $x = 0, 4\pi/3$.

Segunda solución. Se escribe el miembro izquierdo de la ecuación en la forma

$$\text{sen}\,\theta\cos x + \cos\theta\,\text{sen}\,x = \text{sen}(\theta + x),$$

en la que θ es un ángulo conocido, y se divide la ecuación por $r > 0$, $\frac{1}{r}\cos x + (\frac{-\sqrt{3}}{r})\,\text{sen}\,x = \frac{1}{r}$, donde $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{r}$ y $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{r}$. Como $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $(\frac{1}{r})^2 + (\frac{-\sqrt{3}}{r})^2 = 1$ y $r = 2$. Puesto que $\text{sen}\,\theta = 1/2$, $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$ de modo que la ecuación dada puede expresarse como $\text{sen}(\theta + x) = 1/2$ con $\theta = 5\pi/6$. Entonces $\theta + x = 5\pi/6 + x = \text{arc sen}\,1/2 = \pi/6, 5\pi/6, 13\pi/6, 17\pi/6, \cdots$ y $x = -2\pi/3, 0, 4\pi/3, 2\pi, \cdots$. Como antes, las soluciones buscadas son $x = 0, 4\pi/3$.

Obsérvese que r es la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de los coeficientes de $\cos x$ y $\text{sen}\,x$ cuando la ecuación se escribe en la forma $a\cos x + b\,\text{sen}\,x = c$, esto es,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La ecuación no tiene solución si $\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ es mayor que 1 o menor que -1.

11. $2\cos x = 1 - \text{sen}\,x$.

Primera solución. Como en el problema 10, se tiene

$$4\cos^2 x = 1 - 2\,\text{sen}\,x + \text{sen}^2 x,$$

$$4(1 - \text{sen}^2 x) = 1 - 2\,\text{sen}\,x + \text{sen}^2 x,$$

$$5\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x - 3 = (5\,\text{sen}\,x + 3)(\text{sen}\,x - 1) = 0.$$

De $5\,\text{sen}\,x + 3 = 0$, $\text{sen}\,x = -3/5 = -0{,}6000$ y $x = 216°52'$, $323°8'$; de $\text{sen}\,x - 1 = 0$, $\text{sen}\,x = 1$ y $x = \pi/2$.

Comprobación. Para $x = \pi/2$, $2(0) = 1 - 1$;

para $x = 216°52'$, $2(-4/5) \neq 1 - (-3/5)$;

para $x = 323°8'$, $2(4/5) = 1 - (-3/5)$.

Las soluciones buscadas son $x = 90°, 323°8'$.

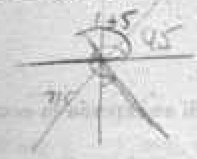
Segunda solución. Al escribir la ecuación en la forma $2\cos x + \text{sen}\,x = 1$ y dividir por $r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, se obtiene

$$1) \qquad \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\text{sen}\,x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Sea $\text{sen}\,\theta = 2/\sqrt{5}$, $\cos\theta = 1/\sqrt{5}$; entonces 1) se convierte en

$$\text{sen}\,\theta\cos x + \cos\theta\,\text{sen}\,x = \text{sen}(\theta + x) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

donde $\theta = 63°26'$. Por tanto, $\theta + x = 63°26' + x = \text{arc sen}(1/\sqrt{5}) = \text{arc sen}(0{,}4472) = 26°34'$, $153°26'$, $386°34'$, $\cdots$ y $x = 90°$, $323°8'$ como anteriormente.



Ecuaciones que contienen ángulos múltiplos.

12. $\operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Como se buscan valores de x tales que $0 \leqq x < 2\pi$, $3x$ tiene que ser tal que $0 \leqq 3x < 6\pi$.

225 315 585 675 945 1035

Entonces $3x = 5\pi/4,\ 7\pi/4,\ 13\pi/4,\ 15\pi/4,\ 21\pi/4,\ 23\pi/4$ y

$x = 5\pi/12,\ 7\pi/12,\ 13\pi/12,\ 5\pi/4,\ 7\pi/4,\ 23\pi/12$. Cada uno de estos valores es una solución.

$3x = 315 \to 105°$
$3x = 225 \to 75°$

13. $\cos \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$.

Como se buscan valores de x tales que $0 \leqq x < 2\pi$, $\frac{1}{2}x$ tiene que ser tal que $0 \leqq \frac{1}{2}x < \pi$. Entonces $\frac{1}{2}x = \pi/3$ y $x = 2\pi/3$.

14. $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$.

Se efectúa la sustitución correspondiente a $\operatorname{sen} 2x$, y se obtiene

$$2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos x = \cos x\,(2 \operatorname{sen} x + 1) = 0.$$

De $\cos x = 0$, $x = \pi/2,\ 3\pi/2$; de $\operatorname{sen} x = -1/2$, $x = 7\pi/6,\ 11\pi/6$.

Las soluciones buscadas son $x = \pi/2,\ 7\pi/6,\ 3\pi/2,\ 11\pi/6$.

15. $2\cos^2 \frac{1}{2}x = \cos^2 x$.

Si se escribe $1 + \cos x$ en vez de $2\cos^2 \frac{1}{2}x$, la ecuación se transforma en $\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$; entonces $\cos x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}6180,\ -0{,}6180$. Puesto que $\cos x$ no puede ser mayor que 1, se considera únicamente $\cos x = -0{,}6180$ con lo que se obtienen las soluciones $x = 128°10'$, $231°50'$.

Nota. Para resolver $\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}x = \cos x$ y $\sqrt{2}\cos\frac{1}{2}x = -\cos x$, se elevan al cuadrado ambas igualdades y se obtienen las ecuaciones de este problema. La solución de la primera de estas ecuaciones es $231°50'$ y la solución de la segunda es $128°10'$.

16. $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$.

Si se escribe $2\cos^2 x - 1$ en vez de $\cos 2x$, se tiene $2\cos^2 x + \cos x = \cos x\,(2\cos x + 1) = 0$.

De $\cos x = 0$, $x = \pi/2,\ 3\pi/2$; de $\cos x = -1/2$, $x = 2\pi/3,\ 4\pi/3$.

Las soluciones buscadas son $x = \pi/2,\ 2\pi/3,\ 3\pi/2,\ 4\pi/3$.

17. $\tan 2x + 2 \operatorname{sen} x = 0$.

Mediante $\tan 2x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = \dfrac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos 2x}$, se llega a

$$\frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos 2x} + 2 \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos x}{\cos 2x} + 1\right) = 2 \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos x + \cos 2x}{\cos 2x}\right) = 0.$$

De $\operatorname{sen} x = 0$, $x = 0, \pi$; de $\cos x + \cos 2x = \cos x + 2\cos^2 x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$, $x = \pi/3,\ 5\pi/3$, y π. Las soluciones buscadas son $x = 0,\ \pi/3,\ \pi,\ 5\pi/3$.

18. $\operatorname{sen} 2x = \cos 2x$.

Primera solución. Tómese $2x = \theta$; entonces, es necesario resolver $\operatorname{sen} \theta = \cos \theta$ para $0 \leqq \theta < 4\pi$. Entonces $\theta = \pi/4,\ 5\pi/4,\ 9\pi/4,\ 13\pi/4$ y $x = \theta/2 = \pi/8,\ 5\pi/8,\ 9\pi/8,\ 13\pi/8$ son las soluciones.

Segunda solución. Dividida por $\cos 2x$, la ecuación se transforma en $\tan 2x = 1$ con lo que $2x = \pi/4$, $5\pi/4,\ 9\pi/4,\ 13\pi/4$, como en la primera solución.

19. sen $2x$ = cos $4x$.

Como $\cos 4x = \cos 2(2x) = 1 - 2\,\text{sen}^2 2x$, la ecuación puede expresarse en la forma
$$2\,\text{sen}^2 2x + \text{sen}\, 2x - 1 = (2\,\text{sen}\, 2x - 1)(\text{sen}\, 2x + 1) = 0.$$

De $2\,\text{sen}\, 2x - 1 = 0$ ó $\text{sen}\, 2x = 1/2$, $2x = \pi/6, 5\pi/6, 13\pi/6, 17\pi/6$ y $x = \pi/12, 5\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12$; de $\text{sen}\, 2x + 1 = 0$ ó $\text{sen}\, 2x = -1$, $2x = 3\pi/2, 7\pi/2$ y $x = 3\pi/4, 7\pi/4$.

Todos estos valores son soluciones.

$2x = \frac{\pi}{2} - 4x \quad 6x = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{12}$

20. sen $3x$ = cos $2x$.

Para evitar la sustitución de sen $3x$, se puede utilizar uno de los procedimientos siguientes:

Primera solución. Ya que $\cos 2x = \text{sen}(\frac{1}{2}\pi - 2x)$ y además, $\cos 2x = \text{sen}(\frac{1}{2}\pi + 2x)$, considérese

a) $\text{sen}\, 3x = \text{sen}(\frac{1}{2}\pi - 2x)$, puesto que $3x = \pi/2 - 2x, 5\pi/2 - 2x, 9\pi/2 - 2x, \cdots,$ y

b) $\text{sen}\, 3x = \text{sen}(\frac{1}{2}\pi + 2x)$, puesto que $3x = \pi/2 + 2x, 5\pi/2 + 2x, 9\pi/2 + 2x, \cdots.$

De *a*), $5x = \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2, 13\pi/2, 17\pi/2$ (puesto que $5x < 10\pi$); y de *b*), $x = \pi/2$. Las soluciones buscadas son $x = \pi/10, \pi/2, 9\pi/10, 13\pi/10, 17\pi/10$.

Segunda solución. Ya que $\text{sen}\, 3x = \cos(\frac{1}{2}\pi - 3x)$ y $\cos 2x = \cos(-2x)$, considérese

c) $\cos 2x = \cos(\frac{1}{2}\pi - 3x)$, puesto que $5x = \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2, 13\pi/2, 17\pi/2,$ y

d) $\cos(-2x) = \cos(\frac{1}{2}\pi - 3x)$, puesto que $x = \pi/2$, como antes.

21. tan $4x$ = cot $6x$.

Como $\cot 6x = \tan(\frac{1}{2}\pi - 6x)$, considérese la ecuación $\tan 4x = \tan(\frac{1}{2}\pi - 6x)$.

Entonces, $4x = \pi/2 - 6x, 3\pi/2 - 6x, 5\pi/2 - 6x, \cdots$, porque el período de la función tan θ es π.

Así, $10x = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, 7\pi/2, 9\pi/2, \cdots, 39\pi/2$ y las soluciones buscadas son
$$x = \pi/20, 3\pi/20, \pi/4, 7\pi/20, \cdots, 39\pi/20.$$

22. sen $5x$ − sen $3x$ − sen x = 0.

Se sustituye sen $5x$ − sen $3x$ por 2 cos $4x$ sen x (capítulo 12), para transformar la ecuación dada en
$$2\cos 4x\,\text{sen}\, x - \text{sen}\, x = \text{sen}\, x\,(2\cos 4x - 1) = 0.$$

De $\text{sen}\, x = 0$, $x = 0, \pi$; de $2\cos 4x - 1 = 0$ ó $\cos 4x = 1/2$, $4x = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3, 11\pi/3, 13\pi/3, 17\pi/3, 19\pi/3, 23\pi/3$ y $x = \pi/12, 5\pi/12, 7\pi/12, 11\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12, 19\pi/12, 23\pi/12$. Cada uno de los valores obtenidos es una solución.

23. Resolver el sistema $\begin{matrix}(1)\ r\,\text{sen}\,\theta = 2\\ (2)\ r\cos\theta = 3\end{matrix}$ para $r > 0$ y $0 \leqq \theta < 2\pi$.

Se eleva al cuadrado cada ecuación y, después, se suman las ecuaciones resultantes, con lo que
$$r^2\,\text{sen}\,\theta + r^2\cos\theta = r^2 = 13 \quad \text{y} \quad r = \sqrt{13} = 3{,}606.$$

Cuando $r > 0$, sen θ y cos θ son ambos > 0 y θ es agudo.

Si se divide (1) por (2), $\tan\theta = 2/3 = 0{,}6667$ y $\theta = 33°41'$.

24. Resolver el sistema $\begin{matrix}(1)\ r\,\text{sen}\,\theta = 3\\ (2)\ r = 4(1 + \text{sen}\,\theta)\end{matrix}$ para $r > 0$ y $0 \leqq \theta < 2\pi$.

Si se divide (2) por (1), $\dfrac{1}{\text{sen}\,\theta} = \dfrac{4(1 + \text{sen}\,\theta)}{3}$ ó $4\,\text{sen}^2\theta + 4\,\text{sen}\,\theta - 3 = 0$ y
$$(2\,\text{sen}\,\theta + 3)(2\,\text{sen}\,\theta - 1) = 0.$$

De $2\,\text{sen}\,\theta - 1 = 0$, $\text{sen}\,\theta = 1/2$, $\theta = \pi/6$ y $5\pi/6$; según (1), $r(1/2) = 3$ y $r = 6$. Obsérvese que no se considera $2\,\text{sen}\,\theta + 3 = 0$ porque, cuando $r > 0$, $\text{sen}\,\theta > 0$ por (1).

Las soluciones buscadas son $\theta = \pi/6$, $r = 6$ y $\theta = 5\pi/6$, $r = 6$.

25. Resolver el sistema $\begin{matrix}(1)\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1{,}2 \\ (2)\ \cos x + \cos y = 1{,}5\end{matrix}$ para $0 \leq x,\ y < 2\pi$.

Como cada una de las sumas que aparecen en el miembro izquierdo de cada ecuación es mayor que 1, todas las funciones son positivas y tanto x como y son agudos.

Aplicadas las fórmulas convenientes del capítulo 12, se obtiene

$$(1')\quad 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(x+y) \cos \tfrac{1}{2}(x-y) = 1{,}2$$
$$(2')\quad 2 \cos \tfrac{1}{2}(x+y) \cos \tfrac{1}{2}(x-y) = 1{,}5.$$

Si se divide (1') por (2'), $\dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x+y)}{\cos \frac{1}{2}(x+y)} = \tan \frac{1}{2}(x+y) = \dfrac{1{,}2}{1{,}5} = 0{,}8000$ y $\frac{1}{2}(x+y) = 38°40'$ porque $\frac{1}{2}(x+y)$ es también agudo.

La sustitución de $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x+y) = 0{,}6248$ en (1'), lleva a $\cos \frac{1}{2}(x-y) = \dfrac{0{,}6}{0{,}6248} = 0{,}9603$ y $\frac{1}{2}(x-y) = 16°12'$.

Entonces $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y) = 54°52'$ y $y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y) = 22°28'$.

26. Resolver $\operatorname{Arc} \cos 2x = \operatorname{Arc} \operatorname{sen} x$.

Si x es positivo, $\alpha = \operatorname{Arc} \cos 2x$ y $\beta = \operatorname{Arc} \operatorname{sen} x$ pertenecen al cuadrante I; si x es negativo, α pertenece al cuadrante II y β pertenece al cuadrante IV. Así, x ha de ser positivo.

Para x positivo, $\operatorname{sen} \beta = x$ y $\cos \beta = \sqrt{1 - x^2}$. Si ahora se expresan los cosenos de ambos miembros de la ecuación dada, se obtiene

$$\cos(\operatorname{Arc} \cos 2x) = \cos(\operatorname{Arc} \operatorname{sen} x) = \cos \beta \ \text{ ó } \ 2x = \sqrt{1 - x^2}.$$

Al elevar al cuadrado, $4x^2 = 1 - x^2$, $5x^2 = 1$ y $x = \sqrt{5}/5 = 0{,}4472$.

Comprobación. $\operatorname{Arc} \cos 2x = \operatorname{Arc} \cos 0{,}8944 = 26°30' = \operatorname{Arc} \operatorname{sen} 0{,}4472$, donde el arco está expresado con una aproximación de $10'$.

27. Resolver $\operatorname{Arc} \cos(2x^2 - 1) = 2 \operatorname{Arc} \cos \frac{1}{2}$.

Sea $\alpha = \operatorname{Arc} \cos(2x^2 - 1)$ y $\beta = \operatorname{Arc} \cos \frac{1}{2}$; entonces $\cos \alpha = 2x^2 - 1$ y $\cos \beta = \frac{1}{2}$.

Si se escriben los cosenos de ambos miembros de la ecuación dada, se obtiene

$$\cos \alpha = 2x^2 - 1 = \cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = 2(\tfrac{1}{2})^2 - 1 = -\tfrac{1}{2}.$$

Entonces $2x^2 = \frac{1}{2}$ y $x = \pm \frac{1}{2}$.

Comprobación. Para $x = \pm \frac{1}{2}$, $\operatorname{Arc} \cos(-\frac{1}{2}) = 2 \operatorname{Arc} \cos \frac{1}{2}$ ó $120° = 2(60°)$.

28. Resolver $\operatorname{Arc} \cos 2x - \operatorname{Arc} \cos x = \pi/3$.

Si x es positivo, $0 < \operatorname{Arc} \cos 2x < \operatorname{Arc} \cos x$; si x es negativo, $\operatorname{Arc} \cos 2x > \operatorname{Arc} \cos x > 0$. Entonces, x ha de ser negativo.

Tómese $\alpha = \operatorname{Arc} \cos 2x$ y $\beta = \operatorname{Arc} \cos x$; entonces $\cos \alpha = 2x$, $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - 4x^2}$, $\cos \beta = x$ y $\operatorname{sen} \beta = \sqrt{1 - x^2}$ porque tanto α como β pertenecen al cuadrante II.

Si se expresan los cosenos de ambos miembros de la ecuación dada,

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = 2x^2 + \sqrt{1 - 4x^2}\sqrt{1 - x^2} = \cos \pi/3 = \tfrac{1}{2}$$

o

$$\sqrt{1 - 4x^2}\sqrt{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} - 2x^2.$$

Al elevar al cuadrado $1 - 5x^2 + 4x^4 = \frac{1}{4} - 2x^2 + 4x^4$, $3x^2 = \frac{3}{4}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Comprobación. $\operatorname{Arc} \cos(-1) - \operatorname{Arc} \cos(-\frac{1}{2}) = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$.

29. Resolver Arc sen $2x = \frac{1}{4}\pi -$ Arc sen x.

Tómese $\alpha =$ Arc sen $2x$ y $\beta =$ arc sen x; entonces sen $\alpha = 2x$ y sen $\beta = x$. Si x es negativo, α y β pertenecen al cuadrante IV. Así, x ha de ser positivo y β ha de ser agudo.

Si se escriben los senos de ambos miembros de la ecuación dada,

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(\tfrac{1}{4}\pi - \beta) = \operatorname{sen}\tfrac{1}{4}\pi\cos\beta - \cos\tfrac{1}{4}\pi\operatorname{sen}\beta$$

o $$2x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,x \quad \text{y} \quad (2\sqrt{2}+1)x = \sqrt{1-x^2}.$$

Al elevar al cuadrado, $(8 + 4\sqrt{2} + 1)x^2 = 1 - x^2$, $x^2 = 1/(10 + 4\sqrt{2})$, y $x = 0{,}2527$.

Comprobación. Arc sen $0{,}5054 = 30°22'$; Arc sen $0{,}2527 = 14°38'$ y $\frac{1}{4}\pi - 14°38' = 30°22'$.

30. Resolver Arc tan x + Arc tan$(1 - x)$ = Arc tan $4/3$.

Tómese $\alpha =$ Arc tan x y $\beta =$ Arc tan$(1-x)$; entonces tan $\alpha = x$ y tan $\beta = 1 - x$.

Si se expresan las tangentes de ambos miembros de la ecuación dada,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{x + (1-x)}{1 - x(1-x)} = \frac{1}{1 - x + x^2} = \tan(\text{Arc tan } 4/3) = 4/3.$$

Entonces $3 = 4 - 4x + 4x^2$, $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 = 0$ y $x = \frac{1}{2}$.

Comprobación. Arc tan $\frac{1}{2}$ + Arc tan$(1 - \frac{1}{2})$ = 2 Arc tan $0{,}5000 = 53°8'$ y
Arc tan $4/3$ = Arc tan $1{,}3333 = 53°8'$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones para todos los valores de x tales que $0 \leqq x < 2\pi$.

31. $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}/2$. *Resp.* $\pi/3$, $2\pi/3$
32. $\cos^2 x = 1/2$. *Resp.* $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7\pi/4$
33. $\operatorname{sen} x \cos x = 0$. *Resp.* 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$
34. $(\tan x - 1)(2\operatorname{sen} x + 1) = 0$. *Resp.* $\pi/4$, $7\pi/6$, $5\pi/4$, $11\pi/6$
35. $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$. *Resp.* $\pi/2$, $7\pi/6$, $11\pi/6$
36. $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 0$. *Resp.* 0, $2\pi/3$, π, $4\pi/3$
37. $\cos x + \cos 2x = 0$. *Resp.* $\pi/3$, π, $5\pi/3$
38. $2\tan x \operatorname{sen} x - \tan x = 0$. *Resp.* 0, $\pi/6$, $5\pi/6$, π
39. $2\cos x + \sec x = 3$. *Resp.* 0, $\pi/3$, $5\pi/3$
40. $2\operatorname{sen} x + \csc x = 3$. *Resp.* $\pi/6$, $\pi/2$, $5\pi/6$
41. $\operatorname{sen} x + 1 = \cos x$. *Resp.* 0, $3\pi/2$
42. $\sec x - 1 = \tan x$. *Resp.* 0
43. $2\cos x + 3\operatorname{sen} x = 2$. *Resp.* $0°$, $112°37'$
44. $3\operatorname{sen} x + 5\cos x + 5 = 0$. *Resp.* $180°$, $241°56'$
45. $1 + \operatorname{sen} x = 2\cos x$. *Resp.* $36°52'$, $270°$
46. $3\operatorname{sen} x + 4\cos x = 2$. *Resp.* $103°18'$, $330°27'$
47. $\operatorname{sen} 2x = -\sqrt{3}/2$. *Resp.* $2\pi/3$, $5\pi/6$, $5\pi/3$, $11\pi/6$
48. $\tan 3x = 1$. *Resp.* $\pi/12$, $5\pi/12$, $3\pi/4$, $13\pi/12$, $17\pi/12$, $7\pi/4$
49. $\cos x/2 = \sqrt{3}/2$. *Resp.* $\pi/3$
50. $\cot x/3 = -1/\sqrt{3}$. *Resp.* No existe solución en el intervalo dado

51. $\operatorname{sen} x \cos x = 1/2$. *Resp.* $\pi/4,\ 5\pi/4$

52. $\operatorname{sen} x/2 + \cos x = 1$. *Resp.* $0,\ \pi/3,\ 5\pi/3$

53. $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = 0$. *Resp.* $0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2$

54. $\cos 2x + \cos 3x = 0$. *Resp.* $\pi/5,\ 3\pi/5,\ \pi,\ 7\pi/5,\ 9\pi/5$

55. $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x = 2 \operatorname{sen} 3x$. *Resp.* $0,\ \pi/3,\ 2\pi/3,\ \pi,\ 4\pi/3,\ 5\pi/3$

56. $\cos 5x + \cos x = 2 \cos 2x$. *Resp.* $0,\ \pi/4,\ 2\pi/3,\ 3\pi/4,\ 5\pi/4,\ 4\pi/3,\ 7\pi/4$

57. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x = \cos x + \cos 3x$. *Resp.* $\pi/8,\ \pi/2,\ 5\pi/8,\ 9\pi/8,\ 3\pi/2,\ 13\pi/8$

Resolver cada uno de los siguientes sistemas para $r \geqq 0$ y $0 \leqq \theta < 2\pi$.

58. $r = a \operatorname{sen} \theta$, $r = a \cos 2\theta$ *Resp.* $\theta = \pi/6,\ r = a/2$; $\theta = 5\pi/6,\ r = a/2$; $\theta = 3\pi/2,\ r = -a$

59. $r = a \cos \theta$, $r = a \operatorname{sen} 2\theta$ *Resp.* $\theta = \theta = \pi/2,\ r = 0$; $\theta = 3\pi/2,\ r = 0$; $\theta = \pi/6,\ r = \sqrt{3}a/2$; $\theta = 5\pi/6,\ r = -\sqrt{3}a/2$

60. $r = 4(1 + \cos \theta)$, $r = 3 \sec \theta$ *Resp.* $\theta = \pi/3,\ r = 6$; $\theta = 5\pi/3,\ r = 6$

Resolver cada una de las siguientes ecuaciones.

61. $\operatorname{Arc\,tan} 2x + \operatorname{Arc\,tan} x = \pi/4$. *Resp.* $x = 0{,}281$

62. $\operatorname{Arc\,sen} x + \operatorname{Arc\,tan} x = \pi/2$. *Resp.* $x = 0{,}786$

63. $\operatorname{Arc\,cos} x + \operatorname{Arc\,tan} x = \pi/2$. *Resp.* $x = 0$

CAPITULO 18

Números complejos

NUMEROS IMAGINARIOS PUROS. La raíz cuadrada de un número negativo (por ejemplo, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-9}$) recibe el nombre de *número imaginario puro*. Como, por definición, $\sqrt{-5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1}$ y $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3\sqrt{-1}$, es conveniente utilizar el símbolo $i = \sqrt{-1}$ y adoptar $\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$ y $\sqrt{-9} = 3i$ como la forma normal de expresar estos números.

El símbolo i tiene la siguiente propiedad $i^2 = -1$. Para potencias enteras mayores se tiene que $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$, $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, etc.

El uso de la forma normal simplifica las operaciones con los números imaginarios puros y evita la posibilidad de cometer ciertos errores comunes. Así, $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{-36} = 6i$ porque $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{4} = 3i(2) = 6i$ pero $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} \neq \sqrt{36}$ ya que $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} = (3i)(2i) = 6i^2 = -6$.

NUMEROS COMPLEJOS. Un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, recibe el nombre de *número complejo*. El primer término, a, es la *parte real* del número complejo, y el segundo término, bi, es la *parte imaginaria pura*.

Puede considerarse que en los números complejos están incluidos todos los números reales y todos los números imaginarios puros. Por ejemplo, $5 = 5 + 0i$ y $3i = 0 + 3i$.

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son *iguales* solamente si $a = c$ y $b = d$.

El *conjugado* de un número complejo $a + bi$ es el número complejo $a - bi$. Así, $2 + 3i$ y $2 - 3i$, $-3 + 4i$ y $-3 - 4i$ son pares de números complejos conjugados.

OPERACIONES ALGEBRAICAS.

1) *Adición*. Para sumar dos números complejos, se suman, separadamente, sus partes reales y sus partes imaginarias puras.

EJEMPLO 1. $(2 + 3i) + (4 - 5i) = (2 + 4) + (3 - 5)i = 6 - 2i$.

2) *Sustracción*. Para restar dos números complejos, se restan, separadamente, las partes reales y las partes imaginarias puras.

EJEMPLO 2. $(2 + 3i) - (4 - 5i) = (2 - 4) + [3 - (-5)]i = -2 + 8i$.

3) *Multiplicación*. Para multiplicar dos números complejos, se efectúa la operación como si fueran dos binomios algebraicos corrientes, y se sustituye i^2 por -1.

EJEMPLO 3. $(2 + 3i)(4 - 5i) = 8 + 2i - 15i^2 = 8 + 2i - 15(-1) = 23 + 2i$.

4) *División*. Para dividir dos números complejos, se multiplican el numerador y el denominador de la fracción por el conjugado del denominador.

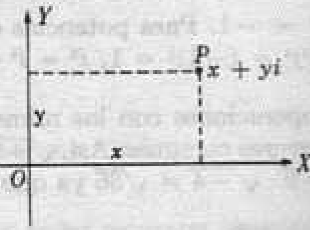
EJEMPLO 4. $\dfrac{2 + 3i}{4 - 5i} = \dfrac{(2 + 3i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \dfrac{(8 - 15) + (10 + 12)i}{16 + 25} = -\dfrac{7}{41} + \dfrac{22}{41}i$.

(Obsérvese la forma del resultado; no es $\dfrac{-7 + 22i}{41}$ ni $\dfrac{1}{41}(-7 + 22i)$.)

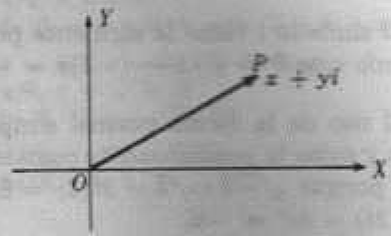
(Véanse los problemas 1-9.)

REPRESENTACION GRAFICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS. El número complejo $x + yi$ se puede representar gráficamente por el punto P (véase la Fig. 18-A) cuyas coordenadas rectangulares son (x, y).

El punto O, cuyas coordenadas son $(0, 0)$ representa el número complejo $0 + 0i$. Todos los puntos situados en el eje de las X tienen coordenadas de la forma $(x, 0)$ y corresponden a los números reales $x + 0i = x$. Por esta razón, el eje de las X se llama *eje real*. Todos los puntos situados en el eje de las Y tienen coordenadas de la forma $(0, y)$ y corresponden a los números imaginarios puros $0 + yi = yi$. El eje de las Y es el *eje imaginario*. Al plano en que se representan los números complejos se llama *plano complejo*.



(Fig. 18-A)



(Fig. 18-B)

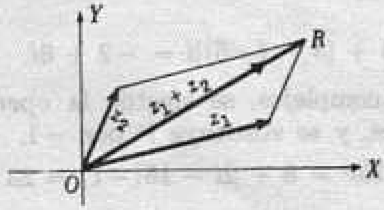
Todo número complejo se puede representar en el plano complejo no solamente mediante un punto P sino también (véase la Fig. 18-B) mediante un segmento de recta dirigido o vector OP.

REPRESENTACION GRAFICA DE LA ADICION Y DE LA SUSTRACCION. Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dos números complejos. La representación vectorial de estos números (Fig. 18-C) sugiere la conocida ley del paralelogramo para determinar gráficamente la suma $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$.

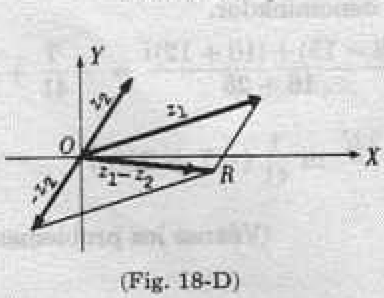
Puesto que $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 + iy_1) + (-x_2 - iy_2)$, la diferencia $z_1 - z_2$ de los dos números complejos se puede obtener gráficamente mediante la aplicación de la ley del paralelogramo a $x_1 + iy_1$ y $-x_2 - iy_2$. (Véase la Fig. 18-D.)

La Fig. 18-E ilustra la suma $OR = z_1 + z_2$ y la diferencia $OS = z_1 - z_2$. Obsérvese que los segmentos OS y P_2P_1 (la otra diagonal OP_2RP_1) son iguales.

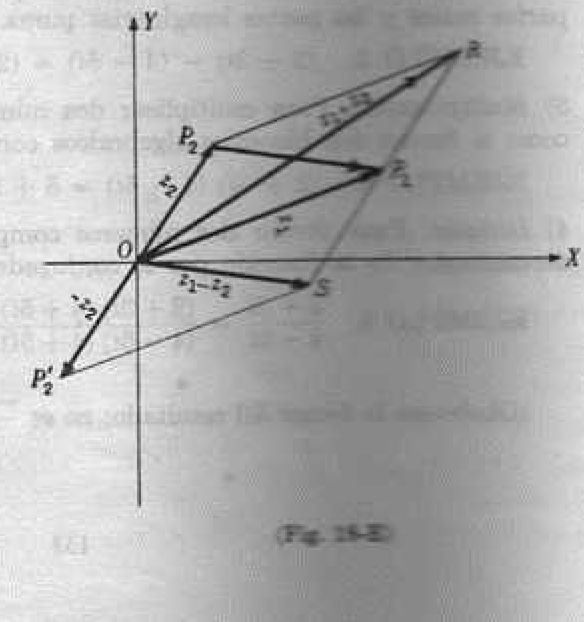
(Véase el problema 11.)



(Fig. 18-C)



(Fig. 18-D)

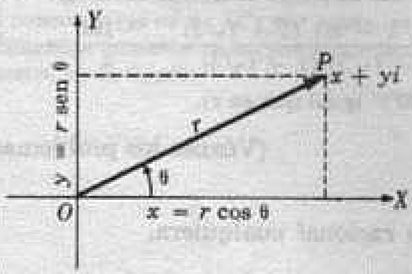


(Fig. 18-E)

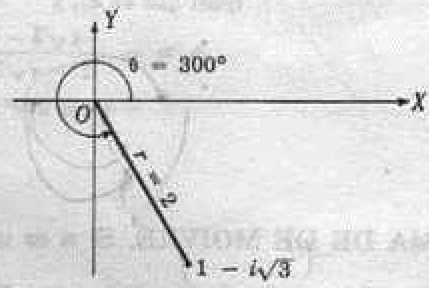
FORMA POLAR O TRIGONOMETRICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

Considérese el número complejo $x + yi$ representado (Fig. 18-F) por el vector OP. Este vector (y, por tanto, el número complejo) puede expresarse en términos de la longitud r del vector y de *cualquier* ángulo positivo θ formado por el vector y el semi-eje positivo de las X (semi-eje real positivo). El número $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es el *módulo* o *valor absoluto* del número complejo. El ángulo θ, llamado *argumento* del número complejo, se escoge, generalmente, como el menor ángulo positivo tal que $\tan\theta = y/x$, aunque, a veces, puede ser más conveniente escoger algún otro ángulo cofinal con él.

De acuerdo a la Fig. 18-F, $x = r\cos\theta$ y $y = r \operatorname{sen}\theta$; entonces $z = x + yi = r\cos\theta + ir \operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$. La expresión $\boxed{z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)}$ se denomina *forma polar* o *trigonométrica*, y la expresión $\boxed{z = x + yi}$ se denomina *forma binómica* del número complejo z.



(Fig. 18-F)



(Fig. 18-G)

EJEMPLO 5. Expresar $z = 1 - i\sqrt{3}$ en forma polar. (Véase la Fig. 18-G.)

El módulo es $r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Como $\tan\theta = y/x = -\sqrt{3}/1 = -\sqrt{3}$, el argumento θ puede ser 120° ó 300°. Ahora bien, sabemos que P pertenece al cuadrante IV; entonces, $\theta = 300°$ y la forma polar buscada es $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = 2(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$. Obsérvese que z puede representarse también por la forma polar $z = 2[\cos(300° + n360°) + i \operatorname{sen}(300° + n360°)]$, donde n es un entero cualquiera.

EJEMPLO 6. Expresar el número complejo $z = 8(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$ en forma binómica.

Como $\cos 210° = -\sqrt{3}/2$ y $\operatorname{sen} 210° = -1/2$,

$$z = 8(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°) = 8[-\sqrt{3}/2 + i(-1/2)] = -4\sqrt{3} - 4i$$

es la forma binómica buscada.

(Véanse los problemas 12-13.)

MULTIPLICACION Y DIVISION EN FORMA POLAR.

Multiplicación. El módulo del producto de dos números complejos es el producto de sus módulos, y el argumento del producto es la suma de sus argumentos.

División. El módulo del cociente de dos números complejos es igual al módulo del dividendo dividido por el módulo del divisor, y el argumento del cociente es igual al argumento del dividendo menos el argumento del divisor. Para las demostraciones de estos teoremas véase el problema 14.

EJEMPLO 7. Encontrar *a*) el producto $z_1 z_2$, *b*) el cociente z_1/z_2 y *c*) el cociente z_2/z_1 si $z_1 = 2(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$ y $z_2 = 8(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$.

a) El módulo del producto es $2(8) = 16$. El argumento es $300° + 210° = 510°$ pero, conforme a lo convenido, se debe tomar el menor ángulo positivo cofinal, $510° - 360° = 150°$. Así, $z_1 z_2 = 16(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$.

b) El módulo del cociente z_1/z_2 es $2/8 = \frac{1}{4}$ y el argumento es $300° - 210° = 90°$. Así, $z_1/z_2 = \frac{1}{4}(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$.

c) El módulo del cociente z_2/z_1 es $8/2 = 4$.

El argumento es $210° - 300° = -90°$, pero se debe tomar el menor ángulo positivo cofinal, $-90° + 360° = 270°$. Así,

$$z_2/z_1 = 4(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°).$$

Nota. Según los ejemplos 5 y 6 los números son

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3} \;\; \text{y} \;\; z_2 = -4\sqrt{3} - 4i$$

en forma binómica. Entonces

$$z_1 z_2 = (1 - i\sqrt{3})(-4\sqrt{3} - 4i) = -8\sqrt{3} + 8i = 16(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$$

igual que en *a*), y

$$z_2/z_1 = \frac{-4\sqrt{3} - 4i}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{(-4\sqrt{3} - 4i)(1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} = \frac{-16i}{4} = -4i$$

$$= 4(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°) \;\; \text{igual que en } c).$$

(Véanse los problemas 15-16.)

TEOREMA DE DE MOIVRE. Si n es un número racional cualquiera,

$$\{r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

La demostración de este teorema está fuera de los objetivos de este libro; en el problema 17 aparece una verificación para $n = 2$ y $n = 3$.

EJEMPLO 8. $(\sqrt{3} - i)^{10} = \{2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)\}^{10}$

$$= 2^{10}(\cos 10 \cdot 330° + i \operatorname{sen} 10 \cdot 330°)$$

$$= 1024(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = 1024(1/2 + i\sqrt{3}/2)$$

$$= 512 + 512i\sqrt{3}.$$

(Véase el problema 18.)

RAICES DE NUMEROS COMPLEJOS. Se establece, sin demostración, el siguiente teorema: Un número complejo $a + bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ tiene exactamente n raíces n-ésimas.

El procedimiento para calcular estas raíces aparece en el ejemplo 9.

EJEMPLO 9. Encontrar todas las raíces quintas de $4 - 4i$.

La forma polar usual para representar $4 - 4i$ es $4\sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$, pero aquí se necesitará la forma más general

$$4\sqrt{2}\,[\cos(315° + k\,360°) + i \operatorname{sen}(315° + k\,360°)],$$

donde k es un entero cualquiera, incluido el cero.

Según el teorema de De Moivre, una raíz quinta de $4 - 4i$ viene dada por

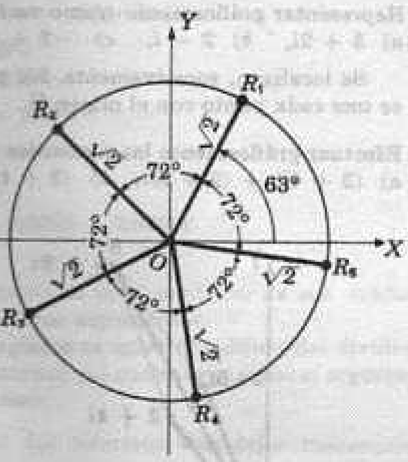
$$\{4\sqrt{2}\,[\cos(315° + k360°) + i \operatorname{sen}(315° + k360°)]\}^{1/5}$$

$$= (4\sqrt{2})^{1/5}\left(\cos\frac{315° + k\,360°}{5} + i \operatorname{sen}\frac{315° + k\,360°}{5}\right)$$

$$= \sqrt{2}\,[\cos(63° + k\,72°) + i \operatorname{sen}(63° + k\,72°)].$$

Cuando se toman, sucesivamente, los valores $k = 0, 1, 2, \cdots$, se tiene

$$\begin{aligned}
k &= 0:\ \sqrt{2}\,(\cos 63^\circ + i \operatorname{sen} 63^\circ) = R_1\\
k &= 1:\ \sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = R_2\\
k &= 2:\ \sqrt{2}\,(\cos 207^\circ + i \operatorname{sen} 207^\circ) = R_3\\
k &= 3:\ \sqrt{2}\,(\cos 279^\circ + i \operatorname{sen} 279^\circ) = R_4\\
k &= 4:\ \sqrt{2}\,(\cos 351^\circ + i \operatorname{sen} 351^\circ) = R_5\\
k &= 5:\ \sqrt{2}\,(\cos 423^\circ + i \operatorname{sen} 423^\circ)\\
&= \sqrt{2}\,(\cos 63^\circ + i \operatorname{sen} 63^\circ) = R_1,\ \text{etc.}
\end{aligned}$$



Así, cuando se le dan a k los valores 0,1,2,3,4 (p. ej. $0,1,2,3,\cdots, n-1$), se obtienen las cinco raíces quintas buscadas.

(Véase también el problema 19.)

El módulo de cada una de las raíces es $\sqrt{2}$; de donde se deduce que las raíces son puntos de una circunferencia cuyo radio es $\sqrt{2}$ y cuyo centro coincide con el origen. La diferencia de argumentos entre dos raíces consecutivas es de 72°; por tanto, las raíces están separadas unas de otras por arcos iguales, como se muestra en la figura.

PROBLEMAS RESUELTOS

En los problemas 1-6, efectúense las operaciones indicadas, simplifíquese, y exprésese el resultado en la forma $a + bi$.

1. $(3 - 4i) + (-5 + 7i) = (3 - 5) + (-4 + 7)i = -2 + 3i$

2. $(4 + 2i) - (-1 + 3i) = [4 - (-1)] + (2 - 3)i = 5 - i$

3. $(2 + i)(3 - 2i) = (6 + 2) + (-4 + 3)i = 8 - i$

4. $(3 + 4i)(3 - 4i) = 9 + 16 = 25$

5. $\dfrac{1 + 3i}{2 + i} = \dfrac{(1+3i)\,(2-i)}{(2+i)\,(2-i)} = \dfrac{(2+3) + (-1+6)i}{4+1} = 1 + i$

6. $\dfrac{3 - 2i}{2 - 3i} = \dfrac{(3-2i)\,(2+3i)}{(2-3i)\,(2+3i)} = \dfrac{(6+6) + (9-4)i}{4+9} = \dfrac{12}{13} + \dfrac{5}{13}i$

7. Encontrar valores de x y y tales que $2x - yi = 4 + 3i$.

   Aquí $2x = 4$ y $-y = 3$; entonces $x = 2$ y $y = -3$.

8. Demostrar que los números complejos $2 + i$ y $2 - i$ son raíces de la ecuación cuadrática
$$x^2 - 4x + 5 = 0.$$

   Para $x = 2 + i$: $(2 + i)^2 - 4(2 + i) + 5 = 4 + 4i + i^2 - 8 - 4i + 5 = 0$.

   Para $x = 2 - i$: $(2 - i)^2 - 4(2 - i) + 5 = 4 - 4i + i^2 - 8 + 4i + 5 = 0$.

   Cada uno de los números dados es raíz de la ecuación porque cada uno de ellos la satisface.

9. Demostrar que el conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de los conjugados de dichos números.

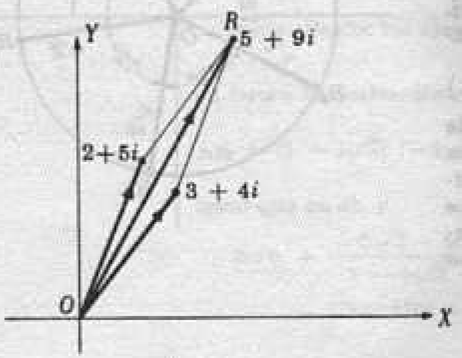
   Sean $a + bi$ y $c + di$ dos números complejos cualesquiera. Su suma es $(a + c) + (b + d)i$, y el conjugado de la suma es $(a + c) - (b + d)i$.

   Los conjugados de los dos números son, respectivamente $a - bi$ y $c - di$, y la suma de estos conjugados es
$$(a + c) + (-b - d)i = (a + c) - (b + d)i.$$

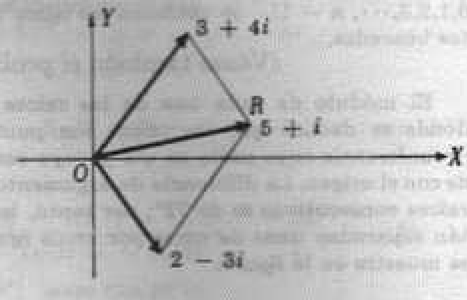
10. Representar gráficamente (como vectores) los siguientes números complejos:
a) $3 + 2i$, *b*) $2 - i$, *c*) $-2 + i$, *d*) $-1 - 3i$.

Se localizan, sucesivamente, los puntos cuyas coordenadas son $(3, 2)$, $(2, -1)$, $(-2, 1)$, $(-1, -3)$, y se une cada punto con el origen O.

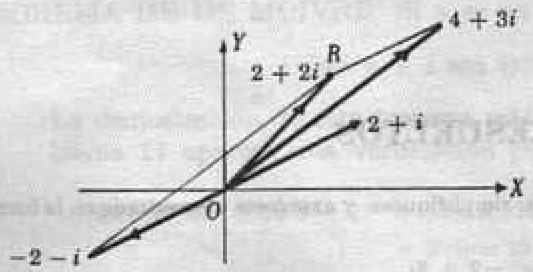
11. Efectuar gráficamente las siguientes operaciones:
a) $(3 + 4i) + (2 + 5i)$, *b*) $(3 + 4i) + (2 - 3i)$, *c*) $(4 + 3i) - (2 + i)$, *d*) $(4 + 3i) - (2 - i)$.



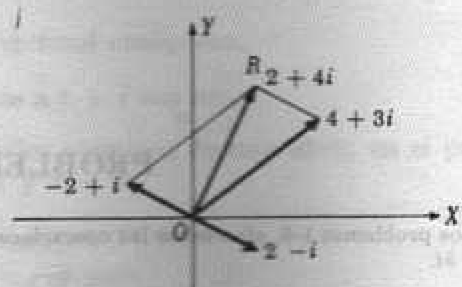
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

Para *a*) y *b*), trácense los dos vectores, como se indica en las figuras (*a*) y (*b*), y aplíquese la ley del paralelogramo.

Para *c*), trácense los vectores correspondientes a $4 + 3i$ y $-2 - i$ y aplíquese la ley del paralelogramo, como se indica en la Fig. (*c*).

Para *d*), trácense los vectores correspondientes a $4 + 3i$ y $-2 + i$ y aplíquese la ley del paralelogramo, como se indica en la Fig. (*d*).

12. Expresar en forma polar cada uno de los siguientes números complejos z:
a) $-1 + i\sqrt{3}$, *b*) $6\sqrt{3} + 6i$, *c*) $2 - 2i$, *d*) $-3 = -3 + 0i$, *e*) $4i = 0 + 4i$, *f*) $-3 - 4i$.

a) P pertenece al segundo cuadrante; $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $\tan\theta = \sqrt{3}/-1 = -\sqrt{3}$ y $\theta = 120°$.
Así, $z = 2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$.

b) P pertenece al primer cuadrante; $r = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 6^2} = 12$; $\tan\theta = 6/6\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}$ y $\theta = 30°$.
Así, $z = 12(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$.

c) P pertenece al cuarto cuadrante r; $= \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$; $\tan\theta = -2/2 = -1$ y $\theta = 315°$.
Así, $z = 2\sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$.

d) P es un punto del semi-eje negativo de las X y $\theta = 180°$; $r = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$.
Así, $z = 3(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$.

e) P es un punto del semi-eje positivo de las Y y $\theta = 90°$; $r = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$.
Así, $z = 4(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$.

f) P pertenece al tercer cuadrante; $r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$; $\tan\theta = -4/-3 = 1{,}3333$, $\theta = 233°8'$.
Así, $z = 5(\cos 233°8' + i \operatorname{sen} 233°8')$.

13. Expresar en forma binómica cada uno de los siguientes números complejos z:

a) $4(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$ *c*) $3(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$
b) $2(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$ *d*) $5(\cos 128° + i \operatorname{sen} 128°)$.

a) $4(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°) = 4[-1/2 + i(-\sqrt{3}/2)] = -2 - 2i\sqrt{3}$

b) $2(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°) = 2[1/\sqrt{2} + i(-1/\sqrt{2})] = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

c) $3(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) = 3[0 + i(1)] = 3i$

d) $5(\cos 128° + i \operatorname{sen} 128°) = 5[-0{,}6157 + i(0{,}7880)] = -3{,}0785 + 3{,}9400i$.

14. Demostrar que: *a*) El módulo del producto de dos números complejos es el producto de sus módulos, y el argumento del producto es la suma de sus argumentos.
b) El módulo del cociente de dos números complejos es igual al módulo del dividendo dividido por el módulo del divisor, y el argumento del cociente es igual al argumento del dividendo menos el argumento del divisor.

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ dos números complejos cualesquiera.

a)
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)} &= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1-\theta_2)]. \end{aligned}$$

15. Efectúense las operaciones indicadas y exprésese el resultado en forma polar y en forma binómica.

a) $5(\cos 170° + i \operatorname{sen} 170°)\cdot(\cos 55° + i \operatorname{sen} 55°)$
b) $2(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)\cdot 3(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$
c) $6(\cos 110° + i \operatorname{sen} 110°)\cdot \frac{1}{2}(\cos 212° + i \operatorname{sen} 212°)$
d) $10(\cos 305° + i \operatorname{sen} 305°) \div 2(\cos 65° + i \operatorname{sen} 65°)$
e) $4(\cos 220° + i \operatorname{sen} 220°) \div 2(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$
f) $6(\cos 230° + i \operatorname{sen} 230°) \div 3(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°)$

a) El módulo del producto es $5(1) = 5$ y el argumento es $170° + 55° = 225°$.
El producto, en forma polar, es $5(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)$ y, en forma binómica, es
$$5(-\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2) = -5\sqrt{2}/2 - 5i\sqrt{2}/2.$$

b) El módulo del producto es $2(3) = 6$ y el argumento es $50° + 40° = 90°$.
El producto, en forma polar, es $6(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$ y, en forma binómica, es $6(0 + i) = 6i$.

c) El módulo del producto es $6(\frac{1}{2}) = 3$ y el argumento es $110° + 212° = 322°$.
El producto, en forma polar, es $3(\cos 322° + i \operatorname{sen} 322°)$ y, en forma binómica, es
$$3(0{,}7880 - 0{,}6157i) = 2{,}3640 - 1{,}8471i.$$

d) El módulo del cociente es $10/2 = 5$ y el argumento es $305° - 65° = 240°$.
El cociente, en forma polar, es $5(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$ y, en forma binómica, es
$$5(-1/2 - i\sqrt{3}/2) = -5/2 - 5i\sqrt{3}/2.$$

e) El módulo del cociente es $4/2 = 2$ y el argumento es $220° - 40° = 180°$.
El cociente, en forma polar, es $2(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$ y, en forma binómica, es $2(-1 + 0i) = -2$.

f) El módulo del cociente es $6/3 = 2$ y el argumento es $230° - 75° = 155°$.
El cociente, en forma polar, es $2(\cos 155° + i \operatorname{sen} 155°)$ y, en forma binómica, es
$$2(-0{,}9063 + 0{,}4226i) = -1{,}8126 + 0{,}8452i.$$

16. Expresar cada número en forma polar, efectuar las operaciones indicadas y dar el resultado en forma binómica.

a) $(-1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$ *d*) $-2 \div (-\sqrt{3} + i)$ *g*) $(3 + 2i)(2 + i)$
b) $(3 - 3i\sqrt{3})(-2 - 2i\sqrt{3})$ *e*) $6i \div (-3 - 3i)$ *h*) $(2 + 3i) \div (2 - 3i)$
c) $(4 - 4i\sqrt{3}) \div (-2\sqrt{3} + 2i)$ *f*) $(1 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})$

$a)\ (-1+i\sqrt{3})\,(\sqrt{3}+i) = 2(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)\cdot 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$
$= 4(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = 4(-\sqrt{3}/2 + \tfrac{1}{2}i) = -2\sqrt{3} + 2i$

$b)\ (3-3i\sqrt{3})\,(-2-2i\sqrt{3}) = 6(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)\cdot 4(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$
$= 24(\cos 540^\circ + i \operatorname{sen} 540^\circ) = 24(-1+0i) = -24$

$c)\ (4-4i\sqrt{3}) \div (-2\sqrt{3}+2i) = 8(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) \div 4(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$
$= 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = 2(-\sqrt{3}/2 + \tfrac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i$

$d)\ -2 \div (-\sqrt{3}+i) = 2(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) \div 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$
$= \cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i$

$e)\ 6i \div (-3-3i) = 6(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) \div 3\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$
$= \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ) = -1 - i$

$f)\ (1+i\sqrt{3})\,(1+i\sqrt{3}) = 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)\cdot 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$
$= 4(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) = 4(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}) = -2 + 2i\sqrt{3}$

$g)\ (3+2i)\,(2+i) = \sqrt{13}(\cos 33^\circ 41' + i \operatorname{sen} 33^\circ 41')\cdot \sqrt{5}(\cos 26^\circ 34' + i \operatorname{sen} 26^\circ 34')$
$= \sqrt{65}(\cos 60^\circ 15' + i \operatorname{sen} 60^\circ 15')$
$= \sqrt{65}(0{,}4962 + 0{,}8682i) = 4{,}001 + 7{,}000i = 4 + 7i$

$$h)\ \frac{2+3i}{2-3i} = \frac{\sqrt{13}(\cos 56^\circ 19' + i \operatorname{sen} 56^\circ 19')}{\sqrt{13}(\cos 303^\circ 41' + i \operatorname{sen} 303^\circ 41')} = \frac{\cos 416^\circ 19' + i \operatorname{sen} 416^\circ 19'}{\cos 303^\circ 41' + i \operatorname{sen} 303^\circ 41'}$$
$= \cos 112^\circ 38' + i \operatorname{sen} 112^\circ 38' = -0{,}3849 + 0{,}9230i.$

17. Verificar el teorema de De Moivre para $n = 2$ y $n = 3$.

Sea $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ un número complejo cualquiera.

Para $n = 2$: $z^2 = [r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)][r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]$
$= r^2[(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) + i(2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta)] = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$

Para $n = 3$: $z^3 = z^2 \cdot z = [r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)][r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)]$
$= r^3[(\cos 2\theta \cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta) + i(\operatorname{sen} 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \operatorname{sen}\theta)]$
$= r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta).$

Por inducción matemática se puede demostrar el teorema para cualquier entero positivo n.

18. Evaluar, mediante el teorema de De Moivre, cada una de las siguientes expresiones y dar el resultado en forma binómica: $a)\ (1+i\sqrt{3})^4$, $b)\ (\sqrt{3}-i)^5$, $c)\ (-1+i)^{10}$, $d)\ (2+3i)^4$.

$a)\ (1+i\sqrt{3})^4 = [2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)]^4 = 2^4(\cos 4\cdot 60^\circ + i \operatorname{sen} 4\cdot 60^\circ)$
$= 2^4(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = -8 - 8i\sqrt{3}$

$b)\ (\sqrt{3}-i)^5 = [2(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)]^5 = 32(\cos 1650^\circ + i \operatorname{sen} 1650^\circ)$
$= 32(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = -16\sqrt{3} - 16i$

$c)\ (-1+i)^{10} = [\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ)]^{10} = 32(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) = -32i$

$d)\ (2+3i)^4 = [\sqrt{13}(\cos 56^\circ 19' + i \operatorname{sen} 56^\circ 19')]^4 = 13^2(\cos 225^\circ 16' + i \operatorname{sen} 225^\circ 16')$
$= 169(-0{,}7038 - 0{,}7104i) = -118{,}9 - 120{,}1i.$

19. Encontrar las raíces en forma binómica, excepto en los casos en que se requiera el uso de tablas.

a) Las raíces cuadradas de $2 - 2i\sqrt{3}$
b) Las raíces cuartas de $-8 - 8i\sqrt{3}$
c) Las raíces cúbicas de $-4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$
d) Las raíces cúbicas de 1
e) Las raíces cuartas de i
f) Las raíces sextas de -1
g) Las raíces cuartas de $-16i$
h) Las raíces quintas de $1 + 3i$

a) $2 - 2i\sqrt{3} = 4[\cos(300^\circ + k\,360^\circ) + i \operatorname{sen}(300^\circ + k\,360^\circ)]$
y $(2 - 2i\sqrt{3})^{1/2} = 2[\cos(150^\circ + k\,180^\circ) + i \operatorname{sen}(150^\circ + k\,180^\circ)]$.

Para $k = 0$ y 1, las raíces buscadas son

$R_1 = 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = 2(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i$

$R_2 = 2(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ) = 2(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i) = \sqrt{3} - i$

b) $-8 - 8i\sqrt{3} = 16[\cos(240^\circ + k\,360^\circ) + i \operatorname{sen}(240^\circ + k\,360^\circ)]$
y $(-8 - 8i\sqrt{3})^{1/4} = 2[\cos(60^\circ + k\,90^\circ) + i \operatorname{sen}(60^\circ + k\,90^\circ)]$.

Para $k = 0,1,2,3$, las raíces buscadas son

$R_1 = 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 2(\tfrac{1}{2} + i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3}$

$$R_2 = 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = 2(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i$$
$$R_3 = 2(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = 2(-\tfrac{1}{2} - i\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) = -1 - i\sqrt{3}$$
$$R_4 = 2(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ) = 2(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i) = \sqrt{3} - i.$$

c) $-4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2} = 8[\cos(135^\circ + k\,360^\circ) + i \operatorname{sen}(135^\circ + k\,360^\circ)]$

y $(-4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2})^{1/3} = 2[\cos(45^\circ + k\,120^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ + k\,120^\circ)]$.

Para $k = 0,1,2$, las raíces buscadas son

$$R_1 = 2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = 2(1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$R_2 = 2(\cos 165^\circ + i \operatorname{sen} 165^\circ)$$
$$R_3 = 2(\cos 285^\circ + i \operatorname{sen} 285^\circ).$$

d) $1 = \cos(0^\circ + k\,360^\circ) + i \operatorname{sen}(0^\circ + k\,360^\circ)$ y $1^{1/3} = \cos(k\,120^\circ) + i \operatorname{sen}(k\,120^\circ)$.

Para $k = 0,1,2$, las raíces buscadas son

$$R_1 = \cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ = 1$$
$$R_2 = \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ = -\tfrac{1}{2} + i\,\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$R_3 = \cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ = -\tfrac{1}{2} - i\,\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Obsérvese que $R_2^2 = \cos 2(120^\circ) + i \operatorname{sen} 2(120^\circ) = R_3$,

$$R_3^2 = \cos 2(240^\circ) + i \operatorname{sen} 2(240^\circ) = R_2, \quad \text{y}$$
$$R_2R_3 = (\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = \cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ = R_1.$$

e) $i = \cos(90^\circ + k\,360^\circ) + i \operatorname{sen}(90^\circ + k\,360^\circ)$ y $i^{1/4} = \cos(22\tfrac{1}{2}^\circ + k\,90^\circ) + i \operatorname{sen}(22\tfrac{1}{2}^\circ + k\,90^\circ)$.

Así, las raíces buscadas son

$$R_1 = \cos 22\tfrac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 22\tfrac{1}{2}^\circ \qquad R_3 = \cos 202\tfrac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 202\tfrac{1}{2}^\circ$$
$$R_2 = \cos 112\tfrac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 112\tfrac{1}{2}^\circ \qquad R_4 = \cos 292\tfrac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 292\tfrac{1}{2}^\circ.$$

f) $-1 = \cos(180^\circ + k\,360^\circ) + i \operatorname{sen}(180^\circ + k\,360^\circ)$ y $(-1)^{1/6} = \cos(30^\circ + k\,60^\circ) + i \operatorname{sen}(30^\circ + k\,60^\circ)$

Así, las raíces buscadas son

$$R_1 = \cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i$$
$$R_2 = \cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ = i$$
$$R_3 = \cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}i$$
$$R_4 = \cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i$$
$$R_5 = \cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ = -i$$
$$R_6 = \cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}i.$$

Obsérvese que $R_2^2 = R_5^2 = \cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ$ con lo que R_2 y R_5 son las raíces cuadradas de -1; que $R_1^3 = R_3^3 = R_5^3 = \cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ = i$ con lo que R_1, R_3, R_5 son las raíces cúbicas de i; y que $R_2^3 = R_4^3 = R_6^3 = \cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ = -i$ con lo que R_2, R_4, R_6 son las raíces cúbicas de $-i$.

g) $-16i = 16[\cos(270^\circ + k\,360^\circ) + i \operatorname{sen}(270^\circ + k\,360^\circ)]$ y
$(-16i)^{1/4} = 2[\cos(67\tfrac{1}{2}^\circ + k\,90^\circ) + i \operatorname{sen}(67\tfrac{1}{2}^\circ + k\,90^\circ)]$. Así, las raíces buscadas son

$$R_1 = 2(\cos 67\tfrac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 67\tfrac{1}{2}^\circ) \qquad R_3 = 2(\cos 247\tfrac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 247\tfrac{1}{2}^\circ)$$
$$R_2 = 2(\cos 157\tfrac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 157\tfrac{1}{2}^\circ) \qquad R_4 = 2(\cos 337\tfrac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 337\tfrac{1}{2}^\circ).$$

h) $1 + 3i = \sqrt{10}\,[\cos(71^\circ 34' + k\,360^\circ) + i \operatorname{sen}(71^\circ 34' + k\,360^\circ)]$ y
$(1 + 3i)^{1/5} = \sqrt[10]{10}\,[(\cos 14^\circ 19' + k\,72^\circ) + i \operatorname{sen}(14^\circ 19' + k\,72^\circ)]$. Las raíces buscadas son

x y

$$R_1 = \sqrt[10]{10}(\cos 14^\circ 19' + i \operatorname{sen} 14^\circ 19')$$
$$R_2 = \sqrt[10]{10}(\cos 86^\circ 19' + i \operatorname{sen} 86^\circ 19')$$
$$R_3 = \sqrt[10]{10}(\cos 158^\circ 19' + i \operatorname{sen} 158^\circ 19')$$
$$R_4 = \sqrt[10]{10}(\cos 230^\circ 19' + i \operatorname{sen} 230^\circ 19')$$
$$R_5 = \sqrt[10]{10}(\cos 302^\circ 19' + i \operatorname{sen} 302^\circ 19').$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

20. Efectuar las operaciones indicadas y expresar los resultados en la forma $a + bi$.

$a)$ $(6 - 2i) + (2 + 3i) = 8 + i$
$b)$ $(6 - 2i) - (2 + 3i) = 4 - 5i$
$c)$ $(3 + 2i) + (-4 - 3i) = -1 - i$
$d)$ $(3 - 2i) - (4 - 3i) = -1 + i$
$e)$ $3(2 - i) = 6 - 3i$
$f)$ $2i(3 + 4i) = -8 + 6i$
$g)$ $(2 + 3i)(1 + 2i) = -4 + 7i$
$h)$ $(2 - 3i)(5 + 2i) = 16 - 11i$
$i)$ $(3 - 2i)(-4 + i) = -10 + 11i$
$j)$ $(2 + 3i)(3 + 2i) = 13i$
$k)$ $(2 + \sqrt{-5})(3 - 2\sqrt{-4}) = (6 + 4\sqrt{5}) + (3\sqrt{5} - 8)i$
$l)$ $(1 + 2\sqrt{-3})(2 - \sqrt{-3}) = 8 + 3\sqrt{3}i$
$m)$ $(2 - i)^2 = 3 - 4i$
$n)$ $(4 + 2i)^2 = 12 + 16i$
$o)$ $(1 + i)^2(2 + 3i) = -6 + 4i$
$p)$ $\dfrac{2 + 3i}{1 + i} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{2}i$
$q)$ $\dfrac{3 - 2i}{3 - 4i} = \dfrac{17}{25} + \dfrac{6}{25}i$
$r)$ $\dfrac{3 - 2i}{2 + 3i} = -i$

21. Demostrar que $3 + 2i$ y $3 - 2i$ son raíces de $x^2 - 6x + 13 = 0$.

22. Efectuar gráficamente las siguientes operaciones.

$a)$ $(2 + 3i) + (1 + 4i)$
$b)$ $(4 - 2i) + (2 + 3i)$
$c)$ $(2 + 3i) - (1 + 4i)$
$d)$ $(4 - 2i) - (2 + 3i)$

23. Expresar en forma polar cada uno de los siguientes números complejos.

$a)$ $3 + 3i = 3\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$
$b)$ $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$
$c)$ $-2\sqrt{3} - 2i = 4(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$
$d)$ $\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ)$
$e)$ $-8 = 8(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)$
$f)$ $-2i = 2(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$
$g)$ $-12 + 5i = 13(\cos 157^\circ 23' + i \operatorname{sen} 157^\circ 23')$
$h)$ $-4 - 3i = 5(\cos 216^\circ 52' + i \operatorname{sen} 216^\circ 52')$

24. Efectuar las operaciones indicadas y expresar los resultados en la forma $a + bi$.

$a)$ $3(\cos 25^\circ + i \operatorname{sen} 25^\circ)\, 8(\cos 200^\circ + i \operatorname{sen} 200^\circ) = -12\sqrt{2} - 12\sqrt{2}\, i$

$b)$ $4(\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ)\, 2(\cos 100^\circ + i \operatorname{sen} 100^\circ) = -4\sqrt{3} + 4i$

$c)$ $\dfrac{4(\cos 190^\circ + i \operatorname{sen} 190^\circ)}{2(\cos 70^\circ + i \operatorname{sen} 70^\circ)} = -1 + i\sqrt{3}$

$d)$ $\dfrac{12(\cos 200^\circ + i \operatorname{sen} 200^\circ)}{3(\cos 350^\circ + i \operatorname{sen} 350^\circ)} = -2\sqrt{3} - 2i$

25. Utilícese la forma polar para encontrar cada uno de los siguientes productos y cocientes, y exprésese cada resultado en la forma $a + bi$.

$a)$ $(1 + i)(\sqrt{2} - i\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$
$b)$ $(-1 - i\sqrt{3})(-4\sqrt{3} + 4i) = 8\sqrt{3} + 8i$
$c)$ $\dfrac{1 - i}{1 + i} = -i$
$d)$ $\dfrac{4 + 4\sqrt{3}\, i}{\sqrt{3} + i} = 2\sqrt{3} + 2i$
$e)$ $\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} = 0{,}2588 + 0{,}9659i$
$f)$ $\dfrac{3 + i}{2 + i} = 1{,}4 - 0{,}2i$

26. Utilizar el teorema de De Moivre para evaluar cada una de las siguientes expresiones y dar cada resultado en la forma $a + bi$.

$a)$ $[2(\cos 6^\circ + i \operatorname{sen} 6^\circ)]^5 = 16\sqrt{3} + 16i$
$b)$ $[\sqrt{2}(\cos 75^\circ + i \operatorname{sen} 75^\circ)]^4 = 2 - 2\sqrt{3}i$
$c)$ $(1 + i)^8 = 16$
$d)$ $(1 - i)^6 = 8i$
$e)$ $(1/2 - i\sqrt{3}/2)^{20} = -1/2 - i\sqrt{3}/2$
$f)$ $(\sqrt{3}/2 + i/2)^9 = -i$
$g)$ $(3 + 4i)^4 = -526{,}9 - 336{,}1i$
$h)$ $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})^3}{(-2 + 2i)^4} = \dfrac{1}{8}$
$i)$ $\dfrac{(1 + i)(\sqrt{3} + i)^3}{(1 - i\sqrt{3})^3} = 1 - i$

$(\sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ)(2 \operatorname{cis} 45^\circ)$

$2\sqrt{2} \operatorname{cis} 45 + 45$

$2\sqrt{2} \operatorname{cis} 90$

$2\sqrt{2}\,[\cos 90 + i \operatorname{sen} 90]$

$2\sqrt{2}\, i$

27. Encontrar todas las raíces indicadas y expresar los resultados en la forma $a + bi$, excepto en los casos en que se requiera el uso de tablas.

   a) Las raíces cuadradas de i. *Resp.* $\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, \quad -\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$

   b) Las raíces cuadradas de $1 + i\sqrt{3}$. *Resp.* $\sqrt{6}/2 + i\sqrt{2}/2, \quad -\sqrt{6}/2 - i\sqrt{2}/2$

   c) Las raíces cúbicas de -8. *Resp.* $1 + i\sqrt{3}, \quad -2, \quad 1 - i\sqrt{3}$

   d) Las raíces cúbicas de $27i$. *Resp.* $3\sqrt{3}/2 + 3i/2, \quad -3\sqrt{3}/2 + 3i/2, \quad -3i$

   e) Las raíces cúbicas de $-4\sqrt{3} + 4i$.
   Resp. $2(\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ), \quad 2(\cos 170^\circ + i \operatorname{sen} 170^\circ), \quad 2(\cos 290^\circ + i \operatorname{sen} 290^\circ)$

   f) Las raíces quintas de $1 + i$. *Resp.* $\sqrt[10]{2}(\cos 9^\circ + i \operatorname{sen} 9^\circ), \quad \sqrt[10]{2}(\cos 81^\circ + i \operatorname{sen} 81^\circ)$, etc.

   g) Las raíces sextas de $-\sqrt{3} + i$. *Resp.* $\sqrt[6]{2}(\cos 25^\circ + i \operatorname{sen} 25^\circ), \quad \sqrt[6]{2}(\cos 85^\circ + i \operatorname{sen} 85^\circ)$, etc.

28. Encontrar las raíces décimas de 1 y demostrar que el producto de dos cualesquiera de ellas es, a su vez, una de las raíces décimas de 1.

29. Demostrar que el inverso de cualquiera de las raíces décimas de 1 es, a su vez, una raíz décima de 1.

30. Simbolícese una de las raíces cúbicas complejas de 1 (problema 19*d*) por ω_1, y la otra por ω_2. Demostrar que $\omega_1^2\omega_2 = \omega_1$ y $\omega_1\omega_2^2 = \omega_2$.

31. Demostrar que $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^{-n} = \cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta$.

32. A partir de la igualdad de los segmentos OS y P_2P_1 de la Fig. 18-E encontrar un segundo procedimiento que permita la construcción de la diferencia $OS = z_1 - z_2$ de dos números complejos z_1 y z_2.

CAPITULO 19

Conceptos sobre geometría del espacio

EL PUNTO DE INTERSECCION de una recta y un plano se llama *pie* de la recta.

Una recta dada es perpendicular a un plano dado si la recta corta al plano y si, además, toda recta del plano que pasa por el pie de la recta dada es perpendicular a ella.

Si una recta es perpendicular a dos rectas secantes cualesquiera en su punto de intersección, es perpendicular al plano que contiene a las dos rectas. Véase la Fig. 19-A.

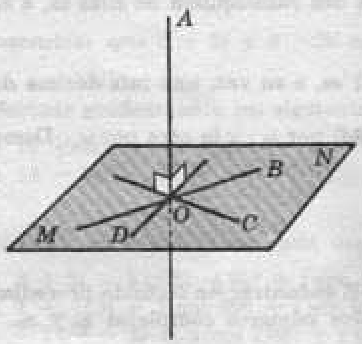


Fig. 19-A

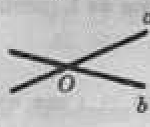


Fig. 19-B

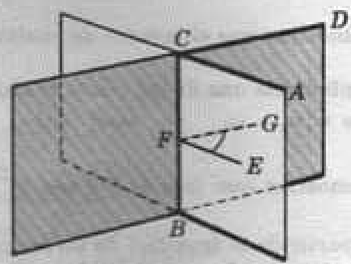


Fig. 19-C

ANGULOS DIEDROS. Cuando dos rectas tienen un solo punto común (Fig. 19-B), determinan cuatro ángulos planos. Cuando dos planos tienen una sola recta común, determinan cuatro *ángulos diedros.* Aquí, se considerará únicamente el ángulo diedro A-BC-D que se señala con líneas gruesas en la Fig. 19-C. Los planos ABC y DBC reciben el nombre de *caras* del ángulo diedro, y la recta de intersección BC recibe el nombre de *arista* del ángulo diedro.

El ángulo plano formado por dos rectas que pertenecen a caras distintas de un ángulo diedro y que son perpendiculares a la arista es el *ángulo plano* del ángulo diedro. El ángulo plano, como el $\angle EFG$ de la Fig. 19-C, se toma como medida del ángulo diedro A-BC-D.

Los ángulos diedros son agudos, rectos u obtusos si sus correspondientes ángulos planos son, respectivamente, agudos, rectos u obtusos.

ANGULOS TRIEDROS. Cuando tres planos tienen un solo punto común determinan ocho *ángulos triedros.* Aquí se considerará únicamente el ángulo triedro O-XYZ que se señala con líneas gruesas en la Fig. 19-D. El punto común O es el *vértice* del ángulo triedro, y los planos OXY, OYZ y OZX son las *caras.* Las caras, tomadas de dos en dos, forman tres ángulos diedros cuyas aristas OX, OY y OZ son las aristas del ángulo triedro. Los ángulos planos XOY, YOZ y ZOX, en las caras del ángulo triedro, son *los ángulos de sus caras.*

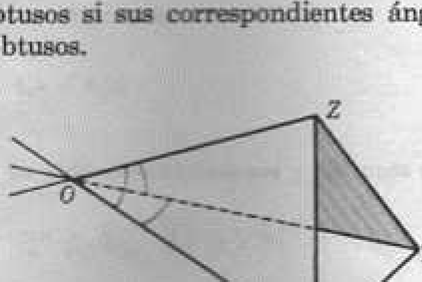


Fig. 19-D

La suma de los ángulos de dos caras cualesquiera de un ángulo triedro es mayor que el ángulo de la tercera cara. Véase la demostración en el problema 1.

La suma de los ángulos de las caras de un ángulo triedro es menor que 360°. Véase la demostración en el problema 2.

ANGULOS ESFERICOS. La intersección de un plano y una esfera es una circunferencia (Fig. 19-E) que recibe el nombre de *circunferencia máxima* si el plano secante pasa por el centro de la esfera; en los demás casos, se llama *circunferencia menor.* Los polos de tales circunferencias (máximas o menores) son los puntos de intersección de la esfera y el diámetro que es perpendicular al plano de las circunferencias. Obsérvese que, mientras P es el polo de muchas circunferencias menores (de todas las circunferencias menores determinadas por planos a MM'), lo es, sin embargo, de una sola circunferencia máxima.

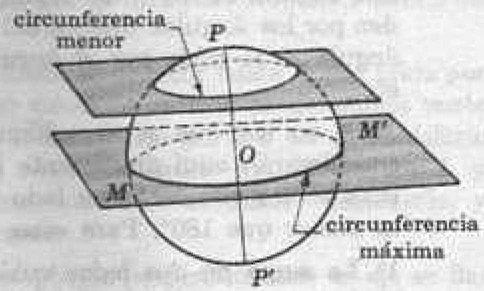


Fig. 19-E

Dos puntos diferentes de una esfera (como A y B en la Fig. 19-F) que no son extremos de un diámetro pertenecen a una sola circunferencia máxima. El menor arco AB de esta circunferencia máxima es la curva más corta que puede trazarse sobre la esfera para unir los puntos A y B.

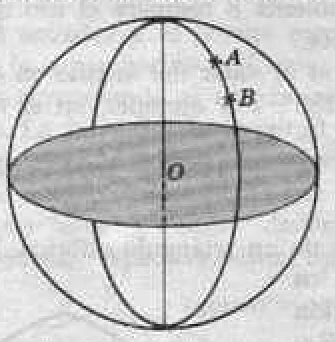


Fig. 19-F

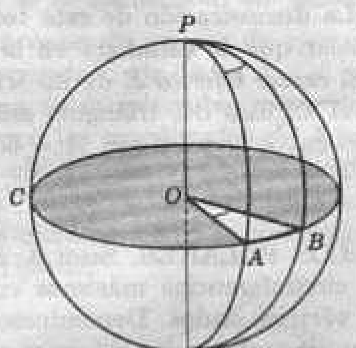


Fig. 19-G

El ángulo formado en una esfera por dos arcos secantes de circunferencias máximas se denomina *ángulo esférico.* Los arcos de las circunferencias máximas son los *lados* del ángulo esférico, y el punto de intersección de los arcos es el *vértice.* La medida de un ángulo esférico viene dada por el ángulo diedro formado por los planos de las circunferencias máximas cuyos arcos constituyen los *lados* del ángulo esférico. En la Fig. 19-G, APB es un ángulo esférico de la esfera del centro O, y la circunferencia ABC es la circunferencia máxima cuyo polo es el vértice P del ángulo esférico. Como la medida del ángulo diedro A-PO-B corresponde a la medida del ángulo plano AOB que, a su vez, tiene por medida la del arco AB, se sigue que la medida de un ángulo esférico está dada por el arco determinado por los lados sobre la circunferencia máxima cuyo polo es el vértice del ángulo.

TRIANGULOS ESFERICOS. La región de la superficie de una esfera limitada por los arcos de tres circunferencias máximas se denomina *triángulo esférico.* Los arcos son los *lados* del triángulo esférico, y los vértices de los tres ángulos esféricos son los *vértices* del triángulo esférico. Generalmente, los ángulos se denominan A, B, C, y los respectivos lados opuestos a, b, c.

Cuando se unen los vértices A, B, C de un triángulo esférico con el centro de la esfera (Fig. 19-H) se forma un ángulo triedro O-ABC. Los lados a, b, c del triángulo esférico se miden por los ángulos de las caras BOC, COA, AOB de este triángulo triedro. Los ángulos A, B, C del triángulo esférico se miden por los ángulos diedros del ángulo triedro – el ángulo A se mide por el ángulo diedro B-OA-C, etc.

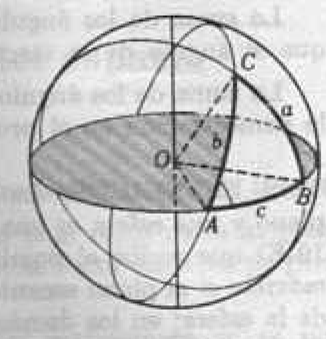


Fig. 19-H

A no ser que se especifique lo contrario, se considerarán aquí únicamente los triángulos esféricos en los que cualquier lado y cualquier ángulo es menor que 180°. Para estos triángulos:

1) La suma de dos lados cualesquiera es mayor que el tercer lado.
2) La suma de los tres lados es menor que 360°.
   (Estos teoremas se derivan de los correspondientes teoremas referentes a los ángulos de las caras de un ángulo triedro.)
3) Si dos lados son iguales, los ángulos opuestos son iguales, y recíprocamente.
4) Si dos lados son desiguales, los ángulos opuestos son desiguales, y el ángulo mayor se opone al lado mayor, y recíprocamente.
   (Estos teoremas son evidentes intuitivamente y no se dará una demostración formal de ellos.)
5) La suma de los tres ángulos es mayor que 180° y menor que 540°.
   (La demostración de este teorema en el problema 8 requiere el uso del triángulo polar que se estudiará en la sección siguiente.)

El *exceso esférico* E de un triángulo esférico es el valor del ángulo en que la suma de los ángulos del triángulo esférico excede a 180°. Por ejemplo, en el triángulo esférico cuyos ángulos son $A = 65°$, $B = 75°$, $C = 112°$,

$$E = 65° + 75° + 112° - 180° = 72°.$$

TRIANGULOS POLARES. Sean A, B, C los vértices de un triángulo esférico. Trácense las tres circunferencias máximas cuyos polos son los tres vértices dados. Denomínese A' la intersección de las cincunferencias máximas cuyos polos son B y C y que se encuentra, respecto de BC, al mismo lado que A; B' la intersección de las circunferencias máximas cuyos polos son C y A y que se encuentra, respecto de CA, al mismo lado que B; C' la intersección de las circunferencias máximas cuyos polos son A y B y que se encuentra, respecto de AB, al mismo lado que C. El triángulo esférico $A'B'C'$ es el *triángulo polar* de ABC. Sus lados se denominarán a', b', c', como en la Fig. 19-I.

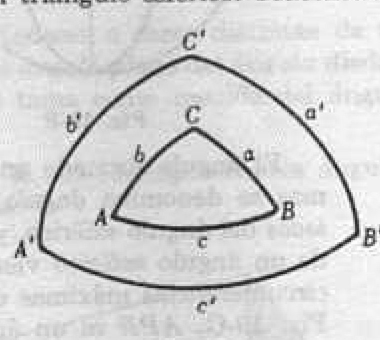


Fig. 19-I

Los teoremas fundamentales referentes a los triángulos polares son:

1) Si $A'B'C'$ es el triángulo polar de ABC, entonces ABC es el triángulo polar de $A'B'C'$. (Véase una demostración en el problema 5.)
2) Dados un triángulo y su triángulo polar, cada ángulo de cualquiera de los triángulos dados es igual al suplemento del lado correspondiente del otro triángulo; así,

$$A = 180° - a' \qquad B = 180° - b' \qquad C = 180° - c'$$
$$A' = 180° - a \qquad B' = 180° - b \qquad C' = 180° - c.$$

(Véase una demostración en el problema 6.)

APLICACIONES. Para simplificar algunos cálculos, se acostumbra a considerar la Tierra como una esfera. El eje de rotación de esta esfera interseca la superficie de ésta en los polos *norte* y *sur*, P_n y P_s de la Fig. 19-J. La circunferencia máxima cuyos polos son P_n y P_s recibe el nombre de *ecuador*. Dado un punto cualquiera A, de la superficie de la Tierra, diferente de los polos, se llama *meridiano* de A a la semi-circunferencia P_nAP_s. El *primer meridiano* o *meridiano cero* pasa por el observatorio astronómico de Greenwich, Inglaterra.

La *latitud* (lat.) de A es la distancia angular desde el ecuador hasta A. Se mide por el ángulo $A'OA$ o por el arco $A'A$ del meridiano de A. La latitud se denomina norte o sur según que el punto dado se encuentre en el hemisferio norte o en el hemisferio sur. La diferencia de latitud entre dos puntos cuyas latitudes respectivas son L_1 y L_2, $(L_1 > L_2)$, es $L_1 - L_2$ si ambos puntos se encuentran en el mismo hemisferio, y es $L_1 + L_2$ si se encuentran en hemisferios diferentes.

Las circunferencias menores determinadas por planos perpendiculares al eje se llaman *paralelos de latitud* o *paralelos*. Todos los puntos de un mismo paralelo tienen la misma latitud.

La *longitud* (long.) de A es el ángulo (no mayor que 180°) entre el primer meridiano y el meridiano de A. Se mide por el arco $G'A'$ determinado en el ecuador por los dos meridianos o por el ángulo esférico $G'P_nA'$. La longitud se denomina este u oeste según que el punto dado se encuentre al este o al oeste del primer meridiano. La diferencia de longitud entre dos puntos cuyas longitudes respectivas son λ_1 y λ_2, $(\lambda_1 > \lambda_2)$, es $\lambda_1 - \lambda_2$ si ambos puntos se encuentran hacia un mismo lado del primer meridiano y es menor que $\lambda_1 + \lambda_2$ y es $360° - (\lambda_1 + \lambda_2)$ si se encuentran en lados diferentes.

El ecuador y el primer meridiano hacen las veces de un par de ejes coordenados sobre la superficie de la Tierra; el ecuador corresponde al eje de las X y el primer meridiano corresponde al eje de las Y de un sistema de coordenadas rectangulares en un plano. La latitud y la longitud de un punto A son las coordenadas de A con respecto a estos ejes; la latitud corresponde a la coordenada Y, mientras que la longitud corresponde a la coordenada X. Las denominaciones "norte" y "sur" dadas a las latitudes, y las de "este" y "oeste" dadas a las longitudes corresponden a la coordenada positiva y negativa, respectivamente, de un punto en un plano.

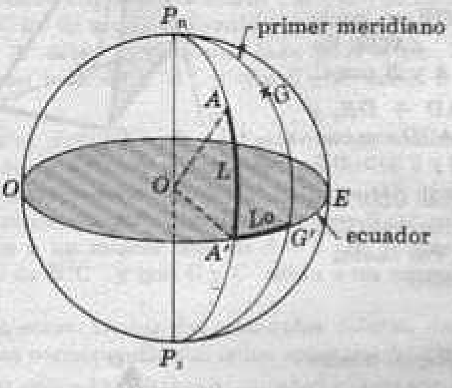


Fig. 19-J

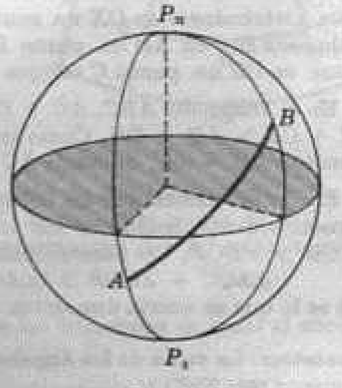


Fig. 19-K

Los meridianos que pasan por dos puntos de la superficie de la Tierra y los arcos de la circunferencia menor que unen dichos puntos (Fig. 19-K) determinan dos triángulos esféricos AP_nB y AP_sB. Uno de estos triángulos se utilizará en un capítulo posterior para determinar la distancia a lo largo de una circunferencia máxima, (longitud del arco AB) entre los dos puntos. Estas distancias a lo largo de un arco de circunferencia máxima se expresan, generalmente, en millas náuticas. Por definición,

$$1' \text{ de un arco de circunferencia máxima} = 1 \text{ milla náutica} = 6080 \text{ pies.}$$

Cuando un barco o un aeroplano recorre un arco de circunferencia máxima entre dos puntos, su *rumbo* es el ángulo que el recorrido forma con el meridiano del barco o del aeroplano. En náutica y en aeronáutica, el rumbo se mide a partir del norte y con el sentido dirigido hacia el este.

EJEMPLO. *a*) En la Fig. 19-L, un barco ha de navegar desde A hasta B. El *rumbo inicial* (rumbo en A) es el ángulo $P_n AB$ y el *rumbo de llegada* (rumbo en B) es el ángulo $P_n BC$ como aparece señalado.

b) En la Fig. 19-M, un barco ha de navegar desde B hasta A. El rumbo inicial (en B) es el ángulo $P_n BA$ y el rumbo de llegada (en A) es el ángulo $P_n AC$ como aparece señalado.

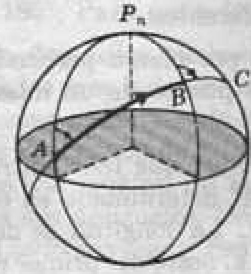


Fig. 19-L

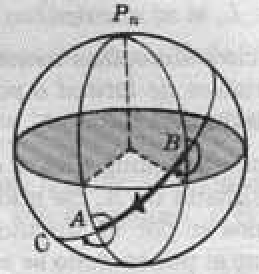
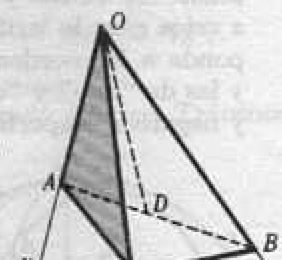


Fig. 19-M

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar: La suma de los ángulos de dos caras cualesquiera de un ángulo triedro es mayor que el ángulo de la tercera cara.

El teorema es verdadero si los ángulos de las tres caras son iguales. Considérese entonces un ángulo triedro $O\text{-}XYZ$ en el que el $\angle XOY$ es mayor que cualquiera de los ángulos de las otras dos caras. Determínese en OX un punto cualquiera A, en OY un punto cualquiera B y en AB un punto D tal que $\angle AOD = \angle XOZ$. Señálese en OZ un punto C tal que $OC = OD$. Unanse A y B con C.



En el triángulo ABC, $AC + CB > AB$, $AB = AD + DB$, y $AC + CB > AD + DB$. Como los triángulos AOC y AOD son congruentes, $AD = AC$; de donde $AC + CB > AC + DB$ y $CB > DB$.

Entonces, puesto que los lados OD y OB del triángulo ODB son respectivamente iguales a los lados OC y OB del triángulo OCB, $\angle COB > \angle DOB$. Por construcción $\angle AOC = \angle AOD$. Por tanto,

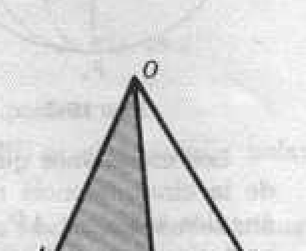
$$\angle AOC + \angle COB > \angle AOD + \angle DOB = \angle AOB$$

que es lo que se quería demostrar.

2. Demostrar: La suma de los ángulos de las caras de un ángulo triedro es menor que 360°.

Señálense tres puntos cualesquiera A, B y C en las aristas del triángulo triedro $O\text{-}XYZ$. Obsérvese, en primer lugar, que existen tres triángulos con vértice en O y que la suma de los ángulos de estos triángulos es $3 \cdot 180° = 540°$; esto es,

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA + (\angle OAB + \angle OAC) + (\angle OBA + \angle OBC) + (\angle OCA + \angle OCB) = 540°.$$



Por el problema 1, $\angle OAB + \angle OAC > \angle BAC$,
$\angle OBA + \angle OBC > \angle ABC$, y
$\angle OCA + \angle OCB > \angle ACB$.

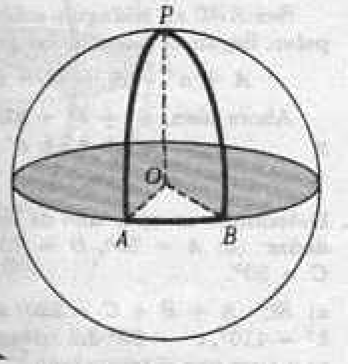
Entonces $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA + \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB < 540°$ o

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA < 540° - (\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB).$$

Como la suma contenida en los paréntesis es la suma de los ángulos del triángulo ABC,

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA < 540° - 180° = 360°$$ que es lo que se quería probar.

3. Sean A y B dos puntos cualesquiera de una circunferencia de una esfera de centro O, y sea P el polo de la circunferencia máxima. Constrúyase y resuélvase el triángulo esférico ABP cuando (a) $AB = 75°$ y (b) $AB = 90°$.



Unanse A y B con P, mediante arcos de circunferencias máximas. Como todos los puntos de una circunferencia máxima distan $90°$ del polo correspondiente, $AP = BP = 90°$. El ángulo esférico PAB o A y el ángulo esférico PBA o B se miden por los ángulos diedros P-AO-B y P-BO-A cuyas respectivas caras son planos perpendiculares entre sí. Entonces, $A = B = 90°$.

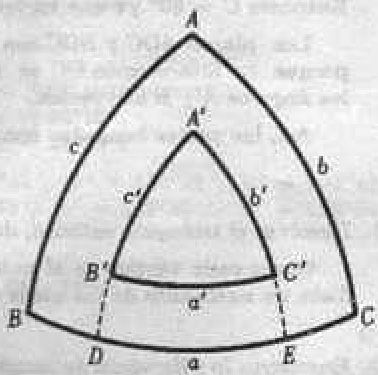
a) El ángulo esférico APB o P se mide por el ángulo plano AOB que tiene la misma medida que el arco AB. Los lados del triángulo APB son $AP = BP = 90°$, $AB = 75°$; y los ángulos son $A = B = 90°$, $P = 75°$.

b) En el triángulo esférico APB, $AP = BP = AB = 90°$ y $A = B = P = 90°$.

4. Determinar en cada uno de los siguientes casos si existe un triángulo esférico ABC cuyas partes sean las dadas: (a) $AB = 50°$, $BC = 70°$, $CA = 100°$; (b) $AB = 35°$, $BC = 65°$, $CA = 120°$; (c) $AB = 150°$, $BC = 100°$, $CA = 120°$.

a) Si; $AB + BC + CA < 360°$ y la suma de dos lados cualesquiera es mayor que el tercer lado.
b) No; $AB + BC < CA$.
c) No; $AB + BC + CA > 360°$.

5. Demostrar: Si $A'B'C'$ es el triángulo polar de ABC, entonces ABC es el triángulo polar de $A'B'C'$.



(a)

Como A es el polo de $B'C'$ y C es el polo de $A'B'$, B' dista un cuadrante ($90°$) de A y de C. Así, B' es el polo del arco AC. Del mismo modo se puede demostrar que A' es el polo del arco BC y que C' es el polo del arco AB. Entonces, el triángulo ABC es uno de los ocho triángulos determinados por las circunferencias máximas cuyos polos son A', B', C'. Si de los ocho triángulos, ABC ha de ser el triángulo polar de $A'B'C'$, será necesario que A y A' estén a un mismo lado de $B'C'$, que B y B' estén a un mismo lado de $C'A'$, y que C y C' estén a un mismo lado de $A'B'$.

Por definición, B y B' están a un mismo lado de AC, y la distancia entre B y cualquier punto de AC es menor que $180°$. Entonces, puesto que B' (el polo de AC) dista $90°$ de cualquier punto de AC, la distancia entre B y B' es menor que $90°$. Por último, como B (el polo de $A'C'$) dista $90°$ de cualquier punto de $A'C'$, B y B' están a un mismo lado de $A'C'$. Del mismo modo se puede demostrar que A y A' están a un mismo lado de $B'C'$, y que C y C' están a un mismo lado de $A'B'$.

6. Demostrar: Dados dos triángulos polares, cada ángulo de uno de los triángulos es igual al suplemento de los correspondientes lados opuestos del otro triángulo.

En los triángulos polares ABC y $A'B'C'$ de la Fig. (a), se demostrará que $A' = 180° - a$.

Prolónguense los arcos $A'B'$ y $A'C'$ hasta que corten BC en D y E respectivamente. Entonces, el arco DE es la medida del ángulo A'. Ahora $BE + DC = BC + DE = a + A'$ y, puesto que B es el polo de $A'E$ y C es el polo de $A'D$, $BE = DC = 90°$. Así, $a + A' = 180°$ y $A' = 180° - a$.

7. Encontrar las partes del triángulo polar del triángulo esférico en el que:
a) $A = 156°56'$, $B = 83°11'$, $C = 90°$; $a = 157°55'$, $b = 72°22'$, $c = 106°18'$.
b) $A = 44°59'$, $B = 112°47'$, $C = 85°7'$; $a = 43°17'$, $b = 116°36'$, $c = 105°15'$.

Según el teorema del problema 6:

a) $A' = 180° - a = 22°5'$, $B' = 180° - b = 107°38'$, $C' = 180° - c = 73°42'$;

$a' = 180° - A = 23°4'$, $b' = 180° - B = 96°49'$, $c' = 180° - C = 90°$.

b) $A' = 180° - a = 136°43'$, $B' = 180° - b = 63°24'$, $C' = 180° - c = 74°45'$;
$a' = 180° - A = 135°\,1'$, $b' = 180° - B = 67°13'$, $c' = 180° - C = 94°53'$.

8. Demostrar: La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que 180° y menor que 540°.

Sea ABC el triángulo esférico dado (véase la Fig. (a) del problema 6), y sea $A'B'C'$ su triángulo polar. Según el teorema del problema 6,

$$A + a' = B + b' = C + c' = 180°; \text{ de donde, } A + B + C + a' + b' + c' = 540°.$$

Ahora bien, $a' + b' + c' > 0°$ tal que $A + B + C < 540°$
y $a' + b' + c' < 360°$ tal que $A + B + C > 180°$.

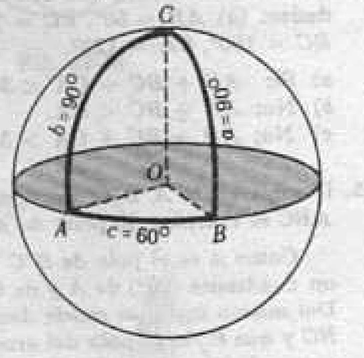
9. Determinar en cada uno de los siguientes casos si existe un triángulo esférico ABC cuyas partes sean las dadas: (a) $A = 60°$, $B = 70°$, $C = 90°$; (b) $A = 60°$, $B = 115°$, $C = 145°$; (c) $A = 60°$, $B = 20°$, $C = 90°$.

a) Sí; $A + B + C = 220°$ es un valor comprendido entre 180° y 540° y, además, los lados $a' = 120°$, $b' = 110°$, $c' = 90°$ del triángulo polar cumplen la condición que la suma de dos cualesquiera de ellos es mayor que el tercer lado.

b) No; los lados $a' = 120°$, $b' = 65°$, $c' = 35°$ del triángulo polar no cumplen la condición $b' + c' > a'$.

c) No; $A + B + C < 180°$.

10. Resolver el triángulo esférico, dados $a = b = 90°$, $c = 60°$.



Supóngase que el triángulo esférico pertenece a una esfera de centro O. Ahora bien, C dista un cuadrante de A y de B, C es el polo de la circunferencia máxima de la que $AB = c$ es un arco. Entonces $C = 60°$ ya que su medida es la del arco AB.

Los planos AOC y BOC son perpendiculares al plano AOB porque su intersección OC es perpendicular a AOB; por tanto, los ángulos A y B son rectos.

Así, las partes buscadas son: $A = B = 90°$, $C = 60°$.

11. Resolver el triángulo esférico, dados $A = B = C = 90°$.

Como cada vértice es el polo de la circunferencia máxima que pasa por los otros dos, cada vértice dista un cuadrante de los otros dos vértices. Así, $a = b = c = 90°$.

12. Encontrar la diferencia de longitud entre:
a) Nueva York (long. 74°1,0′ O) y Pearl Harbor (long. 157°58,3′ O).
b) Nueva York y Moscú (long. 37°34,3′ E).
c) Nueva York y Sydney (long. 151°13,0′ E).
d) Sydney y Moscú.

Las distancias buscadas son:

a) $\lambda_1 - \lambda_2 = 157°58{,}3' - 74°1{,}0' = 83°57{,}3'$, puesto que ambas son oeste.

b) $\lambda_1 + \lambda_2 = 74°1{,}0' + 37°34{,}3' = 111°35{,}3'$, porque una es este y la otra es oeste.

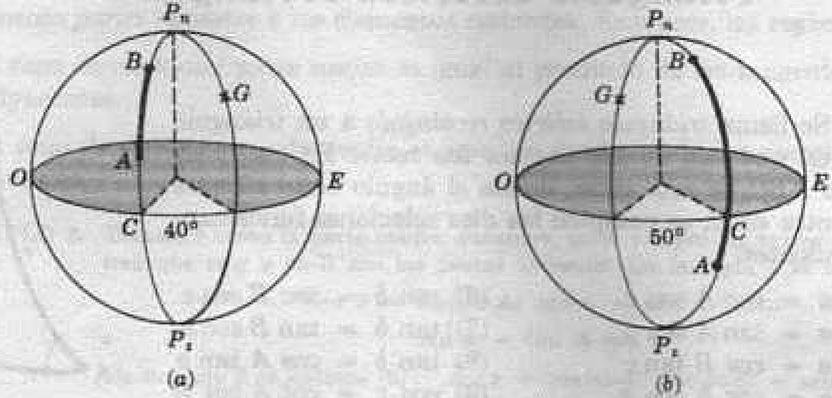
c) $360° - (\lambda_1 + \lambda_2) = 360° - (151°13{,}0' + 74°1{,}0') = 134°46{,}0'$.

d) $\lambda_1 - \lambda_2 = 151°13{,}0' - 37°34{,}3' = 113°38{,}7'$.

13. Encontrar la distancia (en millas náuticas) entre cada uno de los siguientes pares de puntos de la superficie terrestre:
a) A(lat. 30°25′ N, long. 40° O) y B(lat. 75°10′ N, long. 40° O).
b) A(lat. 30°25′ S, long. 50° E) y B(lat. 75°10′ N, long. 50° E).

a) En la Fig. (a), $CA = 30°25'$, $CB = 75°10'$ y $AB = CB - CA = 44°45' = 2685' = 2685$ millas náuticas.

b) En la Fig. (*b*), $CA = 30°25'$, $CB = 75°10'$ y $AB = CA + CB = 105°35' = 6335' = 6335$ millas náuticas.



PROBLEMAS PROPUESTOS

14. Probar que cualquier ángulo de la cara de un ángulo triedro es mayor que la diferencia de los otros dos ángulos de la cara. Sugerencia: Empléese $A + B > C$.

15. ¿Qué puede decirse del tercer ángulo de la cara de un ángulo triedro, si:
 a) dos de los ángulos de la cara miden 70° y 50° respectivamente? *Resp.* $> 20°$; $< 120°$
 b) dos de los ángulos de la cara miden 130° y 150° respectivamente? *Resp.* $> 20°$; $< 80°$

16. ¿Es posible obtener un triángulo esférico ABC cuyos lados son:
 a) 160°, 110°, 85°? *b*) 170°, 150°, 10°? *c*) 170°, 150°, 50°? *d*) 30°, 50°, 70°?
 Resp. *a*) sí; *b*) no; *c*) no; *d*) sí

17. Encontrar las partes del triángulo polar $A'B'C'$ del triángulo esférico ABC para el cual:
 a) $A = 67°19'$, $B = 48°29'$, $C = 77°17'$; $a = 43°18'$, $b = 33°49'$, $c = 46°28'$.
 b) $A = 122°7'$, $B = 32°24'$, $C = 41°36'$; $a = 73°44'$, $b = 37°25'$, $c = 48°48'$.
 Resp. *a*) $A' = 136°42'$, $B' = 146°11'$, $C' = 133°32'$; $a' = 112°41'$, $b' = 131°31'$, $c' = 102°43'$
 b) $A' = 106°16'$, $B' = 142°35'$, $C' = 131°12'$; $a' = 57°53'$, $b' = 147°36'$, $c' = 138°24'$

18. ¿Es posible obtener un triángulo esférico ABC cuyos ángulos sean:
 a) 30°, 37°, 128°? *b*) 30°, 37°, 111°? *c*) 37°, 51°, 131°? *d*) 40°, 85°, 140°?
 Resp. *a*) sí; *b*) no; *c*) sí; *d*) no

19. El área de la superficie de una esfera de radio R es igual a $4\pi R^2$. El área K de un triángulo esférico sobre esta esfera está dada por $K = \pi R^2 E/180$, donde E, es el exceso esférico en grados del triángulo. ¿Qué parte del área de una esfera de radio 10 está limitada por cada uno de los triángulos esféricos con ángulos:
 a) $A = B = C = 110°$? *Resp.* $K = 250\pi/3$; 5/24
 b) $A = 150°$, $B = 138°$, $C = 132°$? *Resp.* $K = 400\pi/3$; 1/3

20. Encontrar la diferencia en longitudes entre
 a) San Francisco (long. 122°15,7′ O) y Dakar (long. 17°25,0′ O),
 b) San Francisco y Melbourne (long. 144°58,5′ E),
 c) Dakar y Cape Town (long. 18°26,0′ E),
 d) Melbourne y Cape Town.
 Resp. *a*) 104°50,7′, *b*) 92°45,8′, *c*) 35°51,0′, *d*) 126°32,5′

21. Encontrar la distancia (en millas náuticas) sobre la superficie de la Tierra de cada par de puntos siguientes:
 a) A(lat. 40°40′ N; long. 120° O) y B(lat. 75°25′ N; long. 120° O).
 Resp. 2085 millas náuticas
 b) A(lat. 50°20′ N; long. 80° O) y B(lat. 30°50′ S; long. 80° O).
 Resp. 4870 millas náuticas
 c) A(lat. 10°30′ S; long. 40° E) y B(lat. 50°20′ S; long. 40° E).
 Resp. 2390 millas náuticas

CAPITULO 20

Triángulos esféricos rectángulos

FORMULAS. Se llama *triángulo esférico rectángulo* a un triángulo esférico tal que uno de sus ángulos sea recto. En cualquier triángulo ABC de esta clase, donde el ángulo recto *siempre* se encuentra en C, se cumplen las diez relaciones fundamentales siguientes:

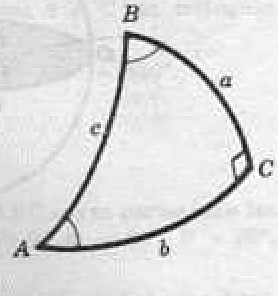


Fig. 20-A

(1) $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c$	(6) $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c$
(2) $\tan a = \tan A \operatorname{sen} b$	(7) $\tan b = \tan B \operatorname{sen} a$
(3) $\tan a = \cos B \tan c$	(8) $\tan b = \cos A \tan c$
(4) $\cos c = \cos b \cos a$	(9) $\cos c = \cot A \cot B$
(5) $\cos A = \operatorname{sen} B \cos a$	(10) $\cos B = \operatorname{sen} A \cos b$.

La deducción de estas fórmulas aparece en el problema 1.

LEYES DE LOS CUADRANTES. Si en un triángulo esférico rectángulo se conocen los elementos A y c, el valor de sen a viene dado por la fórmula (1), $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c$. Sin embargo, para determinar si a es menor o mayor que 90° se necesita una información adicional. Esta información se obtiene de la ley de los cuadrantes:

1. El lado a y el ángulo A (lo mismo que el lado b y el ángulo B) pertenecen al mismo cuadrante.
2. Si $c < 90°$, entonces los lados a y b (lo mismo que los ángulos A y B) pertenecen al mismo cuadrante; si $c > 90°$, entonces los lados a y b (lo mismo que los ángulos A y B) pertenecen a cuadrantes diferentes. (Para la demostración de estas leyes, véase el problema 2.)

EJEMPLO 1. (*a*) Si $A < 90°$ y $c < 90°$ entonces a, b, B son $< 90°$ pero si $c > 90°$ entonces $a < 90°$ y b, B son $> 90°$.

(*b*) Si $A > 90°$ y $c < 90°$ entonces a, b, B son $> 90°$ pero si $c > 90°$ entonces $a > 90°$ y b, B son $< 90°$.

REGLAS DE NEPER. Mediante cualquiera de los recursos que aparecen en las figuras 20-B y 20-C, Neper ofrece reglas para expresar las diez fórmulas fundamentales. La figura 20-B muestra un triángulo esquemático obtenido del triángulo esférico de la figura 20-A mediante la sustitución de c por co-c = 90° − c, de A por co-A = 90° − A, y B por co-B = 90° − B. Obsérvese que se ha omitido la letra C. La figura 20-C muestra las cinco partes esenciales de la figura 20-B dispuestas en forma de círculo.

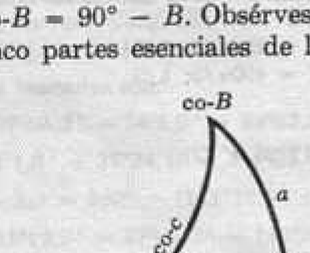


Fig. 20-B

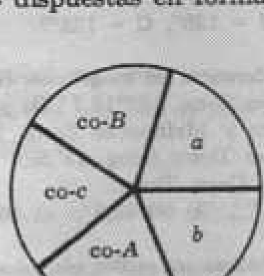


Fig. 20-C

Escójase una cualquiera de las cinco partes y denomínesela *parte media;* llámense *partes adyacentes* a los elementos que se encuentran a ambos lados de la parte media, y llámense *partes opuestas* a los elementos restantes. Entonces, las reglas de Neper son:

1. El seno de cualquier parte media es igual al producto de las tangentes de las partes adyacentes.

2. El seno de cualquier parte media es igual al producto de los cosenos de las partes opuestas.

EJEMPLO 2. Tómese b como la parte media; entonces, co-A y a son las partes adyacentes, mientras que co-c y co-B son las partes opuestas. De la regla 1 se obtiene

$$\operatorname{sen} b = \tan(\text{co-}A)\tan a = \cot A \tan a$$

o (2) $$\tan a = \tan A \operatorname{sen} b.$$

De la regla 2 se obtiene (6) : $\operatorname{sen} b = \cos(\text{co-}B)\cos(\text{co-}c) = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c.$

EJEMPLO 3. Tómese co-B como la parte media; entonces co-c y a son las partes adyacentes y co-A y b son las partes opuestas. De la regla 1, se obtiene

$$\operatorname{sen}(\text{co-}B) = \tan(\text{co-}c)\tan a$$

Entonces, $$\cos B = \cot c \tan a$$

o (3) $$\tan a = \cos B \tan c.$$

De la regla 2, $\operatorname{sen}(\text{co-}B) = \cos(\text{co-}A)\cos b$ o (10) $\cos B = \operatorname{sen} A \cos b.$

Al considerar sucesivamente como parte media cada una de las cinco partes se obtienen, de modo análogo al utilizado en los ejemplos 2 y 3 analizados anteriormente, las diez fórmulas fundamentales. Véanse los problemas 3-4.

RESOLUCIONES DE TRIANGULOS ESFERICOS RECTANGULOS. Para que un triángulo esférico rectángulo quede determinado es necesario que se conozcan, además del ángulo recto, otras dos partes del mismo. Sin embargo, cuando se escogen al azar dos medidas correspondientes a dichas partes, puede suceder que no quede determinado triángulo alguno, o que quede determinado un solo triángulo o que queden determinados dos triángulos. Solamente es posible la determinación de dos triángulos (caso ambiguo) cuando las partes dadas son un lado (a o b) y el ángulo opuesto. Véanse los problemas 5-6.

Para llegar a la solución de triángulos esféricos rectángulos se sugieren los pasos siguientes:

A) Constrúyase un triángulo esquemático (Fig. 20-B) y rodéense con una circunferencia las partes dadas.
B) Escríbase una fórmula que relacione las dos partes dadas con una de las partes desconocidas de acuerdo con la conveniente regla de Neper.
C) Escríbase una fórmula de comprobación que relacione las tres partes desconocidas.
D) Aplíquense las leyes de los cuadrantes, especialmente cuando se utiliza el seno para encontrar una parte desconocida.

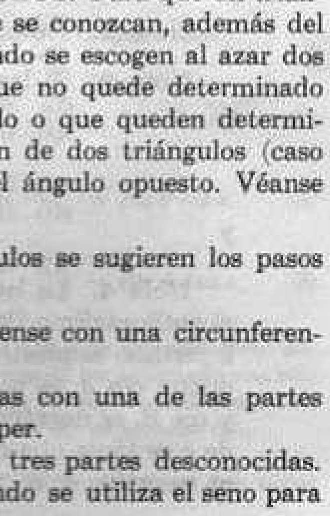
EJEMPLO 4. Supónganse conocidos los elementos $A = 65°$ y $B = 118°$ de un triángulo esférico rectángulo ABC.

Para encontrar a: Considérense a, co-A y co-B; co-A es la parte media, y a y co-B son las partes opuestas. Entonces,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}A) = \cos a \cos(\text{co-}B),$$

$$\cos A = \cos a \operatorname{sen} B,$$

y (*a*) $$\cos a = \cos A \csc B.$$



Para encontrar b: Considérense b, co-A y co-B; co-B es la parte media, y b y co-A son las partes opuestas. Entonces,

$$\text{sen}(\text{co-}B) = \cos b \cos(\text{co-}A), \quad \cos B = \cos b \text{ sen } A,$$

y (*b*)

$$\cos b = \cos B \csc A.$$

Para encontrar c : Considérense co-c, co-A y co-B; co-c es la parte media, y co-A y co-B son las partes adyacentes. Entonces,

$$\text{sen}(\text{co-}c) = \tan(\text{co-}A) \tan(\text{co-}B),$$

y (c)

$$\cos c = \cot A \cot B.$$

Para la comprobación: Considérense las partes desconocidas a, b y co-c; co-c es la parte media y a y b son las partes opuestas. Entonces, $\text{sen}(\text{co-}c) = \cos a \cos b$,

y

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Para los cómputos se utilizará en este libro el siguiente modelo que se encuentra en las publicaciones oficiales del Departamento Naval de los Estados Unidos.

	(*a*)		(*b*)		(*c*)	
$A = 65°$	l cos		l csc		l cot	
$B = 118°$	l csc		l cos	(n)	l cot	(n)
$a =$	l cos					
$b =$	l cos	(n)	l cos	(n)		
$c =$	l cos	(n)			l cos	(n)

Nota 1. Este modelo se llena por *filas* (horizontales).

Nota 2. Después de los logaritmos de los números menores que 1 se omitirá -10.

Nota 3. Si las tablas no contienen log sec θ y log csc θ, tómense

$$\log \sec \theta = \log \frac{1}{\cos \theta} = \text{colog} \cos \theta$$

y

$$\log \csc \theta = \log \frac{1}{\text{sen } \theta} = \text{colog sen } \theta.$$

Nota 4. La letra (n) que aparece a continuación de algunos logaritmos indica que el antilogaritmo (la función natural) es negativo. Cuando no aparece esta letra, el antilogaritmo es positivo; cos A y csc B son positivos en el cálculo de a; por tanto, su producto, cos a, es positivo y $a < 90°$. En el cálculo de b, se tiene que csc A es positiva y cos B, es negativo; por tanto, su producto, cos b es negativo y $b > 90°$. En el cálculo de c se tiene que cot A es positiva y cot B es negativa; por tanto, su producto, cos c, es negativo y $c > 90°$.

Nota 5. La comprobación, que se obtiene de la comparación de dos elementos de la última fila, asegura que los logaritmos de las partes desconocidas son correctos.

(Véanse los problemas 7-10.)

UN TRIANGULO CUADRANTAL es un triángulo esférico tal que uno de sus lados es igual a 90°. Se resuelve mediante su triángulo polar (un triángulo esférico rectángulo).

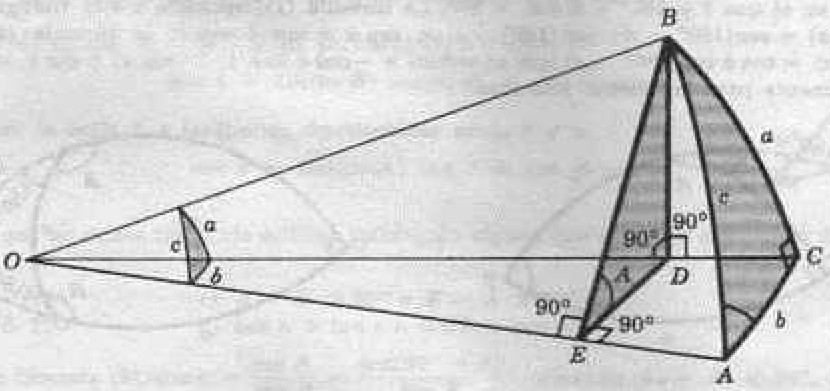
(Véase el problema 11.)

PARA RESOLVER UN TRIANGULO ESFERICO ISOSCELES se divide en dos triángulos esféricos rectángulos.

(Véase el problema 12.)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir las diez fórmulas fundamentales de los triángulos esféricos rectángulos.



Sobre una esfera de centro O, determínese un triángulo esférico rectángulo cuyos lados a y b sean menores que 90°. Unase O con los vértices del triángulo para formar el ángulo triedro O-ABC. Considérese el plano perpendicular a OA que pasa por B. Este plano corta a OC en D, y a OA en E.

Puesto que OE es perpendicular al plano BDE, es perpendicular a las rectas EB y ED. Entonces, los triángulos BEO y DEO son rectángulos, y su ángulo recto se encuentra en E. Además, $\angle BED$ es un ángulo plano del ángulo diedro B-OA-C y, por tanto, sirve de medida al ángulo A del triángulo esférico.

Como el plano BDE es perpendicular a OE, es perpendicular al plano OAC que pasa por OE. Por otra parte, BD, intersección de los planos OBC y BDE perpendiculares al plano OAC, es, a su vez, perpendicular a OAC. Por tanto, los triángulos BDO y BDE son rectángulos, y su ángulo recto se encuentra en D.

En los triángulos rectángulos BDO, BDE y BEO: $\operatorname{sen} a = \dfrac{DB}{OB} = \dfrac{DB}{EB}\cdot\dfrac{EB}{OB} = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c$ (1)

En los triángulos rectángulos BDO, BDE y DEO: $\tan a = \dfrac{DB}{OD} = \dfrac{DB}{ED}\cdot\dfrac{ED}{OD} = \tan A \operatorname{sen} b$ (2)

En los triángulos rectángulos BEO, DEO y BDO: $\cos c = \dfrac{OE}{OB} = \dfrac{OE}{OD}\cdot\dfrac{OD}{OB} = \cos b \cos a$ (4)

En los triángulos rectángulos DEO, BDE y BEO: $\tan b = \dfrac{ED}{OE} = \dfrac{ED}{EB}\cdot\dfrac{EB}{OE} = \cos A \tan c$ (8)

Si ahora se considera el plano que pasa por A y que es perpendicular a OB y se discurre como anteriormente, se obtiene un conjunto de cuatro fórmulas que pueden deducirse de las anteriores con sólo intercambiar a y b, y A y B. Obsérvese que con este intercambio la fórmula (4) no produce una nueva fórmula, pero, sin embargo, de (1) se obtiene (6), de (2) se obtiene (7), y de (8) se obtiene (3).

El producto de (2) y (7) es: $\tan a \tan b = \tan A \tan B \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$. Si se sustituye $\tan a$ por $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$ y $\tan b$ por $\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}$, y se divide por $\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, se llega a $\dfrac{1}{\cos a \cos b} = \tan A \tan B$. Esta fórmula cuando se utiliza la igualdad (4), se transforma en $\dfrac{1}{\cos c} = \tan A \tan B$ o

$$\cos c = \cot A \cot B. \qquad (9)$$

El producto de (6) y (8) es: $\operatorname{sen} b \cos A \tan c = \tan b \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c$. Entonces,

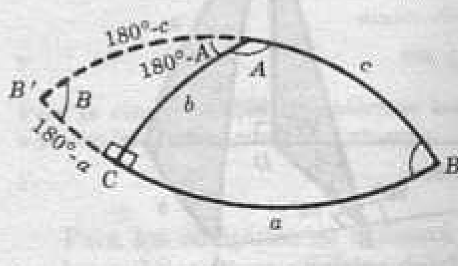
$$\cos A = \frac{\operatorname{sen} B \tan b \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} b \tan c} = \frac{\operatorname{sen} B \cos c}{\cos b} = \frac{\operatorname{sen} B(\cos a \cos b)}{\cos b}$$

$$\cos A = \operatorname{sen} B \cos a. \qquad (5)$$

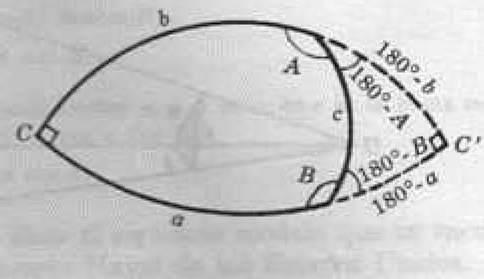
Del mismo modo, del producto de (1) y (3) se obtiene

$$\cos B = \operatorname{sen} A \cos b. \tag{10}$$

A continuación, considérese un triángulo esférico rectángulo en el que $a > 90°$ y $b < 90°$, como se muestra en la Fig. (*a*). Descríbanse los arcos BA y BC que se intersecan en B' y considérese el triángulo $AB'C$ en el que b y $180° - a$ son $< 90°$. La fórmula (1), aplicada a este triángulo, expresa que $\operatorname{sen}(180° - a) = \operatorname{sen}(180° - A)\ \operatorname{sen}(180° - c)$ o $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} A\ \operatorname{sen} c$; la fórmula (4) expresa que $\cos(180° - c) = \cos b \cos(180° - a)$ que se reduce a $-\cos c\ (\cos b)\ (-\cos a)$ o $\cos c = \cos b \cos a$; y así sucesivamente para las demás fórmulas.



(*a*)



(*b*)

Por último, considérese un triángulo esférico rectángulo en el que a y b son $> 90°$, como se muestra en la Fig. (*b*). Descríbanse los arcos CB y CA que se cortan en C' y considérese el triángulo esférico rectángulo ABC' en el que $180° - a$ y $180° - b$ son $< 90°$. La fórmula (1), aplicada a este triángulo, expresa que $\operatorname{sen}(180° - a) = \operatorname{sen}(180° - A)\ \operatorname{sen} c$ o $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} A\ \operatorname{sen} c$; la fórmula (4) expresa que $\cos c = \cos(180° - b)\ \cos(180° - a) = (-\cos b)\ (-\cos a) = \cos b \cos a$; y así sucesivamente para las demás fórmulas.

2. Deducir la ley de los cuadrantes.

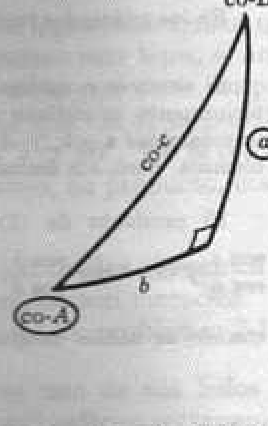
De la fórmula (5), $\operatorname{sen} B = \dfrac{\cos A}{\cos a}$. Como $B < 180°$, $\operatorname{sen} B$ es positivo; entonces $\cos a$ y $\cos A$ son positivos (es decir, tanto a como A son $< 90°$) o ambos son negativos (es decir, tanto a como A son $> 90°$). Del mismo modo, mediante la fórmula (10) se confirma la segunda parte de la primera ley.

De la fórmula (4), $\cos c = \cos b \cos a$. Si $c > 90°$, $\cos c$ es positivo; por tanto, $\cos b$ y $\cos a$ son ambos positivos o ambos negativos (es decir, a y b están en el mismo cuadrante). Si $c > 90°$, $\cos c$ es negativo; por tanto, $\cos b$ y $\cos a$ tienen signos opuestos (es decir, a y b están en distintos cuadrantes).

3. Escribir las fórmulas que permitan hallar b, B y c cuando se conocen a y A. Además, la fórmula que relaciona las tres partes buscadas.

Para b: Al aplicar la regla 1 a las partes co-A, b y a,

$$\operatorname{sen} b = \tan(\text{co-}A) \tan a = \cot A \tan a.$$



Para B: Al aplicar la regla 2 a las partes co-B, co-A y a,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}A) = \cos(\text{co-}B) \cos a.$$

Entonces $$\cos A = \operatorname{sen} B \cos a$$

y $$\operatorname{sen} B = \cos A \sec a.$$

Para c: Al aplicar la regla 2 a las partes co-A, a y co-c,

$$\operatorname{sen} a = \cos(\text{co-}A) \cos(\text{co-}c) = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c$$

y $$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \csc A.$$

Aplicando la regla 2 a las partes buscadas co-B, b y co-c,

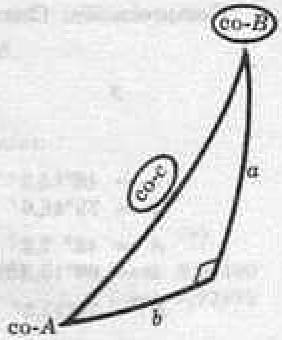
$$\operatorname{sen} b = \cos(\text{co-}B) \cos(\text{co-}c) = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c.$$

4. Escribir las fórmulas que permiten encontrar a, A y b cuando c y B son conocidos. Además, la fórmula que relaciona las tres partes buscadas.

Para A: Al aplicar la regla 1 a las partes co-A, co-c y co-B,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}c) = \tan(\text{co-}A) \tan(\text{co-}B).$$

Entonces, $\cos c = \cot A \cot B$ y $\cot A = \cos c \tan B$.



Para a: Al aplicar la regla 1 a las partes co-c, co-B y a,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}B) = \tan(\text{co-}c)\tan a.$$

Entonces, $\cos B = \cot c \tan a$ y $\tan a = \cos B \tan c$.

Para b: Al aplicar la regla 2 a las partes co-B, b y co-c,

$$\operatorname{sen} b = \cos(\text{co-}B)\cos(\text{co-}c) = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} c.$$

Al aplicar la regla 1 a las partes desconocidas co-A, b y a,

$$\operatorname{sen} b = \tan(\text{co-}A)\tan a = \cot A \tan a.$$

5. Demostrar que no existe triángulo esférico rectángulo alguno que satisfaga cualquiera de las condiciones siguientes:

a) $A + B < 90°$ *c*) $A - B > 90°$ o $B - A > 90°$
b) $A + B > 270°$ *d*) $\operatorname{sen} a > \operatorname{sen} c$ o $\operatorname{sen} b > \operatorname{sen} c$.

a) Según la fórmula (5), $\cos a = \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{\operatorname{sen}(90° - A)}{\operatorname{sen} B}$. Cuando $A + B < 90°$, $90° - A > B$. Puesto que $90° - A$ es agudo, $\operatorname{sen}(90° - A) > \operatorname{sen} B$; entonces, $\cos a > 1$ y, por tanto, el triángulo no existe.

b) Según la fórmula (5), $\cos a = \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} B} = -\dfrac{\cos(180° - A)}{\cos(B - 90°)}$. Cuando $A + B > 270°$, A y B son obtusos; entonces, $180° - A$ y $B - 90°$ son agudos. Ahora, si cada miembro de la desigualdad dada se resta de $180° + B$, se obtiene $180° - A < B - 90°$. Entonces $\dfrac{\cos(180° - A)}{\cos(B - 90°)} > 1$ y, por tanto, el triángulo no existe.

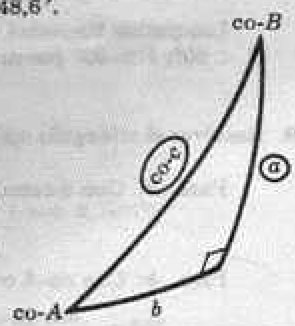
c) Según la fórmula (10), $\cos b = \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{\operatorname{sen}(90° - B)}{\operatorname{sen}(180° - A)}$. Cuando $A > 90° + B$, $180° - A < 90° - B$; entonces $\cos b > 1$ y, por tanto, no se determina triángulo alguno. Del mismo modo, la fórmula (5), permite demostrar que no existe un triángulo cuando $B > 90° + A$.

d) Según la fórmula (1), $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a / \operatorname{sen} c$. Cuando $\operatorname{sen} a > \operatorname{sen} c$, $\operatorname{sen} A > 1$ y, por tanto, el triángulo no existe. De modo semejante, mediante la fórmula (6) se puede demostrar que no existe un triángulo cuando $b > \operatorname{sen} c$.

6. Demostrar que, dados a y A (o b y B), tales que ambos sean $< 90°$ o ambos $> 90°$, se pueden determinar dos triángulos esféricos rectángulos.

Según la fórmula (1), $\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a / \operatorname{sen} A$. Cuando $\operatorname{sen} a < \operatorname{sen} A$, $\operatorname{sen} c < 1$ quedan determinados dos valores de c, uno $< 90°$, y otro $> 90°$. Las leyes de los cuadrantes prueban que, si en un triángulo ocurre $c < 90°$, entonces b y B terminan en el mismo cuadrante que a y A, mientras que, si $c > 90°$, entonces b y a (también B y A) terminan en cuadrantes diferentes.

7. Resolver el triángulo esférico rectángulo ABC, dados $a = 46°12{,}3'$, $c = 75°48{,}6'$.



Para A: Con a como parte media y co-A y co-c como partes opuestas,

$$\operatorname{sen} a = \cos(\text{co-}A)\cos(\text{co-}c) = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c$$

y $$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \csc c.$$

Para B: Con co-B como parte media y co-c y a como partes adyacentes,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}B) = \tan(\text{co-}c)\tan a$$

y $$\cos B = \cot c \tan a.$$

Para b: Con co-c como parte media y b y a como partes opuestas,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}c) = \cos b \cos a, \qquad \cos c = \cos b \cos a,$$

y $$\cos b = \cos c \sec a.$$

Comprobación: Con co-B como parte media y co-A y b como partes opuestas,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}B) = \cos(\text{co-}A)\cos b$$

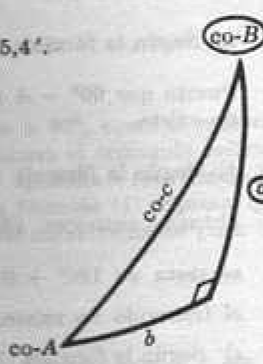
y $$\cos B = \operatorname{sen} A \cos b.$$

	(A)	(b)	(B)
$a = 46°12{,}3'$	l sen 9,85843	l sec 0,15984	l tan 0,01828
$c = 75°48{,}6'$	l csc 0,01346	l cos 9,38941	l cot 9,40287
$A = 48°\ 7{,}2'$	l sen 9,87189		
$b = 69°15{,}3'$	l cos 9,54925	l cos 9,54925	
$B = 74°42{,}5'$	l cos 9,42114		l cos 9,42115

Como $c < 90°$, todas las partes pertenecen al mismo cuadrante que a.

Nota. La fórmula de comprobación determina el orden de las columnas; la parte del triángulo que aparece a la izquierda de la fórmula de comprobación se encuentra en la última columna del modelo utilizado para los cálculos.

8. Resolver el triángulo esférico rectángulo ABC, dados $a = 109°15{,}8'$, $B = 38°45{,}4'$.



Para A: Con co-A como parte media y co-B y a como partes opuestas,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}A) = \cos(\text{co-}B)\cos a$$

y $$\cos A = \operatorname{sen} B \cos a.$$

Para b: Con a como parte media y co-B y b como partes adyacentes,

$$\operatorname{sen} a = \tan(\text{co-}B)\tan b, \qquad \operatorname{sen} a = \cot B \tan b,$$

y $$\tan b = \operatorname{sen} a \tan B.$$

Para c: Con co-B como parte media y co-c y a como partes adyacentes,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}B) = \tan a \tan(\text{co-}c), \qquad \cos B = \tan a \cot c,$$

y $$\cot c = \cos B \cot a.$$

Comprobación: Con co-A como parte media y b y co-c como partes adyacentes,

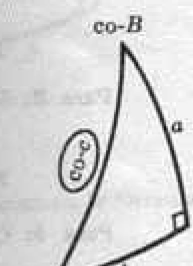
$$\operatorname{sen}(\text{co-}A) = \tan b \tan(\text{co-}c)$$

y $$\cos A = \tan b \cot c.$$

	(b)	(c)	(A)
$a = 109°15{,}8'$	l sen 9,97498	l cot 9,54342 (n)	l cos 9,51840 (n)
$B = 38°45{,}4'$	l tan 9,90459	l cos 9,89199	l sen 9,79658
$b = 37°\ 9{,}3'$	l tan 9,87957		
$c = 105°14{,}7'$	l cot 9,43541 (n)	l cot 9,43541 (n)	
$A = 101°55{,}1'$	l cos 9,31498 (n)		l cos 9,31498 (n)

Las partes buscadas están de acuerdo con los cuadrantes: $A > 90°$ porque $a > 90°$; $b < 90°$ porque $B < 90°$; $c > 90°$ porque a y b terminan en cuadrantes diferentes.

9. Resolver el triángulo esférico rectángulo ABC, dados $c = 72°12{,}5'$, $A = 156°17{,}2'$.



Para a: Con a como parte media y co-A y co-c como partes opuestas,

$$\operatorname{sen} a = \cos(\text{co-}A)\cos(\text{co-}c) = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c.$$

Para b: Con co-A como parte media y b y co-c como partes adyacentes,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}A) = \tan b \tan(\text{co-}c), \qquad \cos A = \tan b \cot c,$$

y $$\tan b = \cos A \tan c.$$

Para B: Con co-c como parte media y co-A y co-B como partes adyacentes,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}c) = \tan(\text{co-}A)\tan(\text{co-}B), \qquad \cos c = \cot A \cot B,$$

y

$$\cot B = \cos c \tan A.$$

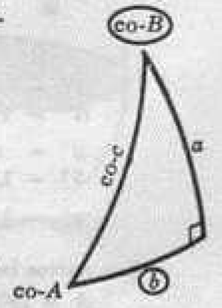
Comprobación: Con a como parte media y co-B y b como partes adyacentes,

$$\operatorname{sen} a = \tan(\text{co-}B)\tan b = \cot B \tan b.$$

	(B)	(b)	(a)
$A = 156°17{,}2'$	l tan 9,64271 (n)	l cos 9,96169 (n)	l sen 9,60440
$c = 72°12{,}5'$	l cos 9,48510	l tan 0,49362	l sen 9,97872
$B = 97°38{,}7'$	l cot 9,12781 (n)		
$b = 109°19{,}0'$	l tan 0,45531 (n)	l tan 0,45531 (n)	
$a = 157°29{,}1'$	l sen 9,58312		l sen 9,58312

Nota. $a > 90°$ porque $A > 90°$.

10. Resolver el triángulo esférico rectángulo ABC, dados $b = 138°46{,}4'$, $B = 125°10{,}6'$.



Para a: Con a como parte media y co-B y b como partes adyacentes,

$$\operatorname{sen} a = \tan(\text{co-}B)\tan b = \cot B \tan b.$$

Para A: Con co-B como parte media y co-A y b como partes opuestas,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}B) = \cos(\text{co-}A)\cos b, \qquad \cos B = \operatorname{sen} A \cos b,$$

y

$$\operatorname{sen} A = \cos B \sec b.$$

Para c: Con b como parte media y co-c y co-B como partes opuestas,

$$\operatorname{sen} b = \cos(\text{co-}c)\cos(\text{co-}B) = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B$$

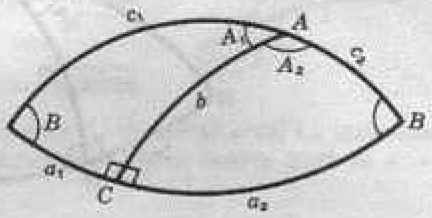
y

$$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} b \csc B.$$

Comprobación: Con a como parte media y co-A y co-c como partes opuestas,

$$\operatorname{sen} a = \cos(\text{co-}A)\cos(\text{co-}c) = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} c.$$

Como cada una de las partes buscadas ha de calcularse por el valor de su seno, se obtienen dos valores en cada caso. Los dos triángulos se muestran en la figura adjunta.



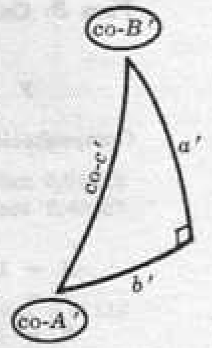
Como $b > 90°$, a_1, $A_1 < 90°$ y $c_1 > 90°$

$$a_2,\ A_2 > 90° \text{ y } c_2 < 90°.$$

	(A)	(c)	(a)
$b = 138°46{,}4'$	l sec 0,12372 (n)	l sen 9,81891	l tan 9,94263 (n)
$B = 125°10{,}6'$	l cos 9,76050 (n)	l csc 0,08757	l cot 9,84807 (n)
$A_1 = 49°59{,}7'$	l sen 9,88422		
$A_2 = 130°\ 0{,}3'$			
$c_2 = 53°44{,}0'$	l sen 9,90648	l sen 9,90648	
$c_1 = 126°16{,}0'$			
$a_1 = 38°\ 8{,}4'$	l sen 9,79070		l sen 9,79070
$a_2 = 141°51{,}6'$			

11. Resolver el triángulo esférico cuadrantal ABC, dados $a = 115°24{,}6'$, $b = 60°18{,}4'$, $c = 90°$.

Primero resolvemos el triángulo polar $A'B'C'$ del triángulo dado $C' = 180° - c = 90°$, $A' = 180° - a = 64°35{,}4'$ y $B' = 180° - b = 119°41{,}6'$.



Para a': Con co-A' como parte media y a' y co-B' como partes opuestas,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}A') = \cos a' \cos(\text{co-}B'), \quad \cos A' = \cos a' \operatorname{sen} B',$$

y $$\cos a' = \cos A' \csc B'.$$

Para b': Con co-B' como parte media y b' y co-A' como partes opuestas,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}B') = \cos b' \cos(\text{co-}A'), \quad \cos B' = \cos b' \operatorname{sen} A',$$

y $$\cos b' = \cos B' \csc A'.$$

Para c': Con co-c' como parte media y co-A' y co-B' como partes adyacentes,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}c') = \tan(\text{co-}A') \tan(\text{co-}B')$$

y $$\cos c' = \cot A' \cot B'.$$

Comprobación: Con co-c' como parte media y a' y b' como partes opuestas,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}c') = \cos a' \cos b'$$

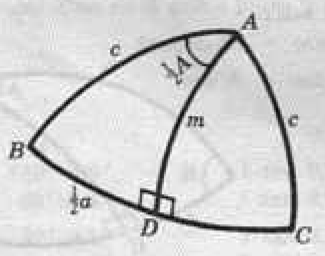
y $$\cos c' = \cos a' \cos b'.$$

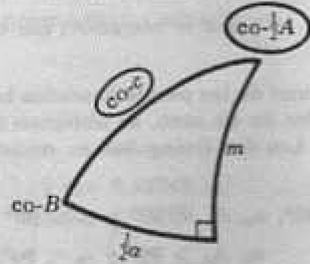
	(a')	(b')	(c')
$A' = 64°35{,}4'$	l cos 9,63255	l csc 0,04419	l cot 9,67674
$B' = 119°41{,}6'$	l csc 0,06113	l cos 9,69492 (n)	l cot 9,75605 (n)
$a' = 60°24{,}0'$	l cos 9,69368		
$b' = 123°15{,}5'$	l cos 9,73911 (n)	l cos 9,73911 (n)	
$c' = 105°43{,}0'$	l cos 9,43279 (n)		l cos 9,43279 (n)

Las partes buscadas del triángulo ABC son:

$A = 180° - a' = 119°36{,}0'$, $B = 180° - b' = 56°44{,}5'$, $C = 180° - c' = 74°17{,}0'$.

12. Resolver el triángulo esférico isósceles ABC, dados $b = c = 54°28{,}4'$, $A = 112°36{,}2'$.





Considérese la circunferencia máxima que pasa por A y que, perpendicular a BC, corta a BC en D. Considérese, además, el triángulo esférico rectángulo ABD cuyo ángulo recto está en D.

Para B: Con co-c como parte media y co-$\frac{1}{2}A$ y co-B como partes adyacentes,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}c) = \tan(\text{co-}\tfrac{1}{2}A) \tan(\text{co-}B), \quad \cos c = \cot \tfrac{1}{2}A \cot B,$$

y $$\cot B = \cos c \tan \tfrac{1}{2}A.$$

Para $\frac{1}{2}a$: Con $\frac{1}{2}a$ como parte media y co-c y co-$\frac{1}{2}A$ como partes opuestas,

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}a = \cos(\text{co-}\tfrac{1}{2}A) \cos(\text{co-}c) = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A \operatorname{sen} c.$$

Para m: Con co-$\frac{1}{2}A$ como parte media y co-c y m como partes adyacentes,

$$\operatorname{sen}(\text{co-}\tfrac{1}{2}A) = \tan(\text{co-}c) \tan m, \qquad \cos \tfrac{1}{2}A = \cot c \tan m,$$

y $$\tan m = \cos \tfrac{1}{2}A \tan c.$$

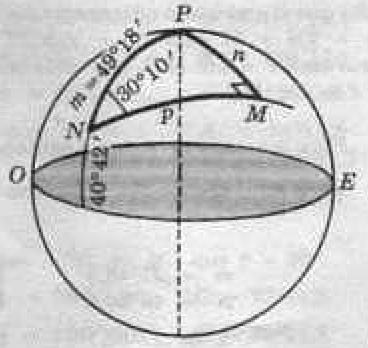
Comprobación: Con $\frac{1}{2}a$ como parte media y co-B y m como partes adyacentes,

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a = \tan(\text{co-}B)\tan m = \cot B \tan m.$$

	(B)	(m)	$(\frac{1}{2}a)$
$\frac{1}{2}A = 56°18{,}1'$	l tan 0,17596	l cos 9,74415	l sen 9,92011
$c = 54°28{,}4'$	l cos 9,76424	l tan 0,14630	l sen 9,91055
$B = 48°55{,}9'$	l cot 9,94020		
$m = 37°51{,}0'$	l tan 9,89045	l tan 9,89045	
$\frac{1}{2}a = 42°37{,}1'$	l sen 9,83065		l sen 9,83066

Las partes buscadas del triángulo isósceles son: $B = C = 48°55{,}9'$ y, $a = 85°14{,}2'$.

13. El rumbo inicial de un derrotero a lo largo de una circunferencia máxima, a partir de Nueva York (lat. 40°42,0′ N, long. 74°1,0′ O) es N 30°10,0′ E o 30°10,0. Localizar el punto M del recorrido más cercano al polo norte, y calcular (en millas náuticas) las distancias, en las circunferencias máximas, desde M hasta el polo y hasta Nueva York.



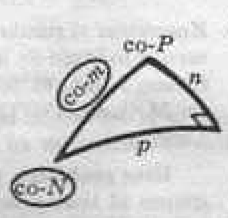
La distancia mínima entre el recorrido y el polo norte P se mide a lo largo del meridiano que es perpendicular a la ruta. En el triángulo esférico NPM, $M = 90°$, $m = NP = 90° - 40°42{,}0' = 49°18{,}0'$ y $N = 30°10{,}0'$; P, n y p son las partes buscadas.

Para n: $\text{sen}\, n = \cos(\text{co-}m)\cos(\text{co-}N)$

$= \text{sen}\, m\ \text{sen}\, N.$

Para P: $\text{sen}(\text{co-}m) = \tan(\text{co-}N)\tan(\text{co-}P)$ y $\cot P = \cos m \tan N.$

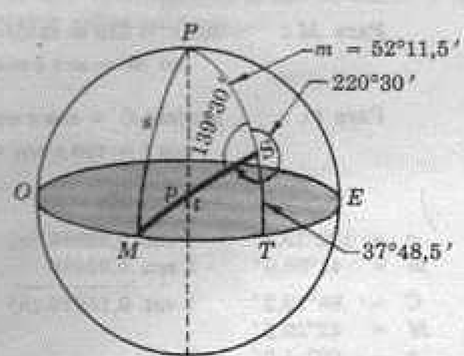
Para p: $\text{sen}(\text{co-}N) = \tan(\text{co-}m)\tan p$ y $\tan p = \tan m \cos N.$



	(n)	(P)	(p)
$m = 49°18{,}0'$	l sen 9,87975	l cos 9,81431	l tan 0,06543
$N = 30°10{,}0'$	l sen 9,70115	l tan 9,76435	l cos 9,93680
$n = 22°23{,}6'$	l sen 9,58090		
$P = 69°14{,}6'$		l cot 9,57866	
$p = 45°\ 8{,}8'$			l tan 0,00223

La latitud de M es $90° - n = 67°36{,}4'$ N; la longitud es $74°1{,}0' - P = 4°46{,}4'$ O. La distancia de M a P es $n = 22°23{,}6' = 1343{,}6' = 1343{,}6$ millas, y la distancia de M a Nueva York es $p = 45°8{,}8' = 2708{,}8$ millas.

14. El rumbo inicial de un derrotero a lo largo de una circunferencia máxima, a partir de San Francisco (lat. 37°48,5′ N, long. 122°24,0′ O) es S 40°30,0′ O ó 220°30,0′. Localizar el punto M donde el recorrido corta el ecuador, y calcular la distancia, en la circunferencia máxima, desde M hasta San Francisco.



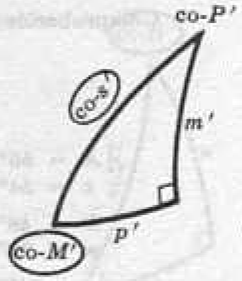
SOLUCION 1. En el triángulo esférico MSP, $s = MP = 90°$, $S = 360° - 220°30{,}0' = 139°30{,}0'$, y $m = SP = 90° - 37°48{,}5' = 52°11{,}5'$; P y p son las partes buscadas. Como este triángulo es cuadrantal, se puede utilizar su triángulo polar (rectángulo) $M'S'P'$, en el que $S' = 90°$, $s' = 180° - S = 40°30{,}0'$ y $M' = 180° - m = 127°48{,}5'$ para encontrar p' y P'.

Para p': $\text{sen}(\text{co-}M') = \tan p' \tan(\text{co-}s')$

y $\qquad \tan p' = \cos M' \tan s'.$

Para P': $\operatorname{sen}(\text{co-}s') = \tan(\text{co-}M')\tan(\text{co-}P')$

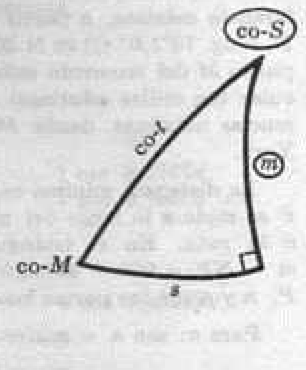
y $\qquad \cot P' = \tan M' \cos s'$.



	(p')	(P')
$M' = 127°48{,}5'$	l cos 9,78748 (n)	l tan 0,11019 (n)
$s' = 40°30{,}0'$	l tan 9,93150	l cos 9,88105
$p' = 152°21{,}9'$	l tan 9,71898 (n)	
$P' = 134°25{,}3'$		l cot 9,99124 (n)

Entonces, $P = 180° - p' = 27°38{,}1'$ y $p = 180° - P' = 45°34{,}7'$. La longitud de M es $122°24{,}0' + 27°38{,}1' = 150°2{,}1'$ O y la distancia desde M hasta San Francisco es $p = 45°34{,}7' = 2734{,}7$ millas.

SOLUCION 2. Puede obtenerse un procedimiento algo más sencillo que el empleado anteriormente si se utiliza el triángulo SMT en que $m = TS = 37°48{,}5'$, $S = \angle MST = 40°30{,}0'$ y $T = 90°$. En este caso sean s = arc MT, que mide la diferencia de longitud entre M y S, y t = arc MS.



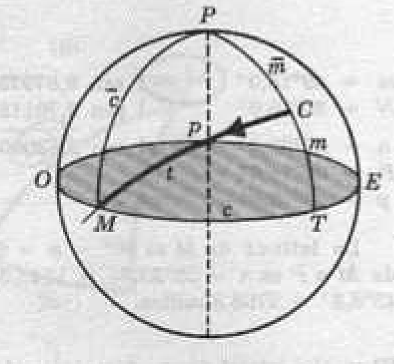
Para s: $\quad \operatorname{sen} m = \tan s \tan(\text{co-}S)$ y $\tan s = \operatorname{sen} m \tan S$.

Para t: $\quad \operatorname{sen}(\text{co-}S) = \tan(\text{co-}t)\tan m$ y $\cot t = \cot m \cos S$.

	(s)	(t)
$m = 37°48{,}5'$	l sen 9,78748	l cot 0,11019
$S = 40°30{,}0'$	l tan 9,93150	l cos 9,88105
$s = 27°38{,}1'$	l tan 9,71898	
$t = 45°34{,}7'$		l cot 9,99124

La longitud de M es $122°24{,}0' + 27°38{,}1' = 150°2{,}1'$ O y la distancia buscada es $t = 45°34{,}7' = 2734{,}7$ millas, como antes.

15. Encontrar el rumbo inicial y el rumbo de llegada de un derrotero, a lo largo de una circunferencia máxima que, a partir de Chicago (lat. 41°50,0′ N, long. 87°31,7′ O) corta el ecuador en M (long. 170°15,0′ E). Encontrar la distancia entre M y Chicago.



Este problema puede resolverse como el problema 14 mediante el triángulo polar (rectángulo) del triángulo cuadrantal MCP, o mediante el triángulo MCT. En este último caso, m = arc $TC = 41°50{,}0'$ y c = arc $MT = 102°13{,}3'$.

Para C: $\quad \operatorname{sen} m = \tan c \tan(\text{co-}C)$ y

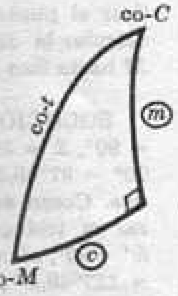
$\qquad \cot C = \cot c \operatorname{sen} m$.

Para M: $\quad \operatorname{sen} c = \tan m \tan(\text{co-}M)$ y

$\qquad \cot M = \operatorname{sen} c \cot m$.

Para t: $\quad \operatorname{sen}(\text{cot-}t) = \cos c \cos m$ y

$\qquad \cos t = \cos c \cos m$.



	(C)	(M)	(t)
$c = 102°13{,}3'$	l cot 9,33566 (n)	l sen 9,99004	l cos 9,32571 (n)
$m = 41°50{,}0'$	l sen 9,82410	l cot 0,04810	l cos 9,87221
$C = 98°13{,}2'$	l cot 9,15976 (n)		
$M = 42°29{,}2'$		l cot 0,03814	
$t = 99°\ 4{,}5'$			l cos 9,19792 (n)

El rumbo inicial es $180° + 98°13{,}2' = 278°13{,}2'$, el rumbo de llegada es $270° - 42°29{,}2' = 227°30{,}8'$, y la distancia es $t = 99°4{,}5' = 5944{,}5$ millas.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver cada uno de los siguientes triángulos esféricos rectángulos ABC, en los que $C = 90^\circ$.

16. $A = 125^\circ 24{,}8'$, $b = 32^\circ 16{,}5'$ *Resp.* $A = 110^\circ 47{,}4'$, $B = 37^\circ 46{,}4'$, $c = 119^\circ 20{,}2'$

17. $a = 30^\circ 45{,}3'$, $B = 135^\circ 24{,}4'$ *Resp.* $A = 52^\circ 53{,}4'$, $b = 153^\circ 14{,}7'$, $c = 140^\circ 7{,}0'$

18. $c = 70^\circ 25{,}2'$, $A = 52^\circ 54{,}8'$ *Resp.* $a = 48^\circ 43{,}7'$, $b = 59^\circ 28{,}0'$, $B = 66^\circ 5{,}5'$

19. $a = 35^\circ 34{,}6'$, $c = 45^\circ 48{,}2'$ *Resp.* $A = 54^\circ 14{,}4'$, $B = 45^\circ 55{,}8'$, $b = 31^\circ 0{,}4'$

20. $a = 46^\circ 46{,}4'$, $A = 57^\circ 28{,}3'$ *Resp.* $b_1 = 42^\circ 43{,}6'$, $c_1 = 59^\circ 47{,}7'$, $B_1 = 51^\circ 43{,}8'$
$b_2 = 137^\circ 16{,}4'$, $c_2 = 120^\circ 12{,}3'$, $B_2 = 128^\circ 16{,}2'$

21. $A = 67^\circ 38{,}8'$, $B = 155^\circ 12{,}6'$ *Resp.* $a = 24^\circ 54{,}2'$, $b = 169^\circ 0{,}0'$, $c = 152^\circ 55{,}2'$

22. $a = 40^\circ 44{,}6'$, $b = 64^\circ 48{,}3'$ *Resp.* $A = 43^\circ 35{,}5'$, $B = 72^\circ 55{,}8'$, $c = 71^\circ 11{,}1'$

23. $b = 121^\circ 42{,}5'$, $A = 154^\circ 8{,}6'$ *Resp.* $a = 157^\circ 35{,}7'$, $c = 60^\circ 55{,}6'$, $B = 103^\circ 15{,}1'$

24. $c = 152^\circ 24{,}4'$, $B = 68^\circ 38{,}2'$ *Resp.* $a = 169^\circ 13{,}2'$, $b = 25^\circ 33{,}2'$, $A = 156^\circ 11{,}1'$

25. $b = 158^\circ 22{,}4'$, $c = 122^\circ 36{,}7'$ *Resp.* $a = 54^\circ 34{,}0'$, $A = 75^\circ 18{,}3'$, $B = 154^\circ 3{,}2'$

26. $b = 162^\circ 53{,}4'$, $B = 138^\circ 14{,}9'$ *Resp.* $a_1 = 20^\circ 10{,}4'$, $c_1 = 153^\circ 46{,}8'$, $A_1 = 51^\circ 18{,}8'$
$a_2 = 159^\circ 49{,}6'$, $c_2 = 26^\circ 13{,}2'$, $A_2 = 128^\circ 41{,}2'$

27. $A = 33^\circ 50{,}5'$, $B = 72^\circ 24{,}2'$ *Resp.* $a = 29^\circ 23{,}1'$, $b = 57^\circ 7{,}3'$, $c = 61^\circ 46{,}2'$

Resolver cada uno de los siguientes triángulos esféricos cuadrantales ABC, en los que $c = 90^\circ$.

28. $a = 60^\circ 34{,}9'$, $B = 122^\circ 18{,}8'$ *Resp.* $b = 117^\circ 45{,}0'$, $A = 56^\circ 17{,}3'$, $C = 72^\circ 44{,}5'$

29. $A = 32^\circ 53{,}6'$, $B = 115^\circ 24{,}9'$ *Resp.* $a = 35^\circ 36{,}3'$, $b = 104^\circ 28{,}2'$, $C = 68^\circ 52{,}7'$

30. $a = 69^\circ 15{,}2'$, $A = 56^\circ 45{,}4'$ *Resp.* $b_1 = 40^\circ 15{,}3'$, $B_1 = 35^\circ 18{,}2'$, $C_1 = 116^\circ 34{,}5'$
$b_2 = 139^\circ 44{,}7'$, $B_2 = 144^\circ 41{,}8'$, $C_2 = 63^\circ 25{,}5'$

Resolver cada uno de los siguientes triángulos esféricos isósceles ABC.

31. $a = b = 78^\circ 23{,}5'$, $C = 118^\circ 54{,}6'$ *Resp.* $A = B = 71^\circ 10{,}3'$, $c = 115^\circ 2{,}8'$

32. $B = C = 38^\circ 52{,}5'$, $a = 132^\circ 15{,}0'$ *Resp.* $b = c = 70^\circ 59{,}2'$, $A = 150^\circ 34{,}0'$

33. Un barco parte de Nueva York (lat. $40^\circ 42{,}0'$ N, long. $74^\circ 1{,}0'$ O) con un rumbo inicial hacia el este a lo largo de una circunferencia máxima. Encontrar su rumbo y posición cuando ha recorrido 525 millas náuticas. *Resp.* Rumbo, $97^\circ 27{,}3'$; lat. $40^\circ 7{,}7'$ N, long. $62^\circ 32{,}4'$ O

34. El rumbo inicial a lo largo de una circunferencia máxima, a partir de Yokohama (lat. $35^\circ 37{,}0'$ N, long. $139^\circ 39{,}0'$ E) es $40^\circ 40{,}0'$. Localizar el punto del recorrido más cercano al polo norte.
Resp. lat. $58^\circ 0{,}7'$ N, long $23^\circ 4{,}2'$ O

35. Un barco que parte de A (lat. $36^\circ 50{,}0'$ N, long. $76^\circ 20{,}0'$ O) y que navega a lo largo de una circunferencia máxima corta el ecuador en un punto cuya longitud es $50^\circ 0{,}0'$ O. Encontrar el rumbo inicial y la distancia recorrida. *Resp.* Rumbo, $140^\circ 27{,}3'$; distancia, 2649,9 millas náuticas

CAPITULO 21

Triángulos esféricos oblicuángulos—Soluciones normales

UN TRIANGULO ESFERICO OBLICUANGULO es un triángulo esférico tal que ninguno de sus ángulos es recto. Un triángulo esférico oblicuángulo queda determinado cuando se conocen tres cualesquiera de sus elementos, excepto en los casos posibles de ambigüedad que se estudiarán más adelante.

Hay que considerar seis casos:

Caso I : Dados los tres lados.
Caso II : Dados los tres ángulos.
Caso III: Dados dos lados y el ángulo comprendido.
Caso IV : Dados dos ángulos y el lado comprendido.
Caso V : Dados dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.
Caso VI : Dados dos ángulos y un lado opuesto a uno de ellos.

EL PROCEDIMIENTO NORMAL para resolver y comprobar los distintos casos requiere fórmulas especiales que se exponen a continuación.

LEY DE LOS SENOS. En todo triángulo esférico ABC, $\dfrac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \dfrac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \dfrac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$.

La deducción se encuentra en el problema 1.

LEY DE LOS COSENOS PARA LOS LADOS. En todo triángulo esférico ABC,

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \text{sen } b \text{ sen } c \cos A \\ \cos b &= \cos c \cos a + \text{sen } c \text{ sen } a \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b \cos C. \end{aligned}$$

La deducción se encuentra en el problema 2.

LEY DE LOS COSENOS PARA LOS ANGULOS. En todo triángulo esférico ABC,

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \text{sen } B \text{ sen } C \cos a \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \text{sen } C \text{ sen } A \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \text{sen } A \text{ sen } B \cos c. \end{aligned}$$

La deducción se encuentra en el problema 3.

FORMULAS PARA EL ANGULO MITAD. En todo triángulo esférico ABC,

$$\tan \tfrac{1}{2}A = \frac{\tan r}{\text{sen}(s-a)}, \qquad \tan \tfrac{1}{2}B = \frac{\tan r}{\text{sen}(s-b)}, \qquad \tan \tfrac{1}{2}C = \frac{\tan r}{\text{sen}(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ y $\tan r = \sqrt{\dfrac{\text{sen}(s-a)\ \text{sen}(s-b)\ \text{sen}(s-c)}{\text{sen } s}}$.

La deducción se encuentra en el problema 4.

FORMULAS PARA EL SEMI-LADO. En todo triángulo esférico ABC,

$$\cot \tfrac{1}{2}a = \frac{\tan R}{\cos(S - A)}, \qquad \cot \tfrac{1}{2}b = \frac{\tan R}{\cos(S - B)}, \qquad \cot \tfrac{1}{2}c = \frac{\tan R}{\cos(S - C)}$$

donde $S = \frac{1}{2}(A + B + C)$ y $\tan R = \sqrt{\dfrac{\cos(S - A)\ \cos(S - B)\ \cos(S - C)}{-\cos S}}$

La deducción se encuentra en el problema 5.

ANALOGIAS DE GAUSS O DE DELAMBRE. En todo triángulo esférico ABC,

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a - b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}c} \qquad \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}c}$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}c} \qquad \frac{\cos \frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2}c}$$

y las otras fórmulas se obtienen mediante un intercambio cíclico de las letras.

La deducción se encuentra en el problema 6.

ANALOGIAS DE NEPER. En todo triángulo esférico ABC,

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(A - B)}{\cot \frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a - b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b)} \qquad \frac{\tan \frac{1}{2}(a - b)}{\tan \frac{1}{2}c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B)}$$

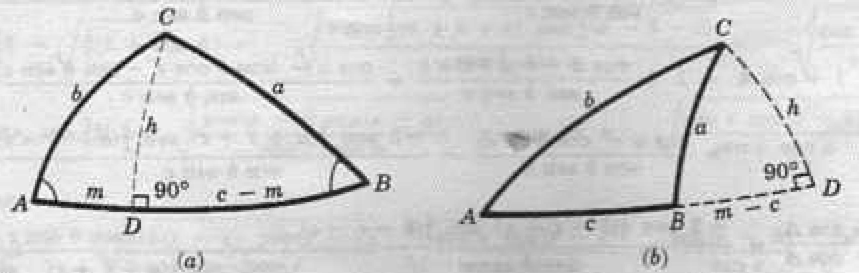
$$\frac{\tan \frac{1}{2}(A + B)}{\cot \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a - b)}{\cos \frac{1}{2}(a + b)} \qquad \frac{\tan \frac{1}{2}(a + b)}{\tan \frac{1}{2}c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)}$$

y las otras fórmulas se obtienen mediante un intercambio cíclico de las letras.

La deducción se encuentra en el problema 7.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir la ley de los senos.



Sea ABC un triángulo esférico cualquiera. [Véanse las figuras (a) y (b).] Por C pasa una circunferencia máxima que corta perpendicularmente a AB en D. Sea $CD = h$.

En el triángulo rectángulo ACD, $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$. En el triángulo rectángulo BCD, $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$. Entonces,

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}.$$

Del mismo modo, como por B pasa una circunferencia máxima perpendicular a AC, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}.$$

Así, $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$.

2. Deducir la ley de los cosenos para los lados.

En las figuras (a) y (b) precedentes, sea $AD = m$. En el triángulo rectángulo ACD,
(1) $\operatorname{sen} m = \tan h \cot A$, (2) $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$, (3) $\cos b = \cos h \cos m$.

En el triángulo rectángulo BCD,
(4) $\cos a = \cos h \cos(c - m) = \cos h\,(\cos c \cos m + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} m)$, puesto que $\cos(c - m) = \cos(m - c)$.

Ahora, si en (4) se utiliza (1) para remplazar $\operatorname{sen} m$ y (3) para remplazar $\cos m$, se obtiene
$\cos a = \cos h\,(\cos c \dfrac{\cos b}{\cos h} + \operatorname{sen} c \tan h \cot A) = \cos c \cos b + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} h \cot A$; y si se utiliza (2) para sustituir a $\operatorname{sen} h$, se llega a,

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos c \cos b + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A \cot A\\ &= \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A.\end{aligned}$$

Las otras fórmulas se obtienen mediante un intercambio cíclico de las letras.

3. Deducir la ley de los cosenos para los ángulos.

Considérese el triángulo polar $A'B'C'$, correspondiente al triángulo ABC, en el que $a' = 180° - A$, $A' = 180° - a$, etc. Al aplicar a este triángulo la fórmula deducida en el problema 2, se tiene que,

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A'$$

y, puesto que, $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen} \theta$ y $\cos(180° - \theta) = -\cos \theta$, se obtiene

$$-\cos A = (-\cos B)(-\cos C) + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C\,(-\cos a)$$

o

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a.$$

Las otras fórmulas se obtienen mediante un intercambio cíclico de las letras.

4. Deducir las fórmulas del ángulo mitad.

De la ley de los cosenos para los lados (problema 2), $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$,

se tiene

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}.$$

Entonces, $1 - \cos A = 1 - \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \dfrac{\cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$

$$= \frac{\cos(b - c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b - c + a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b - c - a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{\cos a - (\cos b \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$= \frac{\cos a - \cos(b + c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} = \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b + c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a - b - c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c},$$

y $\dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \dfrac{-2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b - c + a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b - c - a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}{-2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b + c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a - b - c)}$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b - c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(c + a - b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a + b + c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b + c - a)}$$

puesto que $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b - c - a) = -\operatorname{sen} \frac{1}{2}(c + a - b)$ y $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a - b - c) = -\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b + c - a)$.

Sea $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. Entonces, $\frac{1}{2}(a + b - c) = s - c$, $\frac{1}{2}(c + a - b) = s - b$, $\frac{1}{2}(b + c - a) = s - a$, y

$$\tan \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-c)\ \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} s\ \operatorname{sen}(s-a)}} = \frac{1}{\operatorname{sen}(s-a)}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a)\ \operatorname{sen}(s-b)\ \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} s}}.$$

Finalmente, por la definición $\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(s-a)\ \operatorname{sen}(s-b)\ \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} s}} = \tan r$, se llega a

$$\tan \tfrac{1}{2}A = \frac{\tan r}{\operatorname{sen}(s-a)}.$$

Las otras fórmulas se obtienen mediante un intercambio cíclico de las letras. Obsérvese que un cambio cíclico de las letras no afecta la expresión correspondiente a $\tan r$.

5. Deducir las fórmulas del semi-lado.

Considérese el triángulo polar $A'B'C'$ correspondiente al triángulo ABC.

Sea $s' = \frac{1}{2}(a'+b'+c')$ y $\tan r' = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(s'-a')\ \operatorname{sen}(s'-b')\ \operatorname{sen}(s'-c')}{\operatorname{sen} s'}}$.

Puesto que $a' = 180° - A$, $A' = 180° - a$, etc.,

$s' = \frac{1}{2}\{(180°-A)+(180°-B)+(180°-C)\} = 270° - \frac{1}{2}(A+B+C) = 270° - S$, donde $S = \frac{1}{2}(A+B+C)$.

Entonces, $\operatorname{sen} s' = \operatorname{sen}(270° - S) = -\cos S$,

$$\operatorname{sen}(s'-a') = \operatorname{sen}\{270° - S - (180° - A)\} = \operatorname{sen}\{90° - (S-A)\} = \cos(S-A),$$
$$\operatorname{sen}(s'-b') = \cos(S-B),$$
$$\operatorname{sen}(s'-c') = \cos(S-C),$$

y
$$\tan r' = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\ \cos(S-B)\ \cos(S-C)}{-\cos S}} = \tan R.$$

Según el problema 4, $\tan \frac{1}{2}A' = \dfrac{\tan r'}{\operatorname{sen}(s'-a')}$. Entonces, puesto que $A' = 180° - a$,

$$\tan \tfrac{1}{2}(180° - a) = \cot \tfrac{1}{2}a = \frac{\tan R}{\cos(S-A)}$$

y de modo semejante se obtienen las otras fórmulas.

6. Deducir las analogías de Gauss o de Delambre.

Según el problema 4,

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos A)} = \sqrt{\frac{-\operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-c+a)\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-c-a)}{\operatorname{sen} b\ \operatorname{sen} c}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-b)\ \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} b\ \operatorname{sen} c}}$$

y
$$\cos \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos A)} = \sqrt{\frac{-\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+b+c)\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-b-c)}{\operatorname{sen} b\ \operatorname{sen} c}} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} s\ \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} b\ \operatorname{sen} c}}.$$

Similarmente, $\operatorname{sen} \frac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(s-c)\ \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} c\ \operatorname{sen} a}}$ y $\cos \frac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} s\ \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} c\ \operatorname{sen} a}}$.

Entonces,

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-b)\ \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} b\ \operatorname{sen} c}}\sqrt{\frac{\operatorname{sen} s\ \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} c\ \operatorname{sen} a}} = \frac{\operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen} s\ \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b}}$$
$$= \frac{\operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} c}\cos \tfrac{1}{2}C,$$

$$\cos \tfrac{1}{2}A \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} s\ \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} b\ \operatorname{sen} c}}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-c)\ \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} c\ \operatorname{sen} a}} = \frac{\operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen} s\ \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} a\ \operatorname{sen} b}}$$
$$= \frac{\operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} c}\cos \tfrac{1}{2}C,$$

$$\text{y sen}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \text{sen}\,\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B - \cos\tfrac{1}{2}A\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}B = \frac{\text{sen}(s-b)-\text{sen}(s-a)}{\text{sen}\,c}\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{2\cos\tfrac{1}{2}\{(s-b)+(s-a)\}\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\{(s-b)-(s-a)\}}{2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C$$

$$= \frac{\cos\tfrac{1}{2}c\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c\cos\tfrac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C$$

Así, $\dfrac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos\tfrac{1}{2}C} = \dfrac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c}$.

De modo semejante se obtienen las fórmulas para $\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A+B)$, $\cos\tfrac{1}{2}(A-B)$ y $\cos\tfrac{1}{2}(A+B)$.

7. Deducir las fórmulas de Neper.

Si se escogen las analogías de Delambre

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c}\cos\tfrac{1}{2}C \quad \text{y} \quad \cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c}\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}C,$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos\tfrac{1}{2}(A-B)} = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c}\cdot\frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a+b)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}C} = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}\cot\tfrac{1}{2}C$$

$$\text{y} \qquad \frac{\tan\tfrac{1}{2}(A-B)}{\cot\tfrac{1}{2}C} = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a+b)}.$$

Si se escogen las analogías de Delambre

$$\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos\tfrac{1}{2}C}\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c \quad \text{y} \quad \cos\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos\tfrac{1}{2}C}\cos\tfrac{1}{2}c,$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A-B)\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A+B)\cos\tfrac{1}{2}c} = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}\tan\tfrac{1}{2}c \quad \text{y} \quad \frac{\tan\tfrac{1}{2}(a-b)}{\tan\tfrac{1}{2}c} = \frac{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{sen}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}.$$

De modo semejante se obtienen las otras analogías.

CASO I.

8. Resolver el triángulo esférico oblicuángulo ABC, dados $a = 121°15{,}4'$, $b = 104°54{,}7'$, $c = 65°42{,}5'$.

$$(1)\ \tan r = \sqrt{\frac{\text{sen}(s-a)\,\text{sen}(s-b)\,\text{sen}(s-c)}{\text{sen}\,s}} \qquad s = \tfrac{1}{2}(a+b+c) = 145°56.3'$$

$$(2)\ \tan\tfrac{1}{2}A = \frac{\tan r}{\text{sen}(s-a)} \qquad (3)\ \tan\tfrac{1}{2}B = \frac{\tan r}{\text{sen}(s-b)} \qquad (4)\ \tan\tfrac{1}{2}C = \frac{\tan r}{\text{sen}(s-c)}$$

Comprobación: $\dfrac{\text{sen}\,a}{\text{sen}\,A} = \dfrac{\text{sen}\,b}{\text{sen}\,B} = \dfrac{\text{sen}\,c}{\text{sen}\,C}$

	(1)	(2)	(3)	(4)
$s-a = 24°40,9'$	l sen 9,62073	l csc 0,37927		
$s-b = 41°\ 1,6'$	l sen 9,81717		l csc 0,18283	
$s-c = 80°13,8'$	l sen 9,99366			l csc 0,00634
$s = 145°56,3'$	l csc 0,25175			
	2 |9,68331			
tan r	log 9,84166	log 9,84166	log 9,84166	log 9,84166
$\frac{1}{2}A = 58°59,0'$		l tan 0,22093		
$A = 117°58,0'$				
$\frac{1}{2}B = 46°36,9'$			l tan $\overline{0},02449$	
$B = 93°13,8'$				
$\frac{1}{2}C = 35°10,3'$				l tan 9,84800
$C = 70°20,6'$				

Comprobación:

a	l sen 9,93189	b	l sen 9,98512	c	l sen 9,95974
A	l csc 0,05393	B	l csc 0,00069	C	l csc 0,02608
	9,98582		9,98581		9,98582

CASO II.

9. Resolver el triángulo esférico oblicuángulo ABC, dados $A = 117°22,8'$, $B = 72°38,6'$, $C = 58°21,2'$.

Solución 1. (Fórmulas del semi-lado) $\qquad S = \frac{1}{2}(A + B + C) = 124°11,3'$

$$(1)\ \tan R = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{-\cos S}} = \sqrt{\frac{\cos(S-A)\cos(S-B)\cos(S-C)}{\cos(180°-S)}}$$

$$(2)\ \cot\tfrac{1}{2}a = \frac{\tan R}{\cos(S-A)} \qquad (3)\ \cot\tfrac{1}{2}b = \frac{\tan R}{\cos(S-B)} \qquad (4)\ \cot\tfrac{1}{2}c = \frac{\tan R}{\cos(S-C)}$$

Comprobación: $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$

	(1)	(2)	(3)	(4)
$S-A = 6°48,5'$	l cos 9,99692	l sec 0,00308		
$S-B = 51°32,7'$	l cos 9,79372		l sec 0,20628	
$S-C = 65°50,1'$	l cos 9,61211			l sec 0,38789
$180°-S = 55°48,7'$	l sec 0,25033			
	2 |9,65308			
tan R	log 9,82654	log 9,82654	log 9,82654	log 9,82654
$\frac{1}{2}a = 55°57,7'$		l cot 9,82962		
$a = 111°55,4'$				
$\frac{1}{2}b = 42°50,2'$			l cot $\overline{0},03282$	
$b = 85°40,4'$				
$\frac{1}{2}c = 31°23,8'$				l cot $\overline{0},21443$
$c = 62°47,6'$				

Comprobación:

a	l sen 9,96740	b	l sen 9,99876	c	l sen 9,94908
A	l csc 0,05160	B	l csc 0,02024	C	l csc 0,06992
	0,01900		0,01900		0,01900

Solución 2. (Triángulo polar)

Considérese el triángulo polar $A'B'C'$ en el que $a' = 62°37,2'$, $b' = 107°21,4'$, $c' = 121°38,8'$.

(1) $\tan r' = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}(s'-a')\operatorname{sen}(s'-b')\operatorname{sen}(s'-c')}{\operatorname{sen} s'}}$ $\qquad s' = \frac{1}{2}(a'+b'+c') = 145°48{,}7'$

(2) $\tan \frac{1}{2}A' = \dfrac{\tan r'}{\operatorname{sen}(s'-a')}$ $\qquad$ (3) $\tan \frac{1}{2}B' = \dfrac{\tan r'}{\operatorname{sen}(s'-b')}$ $\qquad$ (4) $\tan \frac{1}{2}C' = \dfrac{\tan r'}{\operatorname{sen}(s'-c')}$

Comprobación: $\dfrac{\operatorname{sen} a'}{\operatorname{sen} A'} = \dfrac{\operatorname{sen} b'}{\operatorname{sen} B'} = \dfrac{\operatorname{sen} c'}{\operatorname{sen} C'}$

	(1)	(2)	(3)	(4)
$s'-a' = 83°11{,}5'$	l sen 9,99692	l csc 0,00308		
$s'-b' = 38°27{,}3'$	l sen 9,79372		l csc 0,20628	
$s'-c' = 24°\ 9{,}9'$	l sen 9,61211			l csc 0,38789
$s' = 145°48{,}7'$	l csc 0,25033			
	2 | 9,65308			
$\tan r'$	log 9,82654	log 9,82654	log 9,82654	log 9,82654
$\frac{1}{2}A' = 34°\ 2{,}3'$		l tan 9,82962		
$A' = 68°\ 4{,}6'$				
$\frac{1}{2}B' = 47°\ 9{,}8'$			l tan 0,03282	
$B' = 94°19{,}6'$				
$\frac{1}{2}C' = 58°36{,}2'$				l tan 0,21443
$C' = 117°12{,}4'$				

Comprobación:

a' l sen 9,94840	b' l sen 9,97976	c' l sen 9,93008
A' l csc 0,03260	B' l csc 0,00124	C' l csc 0,05092
9,98100	9,98100	9,98100

Entonces, $a = 180° - A' = 111°55{,}4'$, $b = 85°40{,}4'$, $c = 62°47{,}6'$.

CASO III.

10. Resolver el triángulo esférico oblicuángulo ABC, dados $a = 106°25{,}3'$, $c = 42°16{,}7'$, $B = 114°53{,}2'$.

(Analogías de Neper)

Para A, C: (1) $\tan \frac{1}{2}(A+C) = \cos \frac{1}{2}(a-c) \sec \frac{1}{2}(a+c) \cot \frac{1}{2}B$

(2) $\tan \frac{1}{2}(A-C) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-c) \csc \frac{1}{2}(a+c) \cot \frac{1}{2}B$

Para b: (3) $\tan \frac{1}{2}b = \tan \frac{1}{2}(a-c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+C) \csc \frac{1}{2}(A-C)$

Comprobación: $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$

	(1)	(2)	(3)
$\frac{1}{2}(a-c) = 32°\ 4{,}3'$	l cos 9,92808	l sen 9,72508	l tan 9,79699
$\frac{1}{2}(a+c) = 74°21{,}0'$	l sec 0,56902	l csc 0,01641	
$\frac{1}{2}B = 57°26{,}6'$	l cot 9,80513	l cot 9,80513	
$\frac{1}{2}(A+C) = 63°29{,}9'$	l tan 0,30223		l sen 9,95178
$\frac{1}{2}(A-C) = 19°23{,}7'$		l tan 9,54662	l csc 0,47876
$A = 82°53{,}6'$			
$C = 44°\ 6{,}2'$			
$\frac{1}{2}b = 59°22{,}0'$			l tan 0,22753
$b = 118°44{,}0'$			

Comprobación:

a l sen 9,98191	b l sen 9,94293	c l sen 9,82784
A l csc 0,00335	B l csc 0,04232	C l csc 0,15742
9,98526	9,98525	9,98526

11. Resolver el triángulo esférico oblicuángulo ABC, dados $b = 119°41{,}4'$, $c = 81°17{,}6'$, $A = 66°37{,}8'$.

(Analogías de Neper)

Para B, C: (1) $\tan \frac{1}{2}(B + C) = \cos \frac{1}{2}(b - c) \sec \frac{1}{2}(b + c) \cot \frac{1}{2}A$

(2) $\tan \frac{1}{2}(B - C) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b - c) \csc \frac{1}{2}(b + c) \cot \frac{1}{2}A$

Para a: (3) $\tan \frac{1}{2}a = \tan \frac{1}{2}(b - c) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B + C) \csc \frac{1}{2}(B - C)$

Comprobación: $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$

	(1)	(2)	(3)
$\frac{1}{2}(b-c) = 19°11{,}9'$	l cos 9,97515	l sen 9,51698	l tan 9,54183
$\frac{1}{2}(b+c) = 100°29{,}5'$	l sec 0,73971 (n)	l csc 0,00732	
$\frac{1}{2}A = 33°18{,}9'$	l cot 0,18227	l cot 0,18227	
$\frac{1}{2}(B+C) = 97°13{,}3'$	l tan 0,89713 (n)		l sen 9,99654
$\frac{1}{2}(B-C) = 26°58{,}1'$		l tan 9,70657	l csc 0,34342
$B = 124°11{,}4'$			
$C = 70°15{,}2'$			
$\frac{1}{2}a = 37°17{,}8'$			l tan 9,88179
$a = 74°35{,}6'$			

Comprobación:

a l sen 9,98411	b l sen 9,93888	c l sen 9,99496
A l csc 0,03717	B l csc 0,08240	C l csc 0,02632
0,02128	0,02128	0,02128

CASO IV.

12. Resolver el triángulo esférico oblicuángulo ABC, dados $A = 48°44{,}6'$, $B = 60°42{,}6'$, $c = 76°22{,}4'$.

Solución 1.

(Analogías de Neper)

Para a, b: (1) $\tan \frac{1}{2}(b + a) = \cos \frac{1}{2}(B - A) \sec \frac{1}{2}(B + A) \tan \frac{1}{2}c$

(2) $\tan \frac{1}{2}(b - a) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B - A) \csc \frac{1}{2}(B + A) \tan \frac{1}{2}c$

Para C: (3) $\cot \frac{1}{2}C = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b + a) \csc \frac{1}{2}(b - a) \tan \frac{1}{2}(B - A)$

Comprobación: $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$

	(1)	(2)	(3)
$\frac{1}{2}(B-A) = 5°59{,}0'$	l cos 9,99763	l sen 9,01803	l tan 9,02040
$\frac{1}{2}(B+A) = 54°43{,}6'$	l sec 0,23847	l csc 0,08810	
$\frac{1}{2}c = 38°11{,}2'$	l tan 9,89572	l tan 9,89572	
$\frac{1}{2}(b+a) = 53°33{,}9'$	l tan 0,13182		l sen 9,90554
$\frac{1}{2}(b-a) = 5°44{,}1'$		l tan 9,00185	l csc 1,00031
$a = 47°49{,}8'$			
$b = 59°18{,}0'$			
$\frac{1}{2}C = 49°50{,}5'$			l cot 9,92625
$C = 99°41{,}0'$			

Comprobación:

a	l sen	9,86991	b	l sen	9,93442	c	l sen	9,98760
A	l csc	0,12392	B	l csc	0,05941	C	l csc	0,00623
		9,99383			9,99383			9,99383

Solución 2. (Triángulo polar)

Considérese el triángulo polar $A'B'C'$ en el que $a' = 131°15{,}4'$, $b' = 119°17{,}4'$, $C' = 103°37{,}6'$.

(*Analogías de Neper*)

Para A', B': (1) $\tan \frac{1}{2}(A' + B') = \cos \frac{1}{2}(a' - b') \sec \frac{1}{2}(a' + b') \cot \frac{1}{2}C'$

(2) $\tan \frac{1}{2}(A' - B') = \text{sen } \frac{1}{2}(a' - b') \csc \frac{1}{2}(a' + b') \cot \frac{1}{2}C'$

Para c': (3) $\tan \frac{1}{2}c' = \tan \frac{1}{2}(a' - b') \text{ sen } \frac{1}{2}(A' + B') \csc \frac{1}{2}(A' - B')$

Comprobación: $\dfrac{\text{sen } a'}{\text{sen } A'} = \dfrac{\text{sen } b'}{\text{sen } B'} = \dfrac{\text{sen } c'}{\text{sen } C'}$

	(1)	(2)	(3)
$\frac{1}{2}(a' - b') = 5°59{,}0'$	l cos 9,99763	l sen 9,01803	l tan 9,02040
$\frac{1}{2}(a' + b') = 125°16{,}4'$	l sec 0,23847 (n)	l csc 0,08810	
$\frac{1}{2}C' = 51°48{,}8'$	l cot 9,89572	l cot 9,89572	
$\frac{1}{2}(A' + B') = 126°26{,}1'$	l tan 0,13182 (n)		l sen 9,90554
$\frac{1}{2}(A' - B') = 5°44{,}1'$		l tan 9,00185	l csc 1,00031
$A' = 132°10{,}2'$			
$B' = 120°42{,}0'$			
$\frac{1}{2}c' = 40°\ 9{,}5'$			l tan 9,92625
$c' = 80°19{,}0'$			

Entonces los elementos buscados del triángulo ABC son:

$a = 180° - A' = 47°49{,}8'$, $b = 180° - B' = 59°18{,}0'$, $C = 180° - c' = 99°41{,}0'$.

CASO V.

13. Resolver el triángulo esférico oblicuángulo ABC, dados $a = 80°26{,}2'$, $c = 115°30{,}6'$, $A = 72°24{,}4'$.

Para C: $\text{sen } C = \text{sen } c \csc a \text{ sen } A$

Para B: $\cot \frac{1}{2}B = \text{sen } \frac{1}{2}(c + a) \csc \frac{1}{2}(c - a) \tan \frac{1}{2}(C - A)$

Para b: $\tan \frac{1}{2}b = \text{sen } \frac{1}{2}(C + A) \csc \frac{1}{2}(C - A) \tan \frac{1}{2}(c - a)$

Comprobación: $\text{sen } \frac{1}{2}(C - A) \text{ sen } \frac{1}{2}b = \text{sen } \frac{1}{2}(c - a) \cos \frac{1}{2}B$

$c = 115°30{,}6'$	l sen 9,95545	
$a = 80°26{,}2'$	l csc 0,00608	
$A = 72°24{,}4'$	l sen 9,97920	Puesto que $a < c$, entonces $A < C$.
$C = 119°15{,}4'$	l sen 9,94073	Una solución única

$\frac{1}{2}(C + A) = 95°49{,}9'$		l sen 9,99775
$\frac{1}{2}(C - A) = 23°25{,}5'$	l tan 9,63674	l csc 0,40061
$\frac{1}{2}(c + a) = 97°58{,}4'$	l sen 9,99578	
$\frac{1}{2}(c - a) = 17°32{,}2'$	l csc 0,52098	l tan 9,49969
$\frac{1}{2}B = 35°\ 4{,}7'$	l cot 0,15350	
$B = 70°\ 9{,}4'$		
$\frac{1}{2}b = 38°20{,}2'$		l tan 9,89805
$b = 76°40{,}4'$		

Comprobación:

$\frac{1}{2}(C - A) = 23°25{,}5'$	l sen 9,59939		$\frac{1}{2}(c - a) = 17°32{,}2'$	l sen 9,47902
$\frac{1}{2}b = 38°20{,}2'$	l sen 9,79259		$\frac{1}{2}B = 35°\ 4{,}7'$	l cos 9,91295
	9,39198			9,39197

14. Resolver el triángulo esférico oblicuángulo ABC, dados $b = 81°42{,}3'$, $c = 52°19{,}8'$, $C = 47°25{,}1'$.

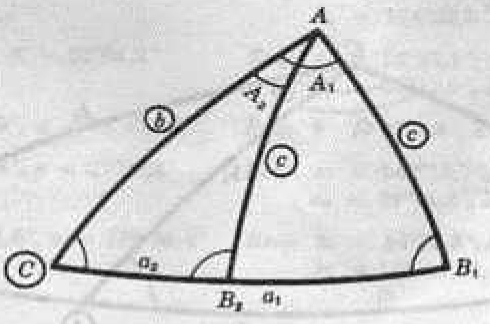
Para B: $\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \csc c \operatorname{sen} C$

Para A: $\cot \frac{1}{2}A = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b + c) \csc \frac{1}{2}(b - c) \tan \frac{1}{2}(B - C)$

Para a: $\tan \frac{1}{2}a = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B + C) \csc \frac{1}{2}(B - C) \tan \frac{1}{2}(b - c)$

Comprobación: $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(B - C) \operatorname{sen} \frac{1}{2}a = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b - c) \cos \frac{1}{2}A$

$b = 81°42{,}3'$	l sen 9,99544	
$c = 52°19{,}8'$	l csc 0,10153	
$C = 47°25{,}1$	l sen 9,86706	Puesto que $b > c$, entonces $B > C$.
$B_1 = 67°\ 0{,}0'$	l sen 9,96403	Dos soluciones
$B_2 = 113°\ 0{,}0'$		



	(A_1)	(a_1)	(A_2)	(a_2)
$\frac{1}{2}(B_1 + C) = 57°12{,}6'$		l sen 9,92462		
$\frac{1}{2}(B_1 - C) = 9°47{,}4'$	l tan 9,23691	l csc 0,76946		
$\frac{1}{2}(b + c) = 67°\ 1{,}0'$	l sen 9,96408		l sen 9,96408	
$\frac{1}{2}(b - c) = 14°41{,}2'$	l csc 0,59596	l tan 9,41846	l csc 0,59596	l tan 9,41846
$\frac{1}{2}A_1 = 57°55{,}9'$	l cot 9,79695			
$A_1 = 115°51{,}8'$				
$\frac{1}{2}a_1 = 52°20{,}5'$		l tan 0,11254		
$a_1 = 104°41{,}0'$				
$\frac{1}{2}(B_2 + C) = 80°12{,}6'$				l sen 9,99363
$\frac{1}{2}(B_2 - C) = 32°47{,}4'$			l tan 9,80903	l csc 0,26635
$\frac{1}{2}A_2 = 23°\ 8{,}8'$			l cot 0,36907	
$A_2 = 46°17{,}6'$				
$\frac{1}{2}a_2 = 25°29{,}8'$				l tan 9,67844
$a_2 = 50°59{,}6'$				

Comprobación:

$\frac{1}{2}(B_1 - C) = 9°47,4'$	l sen 9,23054	$\frac{1}{2}(b - c) = 14°41,2'$	l sen 9,40404
$\frac{1}{2}a_1 = 52°20,5'$	l sen 9,89854	$\frac{1}{2}A_1 = 57°55,9'$	l cos 9,72504
	9,12908		9,12908
$\frac{1}{2}(B_2 - C) = 32°47,4'$	l sen 9,73365	$\frac{1}{2}(b - c) = 14°41,2'$	l sen 9,40404
$\frac{1}{2}a_2 = 25°29,8'$	l sen 9,63393	$\frac{1}{2}A_2 = 23°\ 8,8'$	l cos 9,96355
	9,36758		9,36759

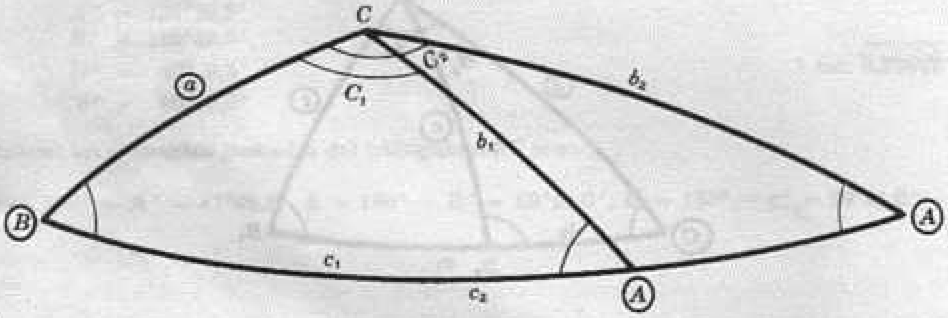
CASO VI.

15. Resolver el triángulo esférico oblicuángulo ABC, dados $A = 35°52,5'$, $B = 56°10,7'$, $a = 40°38,6'$.

Para b: $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B \csc A \operatorname{sen} a$
Para c: $\tan \frac{1}{2}c = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B + A) \csc \frac{1}{2}(B - A) \tan \frac{1}{2}(b - a)$
Para C: $\cot \frac{1}{2}C = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b + a) \csc \frac{1}{2}(b - a) \tan \frac{1}{2}(B - A)$

Comprobación: $\cos \frac{1}{2}(B + A) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}(b + a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}C$

$B = 56°10,7'$	l sen 9,91948	
$A = 35°52,5'$	l csc 0,23209	
$a = 40°38,6'$	l sen 9,81381	Puesto que $A < B$, entonces $a < b$. Dos soluciones
$b_1 = 67°25,5'$	l sen 9,96538	
$b_2 = 112°34,5'$		



	(c_1)	(C_1)	(c_2)	(C_2)
$\frac{1}{2}(b_1 + a) = 54°\ 2,0'$		l sen 9,90814		
$\frac{1}{2}(b_1 - a) = 13°23,4'$	l tan 9,37666	l csc 0,63530		
$\frac{1}{2}(B + A) = 46°\ 1,6'$	l sen 9,85713		l sen 9,85713	
$\frac{1}{2}(B - A) = 10°\ 9,1'$	l csc 0,75386	l tan 9,25299	l csc 0,75386	l tan 9,25299
$\frac{1}{2}c_1 = 44°11,1'$	l tan 9,98765			
$c_1 = 88°22,2'$				
$\frac{1}{2}C_1 = 57°57,7'$		l cot 9,79643		
$C_1 = 115°55,4'$				
$\frac{1}{2}(b_2 + a) = 76°36,6'$				l sen 9,98803
$\frac{1}{2}(b_2 - a) = 35°58,0'$			l tan 9,86073	l csc 0,23113
$\frac{1}{2}c_2 = 71°21,0'$			l tan 0,47172	
$c_2 = 142°42,0'$				
$\frac{1}{2}C_2 = 73°28,8'$				l cot 9,47215
$C_2 = 146°57,6'$				

Se han omitido los detalles de la comprobación.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver los siguientes triángulos esféricos oblicuángulos *ABC*.

16. $a = 56^\circ 22{,}3'$, $b = 65^\circ 54{,}9'$, $c = 78^\circ 27{,}4'$ *Resp.* $A = 58^\circ 8{,}4'$, $B = 68^\circ 37{,}8'$, $C = 91^\circ 57{,}2'$

17. $a = 108^\circ 56{,}4'$, $b = 58^\circ 34{,}8'$, $c = 122^\circ 15{,}6'$ *Resp.* $A = 93^\circ 40{,}8'$, $B = 64^\circ 12{,}4'$, $C = 116^\circ 51{,}0'$

18. $a = 126^\circ 29{,}6'$, $b = 128^\circ 1{,}6'$, $c = 30^\circ 46{,}6'$ *Resp.* $A = 99^\circ 20{,}9'$, $B = 104^\circ 47{,}7'$, $C = 38^\circ 54{,}4'$

19. $A = 71^\circ 2{,}8'$, $B = 119^\circ 25{,}2'$, $C = 60^\circ 45{,}6'$ *Resp.* $a = 83^\circ 35{,}4'$, $b = 113^\circ 45{,}8'$, $c = 66^\circ 28{,}0'$

20. $A = 116^\circ 1{,}8'$, $B = 103^\circ 17{,}6'$, $C = 94^\circ 21{,}2'$ *Resp.* $a = 115^\circ 44{,}2'$, $b = 102^\circ 40{,}6'$, $c = 88^\circ 21{,}8'$

21. $A = 138^\circ 40{,}7'$, $B = 67^\circ 23{,}8'$, $C = 101^\circ 50{,}4'$ *Resp.* $a = 156^\circ 42{,}2'$, $b = 33^\circ 34{,}4'$, $c = 144^\circ 6{,}6'$

22. $a = 136^\circ 2{,}9'$, $c = 21^\circ 46{,}3'$, $B = 75^\circ 31{,}4'$ *Resp.* $b = 27^\circ 10{,}4'$, $A = 122^\circ 30{,}1'$, $C = 26^\circ 47{,}3'$

23. $b = 86^\circ 45{,}2'$, $c = 108^\circ 36{,}8'$, $A = 67^\circ 40{,}2'$ *Resp.* $a = 70^\circ 2{,}2'$, $B = 79^\circ 17{,}1'$, $C = 111^\circ 8{,}7'$

24. $a = 61^\circ 51{,}7'$, $c = 67^\circ 55{,}4'$, $B = 111^\circ 57{,}9'$ *Resp.* $b = 97^\circ 37{,}5'$, $A = 55^\circ 36{,}0'$, $C = 60^\circ 7{,}3'$

25. $B = 66^\circ 42{,}7'$, $C = 84^\circ 57{,}5'$, $a = 107^\circ 8{,}4'$ *Resp.* $b = 67^\circ 8{,}4'$, $c = 92^\circ 7{,}6'$, $A = 107^\circ 43{,}4'$

26. $A = 47^\circ 13{,}3'$, $B = 120^\circ 9{,}9'$, $c = 123^\circ 31{,}6'$ *Resp.* $a = 37^\circ 43{,}7'$, $b = 133^\circ 52{,}9'$, $C = 90^\circ 31{,}8'$

27. $B = 104^\circ 30{,}7'$, $C = 62^\circ 52{,}1'$, $a = 56^\circ 6{,}4'$ *Resp.* $b = 88^\circ 20{,}8'$, $c = 66^\circ 46{,}0'$, $A = 53^\circ 30{,}4'$

28. $a = 98^\circ 53{,}2'$, $c = 64^\circ 35{,}8'$, $A = 95^\circ 23{,}4'$ *Resp.* $b = 99^\circ 29{,}6'$, $C = 65^\circ 32{,}3'$, $B = 96^\circ 21{,}0'$

29. $b = 37^\circ 47{,}2'$, $c = 103^\circ 1{,}4'$, $B = 24^\circ 25{,}6'$ *Resp.* $a_1 = 73^\circ 58{,}0'$, $A_1 = 40^\circ 26{,}4'$, $C_1 = 138^\circ 53{,}2'$
$a_2 = 134^\circ 32{,}6'$, $A_2 = 151^\circ 14{,}8'$, $C_2 = 41^\circ 6{,}8'$

30. $a = 80^\circ 5{,}3'$, $b = 82^\circ 4{,}0'$, $A = 83^\circ 34{,}2'$ *Resp.* $c_1 = 52^\circ 27{,}2'$, $B_1 = 87^\circ 34{,}5'$, $C_1 = 53^\circ 6{,}6'$
$c_2 = 25^\circ 12{,}0'$, $B_2 = 92^\circ 25{,}5'$, $C_2 = 25^\circ 26{,}2'$

31. $A = 117^\circ 54{,}4'$, $C = 45^\circ 8{,}6'$, $a = 76^\circ 37{,}5'$ *Resp.* $b = 41^\circ 4{,}6'$, $c = 51^\circ 17{,}9'$, $B = 36^\circ 38{,}8'$

32. $A = 96^\circ 12{,}8'$, $C = 45^\circ 34{,}4'$, $c = 27^\circ 20{,}3'$ *Resp.* $a_1 = 140^\circ 15{,}7'$, $B_1 = 121^\circ 7{,}6'$, $b_1 = 146^\circ 36{,}0'$
$a_2 = 39^\circ 44{,}3'$, $B_2 = 44^\circ 53{,}8'$, $b_2 = 26^\circ 59{,}6'$

33. $A = 104^\circ 40{,}0'$, $B = 80^\circ 13{,}6'$, $a = 126^\circ 50{,}4'$ *Resp.* $b_1 = 54^\circ 36{,}8'$, $c_1 = 147^\circ 36{,}8'$, $C_1 = 139^\circ 39{,}0'$
$b_2 = 125^\circ 23{,}2'$, $c_2 = 6^\circ 51{,}2'$, $C_2 = 8^\circ 17{,}6'$

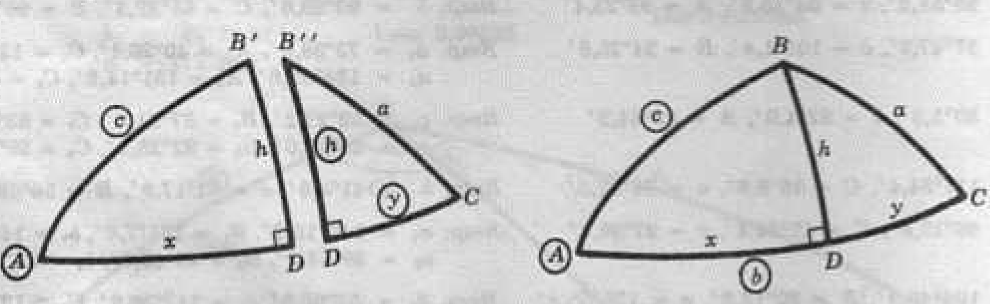
CAPITULO 22

Triángulos esféricos oblicuángulos—Soluciones alternas

LAS SOLUCIONES ALTERNAS que se estudian en este capítulo requieren el uso de una función adicional, llamada función semisenoverso, y la división de un triángulo esférico oblicuángulo en dos triángulos esféricos rectángulos.

Una desventaja del uso del semisenoverso es que, además de las tablas corrientes de las funciones trigonométricas, se necesitan tablas de los valores naturales de la función semisenoverso y de sus correspondientes logaritmos. Una ventaja es, sin embargo, que resulta imposible caer en el error de situar un ángulo o un lado en un cuadrante incorrecto puesto que solamente existe un ángulo positivo menor que 180° que tenga un semisenoverso dado.

La importancia de la descomposición en triángulos rectángulos radica en que las soluciones de los triángulos esféricos rectángulos pueden calcularse fácilmente y utilizarse para resolver triángulos esféricos oblicuángulos. Por ejemplo, una vez planteadas las soluciones de los triángulos rectángulos de las Fig. (*a*) y (*b*), cuyos elementos conocidos aparecen dentro de círculos, se puede encontrar la solución del triángulo oblicuángulo de la Fig. (*c*) de la siguiente manera:



(*a*) (*b*) (*c*)

1. Obténganse los valores de x, h y B' del triángulo de la Fig. (*a*).
2. En la Fig. (*b*) se conocen h y $y = b - x$. Obténganse los valores de a, C y B''.
3. Los elementos buscados del triángulo oblicuángulo de la Fig. (*c*) son a, C y $B = B' + B''$.

LA FUNCION SEMISENOVERSO. El *semisenoverso* de un ángulo θ, (ssv θ), se define mediante la relación

$$\text{ssv }\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\theta).$$

En el problema 1 aparecen algunas propiedades de esta función.

La función semisenoverso se aplica directamente en la solución de los casos I y III, y en la solución del triángulo polar asociado de los casos II y IV. Para ello se necesitan las siguientes fórmulas:

$$1)\qquad \begin{aligned} \text{ssv } A &= \text{sen}(s-b)\ \text{sen}(s-c)\ \csc b\ \csc c,\\ \text{ssv } B &= \text{sen}(s-c)\ \text{sen}(s-a)\ \csc c\ \csc a,\\ \text{ssv } C &= \text{sen}(s-a)\ \text{sen}(s-b)\ \csc a\ \csc b, \end{aligned}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$, y

$$2)\quad \begin{aligned} \text{ssv } a &= \text{ssv}(b-c) + \text{sen } b \text{ sen } c \text{ ssv } A, \\ \text{ssv } b &= \text{ssv}(c-a) + \text{sen } c \text{ sen } a \text{ ssv } B, \\ \text{ssv } c &= \text{ssv}(a-b) + \text{sen } a \text{ sen } b \text{ ssv } C. \end{aligned}$$

Para las deducciones de estas fórmulas, véanse los problemas 2 y 3.

El uso del logaritmo de un semisenoverso se ilustra en el

EJEMPLO 1. Utilícese ssv A = sen$(s-b)$ sen$(s-c)$ csc b csc c para encontrar A cuando $a = 55°28{,}0'$, $b = 77°6{,}0'$ y $c = 49°18{,}0'$.

$a = 55°28{,}0'$	$s-b = 13°50{,}0'$	l sen 9,37858
$b = 77°\ 6{,}0'$	$s-c = 41°38{,}0'$	l sen 9,82240
$c = 49°18{,}0'$	$b = 77°\ 6{,}0'$	l csc 0,01110
$2s = 181°52{,}0'$	$c = 49°18{,}0'$	l csc 0,12025
$s = 90°56{,}0'$	$A = 55°14{,}5'$	l ssv 9,33233

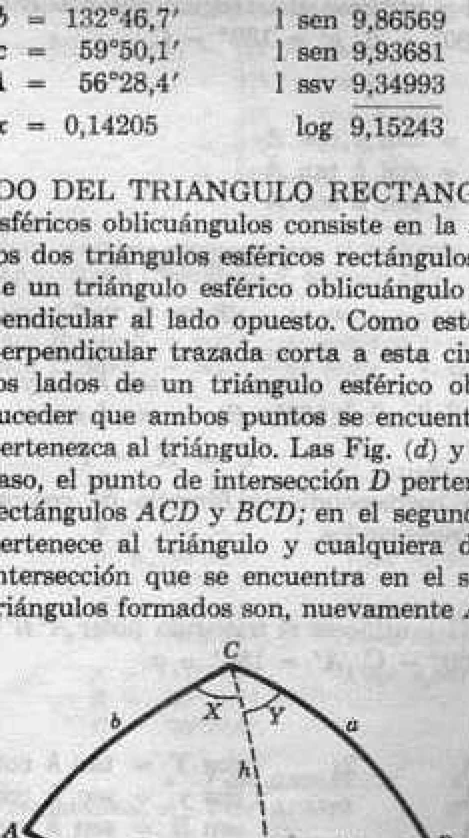
Cuando se utilizan las fórmulas 2) son necesarios los valores naturales de los semisenoversos y los valores de sus correspondientes logaritmos.

EJEMPLO 2. Utilícese ssv a = ssv$(b-c)$ + sen b sen c ssv A para encontrar a cuando $b = 132°46{,}7'$, $c = 59°50{,}1'$ y $A = 56°28{,}4'$.

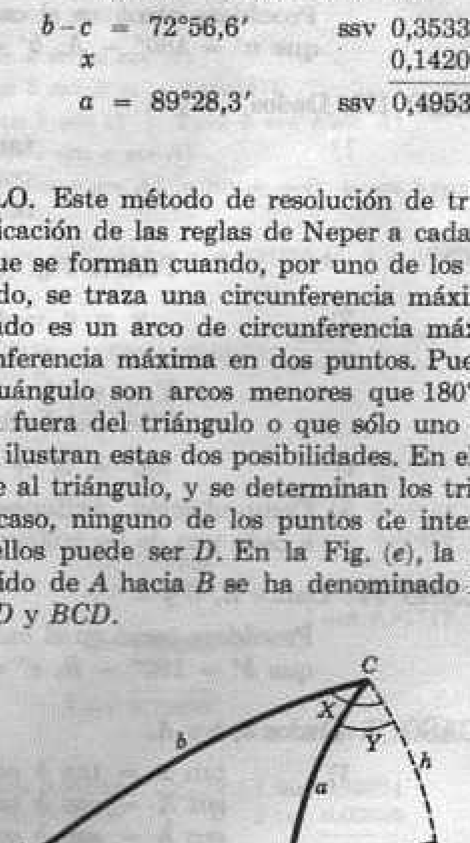
Por conveniencia, tómese x = sen b sen c ssv A de modo que la fórmula anterior se transforme en ssv a = ssv$(b-c) + x$.

x = sen b sen c ssv A		ssv a = ssv$(b-c) + x$	
$b = 132°46{,}7'$	l sen 9,86569	$b-c = 72°56{,}6'$	ssv 0,35334
$c = 59°50{,}1'$	l sen 9,93681	x	0,14205
$A = 56°28{,}4'$	l ssv 9,34993	$a = 89°28{,}3'$	ssv 0,49539
$x = 0{,}14205$	log 9,15243		

METODO DEL TRIANGULO RECTANGULO. Este método de resolución de triángulos esféricos oblicuángulos consiste en la aplicación de las reglas de Neper a cada uno de los dos triángulos esféricos rectángulos que se forman cuando, por uno de los vértices de un triángulo esférico oblicuángulo dado, se traza una circunferencia máxima perpendicular al lado opuesto. Como este lado es un arco de circunferencia máxima, la perpendicular trazada corta a esta circunferencia máxima en dos puntos. Puesto que los lados de un triángulo esférico oblicuángulo son arcos menores que 180°, puede suceder que ambos puntos se encuentren fuera del triángulo o que sólo uno de ellos pertenezca al triángulo. Las Fig. (d) y (e) ilustran estas dos posibilidades. En el primer caso, el punto de intersección D pertenece al triángulo, y se determinan los triángulos rectángulos ACD y BCD; en el segundo caso, ninguno de los puntos de intersección pertenece al triángulo y cualquiera de ellos puede ser D. En la Fig. (e), la primera intersección que se encuentra en el sentido de A hacia B se ha denominado D y los triángulos formados son, nuevamente ACD y BCD.



(d)



(e)

Para conveniencia del lector se ofrecen a continuación las fórmulas necesarias para la resolución de los seis casos de triángulos oblicuángulos. En el problema 6 se encuentra la deducción de las fórmulas correspondientes al caso I. Obsérvese que las fórmulas requeridas en los casos III y V no son sino las fórmulas necesarias para resolver completamente los dos triángulos rectángulos.

CASO I. Dados a, b y c.

1) $\tan \frac{1}{2}(b+a) \tan \frac{1}{2}(b-a) = \tan \frac{1}{2}(x+y) \tan \frac{1}{2}(x-y)$
   En la Fig. (d), $\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}c$ y hay que determinar $\frac{1}{2}(x-y)$;
   en la Fig. (e), $\frac{1}{2}(x-y) = \frac{1}{2}c$ y hay que determinar $\frac{1}{2}(x+y)$.

2) $x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y), \quad y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x-y)$

3) $\cos A = \tan x \cot b \qquad \operatorname{sen} X = \operatorname{sen} x \csc b$
   $\cos B = \tan y \cot a \qquad \operatorname{sen} Y = \operatorname{sen} y \csc a$ para la Fig. (d)

   $\cos A = \tan x \cot b \qquad \operatorname{sen} X = \operatorname{sen} x \csc b$
   $\cos(180° - B) = \tan y \cot a \qquad \operatorname{sen} Y = \operatorname{sen} y \csc a$ para la Fig. (e)

4) $C = X + Y$ para la Fig. (d), $\quad C = X - Y$ para la Fig. (e)

5) Comprobación: Utilícese la ley de los senos o trácese una perpendicular por A o por B.

CASO II. Dados A, B y C.

Procédase como en el caso I y utilícese el triángulo polar $A'B'C'$ en el que $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, $c' = 180° - C$.

CASO III. Dados b, c y A.

1) $\tan x = \tan b \cos A$
   $\cot X = \cos b \tan A$
   $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$

	Para la Fig. (d)	Para la Fig. (e)
2)	$y = c - x$	$y = x - c$
3)	$\cos a = \cos h \cos y$	$\cos a = \cos h \cos y$
	$\cot Y = \operatorname{sen} h \cot y$	$\cot Y = \operatorname{sen} h \cot y$
	$\cot B = \cot h \operatorname{sen} y$	$\cot(180° - B) = \cot h \operatorname{sen} y$
4)	$C = X + Y$	$C = X - Y$

5) Comprobación: Aplíquese la correspondiente fórmula de comprobación a cada uno de los triángulos rectángulos.

CASO IV. Dados B, C y a.

Procédase como en el caso III y utilícese el triángulo polar $A'B'C'$ en el que $b' = 180° - B$, $c' = 180° - C$, $A' = 180° - a$.

CASO V. Dados a, b y A.

1) $\tan x = \tan b \cos A$ 2) $\cos Y = \tan h \cot a$
   $\cot X = \cos b \tan A$ $\quad \cos y = \sec h \cos a$
   $\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$ $\quad \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} h \csc a$

   Cuando $\log \operatorname{sen} B < 0$, son posibles dos soluciones.

3) Para la Fig. (d): $c = x + y$, $C = X + Y$. Para la Fig. (e): $c = x - y$, $C = X - Y$.

CASO VI. Dados A, B y a.

Procédase como en el caso V y utilícese el triángulo polar $A'B'C'$ en el que $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, $A' = 180° - a$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar: *a*) $\text{ssv } 0° = 0$, *b*) $\text{ssv } 180° = 1$, *c*) $\text{ssv}(-\theta) = \text{ssv } \theta$, *d*) $\cos\theta = 1 - 2 \text{ ssv } \theta$.

a) $\text{ssv } 0° = \frac{1}{2}(1 - \cos 0°) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$

b) $\text{ssv } 180° = \frac{1}{2}(1 - \cos 180°) = \frac{1}{2}[1 - (-1)] = 1$

c) $\text{ssv}(-\theta) = \frac{1}{2}[1 - \cos(-\theta)] = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = \text{ssv } \theta$

d) Puesto que $2 \text{ ssv } \theta = 1 - \cos\theta = 1 - 2 \text{ ssv } \theta$.

2. Demostrar: $\text{ssv } A = \text{sen}(s - b) \text{ sen}(s - c) \csc b \csc c$.

Según el problema 6 del capítulo 21, $\text{sen } \frac{1}{2}A = \sqrt{\dfrac{\text{sen}(s - b) \ \text{sen}(s - c)}{\text{sen } b \text{ sen } c}}$. Entonces

$$\text{ssv } A = \tfrac{1}{2}(1 - \cos A) = \text{sen}^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{\text{sen}(s - b) \ \text{sen}(s - c)}{\text{sen } b \text{ sen } c} = \text{sen}(s - b) \text{ sen}(s - c) \csc b \csc c.$$

3. Demostrar: $\text{ssv } a = \text{ssv}(b - c) + \text{sen } b \text{ sen } c \text{ ssv } A$.

Utilizando la ley de los cosenos $\cos a = \cos b \cos c + \text{sen } b \text{ sen } c \cos A$,

$$\begin{aligned} \text{ssv } a = \tfrac{1}{2}(1 - \cos a) &= \tfrac{1}{2}(1 - \cos b \cos c - \text{sen } b \text{ sen } c \cos A) \\ &= \tfrac{1}{2}[1 - \cos b \cos c - \text{sen } b \text{ sen } c \ (1 - 2 \text{ ssv } A)] \\ &= \tfrac{1}{2}[1 - (\cos b \cos c + \text{sen } b \text{ sen } c) + 2 \text{ sen } b \text{ sen } c \text{ ssv } A] \\ &= \tfrac{1}{2}[1 - \cos(b - c) + 2 \text{ sen } b \text{ sen } c \text{ ssv } A] \\ &= \tfrac{1}{2}[2 \text{ ssv}(b - c) + 2 \text{ sen } b \text{ sen } c \text{ ssv } A] = \text{ssv}(b - c) + \text{sen } b \text{ sen } c \text{ ssv } A. \end{aligned}$$

4. Resolver, mediante semisenoverso, el triángulo esférico ABC, dados $a = 121°15{,}4'$, $b = 104°54{,}7'$, $c = 65°42{,}5'$. (Caso I, problema 8, capítulo 21.)

Para A: $\text{ssv } A = \text{sen}(s - b) \ \text{sen}(s - c) \csc b \csc c$

Para B: $\text{ssv } B = \text{sen}(s - c) \ \text{sen}(s - a) \csc c \csc a$

Para C: $\text{ssv } C = \text{sen}(s - a) \ \text{sen}(s - b) \csc a \csc b$

Comprobación: $\dfrac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \dfrac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \dfrac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = 145°56{,}3'$$

	(*A*)	(*B*)	(*C*)
$a = 121°15{,}4'$		l csc 0,06811	l csc 0,06811
$b = 104°54{,}7'$	l csc 0,01488		l csc 0,01488
$c = 65°42{,}5'$	l csc 0,04026	l csc 0,04026	
$s-a = 24°40{,}9'$		l sen 9,62073	l sen 9,62073
$s-b = 41°\ 1{,}6'$	l sen 9,81717		l sen 9,81717
$s-c = 80°13{,}8'$	l sen 9,99366	l sen 9,99366	
$A = 117°57{,}9'$	l ssv 9,86597		
$B = 93°13{,}7'$		l ssv 9,72276	
$C = 70°20{,}6'$			l ssv 9,52089

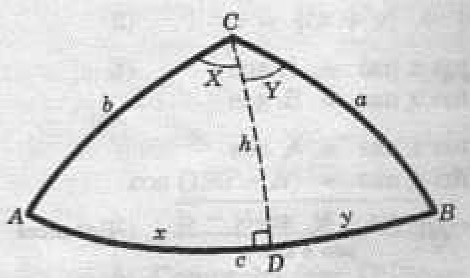
	a l sen 9,93189	b l sen 9,98512	c l sen 9,95974
Comprobación:	A l csc 0,05392	B l csc 0,00069	C l csc 0,02608
	9,98581	9,98581	9,98582

5. Encontrar, mediante el semisenoverso, el lado b del triángulo esférico ABC, dados $a = 106°25{,}3'$, $c = 42°16{,}7'$, $B = 114°53{,}2'$. (Caso III, problema 10, capítulo 21.)

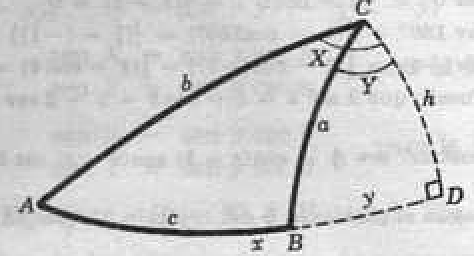
$$\text{ssv}\, b = \text{ssv}(a - c) + \text{sen}\, a \,\text{sen}\, c \,\text{ssv}\, B = \text{ssv}(a - c) + x$$

$a = 106°25{,}3'$	l sen	9,98191			
$c = 42°16{,}7'$	l sen	9,82784			
$B = 114°53{,}2'$	l ssv	9,85151			
$x = 0{,}45842$	log	9,66126			0,45842
$a-c = 64°\ 8{,}6'$				ssv	0,28194
$b = 118°43{,}9'$				ssv	0,74036

6. Deducir las fórmulas que se utilizan cuando se resuelve el caso I mediante el método del triángulo rectángulo.



(d)



(e)

La Fig. (*d*) ilustra el caso en que la perpendicular trazada por C corta al lado opuesto en un punto perteneciente al triángulo, y la Fig. (*e*) ilustra el caso en que la perpendicular corta la prolongación del lado opuesto.

En ambas figuras, $\cos b = \cos h \cos x$ y $\cos a = \cos h \cos y$.

Entonces, $$\frac{\cos b}{\cos a} = \frac{\cos x}{\cos y}, \qquad \frac{\cos b}{\cos a} \pm 1 = \frac{\cos x}{\cos y} \pm 1,$$

$$\frac{\cos b + \cos a}{\cos a} = \frac{\cos x + \cos y}{\cos y}, \qquad \frac{\cos b - \cos a}{\cos a} = \frac{\cos x - \cos y}{\cos y},$$

y $$\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = \frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y}.$$

Conforme a las fórmulas del capítulo 12, estas fórmulas se transforman en

$$\frac{2 \,\text{sen}\, \frac{1}{2}(b+a) \,\text{sen}\, \frac{1}{2}(b-a)}{2 \cos \frac{1}{2}(b+a) \cos \frac{1}{2}(b-a)} = \frac{2 \,\text{sen}\, \frac{1}{2}(x+y) \,\text{sen}\, \frac{1}{2}(x-y)}{2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y)}$$

o $$(A) \qquad \tan \tfrac{1}{2}(b+a) \tan \tfrac{1}{2}(b-a) = \tan \tfrac{1}{2}(x+y) \tan \tfrac{1}{2}(x-y).$$

Para el caso ilustrado en la Fig. (*d*), $\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}c$; para el caso ilustrado en la Fig. (*e*), $\frac{1}{2}(x-y) = \frac{1}{2}c$. Una vez obtenidos $\frac{1}{2}(x-y)$ ó $\frac{1}{2}(x+y)$ mediante (A),

$$x = \tfrac{1}{2}(x+y) + \tfrac{1}{2}(x-y) \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{2}(x+y) - \tfrac{1}{2}(x-y).$$

Entonces, en la Fig. (*d*),

$$\begin{aligned} \cos A &= \tan x \cot b, \quad \text{sen}\, X = \text{sen}\, x \csc b \quad \text{(triángulo } ACD)\\ \cos B &= \tan y \cot a, \quad \text{sen}\, Y = \text{sen}\, y \csc a \quad \text{(triángulo } BCD)\\ C &= X + Y \end{aligned}$$

y, en la Fig. (*e*),

$$\begin{aligned} \cos A &= \tan x \cot b, \quad \text{sen}\, X = \text{sen}\, x \csc b \quad \text{(triángulo } ACD)\\ \cos(180° - B) &= \tan y \cot a, \quad \text{sen}\, Y = \text{sen}\, y \csc a \quad \text{(triángulo } BCD)\\ C &= X - Y. \end{aligned}$$

CASO I.

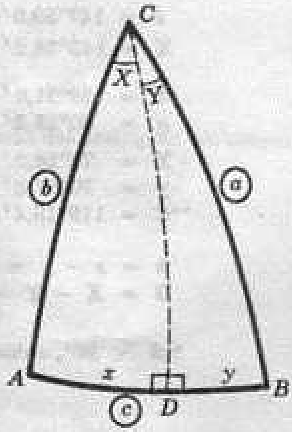
7. Resolver el triángulo esférico ABC, dados $a = 121°15,4'$, $b = 104°54,7'$, $c = 65°42,5'$. (Problema 8, capítulo 21.)

$$\tfrac{1}{2}(x+y) = \tfrac{1}{2}c = 32°51,2'$$

$$(1)\ \tan\tfrac{1}{2}(x-y) = \tan\tfrac{1}{2}(b+a)\tan\tfrac{1}{2}(b-a)\cot\tfrac{1}{2}(x+y)$$

Triángulo ACD	Triángulo BCD
(2) $\cos A = \tan x \cot b$	(4) $\cos B = \tan y \cot a$
(3) $\text{sen}\, X = \text{sen}\, x \csc b$	(5) $\text{sen}\, Y = \text{sen}\, y \csc a$

$$C = X + Y$$



(1)

$\frac{1}{2}(b+a)$ =	113° 5,0′	l tan 0,37039 (n)
$\frac{1}{2}(b-a)$ =	− 8°10,4′	l tan 9,15724 (n)
$\frac{1}{2}(x+y)$ =	32°51,2′	l cot 0,18992
$\frac{1}{2}(x-y)$ =	27°33,5′	l tan 9,71755
x =	60°24,7′	
y =	5°17,7′	

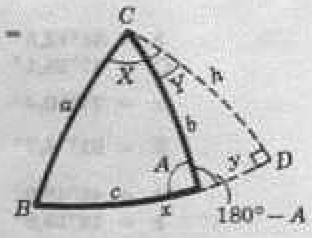
	(2)	(3)
x = 60°24,7′	l tan 0,24580	l sen 9,93932
b = 104°54,7′	l cot 9,42537 (n)	l csc 0,01488
A = 117°58,2′	l cos 9,67117 (n)	l sen 9,95420
X = 64° 8,8′		

	(4)	(5)
y = 5°17,7′	l tan 8,96698	l sen 8,96512
a = 121°15,4′	l cot 9,78317 (n)	l csc 0,06811
B = 93°13,5′	l cos 8,75015 (n)	l sen 9,03323
Y = 6°11,8′		

$$C = X + Y = 70°20,6'$$

CASO III.

8. Resolver el triángulo esférico ABC, dados $a = 106°25,3'$, $c = 42°16,7'$, $B = 114°53,2'$. (Problema 10, capítulo 21.)



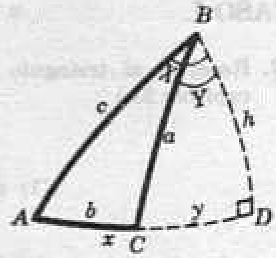
Triángulo BCD	Triángulo ACD
$\tan x = \tan a \cos B$	$\cos b = \cos h \cos y$
$\cot X = \cos a \tan B$	$\cot Y = \text{sen}\, h \cot y$
$\text{sen}\, h = \text{sen}\, a\, \text{sen}\, B$	$\cot(180° - A) = \cot h\, \text{sen}\, y$
$y = x - c$	$C = X - Y$

a = 106°25,3′	l tan 0,53058 (n)	l cos 9,45133 (n)	l sen 9,98191
B = 114°53,2′	l cos 9,62410 (n)	l tan 0,33357 (n)	l sen 9,95768
x = 54°59,7′	l tan 0,15468		
X = 58°38,5′		l cot 9,78490	
*h = 119°31,5′	l cos 9,69268 (n)	l cot 9,75308 (n)	l sen 9,93959
y = 12°43,0′	l cos 9,98921	l sen 9,34268	l cot 0,64653
b = 118°44,0′	l cos 9,68189 (n)		
$180° - A$ = 97° 6,4′		l cot 9,09576 (n)	
A = 82°53,6′			
Y = 14°32,3′			l cot 0,58612

$$C = X - Y = 44°6,2'$$

* $a > 90°$, $x < 90°$; entonces $h > 90°$ (véase la ley de los cuadrantes, capítulo 20).

CASO V.



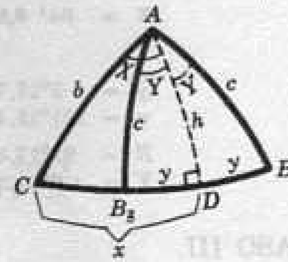
9. Resolver el triángulo esférico ABC, dados $a = 80°26{,}2'$, $c = 115°30{,}6$, $A = 72°24{,}4'$. (Problema 13, capítulo 21.)

Triángulo ABD	Triángulo BCD
$\tan x = \tan c \cos A$	$\cos Y = \tan h \cot a$
$\cot X = \cos c \tan A$	$\cos y = \sec h \cos a$
$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A$	$\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} h \csc a$
$b = x - y$	$B = X - Y$

$c = 115°30{,}6'$	l tan 0,32131 (n)	l cos 9,63414 (n)	l sen 9,95545
$A = 72°24{,}4'$	l cos 9,48038	l tan 0,49882	l sen 9,97920
$x = 147°39{,}0'$	l tan 9,80169 (n)		
$X = 143°38{,}2'$		l cot 0,13296 (n)	
$^*h = 59°21{,}0'$	l tan 0,22726	l sec 0,29261	l sen 9,93465
$a = 80°26{,}2'$	l cot 9,22655	l cos 9,22047	l csc 0,00608
$Y = 73°28{,}9'$	l cos 9,45381		
$y = 70°58{,}8'$		l cos 9,51308	
$^{**}C = 119°15{,}4'$			l sen 9,94073

$b = x - y = 76°40{,}2'$
$B = X - Y = 70°\ 9{,}3'$

$^*A < 90°$, entonces $h < 90°$. $^{**}c > a$, entonces $C > A$; existe una solución.



10. Resolver el triángulo esférico ABC, dados $b = 81°42{,}3'$, $c = 52°19{,}8'$, $C = 47°25{,}1'$.

Triángulo ACD	Triángulo ABD
$\tan x = \tan b \cos C$	$\cos Y = \tan h \cot c$
$\cot X = \cos b \tan C$	$\cos y = \sec h \cos c$
$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C$	$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} h \csc c$

$b = 81°42{,}3'$	l tan 0,83626	l cos 9,15918	l sen 9,99544
$C = 47°25{,}1'$	l cos 9,83036	l tan 0,03670	l sen 9,86706
$x = 77°50{,}4'$	l tan 0,66662		
$X = 81°\ 4{,}7'$		l cot 9,19588	
$^*h = 46°46{,}2'$	l tan 0,02685	l sec 0,16436	l sen 9,86250
$c = 52°19{,}8'$	l cot 9,88764	l cos 9,78612	l csc 0,10153
$Y = 34°47{,}2'$	l cos 9,91449		
$y = 26°50{,}7'$		l cos 9,95048	
$^{**}B = 67°\ 0{,}0'$			l sen 9,96403

$^*C < 90°$, entonces $h < 90°$. $^{**}h < 90°$, entonces $B < 90°$.

Existen dos soluciones, ACB_1 y ACB_2, como se muestra en la figura. Las partes buscadas son:

Triángulo ACB_1, $B_1 = 67°0{,}0'$, $a_1 = x + y = 104°41{,}1'$, $A_1 = X + Y = 115°51{,}9'$.

Triángulo ACB_2, $B_2 = 180° - B_1 = 113°0{,}0'$, $a_2 = x - y = 50°59{,}7'$, $A_2 = X - Y = 46°17{,}5'$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Resolver mediante la aplicación del semisenoverso.

11. $a = 69°23,6'$, $b = 57°51,3'$, $c = 39°39,7'$. *Resp.* $A = 96°7,2'$, $B = 64°4,9'$, $C = 42°41,2'$
12. $a = 59°9,4'$, $b = 101°53,9'$, $c = 98°47,7'$. *Resp.* $A = 60°9,7'$, $B = 98°39,7'$, $C = 93°13,2'$
13. $A = 51°44,4'$, $B = 59°31,8'$, $C = 76°20,2'$. *Resp.* $a = 28°4,0'$, $b = 31°6,0'$, $c = 35°36,5'$
14. $A = 134°35,4'$, $B = 108°13,6'$, $C = 79°57,0'$. *Resp.* $a = 143°59,9'$, $b = 128°22,3'$, $c = 54°22,2'$

Utilizar el semisenoverso para encontrar el elemento pedido.

15. $a = 103°44,7'$, $b = 64°12,3'$, $C = 98°33,8'$; encontrar $c = 103°30,6'$.
16. $b = 156°12,2'$, $c = 112°48,6'$, $A = 76°32,4'$; encontrar $a = 63°48,8'$.
17. $a = 67°28,4'$, $b = 34°15,2'$, $C = 24°12,6'$; encontrar $c = 37°44,1'$.

18. Resolver los problemas suplementarios 16-33, capítulo 21, mediante el método del triángulo rectángulo.

CAPITULO 23

Rumbo y distancia

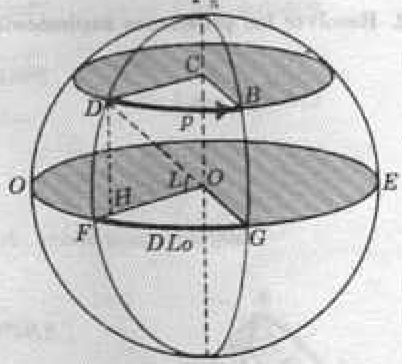
DOS SON LOS PROBLEMAS DE NAVEGACION que se tratarán en este capítulo:

a) Cuando se conocen la posición del punto de partida, el rumbo seguido y la distancia recorrida en determinado tiempo, encontrar la posición del punto de llegada.

b) Cuando se conocen las posiciones de los puntos de partida y de llegada, encontrar la distancia entre los dos puntos y el rumbo necesario para ir de uno a otro.

(En este capítulo, la palabra "milla" significará milla náutica.)

NAVEGACION A LO LARGO DE UN PARALELO. Supóngase que un barco navega p millas directamente hacia el este o directamente hacia el oeste (hacia el oeste en la figura adjunta) desde una posición conocida D hasta B. Como el viaje se realiza a lo largo de un paralelo de latitud, la latitud de B es la misma del punto D. Así, el problema a) se reduce a encontrar la longitud de B.



La *diferencia de longitud* entre B y D (DLo) se mide mediante el arco FG determinado en el ecuador por los meridianos que pasan por D y B. La distancia recorrida al navegar desde D hasta B (esto es, la longitud en millas del arco DB) recibe el nombre de *"departure"* (p) de B hacia D. La diferencia de longitud se denomina este u oeste según que la "departure" sea hacia el este o hacia el oeste.

Para encontrar la longitud de B es necesario convertir p millas en minutos. (Obsérvese que la "departure" se mide, en este caso, a lo largo de una circunferencia menor; entonces, no es válida la relación 1 milla = 1 minuto.) En la figura, únanse D y B con el centro C de la circunferencia menor (paralelo de latitud), únanse D, F y G con el centro O de la Tierra y trácese DH perpendicular a OF. Llámese L a $\angle FOD$, que mide la latitud de D. Como $\angle FOG = \angle DCB$, los arcos FG y DB son proporcionales a sus radios; por tanto,

$$\frac{\text{arc } FG}{\text{arc } DB} = \frac{OF}{CD} = \frac{OD}{OH} = \sec L, \qquad \text{arc } FG = (\text{arc } DB) \sec L, \quad \text{o} \quad DLo = p \sec L.$$

Así,

diferencia de longitud (minutos) = "departure" (millas) × secante de la latitud.

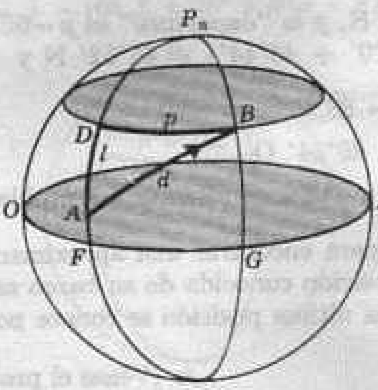
EJEMPLO 1. Un barco navega 55 millas hacia el este en la latitud 44°30′ N. Encontrar el cambio de longitud.

En relación con la figura anterior, la "departure" es p = 55 millas E y L = 44°30′.

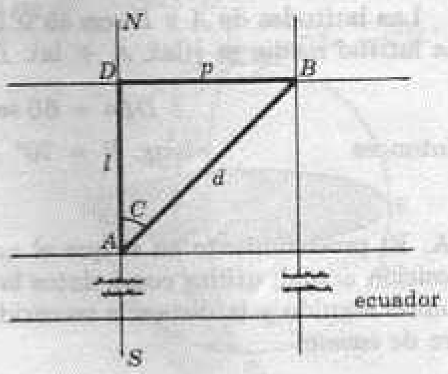
Entonces, DLo = 55 sec 44°30′ = 77,1 millas E = 77,1′ E ó 1°17,1′ E.

(Véanse, además, los problemas 1 y 2.)

NAVEGACION EN UN PLANO. Supóngase que un barco navega, a lo largo de una circunferencia máxima, una distancia de d millas desde A hasta B, como en la Fig. (a). Trácese por B el paralelo que corta en D al meridiano que pasa por A. Sean F y G los puntos donde los meridianos que pasan por A y B cortan el ecuador. Entonces, l = arc AD es el *cambio de latitud* y P = arc DB es la "departure".



(a)



(b)

Cuando las distancias relacionadas son relativamente pequeñas, se suele considerar la superficie de la Tierra como un plano, para poder aprovechar las fórmulas de la trigonometría plana que son más sencillas. Ahora se supondrá que todas las distancias son menores de 200 millas y que se está trabajando sobre un plano.

En este plano, el ecuador y los paralelos de latitud se representan mediante rectas horizontales, mientras que los meridianos, que son perpendiculares al ecuador, se representan mediante rectas paralelas verticales. En la Fig. (b), NAS es el meridiano que pasa por A, y DB es una parte del paralelo de latitud que pasa por B. Entonces, $d = AB$ es la distancia, $p = DB$ es la "departure", l es el cambio de latitud y C es el ángulo del rumbo.

En el triángulo rectángulo ABD: $l = d \cos C$, $\quad p = d \operatorname{sen} C$, $\quad \tan C = p/l$.

El cambio de latitud se designa N o S según que B esté al norte o al sur de A. En la Fig. (b), el cambio de latitud es l millas N o l minutos N, la "departure" es p millas E y el rumbo es N C° E.

EJEMPLO 2. Un barco navega una distancia de 120 millas con un rumbo de 30° (o N 30° E) desde A (latitud 45°0′ N, longitud 70°0′ O) hasta B. Encontrar la "departure" y la latitud de B.

En el triángulo rectángulo ABD de la Fig. (b),

$$p = d \operatorname{sen} C = 120 \operatorname{sen} 30° = 60 \text{ millas E}$$

$$l = d \cos C = 120 \cos 30° = 103{,}9 \text{ millas N.}$$

El cambio de latitud es $103{,}9' = 1°44'$ y la latitud de B es $45°0' + 1°44' = 46°44'$ N.

(Véanse, además, los problemas 3-5.)

NAVEGACION POR LATITUD MEDIA. Cuando el triángulo ABD de la Fig. (a) se transforma en el triángulo ABD de la Fig. (b), se alarga el arco DB. Entonces, cuando la "departure" $p = DB$ se utiliza en la fórmula $DLo = p \sec L$ de la navegación a lo largo de un paralelo, el valor de DLo es muy grande. Se obtiene una mejor aproximación si se considera la "departure" correspondiente al paralelo de la latitud media de los paralelos de A y B; esto es,

$$DLo = p \sec \tfrac{1}{2}(\text{lat. } A + \text{lat. } B).$$

Este método, que consiste en convertir la "departure" en diferencia de longitud, se llama *navegación por latitud media.* Sin embargo, no debe aplicarse cuando la latitud media excede los 60°.

EJEMPLO 3. Encontrar la longitud de B del ejemplo 2 mediante el método de la navegación por latitud media.

Las latitudes de A y B son 45°0′N y 46°44′N, y la "departure" es $p = 60$ millas E. La latitud media es $\frac{1}{2}(\text{lat. } A + \text{lat. } B) = \frac{1}{2}(45°0' + 46°44') = 45°52'$ N y

$$DLo = 60 \sec 45°52' = 86{,}2'.$$

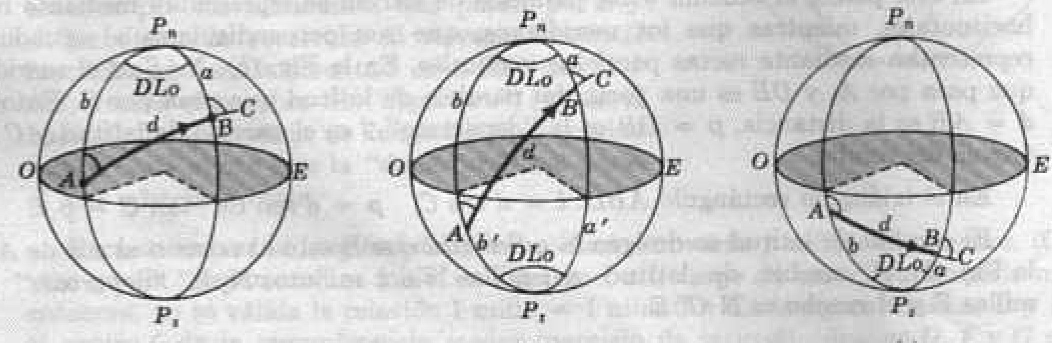
Entonces $\qquad \text{long. } B = 70° - 86{,}2' = 68°34' \text{ O.}$

(Véanse, además, los problemas 6-7.)

ESTIMA. El procedimiento en el que el navegante, para encontrar una aproximación de su posición actual, utiliza como datos la última posición conocida de su barco así como el rumbo seguido y la distancia recorrida desde esa última posición se conoce por el nombre de *estima.*

(Véase el problema 8.)

NAVEGACION A LO LARGO DE UNA CIRCUNFERENCIA MAXIMA. Al *navegar a lo largo de una circunferencia máxima* desde A hasta B (Fig. (*c*), (*d*), (*e*)), un barco recorre el menor de los arcos de la circunferencia máxima que pasa por A y B. Los problemas fundamentales de la navegación a lo largo de una circunferencia máxima son la determinación entre A y B, y la determinación de la dirección del recorrido en cualquiera de sus puntos.



(*c*) (*d*) (*e*)

Los problemas de la navegación a lo largo de una circunferencia máxima requieren la solución de un triángulo esférico (generalmente oblicuo) en el que uno de sus vértices es uno de los polos P_n o P_s. Si A y B se encuentran en el mismo hemisferio, se toma generalmente como vértice el polo de ese hemisferio; si A y B se encuentran en hemisferios diferentes, se puede tomar como vértice cualquiera de los dos polos. En la Fig. (*c*), A y B están en el hemisferio norte; $b = \text{arc } AP_n = 90° - \text{lat. } A = \text{colatitud } A$, $a = \text{arc } BP_n = 90° - \text{lat. } B = \text{colatitud } B$, y $DLo = \angle AP_nB$ igual a la diferencia de longitud entre A y B. En la Fig. (*d*), A está en el hemisferio sur y B está en el hemisferio norte. En el triángulo AP_nB, $b = \text{arc } AP_n = 90° + \text{lat. } A$ y $a = BP_n = 90° - \text{lat. } B$ mientras que en el triángulo AP_sB, $b' = \text{arc } AP_s = 90° - \text{lat. } A$ y $a' = \text{arc } BP_s = 90° + \text{lat. } B$. En la Fig. (*e*), A y B se encuentran en el hemisferio sur. En el triángulo AP_sB, $b = \text{arc } AP_s = 90° - \text{lat. } A$ y $a = \text{arc } BP_s = 90° - \text{lat. } B$.

En cada una de las figuras, $d = \text{arc } AB$ = distancia a lo largo de la circunferencia máxima, entre A y B, $\angle P_nAB$ = rumbo de salida y $\angle P_nBC$ = rumbo de llegada.

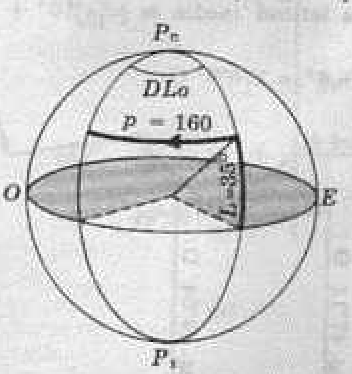
(Véanse los problemas 9-11.)

PROBLEMAS RESUELTOS

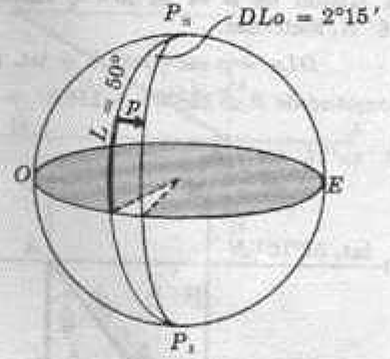
NAVEGACION A LO LARGO DE UN PARALELO.

1. Un barco navega hacia el oeste una distancia de 160 millas en la latitud 35° N. Encontrar el cambio de longitud.

Aquí, $p = 160$, $L = 35°$ y $DLo = p \sec L = 160 \sec 35° = 195{,}3'$ O.



Problema 1



Problema 2

2. Un barco cuya latitud es 50° N navega hacia el este hasta que alcanza una diferencia de longitud de 2°15′. Encontrar la "departure".

Aquí, $DLo = 2°15' = 135'$E, $L = 50°$ y, mediante $DLo = p \sec L$,

$$p = DLo \cos L = 135 \cos 50° = 86{,}8 \text{ millas E.}$$

NAVEGACION EN UN PLANO.

3. Un barco navega 150 millas con un rumbo de 245°10′ (o S 65°10′ O) desde San Francisco (lat. 37°50′ N). Encontrar la "departure" y la latitud alcanzada.

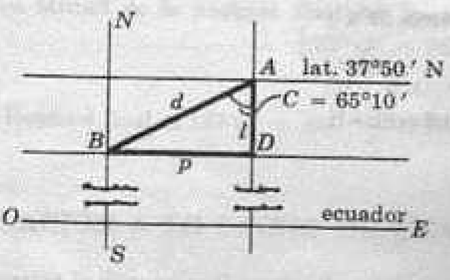
Sean A y B las posiciones inicial y final del barco. En el triángulo rectángulo ABD, $C = 65°10'$; entonces

$$p = d \operatorname{sen} C = 150 \operatorname{sen} 65°10' = 136{,}1 \text{ millas O y}$$
$$l = d \cos C = 150 \cos 65°10' = 63{,}0' \text{ S.}$$

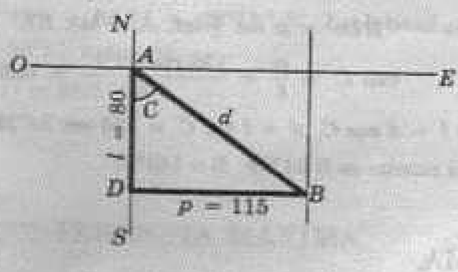
La latitud de B es $37°50' - 63' = 36°47'$ N.

4. Un aeroplano vuela desde A hasta B. La consecuente diferencia de latitud es $l = 80$ millas S, y la "departure" es 115 millas E. Encontrar el rumbo y la distancia.

En el triángulo rectángulo ABD: $\tan C = p/l = 115/80 = 1{,}4375$, $C = 55°11'$, con lo que el rumbo es S 55°11′ E o 124°49′; $d = l \sec C = 80 \sec 55°11' = 140{,}1$ millas.



Problema 3



Problema 4

5. Un buque sigue un rumbo de 160° cuando navega desde A (lat. 53°10′ S) hasta B (lat. 55°40S′). Encontrar la distancia y la "departure".

Aquí, $l = 55°40' - 53°10' = 2°30' = 150$ millas, $C =$ S 20° E; entonces

$$d = l \sec C = 150 \sec 20° = 159{,}6 \text{ millas y}$$
$$p = l \tan C = 150 \tan 20° = 54{,}6 \text{ millas E.}$$

NAVEGACION POR LATITUD MEDIA.

6. Un buque que sale de A (lat. 54°10′ N, long. 156°0′ O) y navega 165 millas con un rumbo de 220°. Encontrar la posición alcanzada B.

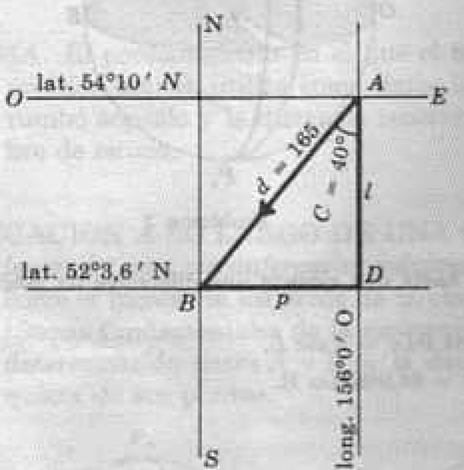
Aquí, C = S 40° O, d = 165; entonces

$$l = d \cos C = 165 \cos 40° = 126{,}4' \text{ S y}$$
$$p = d \operatorname{sen} C = 165 \operatorname{sen} 40° = 106{,}1 \text{ millas O.}$$

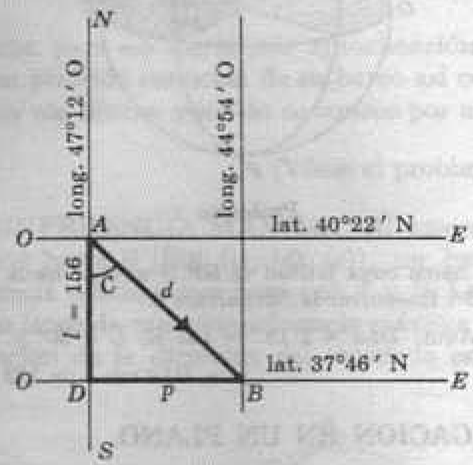
La latitud de B es 54°10′ − 126,4′ = 52°3,6′ N. La latitud media es $\frac{1}{2}$(54°10′ + 52°3,6′) = 53°6,8′ N. Entonces,

$$DLo = p \sec \tfrac{1}{2}(\text{lat. } A + \text{lat. } B) = 106{,}1 \sec 53°6{,}8' = 176°8' \text{ O}$$

y la longitud de B es 156°0′ + 176,8′ = 158°57′ O.



Problema 6



Problema 7

7. Un barco parte de A (lat. 40°22′ N, long. 47°12′ O) y llega a B (lat. 37°46′ N, long. 44°54′ O). Encontrar, mediante navegación por latitud media, el rumbo y la distancia.

La diferencia de latitud es l = 40°22′ − 37°46′ = 2°36′ = 156′ S.

La diferencia de longitud es DLo = 47°12′ − 44°54′ = 2°18′ = 138′ E.

La latitud media es $\frac{1}{2}$(40°22′ + 37°46′) = 39°4′.

De $\quad DLo = p \sec \frac{1}{2}(\text{lat. } A + \text{lat. } B), \quad p = 138 \cos 39°4'$;

$$\tan C = \frac{p}{l} = \frac{138 \cos 39°4'}{156} = 0{,}6868 \text{ y } C = 34°29';$$

y, de $l = d \cos C$, $d = l \sec C$ = 156 sec 34°29′ = 189,3 millas E.

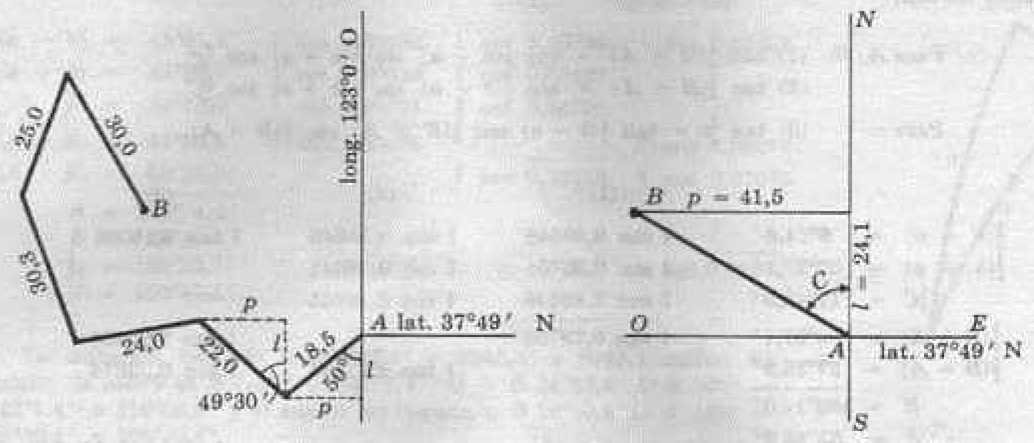
El rumbo es S 34°29′ E o 145°31′.

ESTIMA.

8. Un barco parte de una posición A (lat. 37°49′ N, long. 123°0′ O) y recorre las distancias siguientes con los rumbos indicados:

Rumbo	230°0′	310°30′	260°0′	340°0′	20°0′	150°30′
Distancia (millas)	18,5	22,0	24,0	30,3	25,0	30,0

Si la posición final del buque es B, encontrar la distancia entre A y B, el rumbo necesario para un viaje directo desde A hasta B, la latitud y la longitud de B.



(a) (b)

En las dos primeras columnas de la tabla aparecen los datos. En las columnas encabezadas por CAMBIO DE LATITUD y "DEPARTURE" aparecen los resultados obtenidos de las fórmulas

$$l = d \cos C \quad y \quad p = d \operatorname{sen} C.$$

Por ejemplo,

primer rumbo: $l = 18{,}5 \cos 50° = 11{,}9'$ S y $p = 18{,}5 \operatorname{sen} 50° = 14{,}2$ mi O
segundo rumbo: $l = 22{,}0 \cos 49°30' = 14{,}3'$ N y $p = 22{,}0 \operatorname{sen} 49°30' = 16{,}7$ mi O.

RUMBO	DISTANCIA	CAMBIO DE LATITUD	"DEPARTURE"
230°0′	18,5	11,9′ S	14,2 O
310°30′	22,0	14,3′ N	16,7 O
260°0′	24,0	4,2′ S	23,6 O
340°0′	30,3	28,5′ N	10,4 O
20°0′	25,0	23,5′ N	8,6 E
150°30′	30,0	26,1′ S	14,8 E
		Totales {66,3′ N / 42,2′ S	Totales {64,9 O / 23,4 E
		l = 24,1′ N	p = 41,5 O

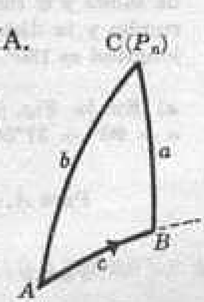
En la Fig. (b), $\tan C = p/l = 41{,}5/24{,}1 = 1{,}7220$, $C = 59°51'$ y el rumbo directo es $300°9'$.

La latitud de la posición final del buque es $37°49' + 24{,}1' = 38°13'$ N. La latitud media es $\frac{1}{2}(37°49' + 38°13') = 38°1'$; entonces,

$$DLo = 41{,}5 \sec 38°1' = 52{,}7' \text{ O}$$

y la longitud final es $123°0' + 52{,}7' = 123°53'$ O.

NAVEGACION A LO LARGO DE UNA CIRCUNFERENCIA MAXIMA.



9. Encontrar la distancia, el rumbo de salida y el rumbo de llegada correspondientes a un viaje desde Honolulú (lat. 21°18,3′ N, long. 157°52,3′ O) hasta San Francisco (lat. 37°47,5′ N, long. 122°25,7′ O).

En la figura, A es Honolulú y B es San Francisco.

Entonces, $a = 90° - 37°47{,}5' = 52°12{,}5'$, $b = 90° - 21°18{,}3' = 68°41{,}7'$ y $C = 157°52{,}3' - 122°25{,}7' = 35°26{,}6'$.

Solución normal.

Para A, B: (1) $\tan \frac{1}{2}(B+A) = \cos \frac{1}{2}(b-a) \sec \frac{1}{2}(b+a) \cot \frac{1}{2}C$

(2) $\tan \frac{1}{2}(B-A) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b-a) \csc \frac{1}{2}(b+a) \cot \frac{1}{2}C$

Para c: (3) $\tan \frac{1}{2}c = \tan \frac{1}{2}(b-a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B+A) \csc \frac{1}{2}(B-A)$

		(1)	(2)	(3)
$\frac{1}{2}(b-a)$ =	8°14,6′	l cos 9,99549	l sen 9,15648	l tan 9,16099
$\frac{1}{2}(b+a)$ =	60°27,1′	l sec 0,30701	l csc 0,06051	
$\frac{1}{2}C$ =	17°43,3′	l cot 0,49545	l cot 0,49545	
$\frac{1}{2}(B+A)$ =	80°57,1′	l tan 0,79795		l sen 9,99456
$\frac{1}{2}(B-A)$ =	27°16,9′		l tan 9,71244	l csc 0,33878
B =	108°14,0′			
A =	53°40,2′			
$\frac{1}{2}c$ =	17°20,1′			l tan 9,49433
c =	34°40,2′			

La distancia buscada es 34°40,2′ = 2080,2′ = 2080,2 millas. El rumbo de salida es N 53°40,2′ E ó 53°40,2′ y el rumbo de llegada es N (180° − 108°14,0′) E = N 71°46,0′ E ó 71°46,0′.

Solución alterna.

$$\operatorname{ssv} c = \operatorname{ssv}(b-a) + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a \operatorname{ssv} C = \operatorname{ssv}(b-a) + x$$
$$\operatorname{ssv} A = \operatorname{sen}(s-b) \operatorname{sen}(s-c) \csc b \csc c$$
$$\operatorname{ssv} B = \operatorname{sen}(s-c) \operatorname{sen}(s-a) \csc c \csc a$$

b = 68°41,7′	l sen 9,96926		
a = 52°12,5′	l sen 9,89776		
C = 35°26,6′	l ssv 8,96687	$b - a$ = 16°29,2′	ssv 0,02056
x = 0,06822	log 8,83389		0,06822
c = 34°40,2′			ssv 0,08878

a = 52°12,5′	$s-a$ = 25°34,7′		l sen 9,63523
b = 68°41,7′	$s-b$ = 9° 5,5′	l sen 9,19870	
c = 34°40,2′	$s-c$ = 43° 7,0′	l sen 9,83473	l sen 9,83473
$2s$ = 155°34,4′	a = 52°12,5′		l csc 0,10224
s = 77°47,2′	b = 68°41,7′	l csc 0,03074	
	c = 34°40,2′	l csc 0,24500	l csc 0,24500
	A = 53°40,2′	l ssv 9,30917	
	B = 108°14,0′		l ssv 9,81720

La distancia buscada es 2080,2 millas. El rumbo de salida es 53°40,2′ y el rumbo de llegada es 71°46,0′.

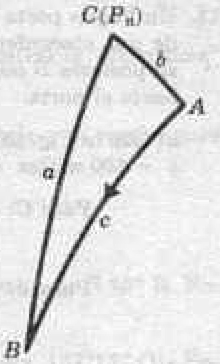
10. Un barco navega a lo largo de una circunferencia máxima desde Dutch Harbor (lat. 53°53,0′ N, long. 166°35,0′ O) hasta Melbourne (lat. 37°50,0′ S, long. 144°59,0′ E). (*a*) Encontrar la distancia, el rumbo de salida y el rumbo de llegada. (*b*) Localizar el punto donde el recorrido corta el ecuador. Encontrar el rumbo y la distancia desde este punto hasta Dutch Harbor. (*c*) Localizar el punto del recorrido cuya longitud es 180°. Encontrar el rumbo y la distancia desde este punto hasta Dutch Harbor.

a) En la Fig. (*a*), A es Dutch Harbor y B es Melbourne. Entonces, b = 90° − 53°53,0′ = 36°7,0′, a = 90° + 37°50,0′ = 127°50,0′ y C = 360° − (166°35,0′ + 144°59,0′) = 48°26,0′.

Para A, B: (1) $\tan \frac{1}{2}(A+B) = \cos \frac{1}{2}(a-b) \sec \frac{1}{2}(a+b) \cot \frac{1}{2}C$

(2) $\tan \frac{1}{2}(A-B) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b) \csc \frac{1}{2}(a+b) \cot \frac{1}{2}C$

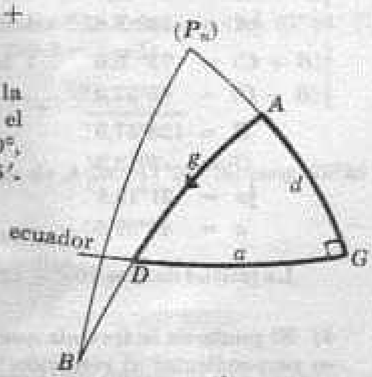
Para c: (3) $\tan \frac{1}{2}c = \tan \frac{1}{2}(a-b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \csc \frac{1}{2}(A-B)$



(a)

		(1)	(2)	(3)
$\frac{1}{2}(a-b)$	$=45°51,5'$	l cos 9,84288	l sen 9,85590	l tan 0,01302
$\frac{1}{2}(a+b)$	$=81°58,5'$	l sec 0,85510	l csc 0,00427	
$\frac{1}{2}C$	$=24°13,0'$	l cot 0,34701	l cot 0,34701	
$\frac{1}{2}(A+B)$	$=84°50,9'$	l tan 1,04499		l sen 9,99824
$\frac{1}{2}(A-B)$	$=58°10,5'$		l tan 0,20718	l csc 0,07075
A	$=143°\,1,4'$			
B	$=26°40,4'$			
$\frac{1}{2}c$	$=50°22,7'$			l tan 0,08201
c	$=100°45,4'$			

La distancia buscada es $100°45,4' = 6045,4' = 6045,4$ millas. El rumbo de salida es S $(180° - 143°1,4')$ O = S $36°58,6'$ O ó $360° - 143°1,4' = 216°58,6'$ y el rumbo de llegada es S $26°40,4'$ O ó $180° + 26°40,4' = 206°40,4'$.



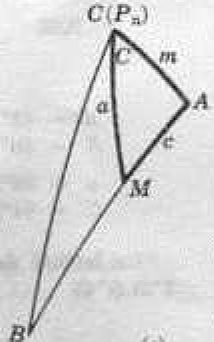
(b)

b) Denomínese D la intersección del recorrido y el ecuador, y G la intersección del meridiano que pasa por A y el ecuador. Considérese el triángulo esférico rectángulo AGD de la Fig. (b) en el que $G = 90°$, $d = \text{arc } GA = 53°53,0'$ y $A = \angle DAG = 180° - 143°1,4' = 36°58,6'$.

Para a: (4) $\tan a = \operatorname{sen} d \tan A$
Para D: (5) $\cos D = \cos d \operatorname{sen} A$
Para g: (6) $\tan g = \tan d \sec A$

	(4)	(5)	(6)
$d = 53°53,0'$	l sen 9,90731	l cos 9,77043	l tan 0,13688
$A = 36°58,6'$	l tan 9,87675	l sen 9,77923	l sec 0,09752
$a = 31°18,5'$	l tan 9,78406		
$D = 69°14,1'$		l cos 9,54966	
$g = 59°45,7'$			l tan 0,23440

La longitud de D es $166°35,0' + 31°18,5' = 197°53,5'$ O = $162°6,5'$ E.
El rumbo desde D es S $(90° - 69°14,1')$ O = S $20°45,9'$ O ó $200°45,9'$.
La distancia entre D y Dutch Harbor es $59°45,7' = 3585,7' = 3585,7$ millas.



(c)

c) Denomínese M el punto del recorrido cuya longitud es 180° y considérese el triángulo esférico AMC de la Fig. (c) en el que $C = 180° - 166°35,0' = 13°25,0'$.

Para a, c: (7) $\tan \frac{1}{2}(a+c) = \cos \frac{1}{2}(A-C) \sec \frac{1}{2}(A+C) \tan \frac{1}{2}m$
(8) $\tan \frac{1}{2}(a-c) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-C) \csc \frac{1}{2}(A+C) \tan \frac{1}{2}m$

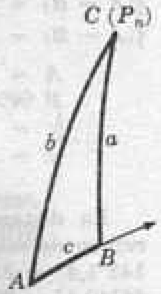
Para M: (9) $\cot \frac{1}{2}M = \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+c) \csc \frac{1}{2}(a-c) \tan \frac{1}{2}(A-C)$

		(7)	(8)	(9)
$\frac{1}{2}(A-C)$	$=64°48,2'$	l cos 9,62913	l sen 9,95658	l tan 0,32745
$\frac{1}{2}(A+C)$	$=78°13,2'$	l sec 0,69004	l csc 0,00924	
$\frac{1}{2}m$	$=18°\,3,5'$	l tan 9,51328	l tan 9,51328	
$\frac{1}{2}(a+c)$	$=34°12,7'$	l tan 9,83245		l sen 9,74993
$\frac{1}{2}(a-c)$	$=16°46,3'$		l tan 9,47910	l csc 0,53976
a	$=50°59,0'$			
c	$=17°26,4'$			
$\frac{1}{2}M$	$=13°34,5'$			l cot 0,61714
M	$=27°\,9,0'$			

La latitud de M es $(90° - a)$ N = $39°1,0'$ N. El rumbo desde M es S $27°9,0'$ O ó $207°9,0'$ y la distancia entre M y Dutch Harbor es $17°26,4' = 1046,4$ millas.

11. Un buque parte de Nueva York (lat. 40°48,6′ N, long. 73°57,5′ O) para efectuar una travesía a lo largo de una circunferencia máxima. El rumbo de salida es 36°0,0′. (*a*) Encontrar la latitud y la longitud de su posición B cuando ha recorrido 500 millas. (*b*) Localizar el punto de la travesía que se encuentra más hacia el norte.

a) En la Fig. (*a*), A es Nueva York. Entonces, $b = 90° - 40°48,6' = 49°11,4'$, $c = 500$ millas $= 8°20,0'$ y $A = 36°0,0'$.



(*a*)

Para C: (1) $\tan \frac{1}{2}(B + C) = \cos \frac{1}{2}(b - c) \sec \frac{1}{2}(b + c) \cot \frac{1}{2}A$

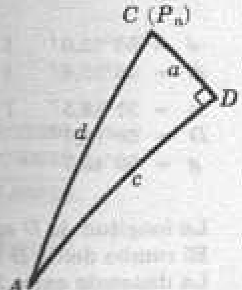
(2) $\tan \frac{1}{2}(B - C) = \text{sen } \frac{1}{2}(b - c) \csc \frac{1}{2}(b + c) \cot \frac{1}{2}A$

Para a: (3) $\tan \frac{1}{2}a = \tan \frac{1}{2}(b - c) \text{ sen } \frac{1}{2}(B + C) \csc \frac{1}{2}(B - C)$

		(1)	(2)	(3)
$\frac{1}{2}(b - c)$	$= 20°25,7'$	l cos 9,97179	l sen 9,54287	l tan 9,57108
$\frac{1}{2}(b + c)$	$= 28°45,7'$	l sec 0,05819	l csc 0,31770	
$\frac{1}{2}A$	$= 18°\ 0,0'$	l cot 0,48822	l cot 0,48822	
$\frac{1}{2}(B + C)$	$= 73°\ 5,6'$	l tan 0,51720		l sen 9,98081
$\frac{1}{2}(B - C)$	$= 65°52,3'$		l tan 0,34879	l csc 0,03970
B	$= 138°57,9'$			
C	$= 7°13,3'$			
$\frac{1}{2}a$	$= 21°19,8'$			l tan 9,59159
a	$= 42°39,6'$			

La latitud de B es $(90° - 42°39,6')$ N $= 47°20,4'$ N y la longitud es $(73°57,5' - 7°13,3')$ O $= 66°44,2'$ O.

b) El punto de la travesía que se encuentra más al norte es D, cuyo meridiano es perpendicular al recorrido. En el triángulo esférico rectángulo ACD de la Fig. (*b*), $d = 49°11,4'$ y $A = 36°0,0'$.



(*b*)

Para a: (4) $\text{sen } a = \text{sen } d \text{ sen } A$

Para C: (5) $\tan C = \sec d \cot A$

		(4)	(5)
d	$= 49°11,4'$	l sen 9,87902	l sec 0,18472
A	$= 36°\ 0,0'$	l sen 9,76922	l cot 0,13874
a	$= 26°24,9'$	l sen 9,64824	
C	$= 64°36,0'$		l tan 0,32346

La latitud de D es $(90° - 26°24,9')$ N $= 63°35,1'$ N y la longitud es $(73°57,5' - 64°36,0')$ O $=$ 9°21,5′ O.

PROBLEMAS PROPUESTOS

NAVEGACION A LARGO DE UN PARALELO.

12. Un barco navega 200 millas hacia el este a lo largo del paralelo de latitud 42° N. ¿Cuál es la longitud del punto de llegada si (*a*) parte de la longitud 125° O, (*b*) parte de la longitud 160° E?.
Resp. *a*) 120°30,9′ O. *b*) 164°29,1′ E

13. Un barco navega hacia el oeste en la latitud 42° N hasta que alcanza una diferencia de longitud de 3°45′. Encontrar la "departure". *Resp.* 167,2 millas O

14. Un barco navega hacia el oeste en la latitud 22° N hasta que alcanza una diferencia de longitud de 3°45′. Encontrar la "departure". *Resp.* 208,6 millas O

NAVEGACION EN UN PLANO.

15. Un barco navega 125 millas con un rumbo de 42°40′ a partir de *A* (lat. 40° N). Encontrar la "departure" y la latitud alcanzada. *Resp.* p = 84,7 millas E, lat. = 41°32′ N

16. *B* se encuentra a 125 millas al oeste y a 90 millas al norte de *A*. Encontrar la distancia y el rumbo para navegar desde *A* hasta *B*. *Resp.* d = 154,0 millas, rumbo = N 54°15′ O

NAVEGACION POR LATITUD MEDIA.

17. Un navío sale de *A* (lat. 35°38′ N, long. 64°55′ O) y navega 175 millas con un rumbo de S 50° E. Encontrar la posición alcanzada *B*. *Resp.* *B* (lat. 33°46′ N, long. 62°12′ O)

18. Un buque parte de *A* (lat. 45°15′ N, long. 140°38′ O) y llega a *B* (lat. 48°45′ N, long. 137°12′ O). Encontrar el rumbo y la distancia. *Resp.* 33°47′, 252,7 millas E

19. Un aeroplano vuela desde San Diego (lat. 32°42′ N, long. 117°10′ O) hasta San Francisco (lat. 37°48′ N, long. 122°24′ O). Encontrar el rumbo y la distancia. *Resp.* 320°2′, 399,3 millas O

ESTIMA.

20. Encontrar el rumbo directo y la posición final *B* si un buque, que parte de *A* (lat. 47°24′ N, long. 75°45′ O), sigue los siguientes rumbos:

a) rumbo 189°0′, distancia 35,0 millas; rumbo 330°0′, distancia 50,0 millas.
b) rumbo 225°0′, distancia 105,0 millas; rumbo 50°0′, distancia 125,0 millas.

Resp. *a*) 285°55′; 47°33′ N, 76°30′ O
b) 73°59′; 47°30′ N, 75°13′ O

21. Un barco que parte de *A* (lat. 40°50′ N, long. 125°0′ O) y recorre las siguientes distancias con los rumbos indicados:

Rumbo	35°30′	130°0′	255°0′	340°30′	110°30′
Distancia	30,0	45,0	100,0	40,0	30,0

Encontrar el rumbo directo y la posición final *B*.
Resp. 96°6′; 40°47′ N, 124°20′ O

NAVEGACION A LO LARGO DE UNA CIRCUNFERENCIA MAXIMA.

22. Encontrar la distancia más corta entre:

a) Chicago (lat. 41°50,0′ N, long. 87°37,0′ O), y Dutch Harbor (lat. 53°54,0′ N, long. 166°30,0′ O),
b) Nueva York (lat. 40°43,0′ N, long. 74°0,0′ O), y Rio de Janeiro (lat. 22°54,0′ S, long. 43°11,0′ O),
c) Dutch Harbor y Rio de Janeiro.

Resp. *a*) 3085,5 millas, *b*) 4186,2 millas, *c*) 7666,4 millas

23. Encontrar la distancia a lo largo de la circunferencia máxima, el rumbo inicial y el rumbo de llegada de un vuelo desde Washington (lat. 38°55,0′ N, long. 77°4,0′ O) hasta Moscú (lat. 55°45,0′ N, long. 37°34,0′ E). *Resp.* 4219,6 millas, 32°54,6′, 131°18,8′

24. Encontrar la distancia a lo largo de la circunferencia máxima, el rumbo inicial y el rumbo de llegada de un vuelo desde Calcuta (lat. 22°35,0′ N, long. 88°27,0′ E) hasta Melbourne (lat. 37°48,0′ S, long. 144°58,0′ E). *Resp.* 4822,6 millas, 221°56,7′, 231°21,5′

25. Localizar el punto del recorrido del problema 24 en que la travesía corta el ecuador y encontrar su distancia desde Calcuta. *Resp.* long. 107°29,4′ E, 1752,8 millas

26. Un aeroplano sale de Honolulú (lat. 21°18,0′ N, long. 157°52,0′ O) con un rumbo 40°43,0′.

a) Localizar el punto del recorrido más próximo al polo norte.
b) Encontrar la posición cuando la longitud es 74°0,0′ O.

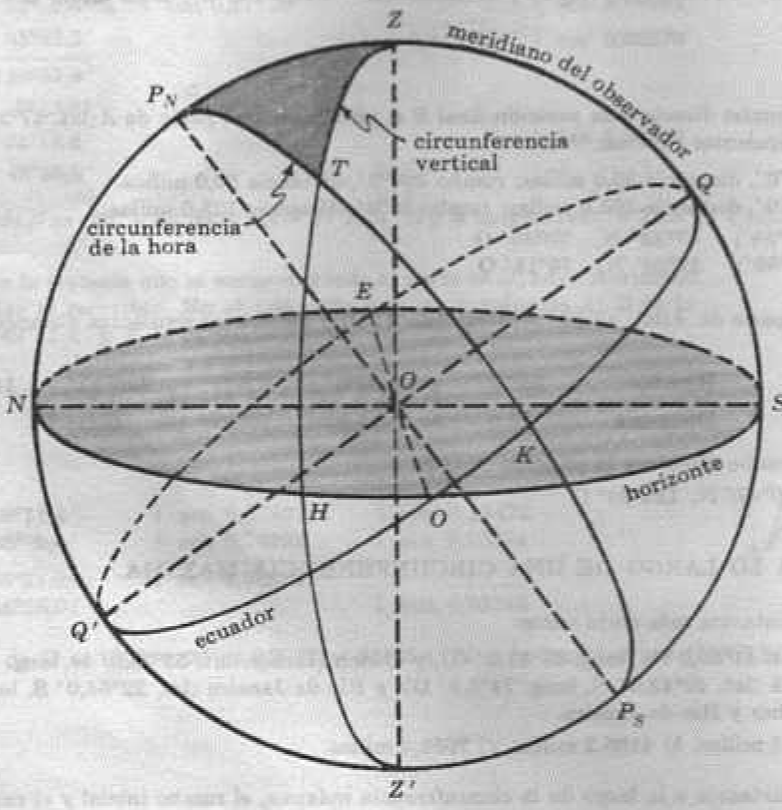
Resp. *a*) lat. 52°34,4′ N, long. 85°13,6′ O
b) lat. 52°2,3′ N

CAPITULO 24

La esfera celeste

A UN OBSERVADOR SITUADO EN LA SUPERFICIE DE LA TIERRA le parece que se encuentra en el centro de una esfera de radio ilimitado en la que todos los otros cuerpos celestes se mueven de este a oeste. Tal esfera, de radio ilimitado pero con centro en el centro de la Tierra, es útil para resolver ciertos problemas de astronomía y navegación. A esta esfera se le da el nombre de *esfera celeste*.

Para localizar un cuerpo sobre la esfera celeste (más precisamente, para ubicar el punto donde una recta trazada desde el centro de la Tierra y que pasa por el centro del cuerpo celeste corta la esfera celeste) son necesarios ciertos puntos de referencia y circunferencias máximas.



Los puntos y circunferencias máximas independientes del observador son:

1) Los *polos celestes* P_N y P_S, que son los puntos de intersección del eje de la Tierra y la esfera celeste.

2) El *ecuador celeste* $EQOQ'$, que es la intersección del plano del ecuador terrestre y la esfera celeste.

3) Los *meridianos celestes* que son las semi-circunferencias máximas que pasan por P_N y P_S.

Los puntos y circunferencias máximas que dependen de la posición del observador son:

1) El *cenit* (del observador) que es el punto Z de la esfera celeste situado directamente sobre el observador.
2) El *nadir* (del observador) que es el punto Z' diametralmente opuesto a Z. (Obsérvese que Z y Z' son los puntos de intersección de la esfera celeste y la recta que pasa por la posición del observador y por el centro de la Tierra.)
3) El *horizonte* (del observador) que es la circunferencia máxima $NESO$ cuyo polo es Z.
4) El *meridiano celeste* (del observador) que es el meridiano $P_N ZP_S$ que pasa por el cenit.

Dado un cuerpo celeste T:

1) La *circunferencia vertical* de T es la semi-circunferencia máxima $ZTHZ'$, donde H es su intersección con el horizonte.
2) La *altitud* de T es su distancia angular al horizonte. La altitud (arc HT) es + o − según la posición de T arriba o abajo del horizonte.
3) La *distancia cenital* de T es 90° − la altitud de T.
4) El *acimut* de T es el ángulo $P_N ZT$ entre el meridiano del observador y la circunferencia vertical de T. Se mide, generalmente, a lo largo del horizonte desde el punto norte N, hacia el este, hasta H. Si el cuerpo se encuentra hacia el este, el acimut es $< 180°$; si se encuentra hacia el oeste, es $> 180°$.
5) La *circunferencia de la hora* de T es la semi-circunferencia máxima $P_N TKP_S$, donde K es su intersección con el ecuador.
6) La *declinación* de T es su distancia angular al ecuador. La declinación (arc KT) es + o − según T se encuentre al norte o al sur del ecuador.
7) La *distancia polar* de T es 90° − la declinación de T.
8) El *ángulo de la hora* de T es el ángulo $ZP_N T$ entre el meridiano del observador y la circunferencia de la hora de T. Se mide hacia el oeste desde 0° hasta 360°.

Debido a la rotación de la Tierra, una circunferencia de la hora parece variar 15° cada hora; por esta razón, el ángulo de la hora se puede medir en unidades de tiempo desde 0^h hasta 24^h.

SISTEMAS DE COORDENADAS. En el *sistema horizontal*, los ejes son el horizonte (del observador) y la circunferencia vertical del cuerpo celeste T. Las coordenadas de T son:

la altitud, HT, medida por un sextante o un teodolito;
el acimut, $\angle P_N ZT$ o arco NEH, medido por una brújula.

En el *sistema ecuatorial*, los ejes son el ecuador celeste y la circunferencia de la hora de T. Las coordenadas de T son:

la declinación KT y el ángulo de la hora $\angle ZP_N T$.

En el Almanaque Náutico Americano (American Nautical Almanac) se encuentran las declinaciones de algunos cuerpos celestes, así como los respectivos ángulos de la hora calculados para un observador situado en el meridiano de Greenwich.

EL TRIANGULO ASTRONOMICO de un cuerpo celeste T es el triángulo esférico (celeste) $P_N ZT$ determinado por el meridiano del observador $P_N Z$, la circunferencia de la hora $P_N T$, y la circunferencia vertical ZT. Las partes de este triángulo son:

1) lado TZ = distancia cenital de T = 90° − la altitud de T,

2) lado TP_N = distancia polar de $T = 90° -$ la declinación de T,

3) lado ZP_N = colatitud del observador = $90 - QZ$
= $90° -$ latitud del observador (en el hemisferio norte)
= $90° +$ latitud del observador (en el hemisferio sur),

4) ángulo P_NZT = acimut de T, si T se encuentra al este del meridiano del observador,
= $360° -$ acimut de T, si T se encuentra al oeste del meridiano del observador,

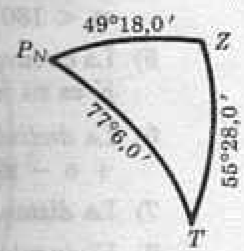
5) ángulo ZP_NT = ángulo de la hora de T, si T se encuentra al oeste del meridiano del observador
= $360° -$ ángulo de la hora de T, si T se encuentra al este del meridiano del observador,

6) ángulo ZTP_N, que no es de especial importancia.

HORA SOLAR. El *mediodía local solar* de un observador ocurre cuando el centro del Sol se encuentra sobre el meridiano del observador, $\angle ZP_NT = 0°$.

La *hora aparente local* del observador en un momento cualquiera es $12^h - \angle ZP_NT$ (del triángulo astronómico) cuando el Sol se encuentra hacia el este, y $12^h + \angle ZP_NT$ cuando el Sol se encuentra hacia el oeste.

EJEMPLO 1. Encontrar la hora aparente local de Nueva York (lat. 40°42,0′ N) en el momento (*a*) de la mañana y (*b*) de la tarde en que la altitud del Sol es 34°32,0′ y su declinación es +12°54,0′.



En el triángulo astronómico, $TZ = 90° -$ altitud $= 55°28{,}0'$, $TP_N = 90° -$ declinación $= 77°6{,}0'$ y $ZP_N = 90° -$ latitud $= 49°18{,}0'$.

Según el ejemplo 1 del capítulo 22, $ZP_NT = 55°14{,}5' = 3^h40^m58^s$.

a) Por la mañana, la hora aparente local es

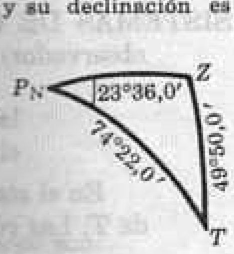
$$12^h - 3^h40^m58^s = 8^h19^m2^s = 8{:}19{:}2 \text{ AM}.$$

b) Por la tarde, la hora aparente local es

$$12^h + 3^h40^m58^s = 15^h40^m58^s = 3{:}40{:}58 \text{ PM}.$$

LATITUD DE UN OBSERVADOR. Cuando se conocen la altitud, la declinación y el ángulo de la hora (o acimut) de un cuerpo celeste, se puede calcular la latitud del observador mediante la resolución del triángulo astronómico.

EJEMPLO 2. Encontrar la latitud de un observador situado en el hemisferio norte si, cuando su hora aparente local es 10:25:36 AM, la altitud del Sol es 40°10,0′ y su declinación es +15°38,0′.



En el triángulo astronómico, $TZ = 49°50{,}0'$, $TP_N = 74°22{,}0'$, y $\angle ZP_NT = 12^h - 10^h25^m36^s = 1^h34^m24^s = 23°36{,}0'$. Este es un triángulo del caso V en el que se busca el lado ZP_N.

$$\operatorname{sen} P_NZT = \operatorname{sen} TP_N \csc TZ \operatorname{sen} ZP_NT$$

$$\tan \tfrac{1}{2}ZP_N = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(P_NZT + ZP_NT) \csc \tfrac{1}{2}(P_NZT - ZP_NT) \tan \tfrac{1}{2}(TP_N - TZ)$$

$TP_N = 74°22{,}0'$	l sen 9,98363
$TZ = 49°50{,}0'$	l csc 0,11681
$ZP_NT = 23°36{,}0'$	l sen 9,60244
$^*P_NZT = 149°42{,}0'$	l sen 9,70288

$\frac{1}{2}(P_NZT + TZ_NP) = 86°39{,}0'$	l sen 9,99926
$\frac{1}{2}(P_NZT - TZ_NP) = 63°\ 3{,}0'$	l csc 0,04998
$\frac{1}{2}(TP_N - TZ) = 12°16{,}0'$	l tan 9,33731
$\frac{1}{2}ZP_N = 13°41{,}1'$	l tan 9,38650
$ZP_N = 27°22{,}2'$	

*La figura evidencia que $\angle P_NZT = 30°18{,}0'$ cuando el observador está en el hemisferio sur, y que es $180° - 30°18{,}0' = 149°42{,}0'$ cuando el observador está en el hemisferio norte.

La latitud del observador es $90° - ZP_N = 62°37{,}8'$ N.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Encontrar el acimut del Sol y la hora aparente local de Washington, D.C. (lat. 38°55,0′ N) en el momento de la tarde en que la altitud del Sol es 25°40,0′ N y su declinación es −19°15,0′.

En el triángulo astronómico, $TZ = 90° -$ la altitud del Sol $= 64°20,0'$, $TP_N = 90° -$ la declinación del Sol $= 109°15,0'$ y $ZP_N = 90° -$ la latitud del observador $= 51°5,0'$.

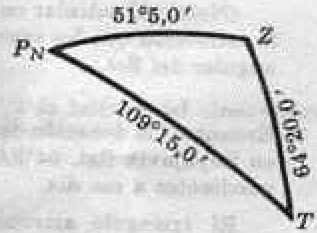
Solución normal.

$$(1)\quad \tan r = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-TZ)\operatorname{sen}(s-TP_N)\operatorname{sen}(s-ZP_N)}{\operatorname{sen} s}} \qquad s = \tfrac{1}{2}(TZ + TP_N + ZP_N)$$

$$(2)\quad \tan\tfrac{1}{2}ZP_NT = \frac{\tan r}{\operatorname{sen}(s-TZ)} \qquad\qquad (3)\quad \tan\tfrac{1}{2}P_NZT = \frac{\tan r}{\operatorname{sen}(s-TP_N)}$$

(1)

$TZ = 64°20,0'$	$s - TZ = 48°\ 0,0'$	l sen 9,87107
$TP_N = 109°15,0'$	$s - TP_N = 3°\ 5,0'$	l sen 8,73069
$ZP_N = 51°\ 5,0'$	$s - ZP_N = 61°15,0'$	l sen 9,94286
$2s = 224°40,0'$	$s = 112°20,0'$	l csc 0,03386
$s = 112°20,0'$		2 8,57848
	r	l tan 9,28924



(2)

l tan r	9,28924
l sen$(s - TZ)$	9,87107
l tan $\frac{1}{2}ZP_NT$	9,41817
$\frac{1}{2}ZP_NT$	14°40,6′
ZP_NT	29°21,2′
	$= 1^h57^m25^s$

(3)

l tan r	9,28924
l tan$(s - TP_N)$	8,73069
l tan $\frac{1}{2}P_NZT$	0,55855
$\frac{1}{2}P_NZT$	74°33,1′
P_NZT	149° 6,2′

Cuando el Sol está al oeste, el acimut es $360° - P_NZT = 210°53,8'$ y la hora aparente local es 1:57:25 PM.

Solución por el semisenoverso. $\quad s = \frac{1}{2}(TZ + TP_N + ZP_N)$

$$(1)\quad \operatorname{ssv} P_NZT = \operatorname{sen}(s - TZ)\operatorname{sen}(s - ZP_N)\csc TZ \csc ZP_N$$

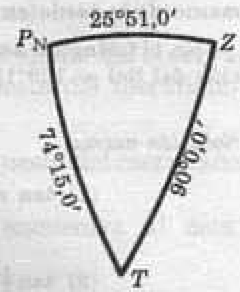
$$(2)\quad \operatorname{ssv} ZP_NT = \operatorname{sen}(s - TP_N)\operatorname{sen}(s - ZP_N)\csc TP_N \csc ZP_N$$

	(1)	(2)
$s - TZ = 48°\ 0,0'$	l sen 9,87107	
$s - TP_N = 3°\ 5,0'$		l sen 8,73069
$s - ZP_N = 61°15,0'$	l sen 9,94286	l sen 9,94286
$TZ = 64°20,0'$	l csc 0,04512	
$TP_N = 109°15,0'$		l csc 0,02499
$ZP_N = 51°\ 5,0'$	l csc 0,10899	l csc 0,10899
$P_NZT = 149°\ 6,2'$	l ssv 9,96804	
$ZP_NT = 29°21,3'$		l ssv 8,80753
$= 1^h57^m25^s$		

El acimut es 210°53,8′ y la hora aparente local es 1:57:25 PM, como antes.

2. Encontrar la hora aparente local de Reykjavik, Islandia, (lat. 64°9,0′ N) y el acimut del Sol en el momento del orto y del ocaso, cuando la declinación del Sol es $+15°45{,}0'$.

En el triángulo astronómico, $TP_N = 74°15{,}0'$, $ZP_N = 25°51{,}0'$, y como a la salida y a la puesta del Sol, el centro del astro se encuentra en el horizonte, $TZ = 90°$. Su triángulo polar $Z'P'T'$ es un triángulo esférico rectángulo en el que $\angle Z' = 105°45{,}0'$, $\angle T' = 154°9{,}0'$, $\angle P' = 90°$.



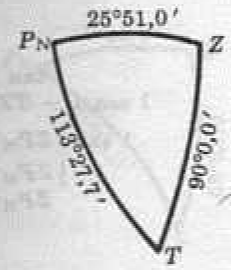
(1) $\cos p' = \cot T' \cot Z'$ (2) $\cos z' = \csc T' \cos Z'$

	(1)	(2)
$T' = 154°9{,}0'$	l cot 0,31471 (n)	l csc 0,36050
$Z' = 105°45{,}0'$	l cot 9,45029 (n)	l cos 9,43367 (n)
$p' = 54°24{,}1'$	l cos 9,76500	
$z' = 128°30{,}1'$		l cos 9,79417 (n)

Entonces, $\angle ZP_NT = 125°35{,}9' = 8^h22^m24^s$ y $\angle P_NZT = 51°29{,}9'$. A la salida del Sol, la hora aparente local $= 12^h - 8^h22^m24^s = $ 3:37:36 AM y el acimut del Sol es $51°29{,}9'$. A la puesta del Sol, la hora aparente local es 8:22:24 PM y el acimut es $360° - 51°29{,}9' = 308°30{,}1'$.

(Nota. Al calcular cualquier hora aparente local es necesario hacer una corrección para compensar la refracción que los rayos del Sol sufren en la atmósfera terrestre y para compensar, además, el radio angular del Sol.)

3. Encontrar la duración del día más corto del año (declinación del Sol $-23°27{,}7'$) en Reykjavik (lat. 64°9,0′ N) y el acimut del Sol en el orto y el ocaso correspondientes a ese día.



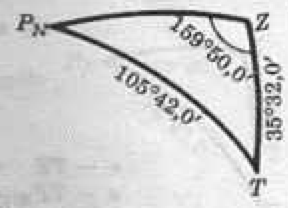
El triángulo astronómico es cuadrangular con $TP_N = 113°27{,}7'$, $ZP_N = 25°51{,}0'$ y $ZT = 90°$. Al resolver el triángulo polar $Z'P'T'$ en el que $T' = 154°9{,}0'$ y $Z' = 66°32{,}3'$ como en el problema 2, se encuentra que
$$p' = 153°36{,}7' \text{ y } z' = 24°3{,}5'.$$

Entonces, en el triángulo cuadrangular, $ZP_NT = 26°23{,}3' = 1^h45^m33^s$ y $P_NZT = 155°56{,}5'$.

La hora aparente local de la salida del Sol es $12^h - 1^h45^m33^s = $ 10:14:27 AM y la de la puesta del Sol es 1:45:33 PM.

La duración del día más corto es $2(1^h45^m33^s) = 3^h31^m6^s$.
El acimut del Sol es $155°56{,}5'$ a la salida, y $360° - 155°56{,}5' = 204°3{,}5'$ a la puesta.
(Nota. La duración del día más largo del año es $24^h - 3^h31^m6^s = 20^h28^m54^s$.)

4. Encontrar la latitud de un observador situado en el hemisferio norte cuando la altitud del Sol es $54°28{,}0'$, la declinación es $-15°42{,}0'$ y el acimut es $200°10{,}0'$.



En el triángulo astronómico, $TZ = 35°32{,}0'$, $TP_N = 105°42{,}0'$ y $P_NZT = 360° - 200°10{,}0' = 159°50{,}0'$ porque el Sol está hacia el oeste.

$$\operatorname{sen} TP_NZ = \operatorname{sen} P_NZT \operatorname{sen} TZ \csc TP_N$$

$$\tan \tfrac{1}{2}ZP_N = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(P_NZT + TP_NZ) \csc \tfrac{1}{2}(P_NZT - TP_NZ) \tan \tfrac{1}{2}(TP_N - TZ)$$

$TZ = 35°32{,}0'$	l sen 9,76431	$\tfrac{1}{2}(P_NZT + TP_NZ) = 85°55{,}4'$	l sen 9,99890
$TP_N = 105°42{,}0'$	l csc 0,01651	$\tfrac{1}{2}(P_NZT - TP_NZ) = 73°54{,}6'$	l csc 0,01736
$P_NZT = 159°50{,}0'$	l sen 9,53751	$\tfrac{1}{2}(P_NT - TZ) = 35°\ 5{,}0'$	l tan 9,84657
$TP_NZ = 12°\ 0{,}8'$	l sen 9,31833	$\tfrac{1}{2}ZP_N = 36°\ 5{,}9'$	l tan 9,86283
		$ZP_N = 72°11{,}8'$	

Entonces, la latitud es $90° - 72°11{,}8' = 17°48{,}2'$ N.

PROBLEMAS PROPUESTOS

5. Encontrar la hora aparente local y el acimut del Sol, por la mañana, en

 a) la latitud 39° N cuando la altitud del Sol es 22° y su declinación es $+20°$,
 b) la latitud 45°24′ N cuando la altitud del Sol es 24°12′ y su declinación es $+13°16'$,
 c) la latitud 25°14′ N cuando la altitud del Sol es 38°26′ y su declinación es $-18°16'$.

 Resp. *a*) 6:50 AM, 81°31′, *b*) 7:25 AM, 95°36′, *c*) 10:6 AM, 144°43′

6. Encontrar la hora aparente local y el acimut del Sol, por la tarde, en

 a) la latitud 40°42′ cuando la altitud del Sol es 28°26′ y su declinación es $-8°16'$,
 b) la latitud 42°45′ cuando la altitud del Sol es 38°36′ y su declinación es $+18°27'$.

 Resp. *a*) 2:42 PM, 227°3′, *b*) 3:36 PM, 259°15′

7. Encontrar la hora aparente local y la amplitud de la salida y la puesta del Sol correspondientes al día en que la declinación del Sol es $+20°32'$ en

 a) Acapulco (lat. 16°49′ N). *Resp.* 5:34 AM, 68°30′; 6:26 PM, 291°30′
 b) Fairbanks (lat. 64°51′ N). *Resp.* 2:28 AM, 34°23′; 9:32 PM, 325°37′
 c) Harrisburg (lat. 40°16′ N). *Resp.* 4:46 AM, 62°38′; 7:14 PM, 297°22′

8. Encontrar la duración del día más largo del año (dec. $+23°28'$) en

 a) Acapulco, *b*) Fairbanks. *Resp.* *a*) 13^h0^m, *b*) 21^h0^m

9. La declinación de una estrella es $+7°24'$, el ángulo de la hora es 48°51′ y la latitud del observador es 64°9′ N. Encontrar el acimut de la estrella. *Resp.* 234°36′

10. ¿Cuál es la latitud en el hemisferio norte si

 a) a las 8:56 AM la altitud del Sol es 36°18′ y su declinación es $+14°35'$?
 b) a las 3 PM la altitud del Sol es 24°42′ y su declinación es $-12°28'$?
 c) a las 9:15 AM la altitud del Sol es 35°23′ y su declinación es $-10°48'$?
 d) a las 2:10 PM la altitud del Sol es 23°26′ y su declinación es $+14°30'$?
 e) la puesta del Sol del día más largo del año ocurre a las 10 PM?

 Resp. *a*) 54°58′ N, *b*) 37°22′ N, *c*) 26°18′ N, *d*) 79°18′ N, *e*) 63°23′ N

INDICE

[redacted]

3 000102 227289

SCHAUM – MATEMÁTICAS/ESTADÍSTICA

- Algebra elemental
- Algebra elemental moderna
- Algebra lineal
- Algebra superior
- Análisis de Fourier
- Análisis numérico
- Análisis vectorial
- Cálculo diferencial e integral
- Cálculo superior
- Ecuaciones diferenciales
- Ecuaciones diferenciales modernas
- Geometría descriptiva
- Geometría diferencial
- Geometría plana
- Geometría proyectiva
- Manual de fórmulas matemáticas
- Matemáticas aplicadas a la ciencia y a la tecnología
- Matemáticas financieras
- Matemáticas finitas
- Matemáticas superiores para ingenieros y científicos
- Matrices
- Teoría de conjuntos y temas afines
- Teoría de grupos
- Topología
- Transformadas de Laplace
- Trigonometría
- Variables complejas
- Variables reales
- Estadística
- Estadística aplicada a la administración
- Probabilidad
- Probabilidad y estadística

schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-
schaum-mcgraw-

McGraw-Hill

968-451-176-0