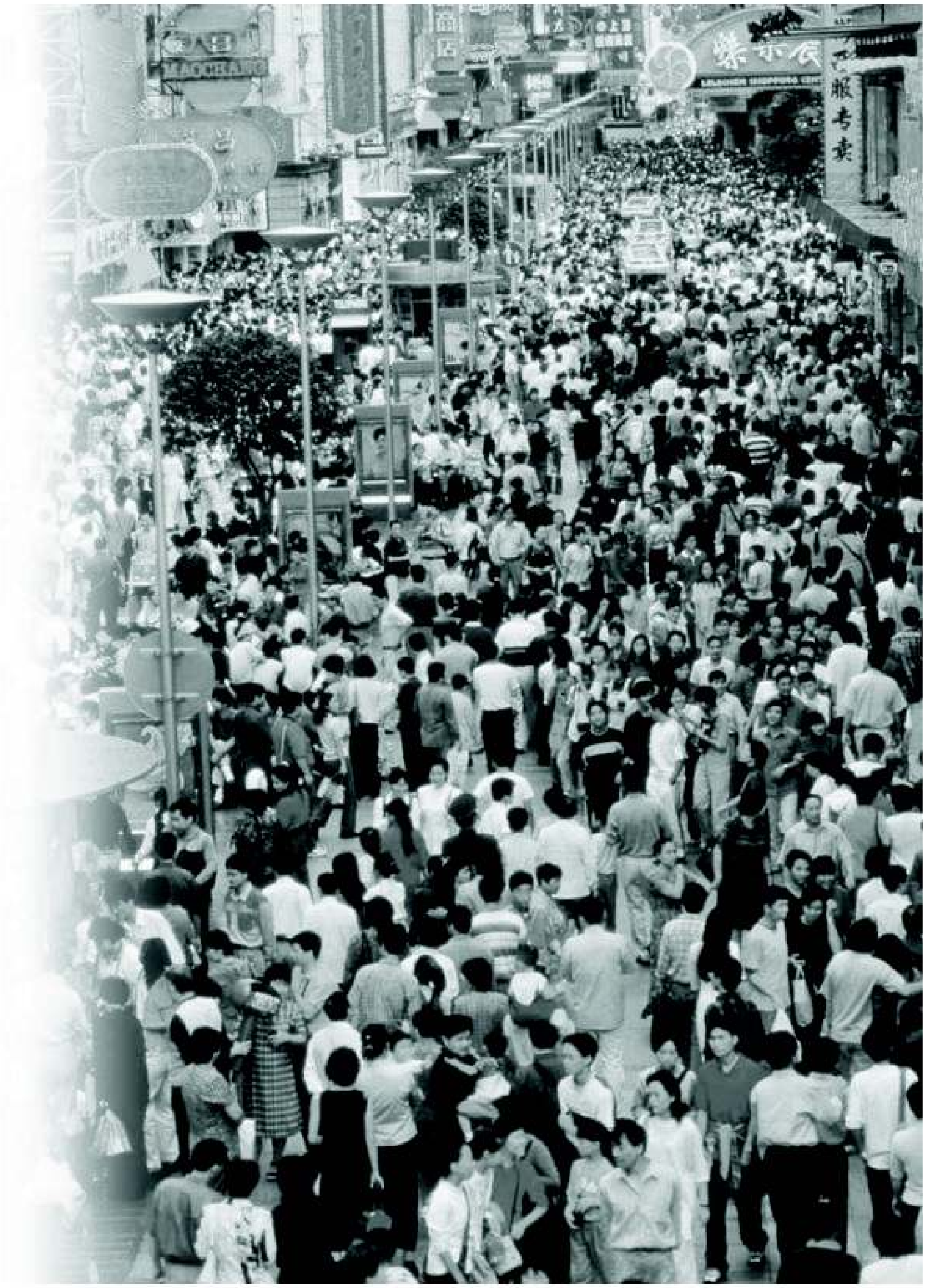
9 Funciones exponenciales y logarítmicas



OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Las funciones exponenciales y logarítmicas tienen una amplia variedad de aplicaciones, algunas de las cuales se analizarán a lo largo de este capítulo. Probablemente usted ha leído en artículos de periódicos y revistas que algunas cosas, como el gasto en servicios de salud, el uso de Internet y la población mundial, por ejemplo, crecen a un ritmo exponencial; cuando termine de estudiar este capítulo entenderá con claridad lo que esto significa.

También hablaremos de dos funciones especiales, la función exponencial natural y la función logarítmica natural. Muchos fenómenos naturales, como el fechado con carbono, el decaimiento radiactivo y el crecimiento de los ahorros invertidos en una cuenta en la que el interés se capitaliza de forma continua, pueden describirse por medio de funciones exponenciales naturales.

EL DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA y Asuntos Sociales de Estados Unidos, utiliza modelos matemáticos para hacer cálculos y proyecciones respecto de la población mundial. Hoy en día, la población mundial crece en alrededor de 1.13% anualmente. Puesto que el crecimiento poblacional puede determinarse como un porcentaje en lugar de hacerlo como una cantidad fija, se modela por medio de una función exponencial, en vez de hacerlo mediante una función lineal. En el ejercicio 79 de la página 646, investigaremos el efecto que tendrían diferentes tasas de crecimiento sobre la población mundial.

9.1 Funciones compuestas e inversas

1. Determinar funciones compuestas.
2. Entender las funciones uno a uno.
3. Determinar funciones inversas.
4. Determinar la composición de una función y su inversa.

La parte central de este capítulo son los logaritmos; sin embargo, antes de poder estudiarlos analizaremos las funciones compuestas, las funciones uno a uno y las funciones inversas. Empezaremos por las funciones compuestas.

1 Determinar funciones compuestas

A menudo nos enfrentamos con cantidades que son funciones de una variable; esas variables, a su vez, son funciones de otra variable. Por ejemplo, el costo de transmitir un mensaje publicitario durante un programa de televisión podría ser función de la calificación que le da la empresa Nielsen a ese programa; por su parte, la calificación que asigna Nielsen es una función del número de telespectadores que lo ven. Al final, el costo de la publicidad puede verse afectado por el número de telespectadores. Funciones como ésta se denominan *funciones compuestas*.

Consideremos otro ejemplo; suponga que 1 dólar estadounidense puede cambiarse por 1.20 dólares canadienses, y que 1 dólar canadiense puede cambiarse por 9.3 pesos mexicanos. A partir de esta información, podemos convertir 20 dólares estadounidenses a pesos mexicanos utilizando las funciones siguientes.

$$g(x) = 1.20x \text{ (dólares estadounidenses a dólares canadienses)}$$
$$f(x) = 9.3x \text{ (dólares canadienses a pesos mexicanos)}$$

Si hacemos $x = 20$, es decir, 20 dólares estadounidenses, entonces, mediante la función g podemos convertirlos en \$24 dólares canadienses de esta forma:

$$\begin{aligned} g(x) &= 1.20x \\ g(20) &= 1.20(20) = 24 \text{ dólares canadienses} \end{aligned}$$

A su vez, los 24 dólares canadienses se convierten en 223.20 pesos mexicanos mediante la función f:

$$\begin{aligned} f(x) &= 9.3x \\ f(24) &= 9.3(24) = 223.20 \text{ pesos mexicanos} \end{aligned}$$

¿Existe alguna forma de hacer la conversión sin realizar esta cadena de cálculos? La respuesta es sí. Un dólar estadounidense puede convertirse a pesos mexicanos sustituyendo la x de la función $f(x)$ por $1.20x$, que aparece en la función $g(x)$. Esto da una nueva función, h, con la que podemos convertir directamente dólares estadounidenses en pesos mexicanos.

$$g(x) = 1.20x \qquad f(x) = 9.3x$$
$$\begin{aligned} h(x) &= f[g(x)] \\ &= 9.3(1.20x) && \text{Sustituir } x \text{ por } g(x) \text{ en } f(x). \\ &= 11.16x \end{aligned}$$

Por lo tanto, por cada dólar estadounidense, x, obtenemos 11.16 pesos mexicanos. Si sustituimos \$20 por x, obtenemos 223.20 pesos, que es lo que esperábamos

$$\begin{aligned} h(x) &= 11.16x \\ h(20) &= 11.16(20) = 223.20 \end{aligned}$$

La función h, denominada **función compuesta de *f* con *g***, se denota con $(f \circ g)$ y se lee "f compuesta con g", o "fog". La **figura 9.1** muestra cómo la función compuesta, h, relaciona a las funciones f y g.

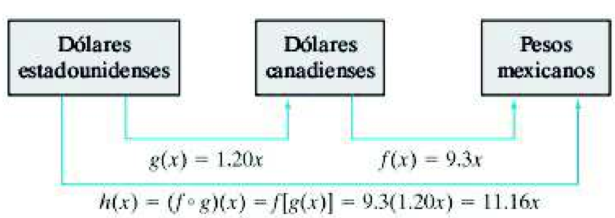


FIGURA 9.1

A continuación se da la definición de **función compuesta**.

Función compuesta

La **función compuesta** $(f \circ g)$ se define como

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Para determinar $(f \circ g)(x)$ cuando nos dan $f(x)$ y $g(x)$, en $f(x)$ sustituimos la x por $g(x)$, para obtener $f[g(x)]$.

EJEMPLO 1 ▸ Dada $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x - 5$, determine

a) $f(4)$ **b)** $f(a)$ **c)** $(f \circ g)(x)$ **d)** $(f \circ g)(3)$

Solución

a) Para determinar $f(4)$, sustituimos cada x de $f(x)$ por 4.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 3 \\ f(4) &= 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 16 - 8 + 3 = 11 \end{aligned}$$

b) Para determinar $f(a)$, sustituimos cada x de $f(x)$ por a.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 3 \\ f(a) &= a^2 - 2a + 3 \end{aligned}$$

c) $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$. Para determinar $(f \circ g)(x)$, sustituimos cada x de $f(x)$ por $g(x)$, es decir, por $x - 5$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2x + 3 \\ f[g(x)] &= [g(x)]^2 - 2[g(x)] + 3 \end{aligned}$$

Ya que $g(x) = x - 5$, sustituimos como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= (x - 5)^2 - 2(x - 5) + 3 \\ &= (x - 5)(x - 5) - 2x + 10 + 3 \\ &= x^2 - 10x + 25 - 2x + 13 \\ &= x^2 - 12x + 38 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función compuesta de f con g es $x^2 - 12x + 38$.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = x^2 - 12x + 38$$

d) Para determinar $(f \circ g)(3)$, sustituimos x en $(f \circ g)(x)$ por 3.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= x^2 - 12x + 38 \\ (f \circ g)(3) &= 3^2 - 12(3) + 38 = 11 \end{aligned}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 9**

¿Cómo cree que determinaríamos $(g \circ f)(x)$ o $g[f(x)]$? Si respondió: "Sustituyendo cada x de $g(x)$ por $f(x)$", tiene razón. A partir de los valores que se dieron para $f(x)$ y $g(x)$ en el ejemplo 1, determinamos $(g \circ f)(x)$ como sigue,

$$g(x) = x - 5, \qquad f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$\begin{aligned} g[f(x)] &= f(x) - 5 \\ g[f(x)] &= (x^2 - 2x + 3) - 5 \\ &= x^2 - 2x + 3 - 5 \\ &= x^2 - 2x - 2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la función compuesta de g con f es $x^2 - 2x - 2$.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = x^2 - 2x - 2$$

Al comparar los dos resultados anteriores, vemos que en este caso $f[g(x)] \neq g[f(x)]$.

EJEMPLO 2 Dadas $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$, determine

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$

Solución

a) Para determinar $(f \circ g)(x)$, sustituimos cada x de $f(x)$ por $g(x)$, que es $\sqrt{x-1}$. En este caso, tenga en cuenta que $\sqrt{x-1}$ es un número real solamente cuando $x \geq 1$.

$$f(x) = x^2 + 4$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (\sqrt{x-1})^2 + 4 = x - 1 + 4 = x + 3, x \geq 1$$

Como los valores de $x < 1$ no están en el dominio de $g(x)$, tampoco pertenecen al dominio de $(f \circ g)(x)$.

b) Para determinar $(g \circ f)(x)$, sustituimos cada x de $g(x)$ por $f(x)$, que es $x^2 + 4$.

$$g(x) = \sqrt{x - 1}$$
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{(x^2+4) - 1} = \sqrt{x^2 + 3}$$

Ahora resuelva el ejercicio 19

EJEMPLO 3 Dadas $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x + 7$, determine

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(f \circ g)(2)$ **c)** $(g \circ f)(x)$ **d)** $(g \circ f)(2)$

Solución

a)
$$f(x) = x - 3$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (x + 7) - 3 = x + 4$$

b) Determinamos $(f \circ g)(2)$ sustituyendo cada x de $(f \circ g)(x)$ por 2.

$$(f \circ g)(x) = x + 4$$
$$(f \circ g)(2) = 2 + 4 = 6$$

c)
$$g(x) = x + 7$$
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = (x - 3) + 7 = x + 4$$

d) Como $(g \circ f)(x) = x + 4$, $(g \circ f)(2) = 2 + 4 = 6$.

Ahora resuelva el ejercicio 11

En general, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$ como vimos al final del ejemplo 1. En el ejemplo 3, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$, pero esto se debió a las funciones específicas que se utilizaron.

Sugerencia útil

No confunda determinar el producto de dos funciones con determinar la función compuesta.

Producto de las funciones f y g: $(fg)(x)$ o $(f \cdot g)(x)$

Función compuesta de f con g: $(f \circ g)(x)$

Para indicar que se deben multiplicar las funciones f y g, se usa el signo de multiplicación (un punto) entre f y g. Para indicar que se debe determinar la función compuesta de f con g, se utiliza el signo de función compuesta (un pequeño círculo *vacío*).

2 Entender las funciones uno a uno

Considere estos dos conjuntos de pares ordenados:

$$A = \{(1, 2), (3, 5), (4, 6), (-2, 1)\}$$
$$B = \{(1, 2), (3, 5), (4, 6), (-2, 5)\}$$

Ambos conjuntos de pares ordenados, A y B, son funciones, ya que a cada valor de x le corresponde un único valor de y. En el conjunto A, a cada valor de y también le corresponde un único valor de x, como se muestra en la **figura 9.2**. En el conjunto B, no todos los valores de y tienen un único valor de x. En los pares ordenados $(3, 5)$ y $(-2, 5)$, el valor de y, 5, corresponde a dos valores de x, como se muestra en la **figura 9.3**.

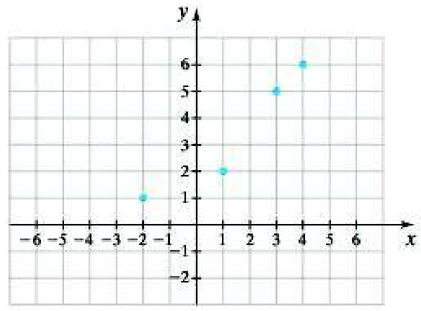


FIGURA 9.2

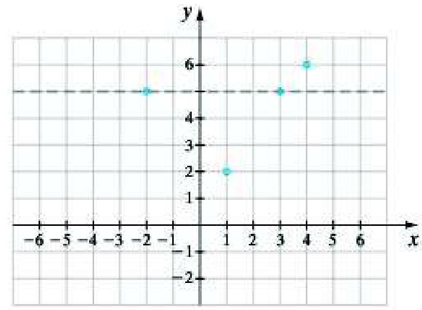


FIGURA 9.3

El conjunto de pares ordenados A es un ejemplo de una *función uno a uno* (o *inyectiva*). El conjunto de pares ordenados B no es una función uno a uno. En una **función uno a uno**, a cada valor del rango le corresponde un único valor del dominio. Así, si y es una función uno a uno de x, además de que a cada valor de x le corresponde un único valor de y (por la definición de función), también se cumple que a cada valor de y le corresponde un único valor de x.

Función uno a uno (inyectiva)

Una función es una **función uno a uno** si a cada valor del rango le corresponde exactamente un valor del dominio.

Para que una función sea uno a uno, su gráfica debe pasar no sólo la **prueba de la recta vertical** (con la cual se comprueba que es una función), sino también la **prueba de la recta horizontal** (que comprueba el criterio uno a uno).

Considere la función $f(x) = x^2$ (vea la **figura 9.4**). Observe que es una función, ya que su gráfica pasa la prueba de la recta vertical. Para cada valor de x existe un único valor de y. Ahora bien, ¿a cada valor de y también le corresponde un único valor de x? La respuesta es no, como se ilustra en la **figura 9.5**. Observe que para el valor de y que se indica existen dos valores de x, a saber, x_1 y x_2. Si limitáramos el dominio de $f(x) = x^2$ a valores de x mayores o iguales a 0, entonces a cada valor de x le correspondería un único valor de y, y a cada valor de y también le correspondería un único valor de x (vea la **figura 9.6**); por lo tanto, ésta sí sería una función uno a uno.

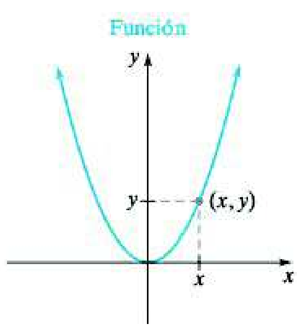


FIGURA 9.4

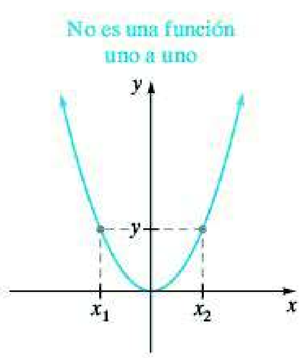


FIGURA 9.5

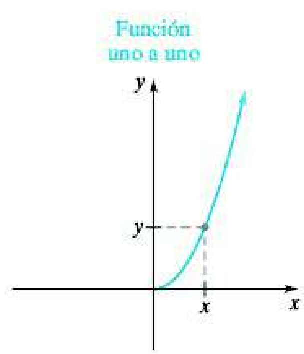


FIGURA 9.6

En la **figura 9.7**, las gráficas de (a) a (e) son funciones, ya que todas pasan la prueba de la recta vertical. Sin embargo, sólo las gráficas (a), (d) y (e) son funciones uno a uno, puesto que también pasan la prueba de la recta horizontal. La gráfica (f) no es una función y, por lo tanto, no puede ser una función uno a uno aunque pase la prueba de la recta horizontal.

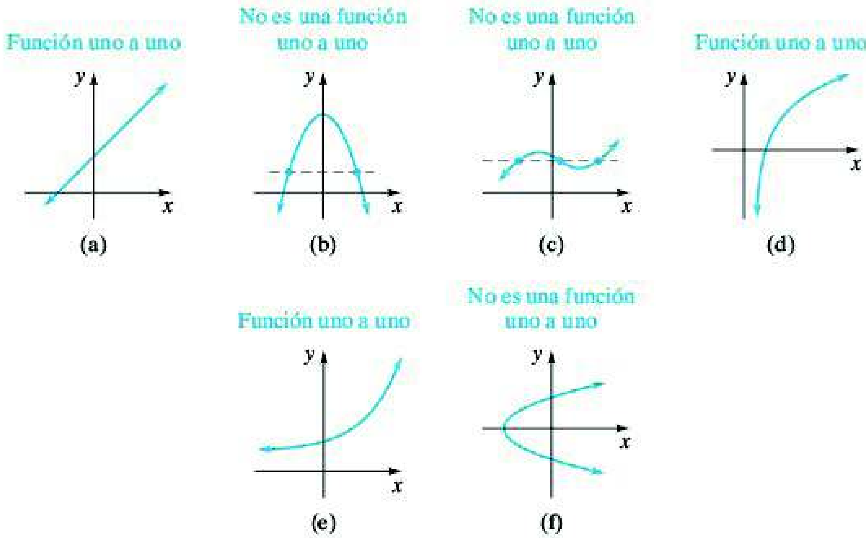


FIGURA 9.7

3 Determinar funciones inversas

Ahora que sabemos lo que son las funciones uno a uno, podemos hablar de las funciones inversas. **Sólo las funciones uno a uno pueden tener funciones inversas.** Si una función es uno a uno, su **función inversa** puede obtenerse intercambiando la primera coordenada con la segunda en cada par ordenado de la función. Así, cada par ordenado (x, y) de la función tendrá el par ordenado (y, x) en la función inversa. Por ejemplo,

Función:	$\{(1, 4), (2, 0), (3, 7), (-2, 1), (-1, -5)\}$
Función inversa:	$\{(4, 1), (0, 2), (7, 3), (1, -2), (-5, -1)\}$

Observe que el dominio de la función se convierte en el rango de la función inversa, y el rango de la función se transforma en el dominio de la función inversa.

Si graficamos los puntos de la función y los puntos de la función inversa (**figura 9.8**), vemos que éstos son simétricos respecto de la recta $y = x$.

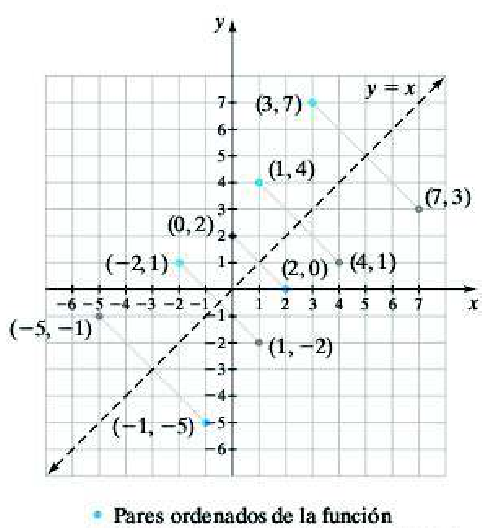


FIGURA 9.8

La notación $f^{-1}(x)$ representa la función inversa de la función $f(x)$. En la notación, el -1 *no* es un exponente; por lo tanto, $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$.

Función inversa

Si $f(x)$ es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (x, y), su **función inversa**, $f^{-1}(x)$, es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (y, x).

Cuando se grafican la función $f(x)$ y su función inversa $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes, $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son *simétricas respecto de la recta* $y = x$, como se muestra en la **figura 9.8** de la página 596.

Si una función uno a uno se da como una ecuación, su función inversa puede determinarse por medio del procedimiento siguiente.

Para determinar la función inversa de una función uno a uno

1. Reemplace $f(x)$ con y.
2. Intercambie las dos variables, x y y.
3. Despeje y en la ecuación.
4. Reemplace y con $f^{-1}(x)$ (esto proporciona la función inversa).

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 4

a) Determine la función inversa de $f(x) = 4x + 2$.

b) Grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

Solución **a)** Ésta es una función uno a uno; por lo tanto, seguiremos el procedimiento de cuatro pasos que se acaba de explicar.

$$f(x) = 4x + 2 \quad \text{Función original}$$

Paso 1 $$y = 4x + 2 \quad \text{Reemplazar } f(x) \text{ con } y.$$

Paso 2 $$x = 4y + 2 \quad \text{Intercambiar } x \text{ y } y.$$

Paso 3 $$x - 2 = 4y \quad \text{Despejar } y.$$

$$\frac{x-2}{4} = y$$

$$\text{o} \qquad y = \frac{x-2}{4}$$

Paso 4 $$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4} \quad \text{Reemplazar } y \text{ con } f^{-1}(x).$$

b) A continuación se muestran tablas de valores para $f(x)$ y $f^{-1}(x)$; las gráficas correspondientes se ilustran en la **figura 9.9**.

x	$y = f(x)$
0	2
1	6

x	$y = f^{-1}(x)$
2	0
6	1

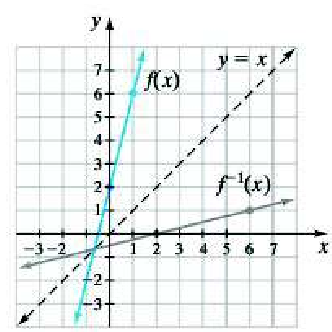


FIGURA 9.9

Observe la simetría de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ respecto de la recta $y = x$, y note que tanto el dominio como el rango de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$ son el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

Ahora resuelva el ejercicio 67

Cuando resolvimos ecuaciones con raíces cúbicas en el capítulo 7, elevamos al cubo ambos lados de la ecuación. Para resolver ecuaciones cúbicas elevamos cada lado de la ecuación a la potencia un tercio, que es equivalente a sacar la raíz cúbica de cada lado de la ecuación. Recuerde que, como se mencionó en ese capítulo, $\sqrt[3]{a^3} = a$ para cualquier número real a.

EJEMPLO 5

a) Determine la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.
b) Grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

Solución **a)** Ésta es una función uno a uno; por lo tanto, seguiremos el procedimiento de cuatro pasos para determinar su inversa.

$f(x) = x^3 + 2$ — *Función original*

Paso 1 — $y = x^3 + 2$ — *Reemplazar f(x) con y.*

Paso 2 — $x = y^3 + 2$ — *Intercambiar x y y.*

Paso 3 — $x - 2 = y^3$ — *Despejar y.*

$\sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{y^3}$ — *Sacar raíz cúbica de ambos lados.*

$\sqrt[3]{x-2} = y$

o $y = \sqrt[3]{x-2}$

Paso 4 — $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ — *Reemplazar y con $f^{-1}(x)$.*

b) A continuación se muestran las tablas de valores para $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

x	$y = f(x)$
−2	−6
−1	1
0	2
1	3
2	10

x	$y = f^{-1}(x)$
−6	−2
1	−1
2	0
3	1
10	2

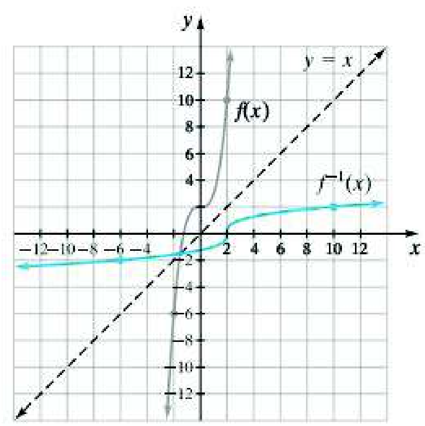


FIGURA 9.10

En la **figura 9.10**, se muestran las gráficas de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$. Observe que para cada punto (a, b) en la gráfica de $f(x)$, el punto (b, a) aparece en la gráfica de $f^{-1}(x)$. Por ejemplo, los puntos $(2, 10)$ y $(-2, -6)$, marcados en gris aparecen en la gráfica $f(x)$, y los puntos $(10, 2)$ y $(-6, -2)$, resaltados en color rojo, aparecen en la gráfica $f^{-1}(x)$.

Ahora resuelva el ejercicio 61

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

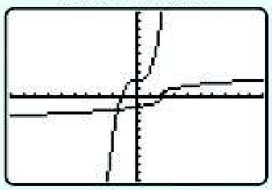
En el ejemplo 5 nos dieron $f(x) = x^3 + 2$, y determinamos que $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$. Las gráficas de estas dos funciones son simétricas respecto de la recta $y = x$, aunque esto podría no resultar evidente en una calculadora graficadora, tal como se ilustra en la **figura 9.11** donde se muestran ambas gráficas en la ventana estándar de una calculadora.

Esto se debe a que en las calculadoras el eje horizontal es mayor que el eje vertical, y ambos ejes tienen 10 marcas de división positivas y 10 negativas; en consecuencia, las gráficas aparecen distorsionadas. Sin embargo, muchas calculadoras tienen una característica para presentar las gráficas en una "ventana cuadrada". Cuando se utiliza esta característica, la ventana sigue siendo

(*continúa en la página siguiente*)

rectangular, pero la distancia entre las marcas de división es más uniforme. Para activar esta característica en una calculadora TI-84 Plus, presione $\boxed{\text{ZOOM}}$ y luego seleccione la opción 5, ZSquare. La **figura 9.12** muestra las gráficas después de que se seleccionó esta opción. Una tercera ilustración de las gráficas puede obtenerse mediante $\boxed{\text{ZOOM}}$, opción 4, ZDecimal; esta opción hace que el eje x despliegue el intervalo -4.7 a 4.7, y el eje y el intervalo -3.1 a 3.1, como se muestra en la **figura 9.13**.

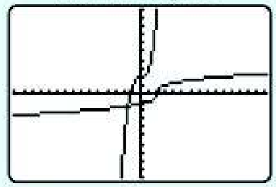
Ventana estándar



$-10, 10, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 9.11

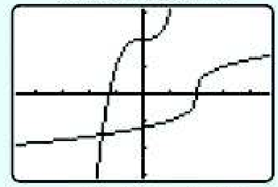
Ventana ZSquare



$\approx -15.2, \approx 15.2, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 9.12

Ventana ZDecimal



$-4.7, 4.7, 1, -3.1, 3.1, 1$

FIGURA 9.13

4 Determinar la composición de una función y su inversa

Si dos funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son inversas una respecto de la otra, entonces $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

EJEMPLO 6 En el ejemplo 4 determinamos que para $f(x) = 4x + 2$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{4}$. Demuestre que

a) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ **b)** $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Solución

a) Para determinar $(f \circ f^{-1})(x)$, sustituya cada x de $f(x)$ por $f^{-1}(x)$.

$$f(x) = 4x + 2$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = 4\left(\frac{x-2}{4}\right) + 2$$

$$= x - 2 + 2 = x$$

b) Para determinar $(f^{-1} \circ f)(x)$, sustituya cada x de $f^{-1}(x)$ por $f(x)$.

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{4x + 2 - 2}{4}$$

$$= \frac{4x}{4} = x$$

Por lo tanto, $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Ahora resuelva el ejercicio 77

EJEMPLO 7 En el ejemplo 5 determinamos que $f(x) = x^3 + 2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$ son funciones inversas. Demuestre que

a) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ **b)** $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Solución

a) Para determinar $(f \circ f^{-1})(x)$, sustituya cada x de $f(x)$ por $f^{-1}(x)$.

$$f(x) = x^3 + 2$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2$$

$$= x - 2 + 2 = x$$

b) Para determinar $(f^{-1} \circ f)(x)$, sustituya cada x de $f^{-1}(x)$ por $f(x)$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{x-2} \\ (f^{-1} \circ f)(x) &= \sqrt[3]{(x^3+2)-2} \\ &= \sqrt[3]{x^3} = x \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 79

Como una función y su inversa "se anulan" entre ellas, la función compuesta de una función con su inversa tiene como resultado el valor dado en el dominio. Por ejemplo, para cualquier función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$, $(f^{-1} \circ f)(3) = 3$ y $(f \circ f^{-1})\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

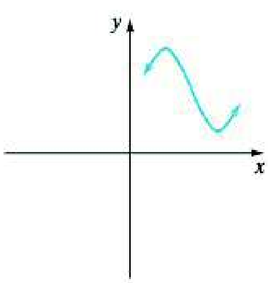
1. Explique cómo determinar $(f \circ g)(x)$ cuando le dan $f(x)$ y $g(x)$.
2. Explique cómo determinar $(g \circ f)(x)$ cuando le dan $f(x)$ y $g(x)$.
3. **a)** ¿Qué son las funciones uno a uno?
   b) Explique cómo se puede determinar si una función es una función uno a uno.
4. ¿Todas las funciones tienen funciones inversas? Si no es así, ¿cuáles funciones sí tienen función inversa?
5. Considere el conjunto de pares ordenados $\{(3, 5), (4, 2), (-1, 3), (0, -2)\}$.
   a) ¿Este conjunto de pares ordenados es una función? Explique.
   b) ¿Esta función tiene una inversa? Explique.
   c) Si esta función tiene inversa, indíquela. Explique cómo determinó su respuesta.
6. Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas.
   a) ¿A qué es igual $(f \circ g)(x)$?
   b) ¿A qué es igual $(g \circ f)(x)$?
7. ¿Qué relación existe entre el dominio y el rango de una función, y el dominio y el rango de su función inversa?
8. ¿Cuál es el valor de $(f \circ f^{-1})(6)$? Explique.

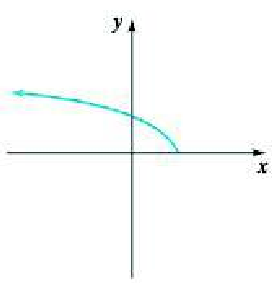
Práctica de habilidades

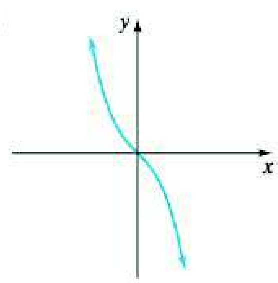
Para cada par de funciones, determine **a)** $(f \circ g)(x)$, **b)** $(f \circ g)(4)$, **c)** $(g \circ f)(x)$ *y* **d)** $(g \circ f)(4)$.

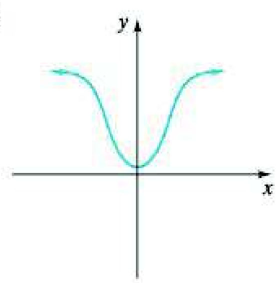
9. $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = x + 2$
10. $f(x) = x^2 - 3,\ g(x) = x + 6$
11. $f(x) = x + 3,\ g(x) = x^2 + x - 4$
12. $f(x) = x + 2,\ g(x) = x^2 + 4x - 2$
13. $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = 2x + 3$
14. $f(x) = \frac{2}{x},\ g(x) = x^2 + 1$
15. $f(x) = 3x + 1,\ g(x) = \frac{3}{x}$
16. $f(x) = x^2 - 5,\ g(x) = \frac{4}{x}$
17. $f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = x^2 + 5$
18. $f(x) = x^2 - 4,\ g(x) = x^2 + 3$
19. $f(x) = x - 4,\ g(x) = \sqrt{x+5},\ x \geq -5$
20. $f(x) = \sqrt{x+6},\ x \geq -6,\ g(x) = x + 7$

En los ejercicios 21 a 42, determine si cada función es uno a uno.

21.


22.


23.


24.


25. $\{(2, 4), (3, -7), (5, 3), (-6, 0)\}$

26. $\{(-4, 2), (2, 3), (4, 1), (0, 4)\}$

27. $\{(-4, 2), (5, 3), (0, 2), (4, 8)\}$

28. $\{(0, 5), (1, 4), (-3, 5), (4, 2)\}$

29. $y = 2x + 5$

30. $y = 3x - 8$

31. $y = x^2 - 1$

32. $y = -x^2 + 3$

33. $y = x^2 - 2x + 5$

34. $y = x^2 - 2x + 6, x \geq 1$

35. $y = x^2 - 9, x \geq 0$

36. $y = x^2 - 9, x \leq 0$

37. $y = \sqrt{x}$

38. $y = -\sqrt{x}$

39. $y = |x|$

40. $y = -|x|$

41. $y = \sqrt[3]{x}$

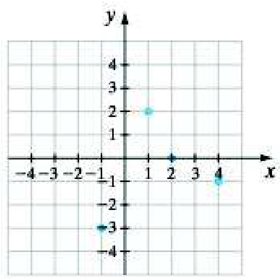
42. $y = x^3$

En los ejercicios del 43 al 48, determine el dominio y el rango de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$.

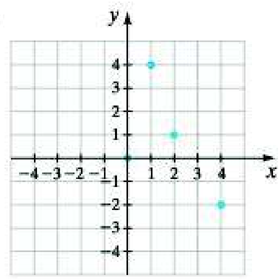
43. $\{(4, 0), (8, 9), (2, 7), (-1, 6), (-2, 4)\}$

44. $\left\{(-2, -3), (-4, 0), (5, 3), (6, 2), \left(2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

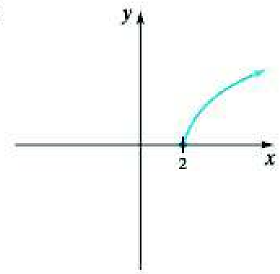
45.



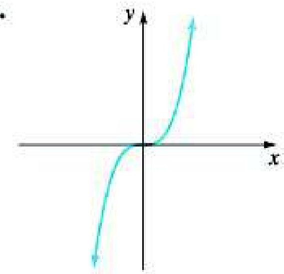
46.



47.



48.



Para cada función, **a)** *determine si es uno a uno;* **b)** *si es uno a uno, determine su función inversa.*

49. $f(x) = x - 2$

50. $g(x) = x + 5$

51. $h(x) = 4x$

52. $k(x) = 2x - 7$

53. $p(x) = 3x^2$

54. $r(x) = |x|$

55. $t(x) = x^2 + 3$

56. $m(x) = -x^2 + x + 8$

57. $g(x) = \dfrac{1}{x}$

58. $h(x) = \dfrac{5}{x}$

59. $f(x) = x^2 + 10$

60. $g(x) = x^3 + 9$

61. $g(x) = x^3 - 6$

62. $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

63. $g(x) = \sqrt{x + 2}, x \geq -2$

64. $f(x) = x^2 - 3, x \geq 0$

65. $h(x) = x^2 - 4, x \geq 0$

66. $h(x) = |x|$

Para cada función uno a uno, **a)** *determine $f^{-1}(x)$, y* **b)** *grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.*

67. $f(x) = 2x + 8$

68. $f(x) = -3x + 6$

69. $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

70. $f(x) = -\sqrt{x}, x \geq 0$

71. $f(x) = \sqrt{x - 1}, x \geq 1$

72. $f(x) = \sqrt{x + 4}, x \geq -4$

73. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

74. $f(x) = \sqrt[3]{x + 3}$

75. $f(x) = \dfrac{1}{x}, x > 0$

76. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Para cada par de funciones inversas, demuestre que $(f \circ f^{-1})(x) = x$, y que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

77. $f(x) = x - 8, f^{-1}(x) = x + 8$

78. $f(x) = 7x + 3, f^{-1}(x) = \dfrac{x - 3}{7}$

79. $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3, f^{-1}(x) = 2x - 6$

80. $f(x) = -\dfrac{1}{3}x + 2, f^{-1}(x) = -3x + 6$

81. $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}, f^{-1}(x) = x^3 + 2$

82. $f(x) = \sqrt[3]{x + 9}, f^{-1}(x) = x^3 - 9$

83. $f(x) = \dfrac{3}{x}, f^{-1}(x) = \dfrac{3}{x}$

84. $f(x) = \sqrt{x + 5}, f^{-1}(x) = x^2 - 5, x \geq 0$

Resolución de problemas

85. ¿$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para todos los valores de x? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.

86. Considere las funciones $f(x) = \sqrt{x + 5}, x \geq -5$ y $g(x) = x^2 - 5, x \geq 0$.

a) Demuestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ para $x \geq 0$.

b) Explique por qué es necesario estipular que $x \geq 0$ para que la parte **a)** sea verdadera.

87. Considere las funciones $f(x) = x^3 + 2$ y $g(x) = \sqrt[3]{x - 2}$.

a) Demuestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

b) ¿Cuáles son los dominios de $f(x)$, $g(x)$, $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$? Explique.

88. Para la función $f(x) = x^3$, $f(2) = 2^3 = 8$. Explique por qué $f^{-1}(8) = 2$.

89. Para la función $f(x) = x^4, x > 0$, $f(2) = 16$. Explique por qué $f^{-1}(16) = 2$.

90. La función $f(x) = 12x$ convierte pies, x, en pulgadas. Determine la función inversa para convertir pulgadas en pies. ¿Qué representan x y $f^{-1}(x)$ en la función inversa?

91. La función $f(x) = 3x$ convierte yardas, x, en pies. Determine la función inversa para convertir pies en yardas. ¿Qué representan x y $f^{-1}(x)$ en la función inversa?

92. La función $f(x) = \frac{22}{15}x$ convierte millas por hora, x, en pies por segundo. Determine la función inversa para convertir pies por segundo en millas por hora.

93. La función $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ convierte grados Fahrenheit, x, en grados Celsius. Determine la función inversa para convertir grados Celsius en grados Fahrenheit.

94. **a)** ¿La función $f(x) = |x|$ tiene inversa? Explique.

b) Si el dominio está limitado a $x \geq 0$, ¿la función tiene inversa? Explique.

c) Determine la función inversa de $f(x) = |x|, x \geq 0$.

Composición de funciones *En los ejercicios del 95 al 98, se dan las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Determine la composición $(f \circ g)(x)$. Para la función composición, ¿qué representa x y qué representa $(f \circ g)(x)$?*

95. $f(x) = 16x$ convierte libras, x, en onzas, $g(x) = 28.35x$ convierte onzas, x, en gramos.

96. $f(x) = 2000x$ convierte toneladas x, a libras, $g(x) = 16x$ convierte libras, x, a onzas.

97. $f(x) = 3x$ convierte yardas, x, a pies, $g(x) = 0.305x$ convierte pies, x, a metros.

98. $f(x) = 1760x$ convierte millas, x, a yardas, $g(x) = 0.915x$ convierte yardas, x, a metros.

Utilice su calculadora graficadora para determinar si las funciones siguientes son inversas.

99. $f(x) = 3x - 4, g(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$

100. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, g(x) = \sqrt{4 - 2x}$

101. $f(x) = x^3 - 12, g(x) = \sqrt[3]{x + 12}$

102. $f(x) = x^5 + 5, g(x) = \sqrt[5]{x - 5}$

Retos

103. **Área** Cuando se arroja una piedra a un estanque, el círculo (onda) que se forma en el agua se expande conforme pasa el tiempo. El área del círculo en expansión puede determinarse mediante la fórmula $A = \pi r^2$. El radio del círculo, r, en pies, es una función del tiempo, t, en segundos. Suponga que la función es $r(t) = 2t$.

a) Determine el radio del círculo 3 segundos después de arrojar la piedra.

b) Determine el área del círculo 3 segundos después de arrojar la piedra.

c) Exprese el área como una función del tiempo, determinando $A \circ r$.

d) Mediante la función que encontró en la parte **c)**, determine el área del círculo 3 segundos después de arrojar la piedra.

e) ¿Las respuestas a las partes **b)** y **c)** coinciden? Si no es así, explique por qué.

104. Área de la superficie El área de la superficie, S, de un globo esférico de radio r, en pulgadas, se determina con $S(r) = 4\pi r^2$. Si el globo se está inflando con una máquina a una velocidad constante, el radio del globo es una función del tiempo. Suponga que esta función es $r(t) = 1.2t$, donde t son segundos.

a) Determine el radio del globo al cabo de 2 segundos.

b) Determine el área de la superficie a los 2 segundos.

c) Exprese el área de la superficie como una función del tiempo, determinando $S \circ r$.

d) Mediante la función que determinó en la parte **b)**, calcule el área de la superficie al cabo de 2 segundos.

e) ¿Las respuestas a las partes **b)** y **d)** coinciden? Si no es así, explique por qué.

Actividad en grupo

Analicen y respondan en grupo el ejercicio 105.

105. Consideren la función $f(x) = 2^x$. Éste es un ejemplo de una *función exponencial*, de la cual hablaremos en la sección siguiente.

a) Grafiquen esta función sustituyendo valores para x y determinando los valores correspondientes de $f(x)$.

b) ¿Ustedes creen que esta función tenga inversa? Expliquen su respuesta.

c) Con la gráfica obtenida en la parte **a)**, tracen la función inversa, $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

d) Expliquen cómo obtuvieron la gráfica de $f^{-1}(x)$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **106.** Divide $\left|\frac{-9}{4}\right| \div \left|\frac{-4}{9}\right|$.

[3.5] **107.** Determine, en la forma general, la ecuación de una recta que pase por $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ y sea paralela a la gráfica de $2x + 3y - 9 = 0$.

[6.3] **108.** Simplifique $\dfrac{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{6}}$.

[6.4] **109.** Despeje p en la fórmula $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ para p.

[8.1] **110.** Complete el cuadrado para resolver la ecuación $x^2 + 2x - 10 = 0$.

9.2 Funciones exponenciales

1 Graficar funciones exponenciales.

2 Resolver aplicaciones de funciones exponenciales.

1 Graficar funciones exponenciales

Con frecuencia leemos que ciertas cosas crecen exponencialmente. Por ejemplo, es probable que alguna vez haya leído que la población mundial tiene un crecimiento exponencial, o que el uso del correo electrónico está creciendo de manera exponencial. ¿Qué quiere decir esto? La gráfica de la **figura 9.14** muestra el crecimiento de la población mundial; la gráfica de la **figura 9.15** ilustra las ventas de dispositivos manuales "inteligentes". Como indican sus curvas, ambas gráficas tienen la misma forma general, y las dos son funciones exponenciales que crecen con rapidez.

En la función cuadrática $f(x) = x^2$, la variable es la base y el exponente es constante. En la función $f(x) = 2^x$, la constante es la base y el exponente es variable. La función $f(x) = 2^x$ es un ejemplo de una *función exponencial*, cuya definición damos en la página 604.

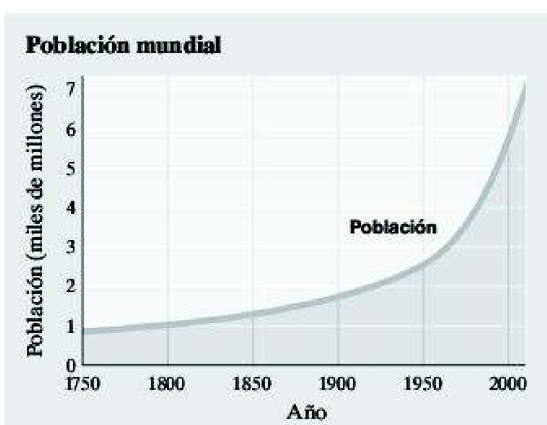
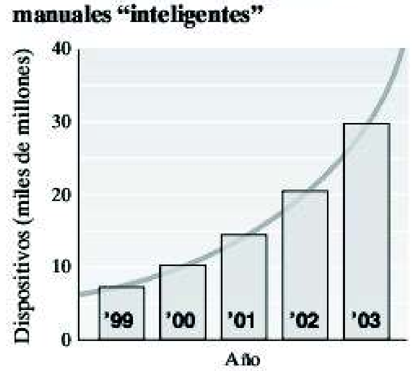


FIGURA 9.14

Ventas mundiales de dispositivos manuales "inteligentes"



Fuente: International Data Corp.; MSN Money Central; CSI Inc.

FIGURA 9.15

Función exponencial

Para cualquier número real $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$f(x) = a^x$$

es una **función exponencial**.

Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es un número real positivo distinto de 1. Observe que la variable está en el exponente.

Ejemplos de funciones exponenciales

$$f(x) = 2^x, \qquad g(x) = 5^x, \qquad h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Como $y = f(x)$, las funciones de la forma $y = a^x$ también son funciones exponenciales. Las funciones exponenciales pueden graficarse seleccionando valores para x, determinando los correspondientes valores de y [o $f(x)$], y trazando los puntos.

Antes de graficar funciones exponenciales, analicemos algunas de sus características.

Gráficas de funciones exponenciales

Para toda función exponencial de la forma $y = a^x$ o $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

1. El dominio de la función es $(-\infty, \infty)$.
2. El rango de la función es $(0, \infty)$.
3. La gráfica pasa por los puntos $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$ y $(1, a)$.

En casi todos los casos puede trazarse una razonablemente buena gráfica exponencial a partir de los tres puntos listados en el paso 3. Cuando $a > 1$, vea el ejemplo 1, la gráfica se vuelve casi horizontal a la izquierda de $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$ y casi vertical a la derecha de $(1, a)$. Cuando $0 < a < 1$, vea el ejemplo 2, la gráfica es casi horizontal a la derecha de $(1, a)$ y casi vertical a la izquierda de $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$.

EJEMPLO 1 ▸ Grafique la función exponencial $y = 2^x$; determine el dominio y el rango de la función.

Solución La función es de la forma $y = a^x$, donde $a = 2$. Primero construimos una tabla de valores; en ella, los tres puntos listados en el paso 3 se muestran en rojo.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

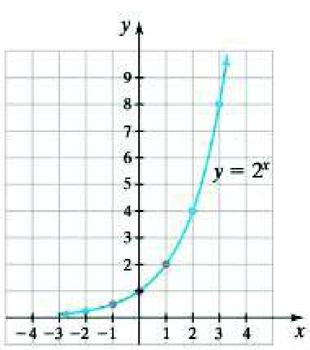


FIGURA 9.16

Ahora trazamos estos puntos y los conectamos mediante una curva suave (**figura 9.16**). Los tres pares ordenados (de color gris en la tabla), también están señalados en la gráfica.

$$\text{Dominio: } \mathbb{R}$$

$$\text{Rango: } \{y \mid y > 0\}$$

El dominio de esta función es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. El rango es el conjunto de valores mayores que 0. Si analiza la ecuación $y = 2^x$, se dará cuenta de que y siempre debe ser positivo, ya que 2 es positivo.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 7

EJEMPLO 2 Grafique $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ determine el dominio y el rango de la función.

Solución Esta función es de la forma $y = a^x$, donde $a = \frac{1}{2}$. Construimos una tabla de valores para trazar la curva (**figura 9.17**).

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

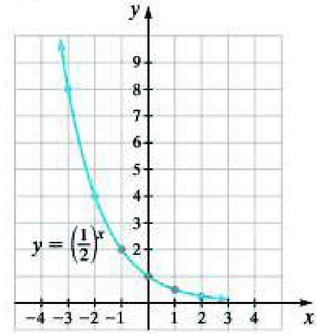


FIGURA 9.17

El dominio es el conjunto de los números reales, ℝ. El rango es $\{y|y > 0\}$.

Ahora resuelva el ejercicio 13

Observe que las gráficas en las **figuras 9.16** y **9.17** son gráficas de funciones uno a uno. *Cuando $a > 1$, las gráficas de funciones de la forma $y = a^x$, son similares a la de la* **figura 9.16**; *cuando $0 < a < 1$, son similares a la de la* **figura 9.17**. Observe que $y = 1^x$ no es una función uno a uno, así que no la tomaremos en cuenta en nuestro análisis de funciones exponenciales.

¿A qué será similar la gráfica de $y = 2^{-x}$? Recuerde que 2^{-x} significa $\frac{1}{2^x}$ o $\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Por lo tanto, la gráfica de $y = 2^{-x}$ será idéntica a la gráfica de la **figura 9.17**. Ahora considere la ecuación $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$. Esta ecuación puede rescribirse como $y = 2^x$, ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = \left(\frac{2}{1}\right)^x = 2^x$. Así, la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ será idéntica a la de la **figura 9.16**.

CÓMO USAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

La **figura 9.18** muestra la gráfica de la función $y = 2^x$, tal como se vería en la ventana estándar de una calculadora graficadora. En este capítulo, en ocasiones utilizaremos ecuaciones como $y = 2000(1.08)^x$. Si tuviera que graficar esta función en la ventana estándar de una calculadora, no vería gráfica alguna. ¿Puede explicar por qué? Observando la función, ¿puede determinar dónde se da la intersección con el eje y? Para determinarlo, sustituya x por 0; entonces se dará cuenta de que la intersección con el eje y está en $2000(1.08)^0 = 2000(1) = 2000$. En la **figura 9.19** se muestra la gráfica de $y = 2000(1.08)^x$.

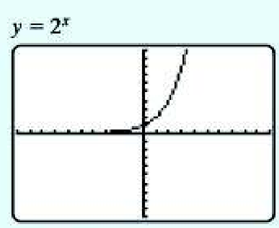


FIGURA 9.18

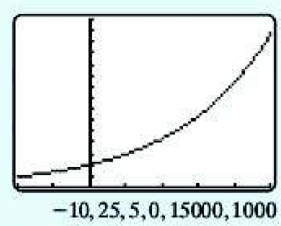


FIGURA 9.19

EJEMPLO 3 **Aumento de centavos** Jennifer Hewlett le dijo a su hermanito que si hacia su tarea, ella le daría 2 centavos la primera semana y duplicaría la cantidad cada semana, durante las siguientes 10 semanas. El número de centavos que recibiría su hermanito en cualquier semana, w, puede determinarse mediante la función $n(w) = 2^w$. Determine el número de centavos que Jennifer daría a su hermano en la semana 8.

Solución Al evaluar 2^8 en una calculadora, podemos determinar que en la semana 8, Jennifer le daría a su hermano 256 centavos, o $2.56.

Ahora resuelva el ejercicio 35

2 Resolver aplicaciones de funciones exponenciales

Las funciones exponenciales se suelen utilizar para describir el incremento y el decremento de ciertas sustancias. Los cuatro ejemplos siguientes son ilustraciones de funciones exponenciales.

EJEMPLO 4 ▸ **Valor de un jeep** Ronald Yates pagó $22,000 por un jeep nuevo. Suponga que el valor del jeep se deprecia a una tasa de 20% al año. Por lo tanto, dentro de un año, el valor del jeep será 80% de su valor actual. Es decir, dentro de un año su valor será $22,000(0.80); dentro de dos años, su valor será $22,000(0.80)(0.80) = $22,000(0.80)^2, y así sucesivamente. Por consiguiente, la fórmula para determinar el valor del jeep en un momento dado es

$$v(t) = 22{,}000(0.80)^t$$

donde t es el tiempo en años. Determine el valor del jeep **a)** dentro de un año, y **b)** dentro de 5 años.

Solución

a) Para determinar el valor que tendrá el jeep dentro de un año, sustituya t por 1.

$$\begin{aligned} v(t) &= 22{,}000(0.80)^t \\ v(1) &= 22{,}000(0.80)^1 && \text{Sustituir } t \text{ por } 1. \\ &= 17{,}600 \end{aligned}$$

Dentro de un año, el valor del jeep será de $17,600.

b) Para determinar el valor que tendrá el jeep dentro de 5 años, sustituya t por 5.

$$\begin{aligned} v(t) &= 22{,}000(0.80)^t \\ v(5) &= 22{,}000(0.80)^5 && \text{Sustituir } t \text{ por } 5. \\ &= 22{,}000(0.32768) \\ &= 7208.96 \end{aligned}$$

Dentro de cinco años, el valor del jeep será de $7208.96.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 49

EJEMPLO 5 ▸ **Interés compuesto** En los primeros capítulos se mencionó la *fórmula del interés compuesto*, $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. Cuando el interés se capitaliza o compone de forma periódica (cada año, cada mes, cada trimestre), esta fórmula puede usarse para determinar el monto o saldo, A.

En la fórmula, r es la tasa de interés, p es el capital, n es el número de periodos de capitalización por año y t es el número de años. Suponga que se invierten $10,000 a 5% de interés, en una cuenta que se capitaliza trimestralmente durante 6 años. Determine el saldo en la cuenta al cabo de 6 años.

Solución **Entienda el problema** Se nos ha dicho que el capital inicial, p, es de $10,000; también que la tasa de interés, r, es 5%. Y como el interés se capitaliza cada trimestre, el número de periodos de capitalización por año, n, es 4. El dinero se invierte durante 6 años, por lo tanto, t es 6.

Traduzca Ahora sustituimos estos valores en la fórmula.

$$\begin{aligned} A &= p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \\ &= 10{,}000\left(1 + \frac{0.05}{4}\right)^{4(6)} \end{aligned}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} &= 10{,}000(1 + 0.0125)^{24} \\ &= 10{,}000(1.0125)^{24} \\ &\approx 10{,}000(1.347351) && \text{Obtenido con una calculadora.} \\ &\approx 13{,}473.51 \end{aligned}$$

Responda Después de 6 años, los $10,000 originales habrán crecido a casi $13,473.51.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 41

EJEMPLO 6 ▸ **Fechado con carbono 14** Los científicos utilizan el carbono 14 para calcular la edad de fósiles y cualesquiera otros objetos. La fórmula que se emplea es

$$A = A_0 \cdot 2^{-t/5600}$$

donde A_0 representa la cantidad de carbono 14 cuando el fósil se formó, y A representa la cantidad de carbono 14 que contiene después de t años. Si al momento de la formación del fósil había 500 gramos de carbono 14, ¿cuántos gramos contendrá 2000 años después?

Solución Entienda el problema Cuando el fósil se formó, había en él 500 gramos de carbono 14; por lo tanto, $A_0 = 500$. Para determinar cuántos gramos de carbono 14 habrá después de 2000 años, sustituimos t por 2000 en la fórmula.

Traduzca
$$A = A_0 \cdot 2^{-t/5600}$$
$$= 500(2)^{-2000/5600}$$

Realice los cálculos
$$\approx 500(0.7807092) \quad \text{Obtenido con una calculadora.}$$
$$\approx 390.35 \text{ gramos}$$

Responda Después de 2000 años, en el fósil habrá alrededor de 390.35 gramos de los 500 gramos de carbono 14 originales.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 43

EJEMPLO 7 ▸ **Primas por seguro de salud** En Estados Unidos, las primas por seguro de salud se han elevado a partir de 2000. La gráfica en la **figura 9.20** muestra las primas por seguro de salud de 2000 a 2005.

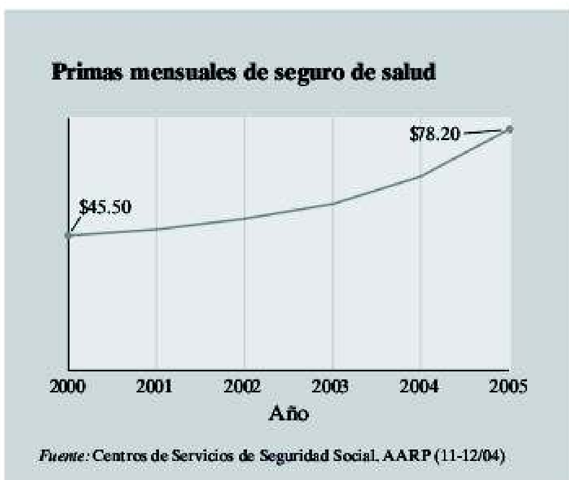


FIGURA 9.20

Una función exponencial que se aproxima mucho a esta curva es $f(t) = 44.584(1.11)^t$. En esta función, $f(t)$ es la prima mensual y t es el número de años a partir de 2000. Suponga que las primas de seguro de salud continúan aumentando como en el pasado. Utilice esta función para aproximar las primas mensuales por seguro de salud en **a)** 2006 y **b)** 2010.

Solución. **a)** Entienda el problema En esta función, t es años a partir de 2000. El año 2006 se representaría con $t = 6$, ya que 2006 es 6 años después de 2000. Para determinar la prima mensual en 2006, necesitamos evaluar la función para $t = 6$.

Traduzca y realice los cálculos
$$f(t) = 44.584(1.11)^t$$
$$f(6) = 44.584(1.11)^6 \approx \$83.39 \quad \text{Obtenido con una calculadora.}$$

Responda Por lo tanto, la prima mensual en 2006 sería alrededor de \$83.39.

b) Como 2010 es 10 años después de 2000, para determinar la prima mensual necesitamos evaluar la función para $t = 10$.

$$f(t) = 44.584(1.11)^t$$
$$f(10) = 44.584(1.11)^{10} \approx \$126.59 \quad \text{Obtenido con una calculadora.}$$

Responda En consecuencia, la prima mensual en 2010 sería alrededor de \$126.59.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 53

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.2

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué son las funciones exponenciales?

2. Considere la función exponencial $y = 2^x$.
- **a)** ¿Qué le sucede a y conforme x crece?
- **b)** ¿y puede valer 0? Explique.
- **c)** ¿El valor de y puede ser negativo? Explique.

3. Considere la función exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.
- **a)** ¿Qué le sucede a y conforme x crece?
- **b)** ¿El valor de y puede ser 0? Explique.
- **c)** ¿El valor de y puede ser negativo? Explique.

4. Considere la función exponencial $y = 2^{-x}$. Escriba una función exponencial equivalente a la anterior, pero que no tenga signo negativo en el exponente. Explique cómo obtuvo su respuesta.

5. Considere las ecuaciones $y = 2^x$ y $y = 3^x$.
- **a)** ¿Sus gráficas tienen la misma intersección con el eje y, o ésta es distinta en cada caso? Determine la intersección con el eje y en cada caso.
- **b)** Compare las gráficas de las dos funciones, ¿cómo son?

6. Considere las ecuaciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.
- **a)** ¿Sus gráficas tienen la misma intersección con el eje y, o ésta es distinta en cada caso? Determine la intersección con el eje y en cada caso.
- **b)** Compare las gráficas de las dos funciones, ¿cómo son?

Práctica de habilidades

Grafique cada función exponencial.

7. $y = 2^x$ **8.** $y = 3^x$ **9.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **10.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

11. $y = 4^x$ **12.** $y = 5^x$ **13.** $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **14.** $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

15. $y = 3^{-x}$ **16.** $y = 4^{-x}$ **17.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ **18.** $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$

19. $y = 2^{x-1}$ **20.** $y = 2^{x+1}$ **21.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ **22.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

23. $y = 2^x + 1$ **24.** $y = 2^x - 1$ **25.** $y = 3^x - 1$ **26.** $y = 3^x + 2$

Resolución de problemas

27. Ya antes se dijo que, para funciones exponenciales $f(x) = a^x$, el valor de a no puede ser igual a 1.
- **a)** Cuando $a = 1$, ¿cómo se ve la gráfica de $f(x) = a^x$?
- **b)** Cuando $a = 1$, ¿$f(x) = a^x$ es una función?
- **c)** Cuando $a = 1$, ¿$f(x) = a^x$ tiene función inversa? Explique su respuesta.

28. Compare las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^x + k$, $k > 0$, ¿cómo son?

29. Compare las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^x - k$, $k > 0$, ¿cómo son?

30. Compare las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^{x+1}$, cuando $a > 1$; ¿cómo son?

31. Compare las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^{x+2}$, cuando $a > 1$; ¿cómo son?

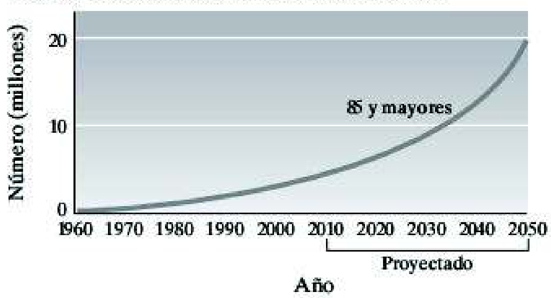
32. **a)** La función $y = x^\pi$, ¿es una función exponencial? Explique.
- **b)** ¿$y = \pi^x$ es una función exponencial? Explique.

33. Crecimiento poblacional La gráfica siguiente muestra el crecimiento de la población de personas de 85 y más años en Estados Unidos, para los años de 1960 a 2000 y la proyección hasta 2050. La función exponencial que aproxima bien a esta gráfica es

$$f(t) = 0.592(1.042)^t$$

En esta función, $f(t)$ es la población, en millones, de personas de 85 y más años y t es el número de años desde 1960. Si esta tendencia continúa, utilice esta función para estimar el número de personas de 85 o más años en Estados Unidos en **a)** 2060, **b)** 2100.

Población en Estados Unidos de 85 años o más



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos y proyecciones, Ciudadanos mayores 2004, www.agingstats.gov

34. Población mundial La población mundial ha crecido de forma exponencial desde 1650. La función exponencial que aproxima bien la población mundial desde 1650 y con proyección a 2015 es

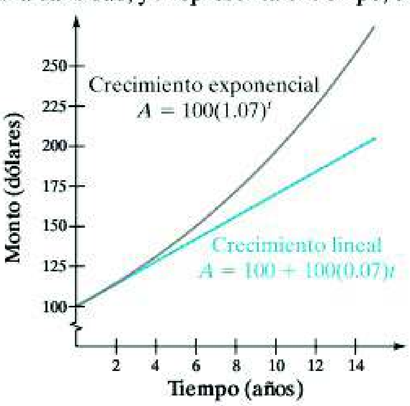
$$f(t) = \frac{1}{2}(2.718)^{0.0072t}$$

En esta función, $f(t)$ es la población mundial, en miles de millones de personas, y t es el número de años contados a partir de 1650. Si continúa esta tendencia, estime la población mundial en **a)** 2010. **b)** 2015.

35. Duplicación Si inicia con \$2 y cada día duplica la cantidad del día anterior, durante 9 días; determine la cantidad el día 9.

36. Duplicación Si inicia con \$2 y cada día duplica la cantidad del día anterior durante 12 días, determine la cantidad el día 12.

37. Interés simple y compuesto La gráfica siguiente muestra el crecimiento lineal de \$100 invertidos a 7% de interés simple, y el crecimiento exponencial de la misma cantidad invertida a 7% de interés compuesto anualmente. En las fórmulas, A representa la cantidad, y t representa el tiempo, en años.



a) Utilice la gráfica para calcular el tiempo de duplicación para \$100 invertidos a 7% de interés simple.

b) Calcule el tiempo de duplicación para \$100 invertidos a 7% de interés compuesto, capitalizable cada año.

c) Calcule la diferencia entre los montos resultante después de 10 años sobre una cantidad de \$100 invertida en cada método.

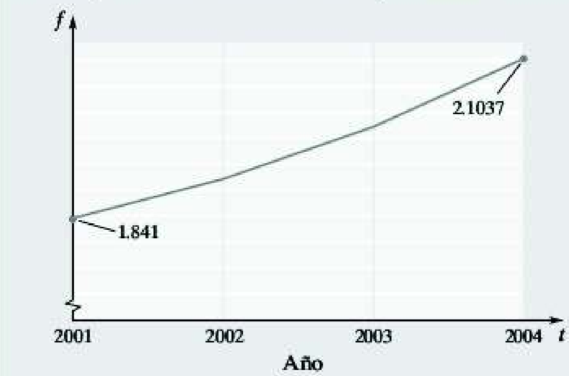
d) En Estados Unidos, casi todos los bancos capitalizan el interés diariamente en lugar de hacerlo cada año. ¿Qué efecto tiene esto sobre el monto total? Explique.

38. Deuda por crédito al consumidor La gráfica siguiente muestra la deuda por crédito al consumidor, en billones de dólares, durante los años 2001 a 2004. La función exponencial que aproxima bien a estos datos es

$$f(t) = 1.841(1.045)^t$$

En esta función, $f(t)$ es la deuda por crédito al consumidor, en billones de dólares, y t es el número de años a partir de 2001. Si esta tendencia continúa, utilice la función para estimar la deuda por crédito al consumidor en **a)** 2007. **b)** 2011

Deuda por créditos al consumidor (billones de dólares)



Fuente: www.federalreserve.gov/releases (con base en dólares de 2004)

39. Bacterias en una placa de Petri Se colocan cinco bacterias en una placa de Petri. La población se triplica diariamente. La fórmula para calcular el número de bacterias que hay en la placa el día t es

$$N(t) = 5(3)^t$$

donde t es el número de días, contados a partir de que se colocaron las bacterias en la placa. ¿Cuántas bacterias habrá en la caja 2 días después que se colocaron las cinco bacterias en la placa?

40. Bacterias en una placa de Petri Consulte el ejercicio 39. ¿Cuántas bacterias habrá en la placa 6 días después de que se colocaron cinco bacterias en ella?

41. Interés compuesto Si Don Gecewicz invierte \$5000 a 6% de interés capitalizable cada trimestre, determine el monto que tendrá después de 4 años (vea el ejemplo 5).

42. Interés compuesto Si Don Treadwell invierte \$8000 a 4% de interés capitalizable cada trimestre, determine el monto que tendrá después de 5 años.

43. Fechado con carbono 14 Si en el hueso de cierto animal había originalmente 12 gramos de carbono 14, ¿cuánto quedará de este elemento al cabo de 1000 años? Utilice $A = A_0 \cdot 2^{-t/5600}$ (vea el ejemplo 6).

44. Fechado con carbono 14 Tim Jonas encontró un fósil en un sitio arqueológico. Si originalmente en este fósil había 60 gramos de carbono 14, ¿cuánto quedará del elemento al cabo de 10,000 años?

45. Sustancia radiactiva La cantidad de sustancia radiactiva presente, en gramos, en el instante t, en años, está dada por la fórmula $y = 80(2)^{-0.4t}$. Determine el número de gramos presentes después de **a)** 10 años, **b)** 100 años.

46. Sustancia radiactiva La cantidad de sustancia radiactiva, en gramos, en el instante t, en años, la da la fórmula $y = 20(3)^{-0.6t}$. Determine el número de gramos presentes después de 3 años.

47. Población La población esperada a futuro en Ackworth, que ahora tiene 2000 residentes, puede aproximarse mediante la fórmula $y = 2000(1.2)^{0.1t}$, donde t es el número de años a partir de hoy. Determine cuántos habitantes tendrá la ciudad dentro de **a)** 10 años, **b)** 50 años.

48. Población La población futura esperada de Antwerp, que actualmente tiene 6800 residentes, puede aproximarse mediante la fórmula $y = 6800(1.4)^{-0.2t}$, donde t es el número de años a partir de hoy. Determine cuántos habitantes tendrá la ciudad dentro de 30 años.

49. Valor de un automóvil deportivo El costo de un automóvil deportivo nuevo es de $24,000. Si se deprecia a una tasa de 18% anual, su valor dentro de t años puede calcularse mediante la fórmula

$$V(t) = 24{,}000(0.82)^t$$

Determine el valor que tendrá el automóvil deportivo dentro de 4 años.

50. Valor de un vehículo todo terreno El costo de un vehículo todo terreno es de $6200. Si se deprecia a una tasa de 15% por año, su valor dentro de t años puede calcularse mediante la fórmula

$$V(t) = 6200(0.85)^t$$

Determine el valor que tendrá el vehículo todo terreno dentro de 10 años.

51. Uso del agua El estadounidense promedio usó alrededor de 580,000 galones de agua en 2005. Suponga que cada año, a partir de 2005, el estadounidense promedio es capaz de reducir su consumo de agua en 5%. Entonces, la cantidad de agua que utilizará en t años a partir de 2005, puede determinarse mediante la fórmula $A = 580{,}000(0.95)^t$.

a) Explique por qué esta fórmula puede usarse para determinar la cantidad de agua utilizada por el estadounidense promedio.

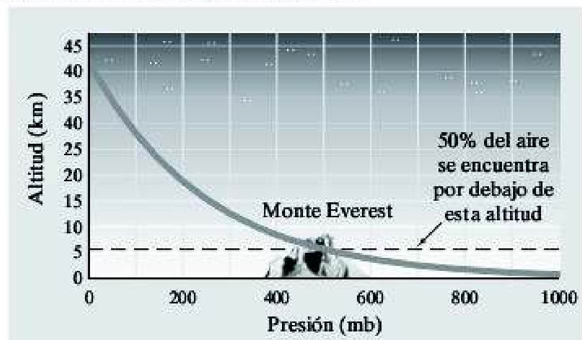
b) ¿Cuál sería el promedio de consumo de agua en el año 2009?

52. Aluminio reciclado Actualmente, cada año se reciclan casi $\frac{2}{3}$ de todas las latas de aluminio, mientras que $\frac{1}{3}$ se envía a depósitos de basura. El aluminio reciclado se utiliza para fabricar nuevas latas. En Estados Unidos, en 2004, se usaron alrededor de 190,000,000 de latas de aluminio. Con la fórmula $A = 190{,}000{,}000\left(\frac{2}{3}\right)^n$. puede calcularse el número de latas fabricadas con aluminio reciclado, n años a partir de 2004.

a) Explique por qué la fórmula puede usarse para calcular el número de latas, n años a partir de 2004, fabricadas con el aluminio reciclado.

b) ¿Cuántas latas se fabricarán en 2011 con el aluminio reciclado en 2004?

53. Presión atmosférica La presión atmosférica varía según la altura. Cuanto mayor sea la altura menor será la presión, como se muestra en la gráfica siguiente.



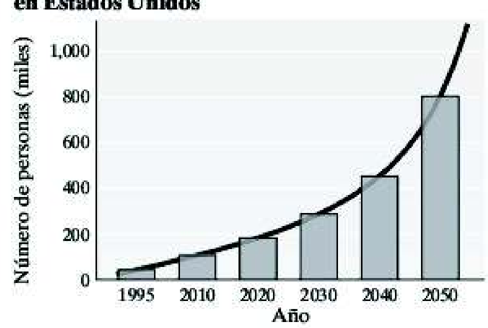
La ecuación $A = 41.97(0.996)^x$ puede usarse para calcular la altura, A, en kilómetros, para una presión dada, x, en milibares (mb). Si la presión atmosférica en la cima del monte Everest es de aproximadamente 389 mb, calcule la altura de la cima del monte Everest.

54. Centenarios De acuerdo con las proyecciones de la Oficina de Censos de Estados Unidos, el número de personas de 100 años de edad o más, aumentará de manera exponencial a partir de 1995 (vea la gráfica siguiente). La función

$$f(t) = 71.24(1.045)^t$$

puede usarse para calcular el número de estas personas, en miles, donde t es el tiempo, en años, a partir de 1995. Utilice esta función para calcular el número de personas de 100 años de edad o más en **a)** 2060, **b)** 2070.

Número de personas de 100 años de edad o más en Estados Unidos



Fuente: Oficina de Censos de Estados Unidos, proyección de la serie media.

55. En el ejercicio 37 graficamos los montos resultantes en diferentes periodos después de invertir \$100 a 7% de interés simple y a 7% de interés capitalizable cada año.

a) Utilice la fórmula del interés compuesto dada en el ejemplo 5 para determinar el monto que se obtiene después de 10 años, por una inversión de \$100 a una tasa de 7% de interés capitalizable diariamente (suponga que cada año es de 365 días).

b) Calcule la diferencia entre el monto que se obtiene 10 años después de invertir \$100 a 7% de interés simple, y el monto que se obtiene transcurrido el mismo plazo al invertir \$100 a 7% de interés capitalizable diariamente.

56. Grafique $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en la misma ventana.

57. a) Grafique $y = 3^{x-5}$.

b) Utilice su calculadora graficadora para resolver la ecuación $4 = 3^{x-5}$. Redondee su respuesta al centésimo más cercano.

58. a) Grafique $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$.

b) Utilice su calculadora graficadora para resolver la ecuación $-3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$.

Reto

59. Suponga que Bob Jenkins le da a Carol Dantuma \$1 en el día 1, \$2 en el día 2, \$4 en el día 3, \$8 en el día 4, y continúa duplicando la cantidad durante 30 días.

a) Determine cuánto le dará Bob a Carol el día 15.

b) Determine cuánto le dará Bob a Carol el día 20.

c) Usando la forma exponencial, exprese el monto que Bob le da a Carol el día n.

d) ¿Cuánto le dará Bob a Carol el día 30? Escriba la cantidad en forma exponencial. Luego utilice su calculadora para evaluar.

e) Exprese el monto total que Bob le da a Carol durante los 30 días, como una suma de términos exponenciales. (No determine el valor real.)

Actividad en grupo

60. Las funciones exponenciales o aproximadamente exponenciales son muy comunes.

a) Que cada miembro del grupo determine, de manera individual, una función que no haya sido dada en esta sección y que pueda aproximarse a una función exponencial. Pueden utilizar periódicos, libros y otras fuentes.

b) Analicen en grupo las funciones de todos los miembros. Determinen si cada función presentada es una función exponencial.

c) Escriban en grupo un ensayo en el que analicen cada una de las funciones y establezcan por qué creen que cada una de ellas es exponencial.

Ejercicios de repaso acumulativo

[5.1] **61.** Considere el polinomio
$$2.3x^4y - 6.2x^6y^2 + 9.2x^5y^2$$

a) Escriba el polinomio en orden descendente de la variable x.

b) ¿Cuál es el grado del polinomio?

c) ¿Cuál es su coeficiente principal?

[5.2] **62.** Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 2x + 4$, determine $(f \cdot g)(x)$.

[7.1] **63.** Escriba $\sqrt{a^2 - 8a + 16}$ como un valor absoluto.

[7.3] **64.** Simplifique $\sqrt[4]{\dfrac{32x^5y^9}{2y^3z}}$.

9.3 Funciones logarítmicas

1 Convertir de forma exponencial a forma logarítmica.

2 Graficar funciones exponenciales.

3 Comparar gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas.

4 Resolver problemas de aplicación con funciones logarítmicas.

1 Convertir funciones de forma exponencial a forma logarítmica

Estamos preparados para hablar de **logaritmos**. Considere la función exponencial $y = 2^x$. Como se mencionó en la sección 9.1, para determinar la función inversa intercambiamos x y y y despejamos y en la ecuación resultante. Al intercambiar x y y se obtiene la ecuación $x = 2^y$, pero no hay forma de despejar y en la ecuación $x = 2^y$. A continuación se presenta una nueva definición que nos ayudará a lograrlo.

Logaritmo

Para todos los números positivos a, donde $a \neq 1$,

$$y = \log_a x \text{ significa } x = a^y$$

De acuerdo con la definición de logaritmo, $x = 2^y$ significa $y = \log_2 x$. Por lo tanto, podemos deducir que $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$ son funciones inversas. En general, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas.

En la ecuación $y = \log_a x$, *log* es una abreviatura de la palabra *logaritmo*; $y = \log_a x$ se lee "*y* es el logaritmo de *x* en la base *a*". La letra *y* representa el logaritmo, la letra *a* la base, y la letra *x* el número.

$$\underset{\text{logaritmo (exponente)}}{y} = \log_{\underset{\text{base}}{a}} \underset{\text{número}}{x} \qquad \text{significa} \qquad \underset{\text{número}}{x} = \underset{\text{base}}{a}^{\overset{\text{exponente}}{y}}$$

En otras palabras, el logaritmo del número *x* en la base *a*, es el *exponente* al cual debe elevarse ésta para obtener el número *x*. En resumen, *un logaritmo es un exponente*. Por ejemplo,

$$2 = \log_{10} 100 \text{ significa } 100 = 10^2$$

En $\log_{10} 100 = 2$, el logaritmo es 2, la base es 10 y el número es 100. El logaritmo, 2, es el *exponente* al que debe elevarse la base, 10, para obtener el número, 100. Observe que $10^2 = 100$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de cómo una expresión exponencial puede convertirse en una expresión logarítmica.

Forma exponencial	Forma logarítmica
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$4^2 = 16$	$\log_4 16 = 2$
$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$	$\log_{1/2} \frac{1}{32} = 5$
$5^{-2} = \frac{1}{25}$	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$

Resolvamos algunos ejemplos que requieren la conversión de la forma exponencial a la forma logarítmica, y viceversa.

EJEMPLO 1 ▸ Escriba cada ecuación en forma logarítmica.

a) $3^4 = 81$ **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$ **c)** $2^{-5} = \frac{1}{32}$

Solución

a) $\log_3 81 = 4$ **b)** $\log_{1/5} \frac{1}{125} = 3$ **c)** $\log_2 \frac{1}{32} = -5$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 31**

EJEMPLO 2 ▸ Escriba cada ecuación en forma exponencial.

a) $\log_7 49 = 2$ **b)** $\log_4 64 = 3$ **c)** $\log_{1/3} \frac{1}{81} = 4$

Solución

a) $7^2 = 49$ **b)** $4^3 = 64$ **c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 47**

EJEMPLO 3 ▸ Escriba cada ecuación en la forma exponencial; luego determine el valor desconocido.

a) $y = \log_5 25$ **b)** $2 = \log_a 16$ **c)** $3 = \log_{1/2} x$

Solución

a) $5^y = 25$. Ya que $5^2 = 25$, $y = 2$.

b) $a^2 = 16$. Como $4^2 = 16$, $a = 4$. Observe que a debe ser mayor que 0, por lo que -4 no es un valor posible de a.

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = x$. Ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $x = \frac{1}{8}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 65

2 Graficar funciones exponenciales

Ahora que sabemos cómo convertir ecuaciones de la forma exponencial a la forma logarítmica y viceversa, podemos graficar funciones logarítmicas. Las ecuaciones de la forma $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$, se denominan **funciones logarítmicas**. Las gráficas de este tipo de funciones pasan la prueba de la recta vertical. Para graficarlas, cambie a la forma exponencial y trace los puntos. Este procedimiento se ilustra en los ejemplos 4 y 5.

Antes de graficar funciones logarítmicas, analizaremos algunas de sus características.

Gráficas de funciones logarítmicas

Para todas las funciones logarítmicas de la forma $y = \log_a x$ o $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$:

1. El dominio de la función es $(0, \infty)$.
2. El rango de la función es $(-\infty, \infty)$.
3. La gráfica pasa por los puntos $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

En casi todos los casos puede trazarse una gráfica razonablemente buena de la función logarítmica, precisamente con los tres puntos que se listaron en el paso 3. Cuando $a > 1$, la gráfica se vuelve casi vertical a la izquierda de $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$ y casi horizontal a la derecha de $(a, 1)$, vea el ejemplo 4.

Cuando $0 < a < 1$, la gráfica parece casi vertical a la izquierda de $(a, 1)$, y casi horizontal a la derecha de $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, vea el ejemplo 5.

EJEMPLO 4 ▸ Grafique $y = \log_2 x$. Indique el dominio y el rango de la función.

Solución Ésta es una ecuación de la forma $y = \log_a x$, donde $a = 2$; $y = \log_2 x$ significa $x = 2^y$. Por lo tanto, para empezar construimos la tabla de valores usando $x = 2^y$. La tabla se desarrollará con mayor facilidad para valores seleccionados de y y determinando los valores correspondientes de x. Los tres puntos listados en el paso 3 del recuadro aparecen en rojo en la tabla.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

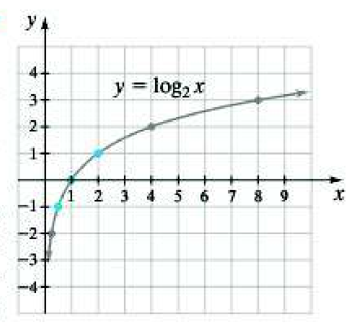


FIGURA 9.21

Después trazamos la gráfica (**figura 9.21**). Los tres pares ordenados que se resaltan en la tabla también se resaltan en rojo en la gráfica. El dominio, es decir, el conjunto de valores de x, es $\{x|x > 0\}$. El rango, o conjunto de valores de y, es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 11

EJEMPLO 5 Grafique $y = \log_{1/2} x$. Indique el dominio y el rango de la función.

Solución Ésta es una ecuación de la forma $y = \log_a x$, donde $a = \frac{1}{2}$. $y = \log_{1/2} x$ significa $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$. Primero construimos una tabla de valores seleccionando valores para y y determinando los correspondientes valores de x.

x	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
y	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4

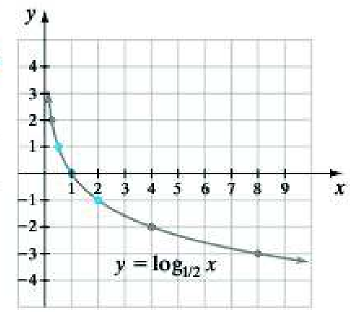


FIGURA 9.22

La gráfica se ilustra en la **figura 9.22**. El dominio es $\{x|x > 0\}$ y el rango es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

Ahora resuelva el ejercicio 13

Si analizamos los ejemplos 4 y 5, veremos que el dominios de $y = \log_2 x$ y de $y = \log_{1/2} x$ es $\{x|x > 0\}$. De hecho, **para cualquier función logarítmica $y = \log_a x$, el dominio es $\{x|x > 0\}$.** Observe también que las gráficas de los ejemplos 4 y 5 son gráficas de funciones uno a uno.

3 Comparar gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas

Recuerde que para determinar las funciones inversas, intercambiamos x y y y despejamos y en la ecuación resultante. Considere $y = a^x$. Si intercambiamos x y y, obtenemos $x = a^y$. De acuerdo con la definición de logaritmo, podemos reescribir esta función como $y = \log_a x$, que es una ecuación donde y está despejada. Por consiguiente, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ *son funciones inversas*, y podemos escribir: si $f(x) = a^x$, entonces $f^{-1}(x) = \log_a x$.

En la **figura 9.23** se muestran las gráficas generales de $y = a^x$ y de $y = \log_a x, a > 1$ en los mismos ejes. Observe que son simétricas respecto de la recta $y = x$. Tome en cuenta la información del recuadro siguiente.

Características de las gráficas

	FUNCIÓN EXPONENCIAL		FUNCIÓN LOGARÍTMICA
	$y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$		$y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$
Dominio:	$(-\infty, \infty)$		$(0, \infty)$
Rango:	$(0, \infty)$		$(-\infty, \infty)$
Puntos en la gráfica:	$\left(-1, \frac{1}{a}\right)$ $(0, 1)$ $(1, a)$	*x se transforma en y, y se transforma en x*	$\left(\frac{1}{a}, -1\right)$ $(1, 0)$ $(a, 1)$

Con base en lo anterior, podemos ver que el rango de la función exponencial es el dominio de la función logarítmica, y viceversa. Además, los valores de x y de y en los pares ordenados están intercambiados en las funciones exponencial y logarítmica.

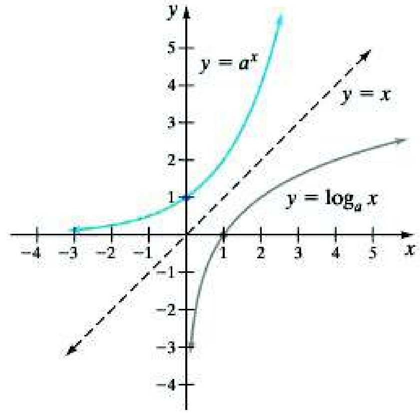


FIGURA 9.23

En la **figura 9.24** se ilustran las gráficas de $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$. En la **figura 9.25** se muestran las gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $y = \log_{1/2} x$. En cada figura, las gráficas son inversas entre sí y, por lo tanto, simétricas respecto de la recta $y = x$.

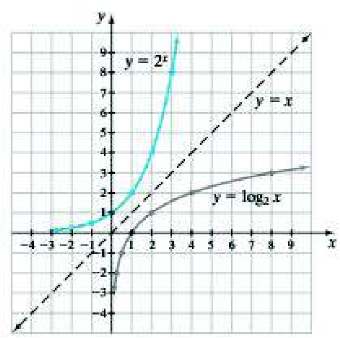


FIGURA 9.24

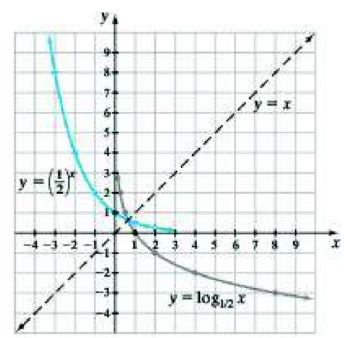


FIGURA 9.25

4 Resolver problemas de aplicación con funciones logarítmicas

Más adelante veremos muchos problemas de aplicación que involucran logaritmos; por lo pronto analizaremos sólo una de sus aplicaciones más importantes.

EJEMPLO 6 ▸ **Terremotos** Los logaritmos se utilizan para medir la magnitud de los terremotos. En la escala Richter, desarrollada por el sismólogo Charles F. Richter, por ejemplo, la magnitud, R, de un terremoto está dada por la fórmula

$$R = \log_{10} I$$

donde I representa el número de veces que el terremoto es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir con un sismógrafo.

a) Si un terremoto mide 4 grados en la escala de Richter, ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir?

b) ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 5 grados que uno que mide 4?

Solución **a)** Entienda el problema El número asignado en la escala Richter, R, es 4. Para determinar cuántas veces es más intenso el terremoto respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse, I, sustituimos $R = 4$ en la fórmula y despejamos I.

Traduzca

$$R = \log_{10} I$$
$$4 = \log_{10} I$$

Realice los cálculos $10^4 = I$ *Cambiar a la forma exponencial.*

$$10{,}000 = I$$

Responda Por lo tanto, un terremoto que mide 4 grados es 10,000 veces más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir.

b)
$$5 = \log_{10} I$$
$$10^5 = I \quad \textit{Cambiar a la forma exponencial.}$$
$$100{,}000 = I$$

Como (10,000)(10) = 100,000, un terremoto que mide 5 es 10 veces más intenso que un terremoto que mide 4.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 113

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Considere la función logarítmica $y = \log_a x$.
   a) ¿Qué restricciones hay sobre a?
   b) ¿Cuál es el dominio de la función?
   c) ¿Cuál es el rango de la función?
2. Escriba $y = \log_a x$ en forma exponencial.
3. Si algunos puntos en la gráfica de la función exponencial, $f(x) = a^x$ son $\left(-3, \frac{1}{27}\right), \left(-2, \frac{1}{9}\right), \left(-1, \frac{1}{3}\right)$, (0, 1), (1, 3), (2, 9) y (3, 27), liste algunos puntos de la gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log_a x$. Explique cómo determinó su respuesta.
4. Para la función logarítmica $y = \log_a (x - 3)$, ¿qué debe cumplirse respecto de x? Explique.
5. Analice la relación entre las gráficas de $y = a^x$ y $y = \log_a x$ para $a > 0$ y $a \neq 1$.
6. ¿Cuál es la intersección con el eje x de la gráfica de una ecuación de la forma $y = \log_a x$?

Práctica de habilidades

Grafique las funciones logarítmicas.

7. $y = \log_2 x$
8. $y = \log_3 x$
9. $y = \log_{1/2} x$
10. $y = \log_{1/3} x$
11. $y = \log_5 x$
12. $y = \log_4 x$
13. $y = \log_{1/5} x$
14. $y = \log_{1/4} x$

Grafique cada par de funciones en los mismos ejes.

15. $y = 2^x, y = \log_{1/2} x$
16. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \log_2 x$
17. $y = 2^x, y = \log_2 x$
18. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \log_{1/2} x$

Escriba cada ecuación en forma logarítmica.

19. $2^3 = 8$
20. $3^5 = 243$
21. $3^2 = 9$
22. $2^6 = 64$
23. $16^{1/2} = 4$
24. $49^{1/2} = 7$
25. $8^{1/3} = 2$
26. $16^{1/4} = 2$
27. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
28. $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$
29. $2^{-3} = \frac{1}{8}$
30. $6^{-3} = \frac{1}{216}$
31. $4^{-3} = \frac{1}{64}$
32. $81^{1/2} = 9$
33. $64^{1/3} = 4$
34. $5^{-4} = \frac{1}{625}$
35. $8^{-1/3} = \frac{1}{2}$
36. $16^{-1/2} = \frac{1}{4}$
37. $81^{-1/4} = \frac{1}{3}$
38. $32^{-1/5} = \frac{1}{2}$
39. $10^{0.8451} = 7$
40. $10^{1.0792} = 12$
41. $e^2 = 7.3891$
42. $e^{-1/2} = 0.6065$
43. $a^n = b$
44. $c^b = w$

Escriba cada ecuación en forma exponencial.

45. $\log_2 8 = 3$

46. $\log_5 125 = 3$

47. $\log_{1/3} \frac{1}{27} = 3$

48. $\log_{1/2} \frac{1}{64} = 6$

49. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

50. $\log_5 \frac{1}{625} = -4$

51. $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

52. $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$

53. $\log_9 \frac{1}{81} = -2$

54. $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$

55. $\log_{10} \frac{1}{1000} = -3$

56. $\log_{10} 1000 = 3$

57. $\log_6 216 = 3$

58. $\log_4 1024 = 5$

59. $\log_{10} 0.62 = -0.2076$

60. $\log_{10} 8 = 0.9031$

61. $\log_e 6.52 = 1.8749$

62. $\log_e 30 = 3.4012$

63. $\log_w s = -p$

64. $\log_r c = -a$

Escriba cada ecuación en forma exponencial; luego determine el valor desconocido.

65. $\log_4 64 = y$

66. $\log_5 25 = y$

67. $\log_a 125 = 3$

68. $\log_a 81 = 4$

69. $\log_3 x = 3$

70. $\log_2 x = 5$

71. $\log_2 \frac{1}{16} = y$

72. $\log_8 \frac{1}{64} = y$

73. $\log_{1/2} x = 6$

74. $\log_{1/3} x = 4$

75. $\log_a \frac{1}{27} = -3$

76. $\log_9 \frac{1}{81} = y$

Evalúe cada una de las siguientes expresiones.

77. $\log_{10} 1$

78. $\log_{10} 10$

79. $\log_{10} 100$

80. $\log_{10} 1000$

81. $\log_{10} \frac{1}{100}$

82. $\log_{10} \frac{1}{1000}$

83. $\log_{10} 10{,}000$

84. $\log_{10} 100{,}000$

85. $\log_4 256$

86. $\log_{13} 169$

87. $\log_3 \frac{1}{81}$

88. $\log_5 \frac{1}{125}$

89. $\log_8 \frac{1}{64}$

90. $\log_{14} \frac{1}{14}$

91. $\log_9 1$

92. $\log_{15} 1$

93. $\log_9 9$

94. $\log_{12} 12$

95. $\log_4 1024$

96. $\log_2 128$

Resolución de problemas

97. Si $f(x) = 5^x$, ¿cuál es el valor de $f^{-1}(x)$?

98. Si $f(x) = \log_6 x$, ¿cuál es el valor de $f^{-1}(x)$?

99. ¿Entre cuáles enteros debe estar $\log_3 62$? Explique.

100. ¿Entre cuáles enteros debe estar $\log_{10} 0.672$? Explique.

101. ¿Entre cuáles enteros debe estar $\log_{10} 425$? Explique.

102. ¿Entre cuáles enteros debe estar $\log_5 0.3256$? Explique.

103. En el caso de $x > 1$, ¿qué valor aumenta más rápido conforme x se incrementa, 2^x o $\log_{10} x$? Explique.

104. En el caso de $x > 1$, ¿qué valor aumenta más rápido conforme x se incrementa, x o $\log_{10} x$? Explique.

Cambie a la forma exponencial y despeje x. En la sección 9.4 analizaremos las reglas para resolver problemas como éstos.

105. $x = \log_{10} 10^6$

106. $x = \log_7 7^9$

107. $x = \log_b b^8$

108. $x = \log_e e^5$

Cambie a la forma logarítmica y despeje x. En la sección 9.4 analizaremos las reglas para resolver problemas como éstos.

109. $x = 10^{\log_{10} 3}$

110. $x = 6^{\log_6 5}$

111. $x = b^{\log_b 9}$

112. $x = c^{\log_c 2}$

113. **Terremoto** Si la magnitud de un terremoto es de 7 grados en la escala Richter, ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse? Utilice $R = \log_{10} I$ (vea el ejemplo 6).

114. **Terremoto** Si la magnitud de un terremoto es de 5 grados en la escala Richter, ¿cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse? Utilice $R = \log_{10} I$.

115. **Terremoto** ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 6 grados en la escala Richter que uno que mide 2?

116. **Terremoto** ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 4 grados en la escala Richter que uno que mide 1?

117. Grafique $y = \log_2 (x - 1)$.

118. Grafique $y = \log_3 (x - 2)$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[5.4–5.7] *Factorice.*

119. $2x^3 - 6x^2 - 36x$ **120.** $x^4 - 16$ **121.** $40x^2 + 52x - 12$ **122.** $6r^2s^2 + rs - 1$

9.4 Propiedades de los logaritmos

1 Utilizar la regla del producto para logaritmos.

2 Utilizar la regla del cociente para logaritmos.

3 Utilizar la regla de la potencia para logaritmos.

4 Utilizar propiedades adicionales de los logaritmos.

1 Utilizar la regla del producto para logaritmos

Al determinar el logaritmo de una expresión, a ésta se le denomina **argumento** del logaritmo. Por ejemplo, en $\log_{10} 3$, el 3 es el argumento; en $\log_{10}(2x + 4)$, el $(2x + 4)$ es el argumento. Cuando el argumento contiene una variable, suponemos que representa un valor positivo. *Recuerde que sólo existen logaritmos de números positivos.*

Para poder realizar cálculos mediante logaritmos, primero hay que entender sus propiedades. La primera de estas propiedades que estudiaremos es la regla del producto para logaritmos.

Regla del producto para logaritmos

Para números reales positivos, x, y y a, $a \neq 1$,

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \textbf{Propiedad 1}$$

Esta regla nos dice que el logaritmo del producto de dos factores es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Para demostrar esta propiedad, determinemos $\log_a x = m$ y $\log_a y = n$. Recuerde que los logaritmos son exponentes. A continuación escribimos cada logaritmo en forma exponencial.

$$\log_a x = m \text{ significa } a^m = x$$
$$\log_a y = n \text{ significa } a^n = y$$

Al sustituir y usar las reglas de los exponentes, vemos que

$$xy = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ahora podemos convertir $xy = a^{m+n}$ a la forma logarítmica.

$$xy = a^{m+n} \text{ significa } \log_a xy = m + n$$

Por último, al sustituir m por $\log_a x$ y n por $\log_a y$, obtenemos

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

que es la propiedad 1.

Ejemplos de la propiedad 1

$$\log_3(6 \cdot 7) = \log_3 6 + \log_3 7$$
$$\log_4 3z = \log_4 3 + \log_4 z$$
$$\log_8 x^2 = \log_8(x \cdot x) = \log_8 x + \log_8 x \quad \text{o} \quad 2\log_8 x$$

La propiedad 1, la regla del producto, puede extenderse a tres o más factores, por ejemplo, $\log_a xyz = \log_a x + \log_a y + \log_a z$.

2 Utilizar la regla del cociente para logaritmos

Analicemos ahora la regla del cociente para logaritmos, a la que haremos referencia como propiedad 2.

Regla del cociente para logaritmos

Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \textbf{Propiedad 2}$$

Esta regla nos dice que el logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre los logaritmos del numerador y del denominador.

Ejemplos de la propiedad 2

$$\log_3 \frac{19}{4} = \log_3 19 - \log_3 4$$

$$\log_6 \frac{x}{3} = \log_6 x - \log_6 3$$

$$\log_5 \frac{z}{z+2} = \log_5 z - \log_5 (z+2)$$

3 Utilizar la regla de la potencia para logaritmos

La siguiente propiedad que analizaremos es la regla de la potencia para logaritmos.

Regla de la potencia para logaritmos

Si x y a son números reales positivos, $a \neq 1$, y n es cualquier número real, entonces

$$\log_a x^n = n \log_a x \qquad \textbf{Propiedad 3}$$

Esta regla nos dice que el logaritmo de un número elevado a una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo del número.

Ejemplos de la propiedad 3

$$\log_2 4^3 = 3 \log_2 4$$

$$\log_3 x^2 = 2 \log_3 x$$

$$\log_5 \sqrt{12} = \log_5 (12)^{1/2} = \frac{1}{2} \log_5 12$$

$$\log_8 \sqrt[5]{z+3} = \log_8 (z+3)^{1/5} = \frac{1}{5} \log_8 (z+3)$$

Las propiedades 2 y 3 pueden demostrarse de una forma análoga a la que se explicó respecto de la propiedad 1 (vea los ejercicios 79 y 80 de la página 623).

EJEMPLO 1 ▸ Utilice las propiedades 1 a 3 para desarrollar.

a) $\log_8 \frac{29}{43}$ **b)** $\log_4 (64 \cdot 180)$ **c)** $\log_{10} (22)^{1/5}$

Solución

a) $\log_8 \frac{29}{43} = \log_8 29 - \log_8 43$ *Regla del cociente.*

b) $\log_4 (64 \cdot 180) = \log_4 64 + \log_4 180$ *Regla del producto.*

c) $\log_{10} (22)^{1/5} = \frac{1}{5} \log_{10} 22$ *Regla de la potencia.*

▸ Ahora resuelva el ejercicio 11

A menudo tendremos que utilizar dos o más de estas propiedades en el mismo problema.

EJEMPLO 2 ▸ Desarrolle.

a) $\log_{10} 4(x+2)^3$ **b)** $\log_5 \frac{(4-a)^2}{3}$

c) $\log_5 \left(\frac{4-a}{3}\right)^2$ **d)** $\log_5 \frac{[x(x+4)]^3}{8}$

Solución

a) $\log_{10} 4(x+2)^3 = \log_{10} 4 + \log_{10}(x+2)^3$ *Regla del producto.*

$= \log_{10} 4 + 3\log_{10}(x+2)$ *Regla de la potencia.*

b) $\log_5 \dfrac{(4-a)^2}{3} = \log_5 (4-a)^2 - \log_5 3$ *Regla del cociente.*

$= 2\log_5(4-a) - \log_5 3$ *Regla de la potencia.*

c) $\log_5 \left(\dfrac{4-a}{3}\right)^2 = 2\log_5\left(\dfrac{4-a}{3}\right)$ *Regla de la potencia.*

$= 2[\log_5(4-a) - \log_5 3]$ *Regla del cociente.*

$= 2\log_5(4-a) - 2\log_5 3$ *Propiedad distributiva.*

d) $\log_5 \dfrac{[x(x+4)]^3}{8} = \log_5 [x(x+4)]^3 - \log_5 8$ *Regla del cociente.*

$= 3\log_5 x(x+4) - \log_5 8$ *Regla de la potencia.*

$= 3[\log_5 x + \log_5(x+4)] - \log_5 8$ *Regla del producto.*

$= 3\log_5 x + 3\log_5(x+4) - \log_5 8$ *Propiedad distributiva.*

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 21**

Sugerencia útil

En el ejemplo 2**b)**, cuando desarrollamos $\log_5 \dfrac{(4-a)^2}{3}$, primero usamos la regla del cociente. En el ejemplo 2**c)**, cuando desarrollamos $\log_5\left(\dfrac{4-a}{3}\right)^2$, primero usamos la regla de la potencia. ¿Nota la diferencia entre ambos problemas? En $\log_5 \dfrac{(4-a)^2}{3}$, sólo el numerador del argumento está elevado al cuadrado; por lo tanto, primero utilizamos la regla del cociente. En $\log_5\left(\dfrac{4-a}{3}\right)^2$, todo el argumento está elevado al cuadrado, de modo que primero usamos la regla de la potencia.

EJEMPLO 3 ▸ Escriba cada una de las siguientes expresiones como el logaritmo de una sola expresión.

a) $3\log_8(z+2) - \log_8 z$

b) $\log_7(x+1) + 2\log_7(x+4) - 3\log_7(x-5)$

Solución

a) $3\log_8(z+2) - \log_8 z = \log_8(z+2)^3 - \log_8 z$ *Regla de la potencia.*

$= \log_8 \dfrac{(z+2)^3}{z}$ *Regla del cociente.*

b) $\log_7(x+1) + 2\log_7(x+4) - 3\log_7(x-5)$

$= \log_7(x+1) + \log_7(x+4)^2 - \log_7(x-5)^3$ *Regla de la potencia.*

$= \log_7(x+1)(x+4)^2 - \log_7(x-5)^3$ *Regla del producto.*

$= \log_7 \dfrac{(x+1)(x+4)^2}{(x-5)^3}$ *Regla del cociente.*

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 39**

Cómo evitar errores comunes

LAS REGLAS CORRECTAS SON

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Observe que:

$$\log_a (x + y) \neq \log_a x + \log_a y \qquad \log_a xy \neq (\log_a x)(\log_a y)$$

$$\log_a (x - y) \neq \log_a x - \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

4 Utilizar propiedades adicionales de los logaritmos

Las últimas propiedades que analizaremos en esta sección se utilizarán para resolver ecuaciones en la sección 9.6.

Propiedades adicionales de los logaritmos

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

$$\log_a a^x = x \qquad \textbf{Propiedad 4}$$

$$\text{y} \qquad a^{\log_a x} = x\ (x > 0) \qquad \textbf{Propiedad 5}$$

Ejemplos de la propiedad 4	Ejemplos de la propiedad 5
$\log_6 6^5 = 5$	$3^{\log_3 7} = 7$
$\log_9 9^x = x$	$5^{\log_5 x} = x(x > 0)$

EJEMPLO 4 Evalúe. **a)** $\log_5 25$ **b)** $\sqrt{16}^{\,\log_4 9}$

Solución

a) $\log_5 25$ puede escribirse como $\log_5 5^2$ y, de acuerdo con la propiedad 4,

$$\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$$

b) $\sqrt{16}^{\,\log_4 9}$ puede escribirse como $4^{\log_4 9}$. De acuerdo con la propiedad 5,

$$\sqrt{16}^{\,\log_4 9} = 4^{\log_4 9} = 9$$

Ahora resuelva el ejercicio 55

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Explique la regla del producto para logaritmos.
2. Explique la regla del cociente para logaritmos.
3. Explique la regla de la potencia para logaritmos.
4. Explique por qué fue necesario indicar que x y y son números reales positivos cuando analizamos las reglas del producto y del cociente.
5. ¿Es verdadera la afirmación $\log_a (xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z$? Explique.
6. ¿Es verdadera la afirmación $\log_b (x + y + z) = \log_b x + \log_b y + \log_b z$? Explique.

Práctica de habilidades

Utilice las propiedades 1 a 3 para desarrollar.

7. $\log_4 (3 \cdot 10)$
8. $\log_5 (4 \cdot 7)$
9. $\log_8 7(x + 3)$
10. $\log_9 x(x + 2)$
11. $\log_2 \dfrac{27}{11}$
12. $\log_5 (41 \cdot 9)$

13. $\log_{10} \dfrac{\sqrt{x}}{x-9}$

14. $\log_5 3^8$

15. $\log_6 x^7$

16. $\log_9 12(4)^6$

17. $\log_4 (r+7)^5$

18. $\log_8 b^3(b-2)$

19. $\log_4 \sqrt{\dfrac{a^3}{a+2}}$

20. $\log_9 (x-6)^3 x^2$

21. $\log_3 \dfrac{d^6}{(a-8)^4}$

22. $\log_7 x^2(x-13)$

23. $\log_8 \dfrac{y(y+4)}{y^3}$

24. $\log_{10} \left(\dfrac{z}{6}\right)^2$

25. $\log_{10} \dfrac{9m}{8n}$

26. $\log_5 \dfrac{\sqrt{a}\,\sqrt[3]{b}}{\sqrt[4]{c}}$

Escriba como logaritmo de una sola expresión.

27. $\log_5 2 + \log_5 8$

28. $\log_3 4 + \log_3 11$

29. $\log_2 9 - \log_2 5$

30. $\log_7 17 - \log_7 3$

31. $6 \log_4 2$

32. $\dfrac{1}{3} \log_8 7$

33. $\log_{10} x + \log_{10}(x+3)$

34. $\log_5 (a+1) - \log_5 (a+10)$

35. $2 \log_9 z - \log_9 (z-2)$

36. $3 \log_8 y + 2 \log_8 (y-9)$

37. $4(\log_5 p - \log_5 3)$

38. $\dfrac{1}{2} [\log_6 (r-1) - \log_6 r]$

39. $\log_2 n + \log_2 (n+4) - \log_2 (n-3)$

40. $2 \log_5 t + 5 \log_5 (t-6) + \log_5 (3t+7)$

41. $\dfrac{1}{2}[\log_5 (x-8) - \log_5 x]$

42. $6 \log_7 (a+3) + 2 \log_7 (a-1) - \dfrac{1}{2} \log_7 a$

43. $2 \log_9 4 + \dfrac{1}{3}\log_9 (r-6) - \dfrac{1}{2}\log_9 r$

44. $5 \log_6 (x+3) - [2 \log_6 (7x+1) + 3 \log_6 x]$

45. $4 \log_6 3 - [2 \log_6 (x+3) + 4 \log_6 x]$

46. $2 \log_7 (m-4) + 3 \log_7 (m+3) - [5 \log_7 2 + 3 \log_7 (m-2)]$

Determine el valor escribiendo cada argumento mediante los números 2 y/o 5 y usando los valores $\log_a 2 = 0.3010$ *y* $\log_a 5 = 0.6990$.

47. $\log_a 10$

48. $\log_a 2.5$

49. $\log_a 0.4$

50. $\log_a \dfrac{1}{8}$

51. $\log_a 25$

52. $\log_a \sqrt[3]{5}$

Evalúe (vea el ejemplo 4).

53. $5^{\log_5 10}$

54. $\log_3 3$

55. $(2^3)^{\log_8 7}$

56. $\log_8 64$

57. $\log_3 27$

58. $2 \log_9 \sqrt{9}$

59. $5(\sqrt[3]{27})^{\log_3 5}$

60. $\dfrac{1}{2} \log_6 \sqrt[3]{6}$

Resolución de problemas

61. Para $x > 0$ y $y > 0$, ¿se cumple $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a xy^{-1} = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x + \log_a \dfrac{1}{y}$?

62. Lea el ejercicio 61. De acuerdo con la regla del cociente, $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. ¿Podemos concluir por lo tanto que $\log_a x - \log_a y = \log_a x + \log_a \dfrac{1}{y}$?

63. Utilice la regla del producto para demostrar que
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a \frac{1}{y}$$

64. **a)** Explique por qué
$$\log_a \frac{3}{xy} \neq \log_a 3 - \log_a x + \log_a y$$
b) Desarrolle de forma correcta $\log_a \dfrac{3}{xy}$.

65. Exprese $\log_a(x^2 - 4) - \log_a(x + 2)$ como un solo logaritmo y simplifique.

66. Exprese $\log_a(x - 3) - \log_a(x^2 + 5x - 24)$ como un solo logaritmo y simplifique.

67. ¿Es $\log_a(x^2 + 8x + 16) = 2\log_a(x + 4)$? Explique.

68. ¿Es $\log_a(4x^2 - 20x + 25) = 2\log_a(2x - 5)$? Explique.

Si $\log_{10} x = 0.4320$, *determine el valor de las siguientes expresiones.*

69. $\log_{10} x^2$

70. $\log_{10} \sqrt[3]{x}$

71. $\log_{10} \sqrt[4]{x}$

72. $\log_{10} x^{11}$

Si $\log_{10} x = 0.5000$ *y* $\log_{10} y = 0.2000$, *determine*:

73. $\log_{10} xy$

74. $\log_{10}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

75. Usando la información dada en las instrucciones para los ejercicios 73 y 74, ¿es posible determinar $\log_{10}(x + y)$? Explique.

76. ¿Son iguales las gráficas de $y = \log_b x^2$ y $y = 2\log_b x$? Explique su respuesta analizando los dominios de cada ecuación.

Utilice las propiedades 1 a 3 para desarrollar.

77. $\log_2 \dfrac{\sqrt[4]{xy}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{a - b}}$

78. $\log_3\left[\dfrac{(a^2 + b^2)(c^2)}{(a - b)(b + c)(c + d)}\right]^2$

79. Demuestre la regla del cociente para logaritmos.

80. Demuestre la regla de la potencia para logaritmos.

Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan el ejercicio 81.

81. Consideren $\log_a \dfrac{\sqrt{x^4 y}}{\sqrt{xy^3}}$, en donde $x > 0$ y $y > 0$.

a) Miembro 1: Desarrolle la expresión mediante la regla del cociente.

b) Miembro 2: Desarrolle la expresión mediante la regla del producto.

c) Miembro 3: Simplifique primero $\dfrac{\sqrt{x^4 y}}{\sqrt{xy^3}}$, y luego desarrolle el logaritmo resultante.

d) Comprueben cada uno el trabajo de los demás y asegúrense de que todas las respuestas sean correctas. ¿Estas expresiones pueden simplificarse por los tres métodos?

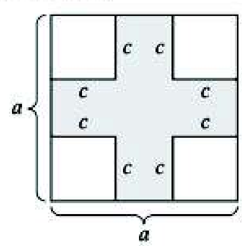
Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] **82.** Resuelva la desigualdad $\dfrac{x - 4}{2} - \dfrac{2x - 5}{5} > 3$ e indique la solución en

a) notación constructiva de conjuntos.

b) notación de intervalos.

[5.7] **83.** **a)** Escriba una expresión para determinar el área sombreada de la figura.



b) Escriba la expresión de la parte **a)** en forma factorizada.

[6.4] **84.** Despeje x en $\dfrac{15}{x} + \dfrac{9x - 7}{x + 2} = 9$.

[7.7] **85.** Multiplique $(3i + 4)(2i - 5)$.

[8.4] **86.** Despeje a en $a - 6\sqrt{a} = 7$.

Examen de mitad de capítulo: 9.1-9.4

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en donde se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

1. a) Explique cómo determinar $(f \circ g)(x)$.

b) Si $f(x) = 3x + 3$ y $g(x) = 2x + 5$, determine $(f \circ g)(x)$.

2. Sea $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = \dfrac{6}{x}$; determine

a) $(f \circ g)(x)$

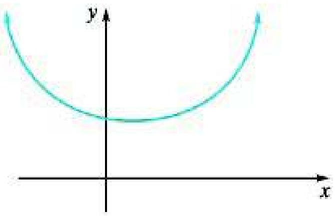
b) $(f \circ g)(3)$

c) $(g \circ f)(x)$

d) $(g \circ f)(3)$

3. **a)** Explique lo que significa que una función sea uno a uno (o inyectiva).

b) ¿La función representada mediante la gráfica siguiente es uno a uno? Explique.



En los ejercicios del 4 al 6, para cada función, **a)** *determine si es una función uno a uno;* **b)** *si es una función uno a uno, determine su función inversa.*

4. $\{(-3, 2), (2, 3), (5, 1), (6, 8)\}$

5. $p(x) = \frac{1}{3}x - 5$

6. $k(x) = \sqrt{x - 4}, \quad x \geq 4$

7. Sea $m(x) = -2x + 4$. Determine $m^{-1}(x)$ y luego, en los mismos ejes, grafique $m(x)$ y $m^{-1}(x)$.

Grafique cada función exponencial.

8. $y = 2^x$

9. $y = 3^{-x}$

10. Grafique la función logarítmica $y = \log_2 x$.

11. **Bacterias** El número de bacterias en una placa de Petri es $N(t) = 5(2)^t$, donde t es el número de horas a partir que se colocaron 5 bacterias en la placa. ¿Cuántas bacterias hay en la placa

a) al cabo de una hora?

b) 6 horas después?

12. Escriba en forma logarítmica $27^{2/3} = 9$.

13. Escriba $\log_2 \frac{1}{64} = -6$ en forma exponencial.

14. Evalúe $\log_5 125$.

15. Resuelva la ecuación $\log_{1/4} \frac{1}{16} = x$ para x.

16. Resuelva la ecuación $\log_x 64 = 3$ para x.

Utilice las propiedades 1 a 3 para escribir como una suma o diferencia de logaritmos.

17. $\log_9 x^2(x - 5)$

18. $\log_5 \frac{7m}{\sqrt{n}}$

Escriba como un solo logaritmo.

19. $3 \log_2 x + \log_2 (x + 7) - 4 \log_2 (x + 1)$

20. $\frac{1}{2}[\log_7 (x + 2) - \log_7 x]$

9.5 Logaritmos comunes

1 Determinar logaritmos comunes de potencias de 10.

2 Determinar logaritmos comunes.

3 Determinar antilogaritmos.

1 Determinar logaritmos comunes de potencias de 10

Las propiedades que analizamos en la sección 9.4 pueden usarse con cualquier base válida (un número real mayor que 0 y distinto de 1). Sin embargo, como estamos acostumbrados a trabajar con la base 10, muchas veces utilizaremos dicha base al realizar cálculos con logaritmos. Los **logaritmos de base 10** se denominan **logaritmos comunes**. Cuando trabajemos con logaritmos comunes no es necesario indicar la base; por lo tanto, $\log x$ significa $\log_{10} x$.

A continuación se escriben las propiedades de los logaritmos en términos de logaritmos comunes. Para números reales positivos x y y y cualquier número real n.

1. $\log xy = \log x + \log y$

2. $\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$

3. $\log x^n = n \log x$

Los logaritmos de casi todos los números son números irracionales. Incluso los valores dados por calculadoras por lo regular sólo son aproximaciones a los números reales. *Aunque trabajemos con aproximaciones al evaluar casi todos los logaritmos, por lo general escribimos el logaritmo con un signo igual.* Así, en lugar de escribir $\log 6 \approx 0.77815$, escribiremos $\log 6 = 0.77815$. Los valores que damos para los logaritmos son precisos, al menos hasta cuatro decimales.

En el capítulo 1 aprendimos que 1 puede expresarse como 10^0, y que 10 puede expresarse como 10^1. De acuerdo con esto, ya que 5 está entre 1 y 10, entonces también debe estar entre 10^0 y 10^1.

$$1 < 5 < 10$$
$$10^0 < 5 < 10^1$$

El número 5 puede expresarse como la base 10 elevada a un exponente entre 0 y 1. El número 5 es aproximadamente igual a $10^{0.69897}$. Al igual que en el caso de los logaritmos, al escribir expresiones exponenciales con frecuencia usaremos el signo igual, aunque los valores sólo son aproximaciones. Así, por ejemplo, generalmente escribiremos $10^{0.69897} = 5$ en lugar de $10^{0.69897} \approx 5$.

Si evalúa log 5 en una calculadora, como se explicará en breve, ésta mostrará el valor aproximado 0.69897. Observe que

$$\log 5 = \boxed{0.69897} \quad \text{y} \quad 5 = 10^{\boxed{0.69897}}$$

Podemos ver que *el logaritmo común*, 0.69897, *es el exponente* de la base 10. Ahora estamos preparados para definir los logaritmos comunes.

Logaritmos comunes

El **logaritmo común** de un número real positivo es el *exponente* al que se debe elevar la base 10 para obtener el número.

$$\text{Si } \log N = L, \text{entonces } 10^L = N.$$

Por ejemplo, si $\log 5 = 0.69897$, entonces $10^{0.69897} = 5$.

Ahora considere el número 50.

$$10 < 50 < 100$$
$$10^1 < 50 < 10^2$$

El número 50 puede expresarse como la base 10 elevada a un exponente entre 1 y 2. El número $50 = 10^{1.69897}$; por lo tanto, $\log 50 = 1.69897$.

2 Determinar logaritmos comunes

Para determinar logaritmos comunes de números, podemos utilizar una calculadora que tenga la tecla de logaritmo, $\boxed{\text{LOG}}$.

CÓMO USAR SU CALCULADORA Determinación de logaritmos comunes

Calculadora científica

Para determinar logaritmos comunes, ingrese el número y luego presione la tecla de logaritmo.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determinar log 400	400 $\boxed{\text{LOG}}$	2.60206
Determinar log 0.0538	0.0538 $\boxed{\text{LOG}}$	−1.2692177

Calculadora graficadora

En algunas calculadoras graficadoras, primero se tiene que presionar la tecla $\boxed{\text{LOG}}$ y luego ingresar el número. Por ejemplo, en la TI-84 Plus, se debe hacer lo siguiente:

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determinar log 400	$\boxed{\text{LOG}}$ (400 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	2.602059991

↑ Generado por la calculadora

EJEMPLO 1 Determine el exponente al que debe elevarse la base 10 para obtener el número 43,600.

Solución *Se nos ha pedido determinar el exponente, que es un logaritmo*. Necesitamos determinar log 43,600. Mediante una calculadora, encontramos

$$\log 43{,}600 = 4.6394865$$

Por lo tanto, el exponente es 4.6394865. Observe que $10^{4.6394865} = 43{,}600$.

Ahora resuelva el ejercicio 7

3 Determinar antilogaritmos

La pregunta que ahora debemos responder es: "si conocemos el logaritmo común de un número, ¿cómo determinamos el número?" Por ejemplo, si $\log N = 3.406$, ¿cuál es el valor de N? Para determinar N, el número, necesitamos determinar primero el valor de $10^{3.406}$. Como

$$10^{3.406} = 2546.830253$$

$N = 2546.830253$. Este número es el *antilogaritmo* de 3.406.

Cuando determinamos el valor del número a partir del logaritmo, decimos que encontramos el **antilogaritmo** o **logaritmo inverso**. Si el logaritmo de N es L, entonces N es el antilogaritmo o logaritmo inverso de L.

Antilogaritmo

Si $\log N = L$, entonces $N = \text{antilog } L$.

Cuando nos dan el logaritmo común, que es el exponente de la base 10, el *antilogaritmo es el número* que se obtiene cuando la base 10 se eleva a ese exponente.

Ejemplos

$$\underbrace{\log 962}_{\text{Número}} = \underbrace{2.9831751}_{\text{Exponente}} \qquad \text{antilog } \underbrace{2.9831751}_{\text{Exponente}} = \underbrace{962}_{\text{Número}}$$

$$\underbrace{\log 0.00046}_{\text{Número}} = \underbrace{-3.3372422}_{\text{Exponente}} \qquad \text{antilog } (\underbrace{-3.3372422}_{\text{Exponente}}) = \underbrace{0.00046}_{\text{Número}}$$

Al determinar un antilogaritmo, empezamos con el logaritmo, o el exponente, y terminamos con el número igual a 10 elevado a ese logaritmo o exponente. Si antilog $(-3.3372422) = 0.00046$ entonces $10^{-3.3372422} = 0.00046$.

CÓMO USAR SU CALCULADORA Determinación de logaritmos

Calculadora científica

Para determinar antilogaritmos en una calculadora científica, introduzca el logaritmo y presione la tecla $\boxed{\text{2nd}}$, $\boxed{\text{INV}}$ o $\boxed{\text{Shift}}$ dependiendo de cual de ellas tenga su calculadora. Luego presione la tecla $\boxed{\text{LOG}}$ Después de presionar la tecla $\boxed{\text{LOG}}$, se desplegará el antilogaritmo.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determinar antilog 2.9831751.	2.9831751 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{LOG}}$	962.00006*
Determinar antilog (–3.3372422)	3.3372422 $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{LOG}}$	0.00046**

Cuando se quiere determinar el antilogaritmo de un valor negativo, primero hay que introducir el valor y luego presionar la tecla $\boxed{+/-}$ antes de presionar las teclas de la inversa y de logaritmo.

* Algunas calculadoras dan respuestas ligeramente diferentes, dependiendo de su electrónica.
** Algunas calculadoras pueden mostrar las respuestas en notación científica.

Calculadora graficadora

En casi todas las calculadoras graficadoras, para obtener un antilogaritmo hay que presionar la tecla $\boxed{\text{2nd}}$ y luego la tecla $\boxed{\text{LOG}}$ antes de ingresar el logaritmo.

En la TI-84 Plus y en algunas otras calculadoras, 10^x se encuentra impreso directamente arriba de la tecla $\boxed{\text{LOG}}$. En realidad, el antilogaritmo es el valor de 10^x, en donde x es el logaritmo. En la TI-84 Plus, cuando se presiona $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{LOG}}$, en la pantalla aparece 10^ seguido de un paréntesis izquierdo. Entonces se ingresa el logaritmo seguido por la tecla $\boxed{)}$. El antilogaritmo aparecerá en la pantalla después de presionar la tecla $\boxed{\text{ENTER}}$.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determinar antilog 2.9831751	$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{LOG}}$† (2.9831751 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	962.0000619
Determinar antilog (−3.3372422).	$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{LOG}}$ ($\boxed{(-)}$ 3.3372422 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{ENTER}}$	4.599999664E⁻4††

†La TI-84 Plus genera automáticamente el paréntesis izquierdo.
††Recuerde que este número es 0.0004599999664, sólo que está escrito en notación científica.

En vista de que por lo común no necesitamos toda la precisión que proporcionan casi todas las calculadoras, en el siguiente conjunto de ejercicios redondearemos los logaritmos a cuatro decimales y los antilogaritmos a tres **dígitos significativos**. En un número escrito en forma decimal, todos los ceros que preceden al primer dígito distinto de cero son dígitos no significativos. El primer dígito distinto de cero de izquierda a derecha en un número, es el primer dígito significativo.

Ejemplos

0.0063402	El primer dígito significativo aparece sombreado.
3.0424080	Los tres primeros dígitos significativos aparecen sombreados.
0.0000138483	Los tres primeros dígitos significativos aparecen sombreados.
206,435.05	Los cuatro primeros dígitos significativos aparecen sombreados.

Aunque casi todos los antilogaritmos serán números irracionales, cuando los escribamos utilizaremos un signo de igual en lugar de un signo de aproximadamente igual, como hicimos al evaluar logaritmos. Todos los antilogaritmos se aproximarán a tres dígitos significativos, por lo menos.

EJEMPLO 2 Determine el valor obtenido cuando la base 10 se eleva a la potencia -1.052.

Solución Se nos pide determinar el valor de $10^{-1.052}$. Como nos dieron el exponente, o logaritmo, podemos determinar el valor tomando el antilogaritmo de -1.052.

$$\text{antilog }(-1.052) = 0.0887156$$

Por lo tanto, $10^{-1.052} = 0.0887$, redondeado a tres dígitos significativos.

Ahora resuelva el ejercicio 55

EJEMPLO 3 Si $\log N = 4.192$, determine N.

Solución Se nos ha dado el logaritmo y nos piden determinar el antilogaritmo, o el número N.

$$\text{antilog } 4.192 = 15{,}559.6563$$

Así, $N = 15{,}559.6563$.

Ahora resuelva el ejercicio 33

EJEMPLO 4 Determine los siguientes antilogaritmos; redondee las respuestas a tres dígitos significativos.

a) antilog 6.827 **b)** antilog (-2.35)

Solución

a) Con una calculadora, determinamos que $6.827 = 6{,}714{,}288.5$, al redondear a tres dígitos significativos, obtenemos antilog $6.827 = 6{,}710{,}000$.

b) Con ayuda de una calculadora, determinamos que antilog $(-2.35) = 0.0044668$. Al redondear a tres dígitos significativos, obtenemos antilog $(-2.35) = 0.00447$.

Ahora resuelva el ejercicio 25

EJEMPLO 5 **Terremoto** En la escala Richter, la magnitud de un terremoto está dada por la fórmula $R = \log I$, donde I es el número de veces que es más intenso el sismo respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse. ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 6.2 en la escala Richter que la actividad sísmica más pequeña que puede medirse?

Solución Queremos determinar el valor de I; se nos ha dicho que $R = 6.2$. Al sustituir 6.2 por R en la fórmula $R = \log I$, y después de despejar I, tenemos

$$R = \log I$$
$$6.2 = \log I \qquad \text{Sustituir } R \text{ por } 6.2.$$

Para determinar I necesitamos tomar el antilogaritmo en ambos lados de la ecuación.

$$\text{antilog } 6.2 = I$$
$$1,580,000 = I$$

Por lo tanto, este terremoto es aproximadamente 1,580,000 veces más intenso que la actividad sísmica más pequeña que puede medirse.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 85

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.5

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué son los logaritmos comunes?
2. Escriba $\log N = L$ en forma exponencial.
3. ¿Qué son los antilogaritmos?
4. Si $\log 793 = 2.8993$, ¿cuál es el antilog 2.8993?

Práctica de habilidades

Determine el logaritmo común de cada número. Redondee la respuesta a cuatro decimales.

5. 86
6. 352
7. 19,200
8. 1000
9. 0.0613
10. 941,000
11. 100
12. 0.000835
13. 3.75
14. 0.375
15. 0.0173
16. 0.00872

Determine el antilogaritmo de cada logaritmo. Redondee la respuesta a tres dígitos significativos.

17. 0.2137
18. 1.3845
19. 4.6283
20. 3.5527
21. -1.7086
22. -3.7431
23. 0.0000
24. 5.5922
25. 2.7625
26. -0.1543
27. -4.1390
28. -2.8139

Determine cada número N, redondéelo a tres dígitos significativos.

29. $\log N = 2.0000$
30. $\log N = 1.4612$
31. $\log N = 3.3817$
32. $\log N = 1.9330$
33. $\log N = 4.1409$
34. $\log N = -2.103$
35. $\log N = -1.06$
36. $\log N = -3.1469$
37. $\log N = -0.6218$
38. $\log N = 1.5177$
39. $\log N = -0.1256$
40. $\log N = -1.3206$

¿A qué exponente debe elevarse la base 10 para obtener cada uno de los siguientes números? Redondee su respuesta a cuatro decimales.

41. 3560
42. 817,000
43. 0.0727
44. 0.00612
45. 243
46. 8.16
47. 0.00592
48. 73,700,000

Determine el valor de 10 cuando se le eleva a los siguientes exponentes. Redondee su respuesta a tres dígitos significativos.

49. 2.8316
50. 3.2473
51. -0.5186
52. -3.7081
53. -1.4802
54. 4.5619
55. 1.3503
56. -2.1918

Cambiando de la forma logarítmica a la forma exponencial, evalúe el logaritmo común sin utilizar una calculadora.

57. $\log 1$
58. $\log 100$
59. $\log 0.1$
60. $\log 1000$
61. $\log 0.01$
62. $\log 10$
63. $\log 0.001$
64. 0.0001

En la sección 9.4 se estableció que para $a > 0$ y $a \neq 1$, $\log_a a^x = x$ y $a^{\log_a x} = x$ $(x > 0)$. Al rescribir estas propiedades con logaritmos comunes $(a = 10)$, obtenemos $\log 10^x = x$ y $10^{\log x} = x$ $(x > 0)$, respectivamente. Utilice estas propiedades para evaluar lo siguiente.

65. $\log 10^7$
66. $\log 10^{3.4}$
67. $10^{\log 7}$
68. $10^{\log 3.4}$
69. $4 \log 10^{5.2}$
70. $8 \log 10^{1.2}$
71. $5(10^{\log 8.3})$
72. $2.3(10^{\log 5.2})$

Resolución de problemas

73. Suponga que utilizó su calculadora para obtener log 462, y el resultado fue 1.6646. ¿Este valor puede ser correcto? Explique.
74. Suponga que utilizó su calculadora para obtener log 6250, y el resultado fue 2.7589. ¿Este valor puede ser correcto? Explique.

75. Con su calculadora, calculó log 0.163 y obtuvo el valor −2.7878. ¿Este valor puede ser correcto? Explique.

76. Suponga que utilizó su calculadora para obtener log(−1.23), y el resultado fue 0.08991. ¿Este valor puede ser correcto? Explique.

77. ¿Es $\log \frac{y}{4x} = \log y - \log 4 + \log x$? Explique.

78. ¿Es $\log \frac{5x^2}{3} = 2(\log 5 + \log x) - \log 3$? Explique.

Si $\log 25 = 1.3979$ *y* $\log 5 = 0.6990$, *determine la respuesta, si esto es posible; en caso de que no sea posible determinar la respuesta, indíquelo. No determine los logaritmos con su calculadora. Utilícela solamente para verificar las respuestas.*

79. log 125

80. log 35

81. $\log \frac{1}{5}$

82. $\log \frac{1}{25}$

83. log 625

84. $\log \sqrt{5}$

Resuelva los ejercicios 85 a 88 mediante $R = \log I$, *(vea el ejemplo 5). Redondee sus respuestas a tres dígitos significativos.*

85. Determine I si $R = 3.4$

86. Determine I si $R = 4.9$

87. Determine I si $R = 5.7$

88. Determine I si $R = 8.1$

89. Astronomía Los astrónomos utilizan la fórmula siguiente para determinar el diámetro, en kilómetros, de planetas menores (también llamados asteroides): $\log d = 3.7 - 0.2g$, donde g es una cantidad llamada magnitud absoluta del asteroide. Determine el diámetro de un asteroide si su magnitud absoluta es **a)** 11 y **b)** 20. **c)** Determine la magnitud absoluta de un asteroide cuyo diámetro mide 5.8 kilómetros.

90. Exámenes La calificación promedio en un examen es una función del número de horas dedicadas a estudiar para presentarlo. La calificación promedio, $f(x)$, en puntos, puede calcularse mediante $f(x) = \log 0.3x + 1.8$, donde x es el número de horas dedicadas a estudiar para presentarlo. La calificación máxima posible en el examen es 4.0. Determine la calificación que recibe una persona que dedicó al estudió **a)** 15 horas, **b)** 55 horas.

91. Retención de conocimientos Sammy Barcia acaba de terminar un curso de biología. El porcentaje del curso que él recordará dentro de t meses puede calcularse mediante la función

$$R(t) = 94 - 46.8 \log(t + 1)$$

para $0 \le t \le 48$. Determine el porcentaje del curso que Sammy recordará, dentro de **a)** 2 meses y **b)** 48 meses.

92. Retención de conocimientos Karen Frye acaba de terminar un curso de psicología. El porcentaje del curso que recordará dentro de t meses puede calcularse mediante la función

$$R(t) = 85 - 41.9 \log(t + 1)$$

para $0 \le t \le 48$. Determine el porcentaje del curso que Karen recordará dentro de **a)** 10 meses, y **b)** 25 meses.

93. Terremoto ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto de 4.6 grados en la escala Richter, respecto de la actividad sísmica más pequeña que puede medirse? Vea el ejemplo 5.

94. Vehículos deportivos En Estados Unidos, las ventas de automóviles deportivos han ido aumentando desde 1992. El número de ventas de cada año, $f(t)$, en millones, puede aproximarse mediante la función $f(t) = 0.98 + 1.97 \log(t + 1)$, donde $t = 0$ representa a 1992, $t = 1$ representa a 1993, y así sucesivamente. Si esta tendencia continúa, calcule el número de automóviles deportivos vendidos en **a)** 2003, **b)** 2008.

95. Energía de un terremoto Una fórmula que se utiliza en ocasiones para calcular la energía sísmica liberada por un terremoto es $\log E = 11.8 + 1.5m_s$, donde E es la energía sísmica y m_s es la magnitud de la superficie de la onda.

a) Determine la energía liberada por un terremoto cuya magnitud de la superficie de la onda es 6.

b) Si la energía liberada durante un terremoto es 1.2×10^{15}, ¿cuál es la magnitud de la superficie de la onda?

96. Presión del sonido El nivel de la presión del sonido, s_p, está dada por la fórmula $s_p = 20 \log \frac{p_r}{0.0002}$, donde p_r es la presión del sonido en dinas/cm^2.

a) Determine el nivel si la presión del sonido es de 0.0036 dinas/cm^2.

b) Si el nivel es 10.0, determine la presión del sonido.

97. Terremoto La escala Richter, usada para medir la intensidad (o fuerza) de los terremotos, relaciona la magnitud, M, del terremoto con la energía que libera, E, en ergios, mediante la fórmula

$$M = \frac{\log E - 11.8}{1.5}$$

Si un terremoto libera 1.259×10^{21} ergios de energía, ¿cuál es su magnitud en la escala Richter?

98. pH de una solución El pH es una medida de la acidez o alcalinidad de una solución. Por ejemplo, el pH del agua es 7. En general, las soluciones ácidas tienen números de pH menores que 7, y las soluciones alcalinas mayores que 7. El pH de una solución se define como $\text{pH} = -\log[H_3O^+]$, donde H_3O^+ representa la concentración de ión hidronio en la solución. Determine el pH de una solución cuya concentración de ión hidronio es 2.8×10^{-3}.

Retos

99. Despeje I en la fórmula $R = \log I$.

100. Despeje E en la fórmula $\log E = 11.8 + 1.5m$.

101. Despeje t en la fórmula $R = 26 - 41.9 \log (t + 1)$.

102. Despeje x en la fórmula $f = 76 - \log x$.

Actividad en grupo

103. En la sección 9.7 analizaremos la *fórmula de cambio de base*, $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, donde a y b son bases y x es un número positivo.

a) Miembro 1 del grupo: Utilice la fórmula de cambio de base para evaluar $\log_3 45$. (*Pista:* Haga $b = 10$).

b) Miembro 2: Repita la parte **a)** para $\log_5 30$.

c) Miembro 3: Repita la parte **a)** para $\log_6 40$.

d) Utilicen el hecho de que $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, donde $b = 10$, para graficar en equipo la ecuación $y = \log_2 x$ para $x > 0$. Si tienen una calculadora graficadora, utilícenla.

Ejercicios de repaso acumulativo

[4.3] **104. Automóviles** Dos automóviles parten del mismo punto y viajan en direcciones opuestas. Uno viaja 5 millas por hora más rápido que el otro. Al cabo de 4 horas, los dos automóviles están separados por una distancia de 420 millas. Determine la velocidad de cada automóvil.

[4.5] **105.** Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3r &= -4s - 6 \\ 3s &= -5r + 1 \end{aligned}$$

[5.8] **106.** Despeje x en la ecuación $3x^3 + 3x^2 - 36x = 0$.

[7.1] **107.** Escriba $\sqrt{(3x^2 - y)^2}$ como un valor absoluto.

[8.6] **108.** Resuelva $(x - 5)(x + 4)(x - 2) \leq 0$ y proporcione la solución en notación de intervalos.

9.6 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

1 Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

2 Resolver aplicaciones.

1 Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En las secciones 9.2 y 9.3 hablamos de las **ecuaciones exponenciales** y **logarítmicas**; en ésta daremos más ejemplos de su uso, y analizaremos procedimientos adicionales para resolver tales ecuaciones.

Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, con frecuencia utilizamos las propiedades siguientes.

Propiedades para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

a. Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$.

b. Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$.

c. Si $x = y$, entonces $\log_b x = \log_b y$ $(x > 0, y > 0)$.

d. Si $\log_b x = \log_b y$, entonces $x = y$ $(x > 0, y > 0)$. **Propiedades 6a a 6d**

Cuando expliquemos cómo resolver los ejemplos de esta sección, haremos referencia a estas propiedades.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $8^x = \dfrac{1}{2}$.

Solución Para resolver esta ecuación escribimos ambos lados con la misma base, 2, y luego utilizamos la propiedad 6b.

$$8^x = \frac{1}{2}$$

$$(2^3)^x = \frac{1}{2} \qquad \textit{Escribir 8 como } 2^3.$$

$$2^{3x} = 2^{-1} \qquad \textit{Escribir } \frac{1}{2} \textit{ como } 2^{-1}.$$

Usando la propiedad 6b, podemos escribir

$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

Ahora resuelva el ejercicio 7

Cuando ninguno de los dos lados de la ecuación exponencial pueden escribirse como una potencia de la misma base, con frecuencia empezamos tomando logaritmos de ambos lados de la ecuación, como en el ejemplo 2. En los ejemplos siguientes redondearemos los logaritmos al diezmilésimo más cercano.

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva la ecuación $5^n = 28$.

Solución Tome el logaritmo de ambos lados de la ecuación y despeje n.

$$\log 5^n = \log 28$$
$$n \log 5 = \log 28 \qquad \text{Regla de la potencia.}$$
$$n = \frac{\log 28}{\log 5} \qquad \text{Dividir ambos lados entre log 5.}$$
$$\approx \frac{1.4472}{0.6990} \approx 2.0704$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 23

Algunas ecuaciones logarítmicas pueden resolverse expresándolas en forma exponencial. Pero recuerde: **es necesario comprobar las ecuaciones logarítmicas para ver si tienen soluciones extrañas**. Si al verificar una solución se obtiene el logaritmo de un número no positivo, significa que ésta es extraña.

EJEMPLO 3 ▸ Resuelva la ecuación $\log_2 (x + 3)^3 = 4$.

Solución Escriba la ecuación en forma exponencial.

$$(x + 3)^3 = 2^4 \qquad \text{Escribir en forma exponencial.}$$
$$(x + 3)^3 = 16$$
$$x + 3 = \sqrt[3]{16} \qquad \text{Tomar la raíz cúbica de ambos lados.}$$
$$x = -3 + \sqrt[3]{16} \qquad \text{Despejar } x.$$

Compruebe

$$\log_2 (x + 3)^3 = 4$$
$$\log_2 [(-3 + \sqrt[3]{16}) + 3]^3 \stackrel{?}{=} 4$$
$$\log_2 (\sqrt[3]{16})^3 \stackrel{?}{=} 4$$
$$\log_2 16 \stackrel{?}{=} 4 \qquad (\sqrt[3]{16})^3 = 16$$
$$2^4 \stackrel{?}{=} 16 \qquad \text{Escribir en forma exponencial.}$$
$$16 = 16 \qquad \text{Verdadero}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 43

Otras ecuaciones logarítmicas pueden resolverse mediante las propiedades de los logaritmos explicadas en las secciones anteriores.

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $\log(3x+2)+\log 9=\log(x+5)$.

Solución

$$\begin{aligned}
\log(3x+2)+\log 9 &= \log(x+5) \\
\log[(3x+2)(9)] &= \log(x+5) && \text{Regla del producto.} \\
(3x+2)(9) &= (x+5) && \text{Propiedad 6d.} \\
27x+18 &= x+5 \\
26x+18 &= 5 \\
26x &= -13 \\
x &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Compruebe que la solución es $-\frac{1}{2}$.

Ahora resuelva el ejercicio 51

EJEMPLO 5 Resuelva la ecuación $\log x+\log(x+1)=\log 12$.

Solución

$$\begin{aligned}
\log x+\log(x+1) &= \log 12 \\
\log x(x+1) &= \log 12 && \text{Regla del producto.} \\
x(x+1) &= 12 && \text{Propiedad 6d.} \\
x^2+x &= 12 \\
x^2+x-12 &= 0 \\
(x+4)(x-3) &= 0
\end{aligned}$$

$$x+4=0 \quad \text{o} \quad x-3=0$$
$$x=-4 \qquad\qquad x=3$$

Compruebe $x=-4$

$$\begin{aligned}
\log x+\log(x+1) &= \log 12 \\
\log(-4)+\log(-4+1) &\stackrel{?}{=} \log 12 \\
\log(-4)+\log(-3) &\stackrel{?}{=} \log 12
\end{aligned}$$

¡Alto! Los logaritmos de números negativos no son números reales.

$x=3$

$$\begin{aligned}
\log x+\log(x+1) &= \log 12 \\
\log 3+\log(3+1) &\stackrel{?}{=} \log 12 \\
\log 3+\log 4 &\stackrel{?}{=} \log 12 \\
\log[(3)(4)] &\stackrel{?}{=} \log 12 \\
\log 12 &= \log 12 && \text{Verdadero}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, -4 es una solución extraña. La única solución es 3.

Ahora resuelva el ejercicio 65

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Hemos explicado cómo se pueden resolver de manera gráfica las ecuaciones con una variable. Las ecuaciones logarítmicas y exponenciales también pueden resolverse de forma gráfica; para hacerlo graficamos cada lado de la ecuación y determinamos la coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas. En el ejemplo 5 determinamos que la solución a la ecuación $\log x+\log(x+1)=\log 12$ es 3. La **figura 9.26** muestra la solución gráfica de esta ecuación. La recta horizontal es la gráfica de $y=\log 12$, ya que $\log 12$ es una constante. Observe que la coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas, 3, es la solución de la ecuación.

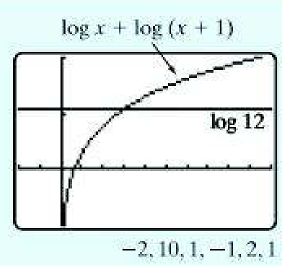


FIGURA 9.26

EJEMPLO 6 Resuelva la ecuación $\log(3x - 5) - \log 5x = 1.23$.

Solución

$$\log(3x - 5) - \log 5x = 1.23$$

$$\log \frac{3x-5}{5x} = 1.23 \quad \text{Regla del cociente.}$$

$$\frac{3x-5}{5x} = \text{antilog } 1.23 \quad \text{Tomar el antilogaritmo de ambos lados.}$$

$$\frac{3x-5}{5x} = 17.0 \quad \text{Redondear a tres dígitos significativos.}$$

$$3x - 5 = 5x(17.0) \quad \text{Multiplicar ambos lados por } 5x.$$

$$3x - 5 = 85x$$

$$-5 = 82x$$

$$x = -\frac{5}{82} \approx -0.061$$

Compruebe

$$\log(3x - 5) - \log 5x = 1.23$$

$$\log[3(-0.061) - 5] - \log[(5)(-0.061)] \stackrel{?}{=} 1.23$$

$$\log(-5.183) - \log(-0.305) \stackrel{?}{=} 1.23 \quad \text{¡Alto!}$$

Como tenemos logaritmos de números negativos, -0.061 es una solución extraña. Por lo tanto, esta ecuación no tiene solución o, en otras palabras, su solución es el conjunto vacío, Ø.

Ahora resuelva el ejercicio 57

Sugerencia útil

A continuación se muestran algunos de los pasos empleados en las soluciones de los ejemplos 3 y 6 de esta sección.

Ejemplo 3

$$\log_2 (x + 3)^3 = 4$$

$$(x + 3)^3 = 2^4 \quad \text{Escribir en forma exponencial.}$$

Ejemplo 6

$$\log \frac{3x-5}{5x} = 1.23$$

$$\frac{3x-5}{5x} = \text{antilog } 1.23 \quad \text{Tomar el antilogaritmo de ambos lados.}$$

Observe que en cada caso los pasos que se siguieron fueron distintos. En el ejemplo 3 escribimos la ecuación en forma exponencial, mientras que en el ejemplo 6 tomamos el antilogaritmo de ambos lados de la ecuación. En este último ejemplo también podríamos escribir el segundo paso (línea) como $10^{1.23} = \frac{3x-5}{5x}$, y luego evaluar $10^{1.23}$ en una calculadora para obtener 17.0 (redondeado a tres dígitos significativos). Entonces podríamos continuar determinando la solución. Sin embargo, como el ejemplo 6 está dado en la base 10, decidimos tomar sólo el antilogaritmo de ambos lados. Los antilogaritmos de base 10 son fáciles de evaluar con una calculadora. Puede resolver problemas similares al ejemplo 6 por medio de cualquier método.

2 Resolver aplicaciones

Veamos ahora una aplicación que incluye una ecuación exponencial.

EJEMPLO 7 **Bacterias** Si en un inicio hay 1000 bacterias en un cultivo, y este número se duplica cada hora, entonces el número de bacterias al cabo de t horas puede calcularse mediante la fórmula

$$N = 1000(2)^t$$

¿Cuánto tiempo tardará el cultivo en tener 30,000 bacterias?

Solución

$$\begin{aligned} N &= 1000(2)^t \\ 30{,}000 &= 1000(2)^t && \text{Sustituir } N \text{ por } 30{,}000. \\ 30 &= (2)^t && \text{Dividir ambos lados entre } 1000. \end{aligned}$$

Queremos determinar el valor de t; para hacerlo utilizaremos logaritmos. Comenzamos tomando el logaritmo de ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} \log 30 &= \log (2)^t \\ \log 30 &= t \log 2 && \text{Regla de la potencia.} \\ \frac{\log 30}{\log 2} &= t && \text{Dividir ambos lados entre } \log 2. \\ \frac{1.4771}{0.3010} &\approx t \\ 4.91 &\approx t \end{aligned}$$

Será necesario que transcurran casi 4.91 horas para que el cultivo tenga 30,000 bacterias.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.6

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Si $\log c = \log d$, ¿cuál es la relación entre c y d?
2. Si $c^r = c^s$, ¿cuál es la relación entre r y s?
3. ¿Qué se debe hacer después de resolver una ecuación logarítmica?
4. En las propiedades 6c y 6d, especificamos que x y y deben ser positivos. Explique por qué.
5. ¿Cómo puede darse cuenta rápidamente de que $\log (x + 4) = \log (-2)$ no tiene solución real?
6. ¿Puede $x = -1$ ser solución de la ecuación $\log_3 x + \log_3 (x - 8) = 2$? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva cada una de estas ecuaciones exponenciales sin utilizar la calculadora.

7. $5^x = 125$
8. $2^x = 128$
9. $3^x = 81$
10. $4^x = 256$
11. $64^x = 8$
12. $81^x = 3$
13. $7^{-x} = \frac{1}{49}$
14. $6^{-x} = \frac{1}{216}$
15. $27^x = \frac{1}{3}$
16. $25^x = \frac{1}{5}$
17. $2^{x+2} = 64$
18. $3^{x-6} = 81$
19. $2^{3x-2} = 128$
20. $64^x = 4^{4x+1}$
21. $27^x = 3^{2x+3}$
22. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$

Utilice la calculadora para resolver cada ecuación. Redondee sus respuestas al centésimo más cercano.

23. $7^x = 50$
24. $1.05^x = 23$
25. $4^{x-1} = 35$
26. $2.3^{x-1} = 26.2$
27. $1.63^{x+1} = 25$
28. $4^x = 9^{x-2}$
29. $3^{x+4} = 6^x$
30. $5^x = 2^{x+5}$

Resuelva cada ecuación logarítmica. Cuando lo considere apropiado, utilice una calculadora. Si la respuesta es irracional, redondee la respuesta al centésimo más cercano.

31. $\log_{36} x = \frac{1}{2}$
32. $\log_{81} x = \frac{1}{2}$
33. $\log_{125} x = \frac{1}{3}$
34. $\log_{81} x = \frac{1}{4}$
35. $\log_2 x = -4$
36. $\log_7 x = -2$
37. $\log x = 2$
38. $\log x = 4$
39. $\log_2 (5 - 3x) = 3$
40. $\log_4 (3x + 7) = 3$
41. $\log_5 (x + 1)^2 = 2$
42. $\log_3 (a - 2)^2 = 2$
43. $\log_2 (r + 4)^2 = 4$
44. $\log_2 (p - 3)^2 = 6$
45. $\log (x + 8) = 2$
46. $\log (3x - 8) = 1$
47. $\log_2 x + \log_2 5 = 2$
48. $\log_3 2x + \log_3 x = 4$

49. $\log(r + 2) = \log(3r - 1)$

50. $\log 2a = \log(1 - a)$

51. $\log(2x + 1) + \log 4 = \log(7x + 8)$

52. $\log(x - 5) + \log 3 = \log(2x)$

53. $\log n + \log(3n - 5) = \log 2$

54. $\log(x + 4) - \log x = \log(x + 1)$

55. $\log 6 + \log y = 0.72$

56. $\log(x + 4) - \log x = 1.22$

57. $2\log x - \log 9 = 2$

58. $\log 6000 - \log(x + 2) = 3.15$

59. $\log x + \log(x - 3) = 1$

60. $2\log_2 x = 4$

61. $\log x = \frac{1}{3}\log 64$

62. $\log_7 x = \frac{3}{2}\log_7 9$

63. $\log_8 x = 4\log_8 2 - \log_8 8$

64. $\log_4 x + \log_4(6x - 7) = \log_4 5$

65. $\log_5(x + 3) + \log_5(x - 2) = \log_5 6$

66. $\log_7(x + 6) - \log_7(x - 3) = \log_7 4$

67. $\log_2(x + 3) - \log_2(x - 6) = \log_2 4$

68. $\log(x - 7) - \log(x + 3) = \log 6$

Resolución de problemas

Resuelva cada problema. Redondee sus respuestas al centésimo más cercano.

69. Bacterias Si el número inicial de bacterias, en el cultivo del ejemplo 7, es 4500 bacterias, ¿cuándo habrá en él 50,000 bacterias? Utilice $N = 4500(2)^t$.

70. Bacterias Si después de 4 horas en un cultivo, en el que cada hora se duplica el número de bacterias, hay 2224 bacterias, ¿cuántas bacterias había al principio?

71. Decaimiento radiactivo La cantidad, A, de material radiactivo que queda al cabo de t años en una muestra de 200 gramos, puede determinarse mediante la ecuación $A = 200(0.75)^t$. ¿Cuándo quedarán 80 gramos?

72. Decaimiento radiactivo La cantidad, A, de material radiactivo que queda al cabo de t años en una muestra de 70 gramos, puede determinarse mediante la ecuación $A = 70(0.62)^t$. ¿Cuándo quedarán 10 gramos?

73. Cuenta de ahorros Paul Trapper invierte \$2000 en una cuenta de ahorros que genera interés a una tasa de 5% capitalizable anualmente. ¿Cuánto tiempo pasará para que los \$2000 se conviertan en \$4600? Utilice la fórmula de interés compuesto, $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, que se analizó en la página 606.

74. Cuenta de ahorros Si Tekar Werner invierte \$600 en una cuenta de ahorros que genera interés a una tasa de 6% capitalizable semestralmente, ¿cuánto tiempo pasará para que los \$600 se conviertan en \$1800?

75. Tasa de mortalidad infantil La tasa de mortalidad infantil (muertes por cada 1000 nacidos vivos) en Estados Unidos ha disminuido desde antes de 1959. (Aunque en otros países ha ocurrido lo mismo, la disminución ha sido menos significativa.) La tasa de mortalidad infantil en Estados Unidos puede calcularse mediante la función

$$f(t) = 26 - 12.1\log(t + 1)$$

donde t es el número de años a partir de 1960 y $0 \le t \le 45$. Utilice esta función para calcular la tasa de mortalidad infantil en Estados Unidos en **a)** 1990, **b)** 2005.

76. Homicidios A partir de 1993, el número de homicidios en la ciudad de Nueva York ha estado disminuyendo. El número de homicidios puede calcularse mediante la función

$$f(t) = 1997 - 1576\log(t + 1)$$

donde t es el número de años desde 1993. Si esta tendencia continúa, utilice esta función para calcular el número de homicidios en la ciudad de Nueva York en 2008.

77. Depreciación A fin de reducir el pago de impuestos, los empresarios acostumbran calcular la depreciación de la maquinaria de producción. El valor que tiene la maquinaria al final de su vida útil se denomina *valor de desecho*. Cuando la maquinaria se deprecia anualmente en un porcentaje fijo, su valor de desecho es $S = c(1 - r)^n$, donde c es el costo original, r es la tasa anual de depreciación, dada en forma decimal, y n es la vida útil en años. Determine el valor de desecho de una maquinaria que cuesta \$50,000, tiene una vida útil de 12 años y su tasa de depreciación anual es de 15%.

78. Depreciación Si la maquinaria del ejercicio 77 cuesta \$100,000, tiene una vida útil de 15 años y su tasa de depreciación anual es de 8%, determine su valor de desecho.

79. Ganancia de potencia de un amplificador La ganancia de potencia, P, de un amplificador se define como

$$P = 10\log\left(\frac{P_{sal}}{P_{ent}}\right)$$

donde P_{sal} es la potencia de salida y P_{ent} es la potencia de entrada, ambas en watts. Si un amplificador tiene una potencia de salida de 12.6 watts y una potencia de entrada de 0.146 watts, determine la ganancia de potencia.

80. **Terremoto** De acuerdo con la escala Richter, la magnitud, R, de un terremoto de intensidad I se define por $R = \log I$, donde I es el número de veces que es más intenso el terremoto respecto del nivel mínimo que se utiliza para comparar.

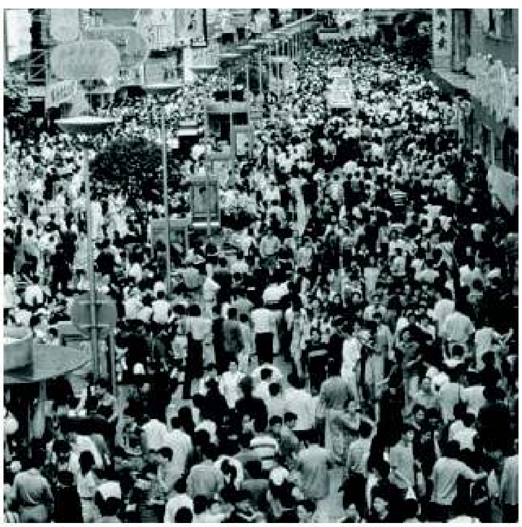
a) ¿Cuántas veces fue más intenso el terremoto de San Francisco, que midió 8.25 grados en la escala Richter, que el nivel mínimo de comparación?

b) ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 8.3 grados en la escala Richter que uno que mide 4.7?

81. **Magnitud del sonido** La escala de decibeles se utiliza para medir la magnitud del sonido. La magnitud d, en decibeles, de un sonido se define como $d = 10 \log I$, donde I es el número de veces que es más intenso respecto de la magnitud del mínimo sonido audible.

a) El sonido del motor de un aeroplano tiene una intensidad de casi 120 decibeles. ¿Cuántas veces es más intenso ese sonido que el mínimo sonido audible?

b) El ruido en la calle de una ciudad con tráfico tiene una intensidad de 50 decibeles. ¿Cuántas veces es más intenso el sonido del motor del aeroplano que el sonido de la calle de la ciudad?



82. En el siguiente procedimiento empezamos con una afirmación verdadera y terminamos con una falsa. ¿Puede encontrar el error?

$2 < 3$	*Verdadero.*
$2 \log (0.1) < 3 \log (0.1)$	*Multiplicar ambos lados por log (0.1).*
$\log (0.1)^2 < \log (0.1)^3$	*Propiedad 3*
$(0.1)^2 < (0.1)^3$	*Propiedad 6d*
$0.01 < 0.001$	*Falso.*

83. Resuelva $8^x = 16^{x-2}$.

84. Resuelva $27^x = 81^{x-3}$.

85. Utilice ecuaciones de forma cuadrática para resolver la ecuación $2^{2x} - 6(2^x) + 8 = 0$.

86. Utilice ecuaciones de forma cuadrática para resolver la ecuación $2^{2x} - 18(2^x) + 32 = 0$.

Cambie la ecuación exponencial o logarítmica a la forma $ax + by = c$, y luego resuelva el sistema de ecuaciones.

87. $2^x = 8^y$
$x + y = 4$

88. $3^{2x} = 9^{y+1}$
$x - 2y = -3$

89. $\log (x + y) = 2$
$x - y = 8$

90. $\log (x + y) = 3$
$2x - y = 5$

Utilice su calculadora para determinar las soluciones al décimo más cercano. Si no existe solución real, indíquelo.

91. $\log (x + 3) + \log x = \log 16$

92. $\log (3x + 5) = 2.3x - 6.4$

93. $5.6 \log (5x - 12) = 2.3 \log (x - 5.4)$

94. $5.6 \log (x + 12.2) - 1.6 \log (x - 4) = 20.3 \log (2x - 6)$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **95.** Considere las dos figuras siguientes. ¿Cuál tiene mayor volumen y por cuánto es mayor?

[3.6] **96.** Sea $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = x - 1$. Determine $(g - f)(3)$.

[4.6] **97.** Determine el conjunto solución del sistema de desigualdades.

$$3x - 4y \leq 6$$
$$y > -x + 4$$

[7.5] **98.** Simplifique $\dfrac{2\sqrt{xy} - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

[8.3] **99.** Despeje c en $E = mc^2$.

[8.5] **100.** Escriba la función para la parábola que tiene la forma de $f(x) = 2x^2$ y vértice en $(3, -5)$.

9.7 Función exponencial natural y función logaritmo natural

1 Identificar la función exponencial natural.
2 Identificar la función logaritmo natural.
3 Determinar valores mediante una calculadora.
4 Determinar logaritmos naturales mediante la fórmula de cambio de base.
5 Resolver ecuaciones logarítmicas naturales y exponenciales naturales.
6 Resolver problemas de aplicación.

La **función exponencial natural** y *su inversa*, la función **logarítmo natural**, son funciones exponenciales y funciones logarítmicas del tipo que se presentó en las secciones anteriores, así que comparten todas las propiedades que hemos venido analizando. La importancia de estas funciones especiales radica en la gran variedad de aplicaciones de la vida real de un número irracional único, designado por la letra e.

1 Identificar la función exponencial natural

En la sección 9.2 se indicó que las funciones exponenciales tienen la forma $f(x) = a^x$, $a > 0$ y $a \neq 1$. A continuación, sin embargo, presentaremos una función exponencial muy especial, denominada función exponencial natural, que utiliza el número $\boldsymbol{e}$. Al igual que el número irracional π, e es un número irracional cuyo valor sólo puede aproximarse mediante un número decimal. El número e desempeña un papel muy importante en cursos de matemáticas superiores, y su valor aproximado es de 2.7183. A continuación se define la función exponencial natural.

La función exponencial natural

La función exponencial natural es

$$f(x) = e^x$$

donde $e \approx 2.7183$.

2 Identificar la función logaritmo natural

En la sección 9.5 comentamos los logaritmos comunes; ahora analizaremos los logaritmos naturales.

Logaritmos naturales

Los **logaritmos naturales** son logaritmos de base e, y se indican mediante las letras ln.

$$\log_e x = \ln x$$

La notación $\ln x$ se lee el "logaritmo natural de x". La función $f(x) = \ln x$ se denomina **función logaritmo natural**.

Recuerde que la base del logaritmo natural es e y que, por lo tanto, cuando cambie un logaritmo natural a forma exponencial, la base de la expresión exponencial será e.

Logaritmo natural en forma exponencial

Para $x > 0$, si $y = \ln x$, entonces $e^y = x$.

EJEMPLO 1 Determine el valor de la expresión mediante el cambio de la forma logarítmica natural a la forma exponencial.

a) $\ln 1$ **b)** $\ln e$

Solución

a) Sea $y = \ln 1$; entonces $e^y = 1$. Como cualquier valor diferente de cero a la potencia cero es igual a 1, y debe ser igual a 0. Así, $\ln 1 = 0$.

b) Sea $y = \ln e$; entonces $e^y = e$, por lo que y debe ser igual a 1. Así, $\ln e = 1$.

Ahora resuelva el ejercicio 1

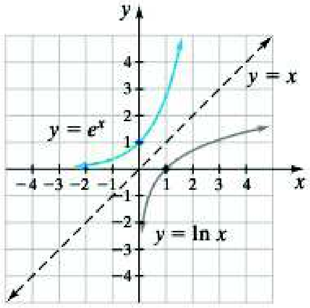


FIGURA 9.27

Las funciones $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas. De manera análoga, las funciones $y = e^x$ y $y = \ln x$ son funciones inversas. (Recuerde, $y = \ln x$ significa $y = \log_e x$.) Es decir, si $f(x) = e^x$, entonces $f^{-1}(x) = \ln x$.

Las gráficas de $y = e^x$ y $y = \ln x$ se ilustran en la **figura 9.27**. Observe que éstas son simétricas respecto de la recta $y = x$, tal como sucede con todas las funciones inversas.

Observe que la gráfica de $y = e^x$ es similar a las gráficas de la forma $y = a^x$, $a > 1$, y que la gráfica de $y = \ln x$ es similar a las gráficas de la forma $y = \log_a x$, $a > 1$.

3 Determinar valores mediante una calculadora

Ahora aprenderemos cómo determinar logaritmos naturales con una calculadora.

CÓMO USAR SU CALCULADORA Determinación de logaritmos naturales

Los logaritmos naturales pueden determinarse mediante una calculadora que tenga una tecla [LN] Para lograrlo, se sigue un procedimiento semejante al que realizamos para determinar logaritmos comunes, pero esta vez se debe utilizar la tecla del logaritmo natural, [LN], en lugar de la tecla del logaritmo común, [LOG].

Calculadora científica

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determine ln 242.	242 [LN]	5.4889377
Determine ln 0.85.	.85 [LN]	−0.1625189

Calculadora graficadora*

En la TI-84 Plus, después de presionar la tecla [LN] en la pantalla se muestra ln(.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determine ln 242.	[LN] (242 [)] [ENTER]	5.488937726
Determine ln 0.85.	[LN] (.85 [)] [ENTER]	−.1625189295

*Esta secuencia de teclas corresponde a la calculadora TI-84 Plus. Si usted tiene otro modelo de calculadora graficadora, lea su manual para aprender a determinar logaritmos naturales en ella.

Cuando determinamos el logaritmo natural de un número, estamos buscando un exponente. El logaritmo natural de un número es el exponente al que debe elevarse la base e para obtener ese número. Por ejemplo,

$$\text{Si } \ln 242 = 5.4889377, \text{ entonces } e^{5.4889377} = 242.$$
$$\text{Si } \ln 0.85 = -0.1625189, \text{ entonces } e^{-0.1625189} = 0.85.$$

Como $y = \ln x$ y $y = e^x$ son funciones inversas, podemos utilizar la tecla [INV], en combinación con la tecla del logaritmo natural, [LN], para obtener valores de e^x.

CÓMO USAR SU CALCULADORA Determinación de valores de e^x

Calculadora científica

Para determinar valores de e^x, primero introduzca el exponente de e y luego presione [shift], [2nd] o [INV], dependiendo de su calculadora. A continuación presione la tecla del logaritmo natural, [LN]. Después de que se presione la tecla [LN], el valor de e^x aparecerá en la pantalla.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determine $e^{5.24}$.	5.24 [INV] [LN]	188.6701
Determine $e^{-1.639}$.	1.639 [+/−] [INV] [LN]	0.1941741

Calculadora graficadora*

En la TI-84 Plus, después de presionar [2nd] [LN], en la pantalla se muestra e^.

EJEMPLO	TECLAS A PRESIONAR	RESPUESTA MOSTRADA
Determine $e^{5.24}$.	[2nd] [LN] (5.24 [)] [ENTER]	188.6701024
Determine $e^{-1.639}$.	[2nd] [LN] ([(−)] 1.639 [)] [ENTER]	.1941741194

*Esta secuencia de teclas corresponde a la calculadora TI-84 Plus. Si usted tiene otro modelo de calculadora graficadora, lea su manual para aprender a determinar expresiones exponenciales naturales en ella.

Recuerde que el valor de e es de aproximadamente 2.7183. Cuando evaluamos $e^{5.24}$ o $(2.7183)^{5.24}$ en el recuadro anterior, obtuvimos un valor cercano a 188.6701. Si determináramos ln 188.6701 en una calculadora, obtendríamos un valor cercano a 5.24. ¿Qué cree que obtendríamos si evaluáramos ln 0.1941741 en una calculadora? Si respondió, "un valor cercano a -1.639", lo hizo correctamente.

EJEMPLO 2 ▸ Determine N si **a)** $\ln N = 5.26$ y **b)** $\ln N = -0.0253$.

Solución

a) Si escribimos $\ln N = 5.26$ en forma exponencial, obtenemos $e^{5.26} = N$. Por lo tanto, sólo necesitamos evaluar $e^{5.26}$ para determinar N.

$$e^{5.26} = 192.48149 \qquad \textit{Con una calculadora.}$$

Por lo tanto, $N = 192.48149$.

b) Si escribimos $\ln N = -0.0253$ en forma exponencial, obtenemos $e^{-0.0253} = N$.

$$e^{-0.0253} = 0.9750174 \qquad \textit{Con una calculadora.}$$

Por lo tanto, $N = 0.9750174$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 19**

4 Determinar logaritmos naturales mediante la fórmula de cambio de base

Si le dan un logaritmo en una base diferente a 10 o e, no podrá evaluarlo directamente en su calculadora. Cuando esto ocurra, puede utilizar la **fórmula de cambio de base**.

Fórmula de cambio de base

Para cualesquiera bases de logaritmos a y b, y cualquier número positivo x,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Podemos demostrar la fórmula de cambio de base empezando con $\log_a x = m$.

$$\begin{aligned} \log_a x &= m && \\ a^m &= x && \textit{Cambiar a forma exponencial.} \\ \log_b a^m &= \log_b x && \textit{De acuerdo con la propiedad 6c de la página 630.} \\ m \log_b a &= \log_b x && \textit{Regla de la potencia.} \\ (\log_a x)(\log_b a) &= \log_b x && \textit{Sustituir } m. \\ \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a} && \textit{Dividir ambos lados entre } \log_b a. \end{aligned}$$

En la fórmula de cambio de base, con frecuencia se coloca 10 como valor de b, ya que podemos determinar más fácilmente los logaritmos comunes en una calculadora. Al reemplazar b con 10, obtenemos

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} \quad \text{o} \quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

EJEMPLO 3 ▸ Utilice la fórmula de cambio de base para determinar $\log_3 24$.

Solución Si sustituimos 3 por a y 24 por x en $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$, obtenemos

$$\log_3 24 = \frac{\log 24}{\log 3} \approx \frac{1.3802}{0.4771} \approx 2.8929$$

Observe que $3^{2.8929} \approx 24$.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 23**

Sugerencia útil

En el ejemplo 3, si calculamos los valores reales del cociente $\frac{\log 24}{\log 3}$ mediante una calculadora, el valor es ≈ 2.8928 en lugar del valor de ≈ 2.8929, que obtuvimos en el ejemplo 3. Para obtener la respuesta de ≈ 2.8929, dividimos la *aproximación* del numerador, 1.3802, entre la *aproximación* del denominador, 0.4771. Cuando, en la sección de respuestas, proporcionemos las respuestas a los ejercicios que incluyen la fórmula de cambio de base, *no* redondearemos los valores del numerador y del denominador. Sólo redondearemos la respuesta final.

Podemos utilizar el mismo procedimiento del ejemplo 3 para determinar logaritmos naturales mediante la fórmula de cambio de base. Por ejemplo, para evaluar ln 20 (o $\log_e 20$), podemos sustituir e por a y 20 por x en la fórmula $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$.

$$\log_e 20 = \frac{\log 20}{\log e} \approx \frac{1.3010}{0.4343} \approx 2.9956$$

Por lo tanto, $\ln 20 \approx 2.9956$. Si determina ln 20 en una calculadora, obtendrá un valor muy cercano.

Como $\log e \approx 0.4343$, para evaluar logaritmos naturales mediante logaritmos comunes utilizamos la fórmula

$$\ln x = \frac{\log x}{\log e} \approx \frac{\log x}{0.4343}$$

EJEMPLO 4 ▸ Utilice la fórmula de cambio de base para determinar ln 95.

Solución

$$\ln 95 = \frac{\log 95}{\log e} \approx \frac{1.9777}{0.4343} \approx 4.5538$$

Si evalúa ln 95 en su calculadora, obtendrá un valor muy cercano a 4.5538. Hágalo, en consecuencia, y compruebe su resultado.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 33

5 Resolver ecuaciones logarítmicas naturales y exponenciales naturales

Las propiedades de los logaritmos que analizamos en la sección 9.4 se cumplen también en el caso de los logaritmos naturales. A continuación se muestra un resumen de estas propiedades en la notación de logaritmos naturales.

Propiedades para logaritmos naturales

$\ln xy = \ln x + \ln y$	$(x > 0 \text{ y } y > 0)$	*Regla del producto.*
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$	$(x > 0 \text{ y } y > 0)$	*Regla del cociente.*
$\ln x^n = n \ln x$	$(x > 0)$	*Regla de la potencia.*

Considere la expresión $\ln e^x$, que significa $\log_e e^x$. De acuerdo con la propiedad 4 de la página 621, $\log_e e^x = x$. Por lo tanto, $\ln e^x = x$. De forma análoga, $e^{\ln x} = e^{\log_e x} = x$ con base en la propiedad 5. Aunque $\ln e^x = x$ y $e^{\ln x} = x$ sólo son casos especiales de las propiedades 4 y 5, respectivamente, debido a su importancia llamaremos a estas propiedades 7 y 8, de modo que podamos hacer referencia a ellas.

Propiedades adicionales para los logaritmos naturales y las expresiones exponenciales naturales

$\ln e^x = x$		**Propiedad 7**
$e^{\ln x} = x,$	$x > 0$	**Propiedad 8**

Usando la propiedad 7, $\ln e^x = x$, podemos establecer que $\ln e^{kt} = kt$ y $\ln e^{-2.06t} = -2.06t$. Y usando la propiedad 8, $e^{\ln x} = x$, podemos establecer, por ejemplo, que $e^{\ln(t+2)} = t + 2$ y $e^{\ln kt} = kt$.

EJEMPLO 5 Despeje y en la ecuación $\ln y - \ln(x + 9) = t$.

Solución

$$\ln y - \ln(x + 9) = t$$

$$\ln \frac{y}{x + 9} = t \qquad \text{Regla el cociente.}$$

$$\frac{y}{x + 9} = e^t \qquad \text{Cambiar a la forma exponencial.}$$

$$y = e^t(x + 9) \qquad \text{Despejar } y.$$

Ahora resuelva el ejercicio 63

EJEMPLO 6 Despeje t en la ecuación $225 = 450e^{-0.4t}$.

Solución Comenzamos dividiendo ambos lados de la ecuación entre 450 para aislar a $e^{-0.4t}$.

$$\frac{225}{450} = \frac{450e^{-0.4t}}{450}$$

$$0.5 = e^{-0.4t}$$

Ahora tomamos el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación para eliminar la expresión exponencial del lado derecho.

$$\ln 0.5 = \ln e^{-0.4t}$$

$$\ln 0.5 = -0.4t \qquad \text{Propiedad 7.}$$

$$-0.6931472 = -0.4t$$

$$\frac{-0.6931472}{-0.4} = t$$

$$1.732868 = t$$

Ahora resuelva el ejercicio 49

EJEMPLO 7 Despeje t en la ecuación $P = P_0e^{kt}$.

Solución Podemos seguir el mismo procedimiento que se utilizó en el ejemplo 6.

$$P = P_0e^{kt}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\cancel{P_0}e^{kt}}{\cancel{P_0}} \qquad \text{Dividir ambos lados entre } P_0.$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{kt}$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = \ln e^{kt} \qquad \text{Tomar el logaritmo natural de ambos lados.}$$

$$\ln P - \ln P_0 = \ln e^{kt} \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$\ln P - \ln P_0 = kt \qquad \text{Propiedad 7.}$$

$$\frac{\ln P - \ln P_0}{k} = t \qquad \text{Despejar } t.$$

Ahora resuelva el ejercicio 59

6 Resolver problemas de aplicación

Veamos ahora algunos problemas cuya solución incluye la aplicación de la función exponencial natural y de los logaritmos naturales.

Cuando una cantidad aumenta o disminuye a una *velocidad exponencial*, una fórmula que se utiliza con frecuencia para determinar el valor de P después de cierto tiempo t, es

$$P = P_0e^{kt}$$

donde P_0 es el valor inicial y k es la tasa de aumento o disminución constantes. Haremos referencia a esta fórmula como la **fórmula de crecimiento (o decaimiento) exponencial**. En ella pueden usarse otras letras en lugar de P. Cuando $k > 0$, P aumenta conforme t aumenta. Cuando $k < 0$, P disminuye y se acerca cada vez más a cero conforme t aumenta.

EJEMPLO 8 ▸ **Interés capitalizable de forma continua** A menudo los bancos capitalizan el interés de manera continua. Cuando esto ocurre, la modificación del saldo de la cuenta, P, a lo largo del tiempo, t, puede calcularse mediante la fórmula de crecimiento exponencial $P = P_0e^{kt}$, donde P_0 es el capital inicial que se invirtió y k es la tasa de interés.

a) Suponga que la tasa de interés que paga una cuenta de ahorro es de 6%, capitalizable de manera continua. Si se invierten $1000, determine el saldo que tendrá la cuenta al cabo de 3 años.

b) ¿Cuánto tiempo pasará para que la cuenta duplique su valor?

Solución **a)** Entienda el problema y traduzca Se nos ha dicho que el capital inicial que se invirtió, P_0 fue de $1000. También se dice que el tiempo, t, es 3 años, y que la tasa de interés, k, es de 6% o 0.06. Sustituyamos estos valores en la fórmula dada y despejemos P.

$$P = P_0e^{kt}$$
$$P = 1000e^{(0.06)(3)}$$

Realice los cálculos

$$= 1000e^{0.18} = 1000(1.1972174) \quad \text{Con una calculadora.}$$
$$\approx 1197.22$$

Responda Al cabo de tres años, el saldo de la cuenta es de ≈ $1197.22.

b) Entienda el problema y traduzca Para que el valor de la cuenta se duplique, el saldo tendría que ser de $2000. Por lo tanto, sustituimos P por 2000 y despejamos t.

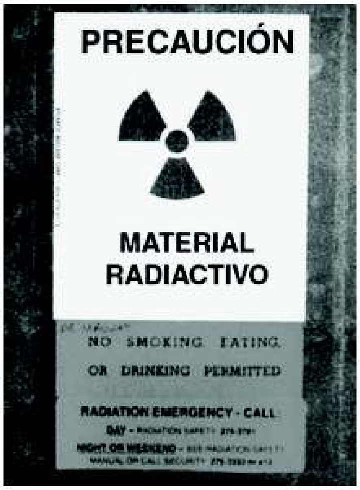
$$P = P_0e^{kt}$$
$$2000 = 1000e^{0.06t}$$
$$2 = e^{0.06t} \quad \text{Dividir ambos lados entre 1000.}$$

Realice los cálculos

$$\ln 2 = \ln e^{0.06t} \quad \text{Tome el logaritmo natural de ambos lados.}$$
$$\ln 2 = 0.06t \quad \text{Propiedad 7.}$$
$$\frac{\ln 2}{0.06} = t$$
$$\frac{0.6931472}{0.06} = t$$
$$11.552453 \approx t$$

Responda Así, con una tasa de interés de 6% capitalizable de manera continua, la cuenta se duplica en aproximadamente 11.6 años.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69



EJEMPLO 9 ▶ **Decaimiento radiactivo** El estroncio 90 es un isótopo radiactivo que decae exponencialmente a una velocidad de 2.8% cada año. Suponga que al inicio hay 1000 gramos de estroncio 90 en una sustancia.

a) Determine el número de gramos de estroncio 90 que quedarán después de 50 años.

b) Determine la vida media del estroncio 90.

Solución **a)** Entienda el problema Como el estroncio 90 decae al paso del tiempo, el valor de k en la fórmula $P = P_0e^{kt}$ es negativo. Como la tasa de decaimiento es 2.8% anual, usamos $k = -0.028$. Por lo tanto, la fórmula que usamos es $P = P_0e^{-0.028t}$.

Traduzca
$$P = P_0e^{-0.028t}$$
$$= 1000e^{-0.028(50)}$$

Realice los cálculos
$$= 1000e^{-1.4} = 1000(0.246597) = 246.597$$

Responda Por lo tanto, al cabo de 50 años quedarán 246.597 gramos de estroncio 90.

b) Para determinar la vida media, necesitamos determinar cuándo quedan 500 gramos de estroncio 90.

$$P = P_0e^{-0.028t}$$
$$500 = 1000e^{-0.028t}$$
$$0.5 = e^{-0.028t} \quad \text{Dividir ambos lados entre 1000.}$$
$$\ln 0.5 = \ln e^{-0.028t} \quad \text{Tomar el logaritmo natural en ambos lados.}$$
$$-0.6931472 = -0.028t \quad \text{Propiedad 7.}$$
$$\frac{-0.6931472}{-0.028} = t$$
$$24.755257 \approx t$$

Por lo tanto, la vida media del estroncio 90 es de aproximadamente 24.8 años.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 71

EJEMPLO 10 ▶ **Venta de juguetes** La fórmula para calcular la cantidad de dinero, A, que se gasta en la publicidad de ciertos juguetes es $A = 350 + 650 \ln n$, en donde n es el número esperado de juguetes que se venderán.

a) Si la compañía desea vender 2200 juguetes, ¿cuánto dinero gastará en publicidad?

b) ¿Cuántos juguetes puede vender si destina \$6000 a la publicidad?

Solución

a)
$$A = 350 + 650 \ln n$$
$$= 350 + 650 \ln 2200 \quad \text{Sustituir } n \text{ por 2200.}$$
$$= 350 + 650(7.6962126)$$
$$= 5352.54$$

Por lo tanto, la compañía gastará \$5352.54 en publicidad.

b) Entienda el problema y traduzca Nos piden determinar el número de juguetes que la compañía puede vender, n, si destinan \$6000 a publicidad. Sustituyamos los valores dados en la ecuación y despejemos n.

$$A = 350 + 650 \ln n$$

Realice los cálculos
$$6000 = 350 + 650 \ln n \quad \text{Sustituir } A \text{ por 6000.}$$
$$5650 = 650 \ln n \quad \text{Restar 350 en ambos lados.}$$
$$\frac{5650}{650} = \ln n \quad \text{Dividir ambos lados entre 650.}$$
$$8.69231 \approx \ln n$$
$$e^{8.69231} \approx n \quad \text{Cambiar a forma exponencial.}$$
$$5957 \approx n \quad \text{Obtener la respuesta con una calculadora.}$$

Responda Por lo tanto, si se destinan \$6000 a publicidad, la compañía puede esperar vender alrededor de 5957 juguetes.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 75

CÓMO USAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Las ecuaciones que tienen logaritmos naturales y funciones exponenciales naturales pueden resolverse en una calculadora graficadora. Por ejemplo, para resolver la ecuación $\ln x + \ln(x + 3) = \ln 8$, hacemos

$$Y_1 = \ln x + \ln(x + 3)$$
$$Y_2 = \ln 8$$

y determinamos la intersección de las gráficas, como se muestra en la **figura 9.28**.

En la **figura 9.28** usamos la opción CALC, INTERSECT para determinar la intersección de las gráficas. La solución es la coordenada x de la intersección. Redondeada al diezmilésimo más cercano, la solución de la ecuación es $x = 1.7016$.

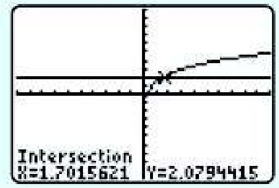


FIGURA 9.28

Para resolver la ecuación $4e^{0.3x} - 5 = x + 3$, hacemos

$$Y_1 = 4e^{0.3x} - 5$$
$$Y_2 = x + 3$$

y determinamos la intersección de las gráficas, como se muestra en la **figura 9.29**. Esta ecuación tiene dos soluciones, ya que hay dos intersecciones.

Las soluciones de la ecuación son aproximadamente $x = -7.5896$ y $x = 3.5284$. En los ejercicios 93 a 97 utilizaremos una calculadora graficadora para comprobar o resolver ecuaciones.

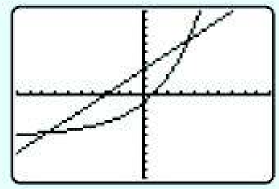


FIGURA 9.29

CONJUNTO DE EJERCICIOS 9.7

MathXL MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) ¿Cuál es la base de una función exponencial natural?
   b) ¿Cuál es el valor aproximado de e?
2. ¿De qué otra forma escribimos $\log_e x$?
3. ¿Cuál es el dominio de $\ln x$?
4. ¿Bajo qué condiciones será $\ln x < 0$?
5. Enuncie la fórmula de cambio de base.
6. ¿Se cumple $n \log_e x = \ln x^n$? Explique.
7. ¿A qué es igual $\ln e^x$?
8. ¿A qué es igual $e^{\ln x}$?
9. ¿Cuál es la inversa de $\ln x$?
10. En la fórmula $P = P_0 e^{kt}$, ¿bajo qué circunstancias P aumentará cuando t aumente?
11. En la fórmula $P = P_0 e^{kt}$, ¿bajo qué circunstancias P disminuirá cuando t aumente?
12. ¿Es posible determinar el valor de $\ln(-3.52)$? Explique.

Práctica de habilidades

Determine los siguientes valores. Redondee los valores a cuatro lugares decimales.

13. $\ln 62$
14. $\ln 791$
15. $\ln 0.813$
16. $\ln 0.000568$

Determine el valor de N. Redondee los valores a tres dígitos significativos.

17. $\ln N = 1.6$
18. $\ln N = 5.2$
19. $\ln N = -2.85$
20. $\ln N = 0.543$
21. $\ln N = -0.0287$
22. $\ln N = -0.674$

Utilice la fórmula de cambio de base para determinar el valor de los logaritmos siguientes. No redondee los logaritmos en la fórmula. Escriba la respuesta redondeada al diezmilésimo más cercano.

23. $\log_3 56$
24. $\log_3 198$
25. $\log_2 21$
26. $\log_2 89$
27. $\log_4 11$
28. $\log_4 316$
29. $\log_5 82$
30. $\log_5 1893$
31. $\log_6 185$
32. $\log_6 806$
33. $\ln 51$
34. $\ln 3294$
35. $\log_5 0.463$
36. $\log_3 0.0365$

Resuelva las ecuaciones logarítmicas siguientes.

37. $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 12$
38. $\ln(x + 4) + \ln(x - 2) = \ln 16$
39. $\ln x + \ln(x + 4) = \ln 5$
40. $\ln(x + 3) + \ln(x - 3) = \ln 40$
41. $\ln x = 5\ln 2 - \ln 8$
42. $\ln x = \frac{3}{2}\ln 16$
43. $\ln(x^2 - 4) - \ln(x + 2) = \ln 4$
44. $\ln(x + 12) - \ln(x - 4) = \ln 5$

Cada una de estas ecuaciones está en la forma $P = P_0e^{kt}$. Resuelva para la variable que queda. Recuerde, e es una constante. Escriba la respuesta redondeada al diezmilésimo más cercano.

45. $P = 120e^{2.3(1.6)}$

46. $900 = P_0e^{(0.4)(3)}$

47. $50 = P_0e^{-0.5(3)}$

48. $18 = 9e^{2t}$

49. $60 = 20e^{1.4t}$

50. $29 = 58e^{-0.5t}$

51. $86 = 43e^{k(3)}$

52. $15 = 75e^{k(4)}$

53. $20 = 40e^{k(2.4)}$

54. $100 = A_0e^{-0.02(3)}$

55. $A = 6000e^{-0.08(3)}$

56. $51 = 68e^{-0.04t}$

Despeje la variable que se indica.

57. $V = V_0e^{kt}$, despeje V_0

58. $P = P_0e^{kt}$, despeje P_0

59. $P = 150e^{7t}$, despeje t

60. $361 = P_0e^{kt}$, despeje t

61. $A = A_0e^{kt}$, despeje k

62. $167 = R_0e^{kt}$, despeje k

63. $\ln y - \ln x = 2.3$, despeje y

64. $\ln y + 9 \ln x = \ln 2$, despeje y

65. $\ln y - \ln (x + 6) = 5$ despeje y

66. $\ln (x + 2) - \ln (y - 1) = \ln 5$, despeje y

Resolución de problemas

Utilice una calculadora para resolver los problemas siguientes.

67. Si $e^x = 12.183$, determine el valor de x. Explique cómo obtuvo su respuesta.

68. ¿A qué exponente debe elevar la base e para obtener el valor 184.93? Explique cómo obtuvo su respuesta.

69. Interés compuesto de manera continua Si \$5000 se invierten a 6% compuesto de manera continua,

a) determine el saldo de la cuenta después de 2 años.

b) ¿En cuánto tiempo se duplicará la cuenta? (Vea el ejemplo 8).

70. Interés compuesto de manera continua Si \$3000 se invierten a 3% compuesto de forma continua,

a) determine el saldo de la cuenta después de 30 años.

b) ¿En cuánto tiempo se duplicará la cuenta?

71. Decaimiento radiactivo Consulte el ejemplo 9. Si en un inicio había 70 gramos, determine la cantidad de estroncio 90 que queda después de 20 años.

72. Estroncio 90 Consulte el ejemplo 9. Si en un inicio había 200 gramos, determine la cantidad de estroncio 90 que queda después de 40 años.

73. Sodas El porcentaje del mercado objetivo, $f(t)$, que compra cierta bebida refrescante, es una función del número de días, t, que se le hace publicidad a ésta. La función que describe esta relación es $f(t) = 1 - e^{-0.04t}$.

a) Después de 50 días de publicidad, ¿qué porcentaje del mercado objetivo compra la bebida?

b) ¿Cuántos días de publicidad se necesitan si se quiere que 75% del mercado objetivo compre la bebida?

74. Truchas en un lago En 2005, un lago tenía 300 truchas. El aumento del número de truchas se calcula por medio de la función $g(t) = 300e^{0.07t}$, donde t es el número de años a partir de 2005. ¿Cuántas truchas habrá en el lago en **a)** 2003, **b)** 2015?

75. Velocidad al caminar En un estudio psicológico se determinó que la velocidad promedio al caminar, $f(P)$, de una persona citadina es una función de la población en la ciudad. Para una ciudad con una población P, la velocidad promedio al caminar, en pies por segundo, está dada por $f(P) = 0.37 \ln P + 0.05$. Nashville, Tennessee, tiene una población de 972,000 habitantes.

a) ¿Cuál es la velocidad promedio de una persona al caminar que vive en Nashville?

b) En la ciudad de Nueva York habitan 8,567,000 personas; ¿cuál es la velocidad promedio al caminar de una persona en esta ciudad?

c) Si la velocidad promedio al caminar de una persona en cierta ciudad es de 5.0 pies por segundo, ¿cuál es la población de la ciudad?

76. Publicidad El número de corbatas que se venden, $N(a)$, es una función de la cantidad que se destina a publicitarlas, a, (en miles de dólares). La función que describe esta relación es $N(a) = 800 + 300 \ln a$.

a) ¿Cuántas corbatas se vendieron después de invertir \$1500 (o 1.5 miles de dólares) en publicidad?

b) ¿Cuánto dinero se debe invertir en publicidad para vender 1000 corbatas?

77. Suponga que el valor de la isla de Manhattan ha crecido a una razón exponencial de 8% al año desde 1626, cuando Peter Minuet, de la compañía holandesa de las Indias Occidentales, la compró por \$24. De acuerdo con lo anterior, el valor de Manhattan puede determinarse mediante la ecuación $V = 24e^{0.08t}$, donde t es el número de años a partir de 1626. Determine el valor de la isla de Manhattan en 2008, esto es, cuando $t = 382$ años.

78. Prescripción de un medicamento El porcentaje de médicos que aceptan prescribir un medicamento nuevo está dado por la función $P(t) = 1 - e^{-0.22t}$, donde t es el tiempo, en meses, desde que el medicamento sale al mercado. ¿Qué porcentaje de médicos acepta prescribir un nuevo medicamento 2 meses después de que éste sale al mercado?

79. Población mundial En enero de 2003 se calculaba que la población mundial era de aproximadamente 6.30 mil millones de personas. Suponiendo que la población mundial continuara creciendo exponencialmente a la tasa actual de casi 1.3% anual, la población mundial esperada, en miles de millones de personas, en t años, estaría dada por la función

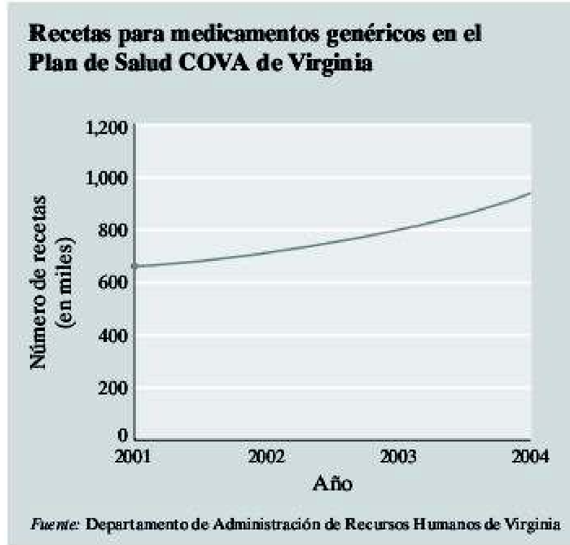
$$P(t) = 6.30e^{0.013t}$$

donde t es el número de años a partir de 2003.

a) Determine la población mundial en 2010.

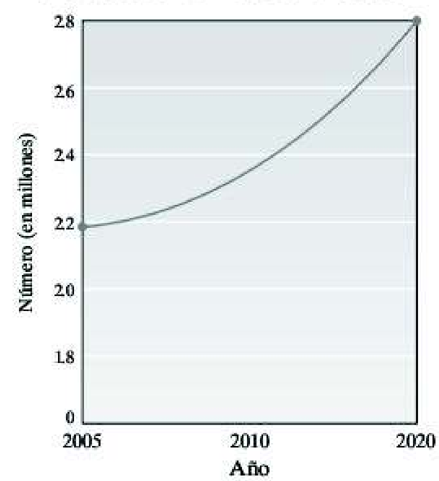
b) ¿Dentro de cuántos años se duplicará la población mundial?

80. Medicamentos genéricos Desde 2001, el número de recetas para medicamentos genéricos usadas por los miembros del Plan de Salud COVA en el estado de Virginia ha crecido de forma exponencial (vea la gráfica). El número de recetas para medicamentos genéricos, $f(t)$, en cientos de miles, puede aproximarse mediante la función $f(t) = 6.52e^{0.087t}$, donde t es el número de años a partir de 2001. Si supone que esta tendencia continúa, utilice esta función para aproximar el número de recetas para medicamentos genéricos usados por miembros del Plan de Salud COVA en **a)** 2006. **b)** 2008.



81. Demanda de enfermeras Se espera que la demanda de enfermeras certificadas crezca de forma exponencial de 2005 a 2020. (Vea la gráfica). La demanda de enfermeras certificadas, $d(t)$, en millones, puede aproximarse mediante la función $d(t) = 2.19e^{0.0164t}$, donde t es el número de años a partir de 2005. Si supone que esta tendencia continúa, utilice esta función para aproximar la demanda de enfermeras certificadas en **a)** 2025. **b)** 2040.

Demanda de enfermeras certificadas

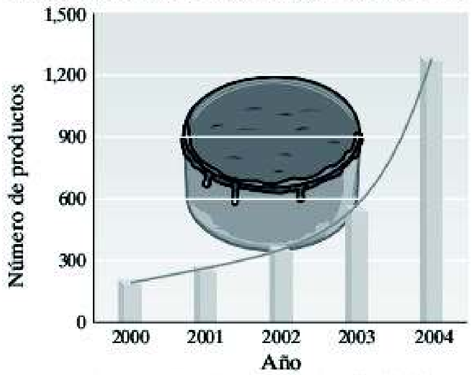


Fuente: Oficina de Profesiones de la salud, U.S. News y World Report (31/ene/05 y 7/feb/05)

82. Productos Splenda® A partir de 2000, el número de productos nuevos que utilizan Splenda cada año, ha crecido de forma exponencial (vea la gráfica en la página siguiente). Este número, $N(t)$, puede aproximarse mediante la función $N(t) = 163.21e^{0.481t}$, donde t es el número de años desde 2000.

Si supone que esta tendencia continúa, utilice esta función para estimar el número de productos nuevos que usan Splenda en **a)** 2007. **b)** 2010.

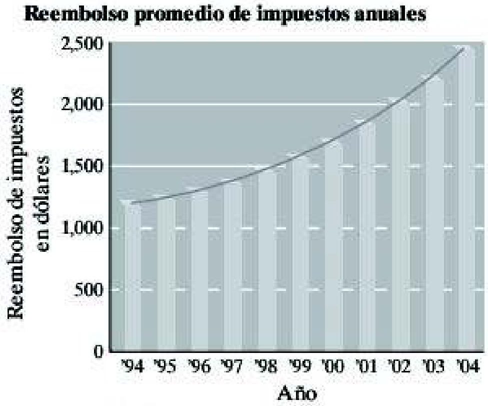
Productos nuevos introducidos por año que usan Splenda



Fuente: Productscan Online, The New York Times (22/dic/04)

83. Reembolso de impuestos anuales Desde 1994, el reembolso promedio anual ha crecido de forma exponencial (vea la gráfica). El reembolso promedio anual, $r(t)$, puede aproximarse mediante la función $r(t) = 1182.3e^{0.0715t}$, donde t es el número de años desde 1994. Si supone que esta tendencia continúa, utilice esta función para aproximar el reembolso promedio anual en **a)** 2006. **b)** 2010.

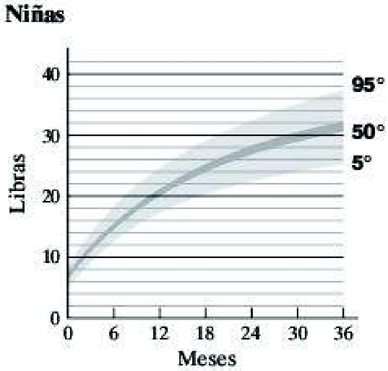
Reembolso promedio de impuestos anuales



Fuente: Servicio de Ingreso Interno, U.S. News y World Report (18/abril/05)

84. Peso de niñas En la gráfica siguiente, el área sombreada muestra el rango normal (del percentil 5 al 95) de peso para niñas de hasta 36 meses de edad. La mediana, o percentil 50, de pesos se indica por la línea central (más gruesa). Para calcular el peso de niñas de 3 a 36 meses, puede utilizarse la función $y = 3.17 + 7.32 \ln x$; úsela para calcular el peso mediano para niñas de **a)** 18 meses, **b)** 30 meses.

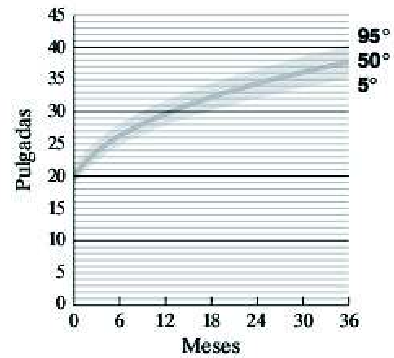
Niñas



Fuente: *Newsweek* Edición especial de 2000, "Su hijo".

85. Estatura de niños El área sombreada de la gráfica muestra el rango normal (del percentil 5 al 95) de estaturas para niños de hasta 36 meses de edad. La mediana, o percentil 50, de estaturas se indica mediante la línea central (más gruesa). Para calcular la estatura mediana de niños de 3 a 36 meses, puede usarse la función $y = 15.29 + 5.93 \ln x$. Utilice esta función para calcular la estatura mediana para niños de **a)** 18 meses, **b)** 30 meses.

Niños



Fuente: *Newsweek* Edición especial de 2000, "Su hijo".

86. Decaimiento radiactivo El plutonio, que se usa comúnmente en reactores nucleares, decae exponencialmente a una velocidad de 0.003% por año. Para determinar la cantidad de plutonio que queda de la cantidad inicial, A_0, al cabo de t años, puede usarse la fórmula $A = A_0e^{kt}$. En la fórmula, k se reemplaza con -0.00003.

a) Si en 2003 había 1000 gramos de plutonio, ¿cuántos gramos quedarán en el año 2103, es decir, al cabo de 100 años?

b) Determine la vida media del plutonio.

87. Fechado con carbono El fechado con carbono se utiliza para aproximar la antigüedad de plantas y objetos antiguos. El elemento radiactivo carbono 14 se utiliza con mucha frecuencia para este propósito. El carbono 14 decae exponencialmente a una velocidad de 0.01205% por año. La cantidad de carbono 14 que queda en un objeto después de t años puede determinarse mediante la función $f(t) = v_0e^{-0.0001205t}$, en la que v_0 es la cantidad inicial.

a) Si el hueso de un animal tenía originalmente 20 gramos de carbono 14, y cuando se encontró tenía 9 gramos de carbono 14, ¿cuál es la edad del hueso?

b) ¿Cuál es la edad de un objeto que conserva 50% de la cantidad original de carbono 14?

88. Interés compuesto Si se quiere duplicar una cantidad en 6 años, ¿a qué tasa, compuesta de manera continua, debe invertirse?

89. Interés compuesto Si se invierte dinero a 6% compuesto de manera continua, ¿cuánto debe invertirse ahora para tener $20,000 dentro de 18 años?

90. Radioisótopo La fuente de energía de un satélite es un radioisótopo. La potencia, P, en watts, que le resta a la fuente de energía es una función del tiempo que el satélite ha estado en el espacio.

a) Si en un inicio había 50 gramos del isótopo, la potencia que queda después de t días es $P = 50e^{-0.002t}$. Determine la potencia que queda después de 50 días.

b) ¿Cuándo bajará a 10 watts la potencia que queda en la fuente?

91. Decaimiento radiactivo Durante el accidente nuclear que tuvo lugar en Chernobyl, Ucrania, en 1986, dos de los materiales radiactivos que escaparon a la atmósfera fueron el cesio 137, con velocidad de decaimiento de 2.3%, y el estroncio 90, con velocidad de decaimiento de 2.8%.

a) ¿Cuál material se descompone más rápidamente?

b) ¿Qué porcentaje de cesio quedará en 2036, es decir, 50 años después del accidente?

92. Fechado radiométrico En el estudio de fechado radiométrico (que utiliza isótopos radiactivos para determinar la edad de los objetos), con frecuencia se utiliza la fórmula

$$t = \frac{t_h}{0.693} \ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$$

En la fórmula, t es la edad del objeto, t_h es la vida media del isótopo radiactivo usado, N_0 es el número original de átomos radiactivos presentes, y N es el número que queda después de un tiempo, t. Suponga que una roca originalmente contenía 5×10^{12} átomos de uranio 238, cuya vida media es de 4.5×10^9 años. Si ahora la roca tiene 4×10^{12} átomos, ¿cuál es su edad?

En los ejercicios 93 a 97, utilice su calculadora graficadora. En los ejercicios 95 a 97, redondee sus respuestas al milésimo más cercano.

93. Verifique la respuesta que dio al ejercicio 37.

94. Compruebe la respuesta que dio al ejercicio 39.

95. Resuelva la ecuación $e^{x-4} = 12 \ln (x + 2)$.

96. Resuelva la ecuación $\ln (4 - x) = 2 \ln x + \ln 2.4$.

97. Resuelva la ecuación $3x - 6 = 2e^{0.2x} - 12$.

Retos

En los ejercicios 98 a 101, cuando despeje la variable indicada, escriba la respuesta sin usar logaritmos naturales.

98. Intensidad de la luz Cuando pasa por cierto medio, la intensidad de la luz se determina mediante la fórmula $x = k(\ln I_0 - \ln I)$. Despeje I_0 en esta ecuación.

99. Velocidad A partir de que se detiene el motor de una locomotora, que lleva una velocidad v_0, la distancia que recorre puede calcularse mediante la fórmula $x = \frac{1}{k}\ln (kv_0t + 1)$. Despeje v_0 en esta ecuación.

100. Molécula Una fórmula que se utiliza en el estudio de la acción de una molécula de proteína es $\ln M = \ln Q - \ln(1 - Q)$. Despeje Q en esta ecuación.

101. Circuito eléctrico Una ecuación que relaciona la corriente con el tiempo en un circuito eléctrico es $\ln i - \ln I = \frac{-t}{RC}$. Despeje i en esta ecuación.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.3] **102.** Sea $h(x) = \frac{x^2 + 4x}{x + 6}$. Determine **a)** $h(-4)$. **b)** $h\left(\frac{2}{5}\right)$.

[4.3] **103. Boletos** El boleto de admisión para un juego de hockey sobre hielo cuesta \$15 para adultos y \$11 para niños. Si se vendió un total de 550 boletos, determine cuántos boletos para niño y cuántos para adulto se vendieron, si la recaudación total fue de \$7290.

[5.2] **104.** Multiplique $(3xy^2 + y)(4x - 3xy)$.

[5.6] **105.** Determine dos valores de b para que $4x^2 + bx + 25$ sea un trinomio cuadrado perfecto.

[7.4] **106.** Multiplique $\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^5}\right)$.

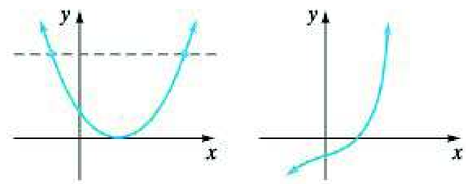
Resumen del capítulo 9

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 9.1	
La **función compuesta** $f \circ g$ está definida como $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$	Dada $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = x - 4$, entonces $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (x - 4)^2 + 3(x - 4) - 1$ $= x^2 - 8x + 16 + 3x - 12 - 1$ $= x^2 - 5x + 3$ $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = (x^2 + 3x - 1) - 4$ $= x^2 + 3x - 5$
Una función es una **función uno a uno (o inyectiva)**, si cada valor en el rango corresponde con exactamente un valor en el dominio.	El conjunto $\{(1, 3), (-2, 5), (6, 2), (4, -1)\}$ es una función uno a uno ya que cada valor en el rango corresponde con exactamente un valor en el dominio.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 9.1 (continuación)

Para que una función sea uno a uno, su gráfica debe pasar la **prueba de la recta vertical** (para asegurar que sea una función) y la **prueba de la recta horizontal** (para comprobar el criterio de uno a uno).



No es una función uno a uno   Función uno a uno

Si $f(x)$ es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (x, y), su **función inversa**, $f^{-1}(x)$, es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (y, x). Sólo las funciones uno a uno tienen funciones inversas.

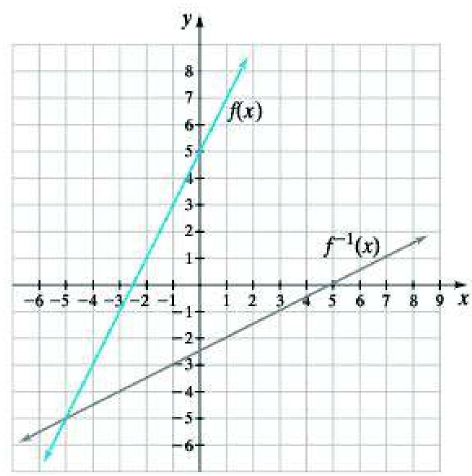
Para determinar la función inversa de una función uno a uno

1. Reemplace $f(x)$ con y.
2. Intercambie las dos variables x y y.
3. Despeje a y en la ecuación.
4. Reemplace y con $f^{-1}(x)$ (esto proporciona la función inversa mediante la notación de función inversa).

Determine la función inversa para $f(x) = 2x + 5$. Grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en el mismo conjunto de ejes.

Solución:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 5 \\ y &= 2x + 5 \\ x &= 2y + 5 \\ x - 5 &= 2y \\ \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} &= y \\ \text{o} \quad f^{-1}(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \end{aligned}$$



Si dos funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son inversas una de la otra, $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Para el ejemplo anterior con $f(x) = 2x + 5$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] &= 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right) + 5 \\ &= x - 5 + 5 = x \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] &= \frac{1}{2}(2x + 5) - \frac{5}{2} \\ &= x + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = x \end{aligned}$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 9.2

Para cualquier número real $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$f(x) = a^x$$

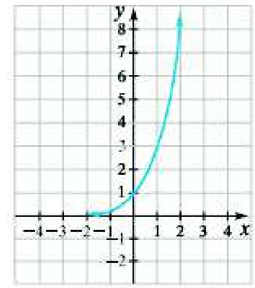
es una **función exponencial**.

Para todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ o $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

1. El dominio de la función es $(-\infty, \infty)$.
2. El rango de la función es $(0, \infty)$.
3. La gráfica de la función pasa por los puntos $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$ y $(1, a)$.

Grafique $y = 3^x$.

x	y
-2	$1/9$
-1	$1/3$
0	1
1	3
2	9



Sección 9.3

Logaritmos

Para todos los números positivos a, con $a \neq 1$,

$$y = \log_a x \text{ significa } x = a^y$$

logaritmo (exponente) → $y = \log_a x$ ← número; base → a

significa

$x = a^y$: exponente → y; número → x; base → a

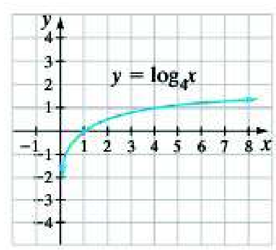
Forma exponencial	Forma logarítmica
$9^2 = 81$	$\log_9 81 = 2$
$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$	$\log_{1/4} \frac{1}{64} = 3$

Funciones logarítmicas

Para todas las funciones logarítmicas de la forma $y = \log_a x$ o $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$.

1. El dominio de la función es $(0, \infty)$.
2. El rango de la función es $(-\infty, \infty)$.
3. La gráfica de la función pasa por los puntos $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

Grafique $y = \log_4 x$.

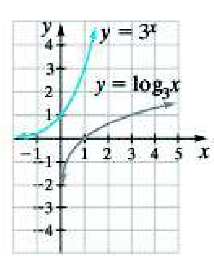


Características de las funciones exponenciales y logarítmicas

	Función exponencial	Función logarítmica
	$y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$	$y = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$
Dominio:	$(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$
Rango:	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
Puntos en la gráfica:	$\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$, $(1, a)$	$\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$, $(a, 1)$

x se convierte en y
y se convierte en x

Grafique $y = 3^x$ y $y = \log_3 x$ en el mismo conjunto de ejes.



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 9.4	
Regla del producto para logaritmos Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ *Propiedad 1*	$\log_5 (9 \cdot 13) = \log_5 9 + \log_5 13$ $\log_7 mn = \log_7 m + \log_7 n$
Regla del cociente para logaritmos Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ *Propiedad 2*	$\log_3 \frac{15}{4} = \log_3 15 - \log_3 4$ $\log_8 \frac{z+1}{z+3} = \log_8 (z+1) - \log_8 (z+3)$
Regla de la potencia para logaritmos Si x y a son números reales positivos, $a \neq 1$, y n es cualquier número real, entonces $\log_a x^n = n \log_a x$ *Propiedad 3*	$\log_9 23^5 = 5 \log_9 23$ $\log_6 \sqrt[3]{x+4} = \log_6 (x+4)^{1/3} = \frac{1}{3} \log_6 (x+4)$
Propiedades adicionales de los logaritmos Si $a > 0$, y $a \neq 1$, entonces $\log_a a^x = x$ *Propiedad 4* y $a^{\log_a x} = x \ (x > 0)$ *Propiedad 5*	$\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$ $7^{\log_7 3} = 3$
Sección 9.5	
Logaritmo común Los logaritmos de base 10 se denominan logaritmos comunes $\log x$ significa $\log_{10} x$ El **logaritmo común** de un número real positivo es el *exponente* al cual la base 10 se eleva para obtener el número. Si $\log N = L$, entonces $10^L = N$. Para determinar un logaritmo común, utilice una calculadora científica o graficadora. Redondee la respuesta a cuatro decimales.	$\log 17$ significa $\log_{10} 17$ $\log (b+c)$ significa $\log_{10}(b+c)$ Si $\log 14 = 1.1461$, entonces $10^{1.1461} = 14$. Si $\log 0.6 = -0.2218$, entonces $10^{-0.2218} = 0.6$. $\log 183 = 2.2625$ (redondeado a 4 decimales) $\log 0.42 = -0.3768$ (redondeado a 4 decimales)
Antilogaritmo Si $\log N = L$, entonces $N = \text{antilog } L$. Para determinar antilogaritmos, utilice una calculadora científica o graficadora.	Si $\log 1890.1662 = 3.2765$, entonces antilog $3.2765 = 1890.1662$. Si $\log 0.0143 = -1.8447$, entonces antilog $(-1.8447) = 0.0143$.
Sección 9.6	
Propiedades para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas **a)** Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$. **b)** Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$. **c)** Si $x = y$, entonces $\log_b x = \log_b y \ (x > 0, y > 0)$. **d)** Si $\log_b x = \log_b y$, entonces $x = y \ (x > 0, y > 0)$. *Propiedades 6a–6d*	**a)** Si $x = 5$, entonces $3^x = 3^5$. **b)** Si $3^x = 3^5$, entonces $x = 5$. **c)** Si $x = 2$, entonces $\log x = \log 2$. **d)** Si $\log x = \log 2$, entonces $x = 2$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES — EJEMPLOS

Sección 9.7

La **función logaritmo natural** es

$$f(x) = e^x$$

donde $e \approx 2.7183$.

Logaritmos naturales son logaritmos con base e. Los logaritmos naturales se indican mediante las letras ln.

$$\log_e x = \ln x$$

Para $x > 0$, si $y = \ln x$, entonces $e^y = x$.

La **función logaritmo natural** es

$$g(x) = \ln x$$

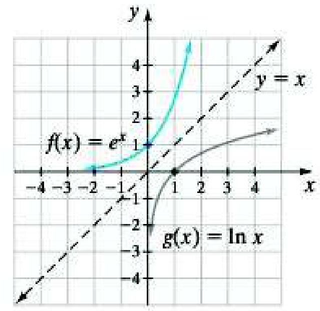
donde la base $e \approx 2.7183$.

Para determinar los valores de exponenciales naturales y de logaritmos naturales, utilice una calculadora científica o graficadora.

La función exponencial natural, $f(x) = e^x$, y la función logaritmo natural, $g(x) = \ln x$, son inversas una de la otra.

Ejemplos:

Grafique $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ en el mismo conjunto de ejes.



$\ln 5.83 = 1.7630$

Si $\ln N = -2.09$, entonces $N = e^{-2.09} = 0.1237$.

Fórmula de cambio de base

Para cualesquiera bases a y b de logaritmos y cualquier número positivo x.

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Ejemplo:

$$\log_5 98 = \frac{\log 98}{\log 5} \approx \frac{1.9912}{0.6990} \approx 2.8486$$

Propiedades de los logaritmos naturales

$\ln xy = \ln x + \ln y$	$(x > 0 \text{ y } y > 0)$	Regla del producto	$\ln 7 \cdot 30 = \ln 7 + \ln 30$
$\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$	$(x > 0 \text{ y } y > 0)$	Regla del cociente	$\ln \dfrac{x+1}{x+8} = \ln(x+1) - \ln(x+8)$
$\ln x^n = n \ln x$	$(x > 0)$	Regla de la potencia	$\ln m^5 = 5 \ln m$

Propiedades adicionales para expresiones con logaritmos naturales y exponenciales naturales

$\ln e^x = x$	Propiedad 7	$\ln e^{19} = 19$
$e^{\ln x} = x, \quad x > 0$	Propiedad 8	$e^{\ln 2} = 2$

Ejercicios de repaso del capítulo 9

[9.1] *Dadas $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = 2x - 5$, determine lo siguiente.*

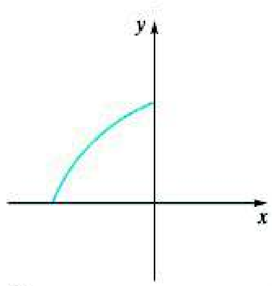
1. $(f \circ g)(x)$ **2.** $(f \circ g)(3)$ **3.** $(g \circ f)(x)$ **4.** $(g \circ f)(-3)$

Dadas $f(x) = 6x + 7$ y $g(x) = \sqrt{x - 3}$, $x \geq 3$, determine lo siguiente.

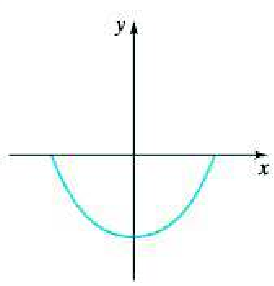
5. $(f \circ g)(x)$ **6.** $(g \circ f)(x)$

Determine si cada función es una función uno a uno.

7.



8.



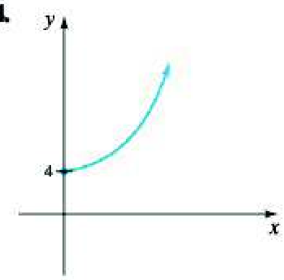
9. $\{(6, 2), (4, 0), (-5, 7), (3, 8)\}$

10. $\left\{(0, -2), (6, 1), (3, -2), \left(\frac{1}{2}, 4\right)\right\}$ **11.** $y = \sqrt{x + 8}$, $x \geq -8$ **12.** $y = x^2 - 9$

En los ejercicios 13 y 14, para cada función, determine el dominio y el rango de $f(x)$ y de $f^{-1}(x)$.

13. $\{(5, 3), (6, 2), (-4, -3), (-1, 8)\}$

14.



En los ejercicios 15 y 16, determine $f^{-1}(x)$ y grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

15. $y = f(x) = 4x - 2$

16. $y = f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

17. Yardas a pies La función $f(x) = 36x$ convierte yardas, x, en pulgadas. Determine la función inversa que convierte pulgadas en yardas. En la función inversa, ¿qué representan x y $f^{-1}(x)$?

18. Galones a cuartos de galón La función $f(x) = 4x$ convierte galones, x, en cuartos de galón (o simplemente cuartos). Determine la función inversa que convierte cuartos en galones. En la función inversa, ¿qué representan x y $f^{-1}(x)$?

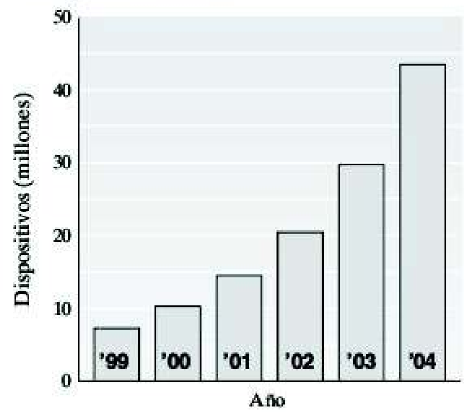
[9.2] *Grafique las funciones siguientes.*

19. $y = 2^x$

20. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

21. Dispositivos inteligentes manuales Desde 1999, las ventas de dispositivos inteligentes manuales ha estado creciendo exponencialmente (vea la gráfica de la derecha). Las ventas, $f(t)$, en millones de dispositivos, puede calcularse mediante la función $f(t) = 7.02e^{0.365t}$, en donde t es el número de años a partir de 1999. Utilice esta función para calcular el número de dispositivos vendidos a nivel mundial en **a)** 2003, **b)** 2005. **c)** 2008.

Envíos mundiales de dispositivos inteligentes manuales



Fuente: International Data Corp.; MSN MoneyCentral; CSI Inc.; investigación adicional.

[9.3] *Escriba cada ecuación en forma logarítmica.*

22. $8^2 = 64$

23. $81^{1/4} = 3$

24. $5^{-3} = \frac{1}{125}$

Escriba cada ecuación en forma exponencial.

25. $\log_2 32 = 5$

26. $\log_{1/4} \frac{1}{16} = 2$

27. $\log_6 \frac{1}{36} = -2$

Escriba cada ecuación en forma exponencial y determine el valor que falta.

28. $3 = \log_4 x$

29. $4 = \log_a 8$

30. $-3 = \log_{1/5} x$

Grafique las funciones siguientes.

31. $y = \log_3 x$

32. $y = \log_{1/2} x$

[9.4] *Utilice las propiedades de los logaritmos para desarrollar cada expresión.*

33. $\log_5 17^8$

34. $\log_3 \sqrt{x - 9}$

35. $\log \frac{6(a + 1)}{19}$

36. $\log \frac{x^4}{7(2x + 3)^5}$

Escriba lo siguiente como el logaritmo de una sola expresión.

37. $5 \log x - 3 \log (x + 1)$

38. $4(\log 2 + \log x) - \log y$

39. $\frac{1}{3}[\ln x - \ln (x + 2)] - \ln 2$

40. $3 \ln x + \frac{1}{2}\ln (x + 1) - 6 \ln (x + 4)$

Evalúe.

41. $8^{\log_8 10}$ **42.** $\log_4 4^5$ **43.** $11^{\log_{11} 81}$ **44.** $9^{\log_9 \sqrt{8}}$

[9.5, 9.7] *Utilice una calculadora para determinar cada logaritmo. Redondee sus respuestas al diezmilésimo más cercano.*

45. $\log 819$ **46.** $\ln 0.0281$

Utilice una calculadora para determinar el antilogaritmo de cada número. Proporcione el antilogaritmo con tres dígitos significativos.

47. 3.159 **48.** -3.157

Utilice una calculadora para determinar N; redondee su respuesta a tres dígitos significativos.

49. $\log N = 4.063$ **50.** $\log N = -1.2262$

Evalúe.

51. $\log 10^5$ **52.** $10^{\log 9}$ **53.** $7 \log 10^{3.2}$ **54.** $2(10^{\log 4.7})$

[9.6] *Resuelva sin utilizar calculadora.*

55. $625 = 5^x$ **56.** $49^x = \frac{1}{7}$ **57.** $2^{3x-1} = 32$ **58.** $27^x = 3^{2x+5}$

Utilice una calculadora para resolver lo siguiente. Redondee sus respuestas al milésimo más cercano.

59. $7^x = 152$ **60.** $3.1^x = 856$ **61.** $12.5^{x+1} = 381$ **62.** $3^{x+2} = 8^x$

Resuelva la ecuación logarítmica.

63. $\log_7 (2x - 3) = 2$ **64.** $\log x + \log (4x - 19) = \log 5$

65. $\log_3 x + \log_3 (2x + 1) = 1$ **66.** $\ln (x + 1) - \ln (x - 2) = \ln 4$

[9.7] *Despeje la variable restante en cada ecuación exponencial. Redondee su respuesta al milésimo más cercano.*

67. $50 = 25e^{0.6t}$ **68.** $100 = A_0e^{-0.42(3)}$

Despeje la variable que se indica.

69. $A = A_0e^{kt}$, despeje t **70.** $200 = 800e^{kt}$, despeje k

71. $\ln y - \ln x = 6$, despeje y **72.** $\ln (y + 1) - \ln (x + 8) = \ln 3$, despeje y

Utilice la fórmula de cambio de base para evaluar. Escriba la respuesta redondeada al milésimo más cercano.

73. $\log_2 196$ **74.** $\log_3 47$

[9.2–9.7]

75. Interés compuesto Determine el monto de dinero, si Justine Elwood invierte \$12,000 durante un periodo de 8 años, en una cuenta de ahorros que produce 6% de interés anual. Utilice $A = p(1 + r)^n$.

76. Interés compuesto de manera continua Si \$6,000 se colocan en una cuenta de ahorros que paga 4% de interés compuesto de manera continua, determine el tiempo que se necesita para que la cuenta duplique su valor.

77. Bacterias Las bacterias *Escherichia coli* por lo regular se encuentran en la vejiga de los humanos. Suponga que hay 2000 bacterias en el instante 0, y que el número de bacterias presentes t minutos después puede determinarse mediante la función $N(t) = 2000(2)^{0.05t}$.

a) ¿Cuándo habrá 50,000 bacterias?

b) Suponga que se cataloga como infectada una vejiga humana que contenga 120,000 bacterias; ¿cuánto tardará en desarrollar una infección de este tipo una persona cuya vejiga contiene inicialmente 2000 bacterias?

78. Presión atmosférica La presión atmosférica, P, en libras por pulgada cuadrada, a una altura de x pies por arriba del nivel del mar, puede determinarse mediante la fórmula $P = 14.7e^{-0.00004x}$. Determine la presión atmosférica a una altitud de 8842 pies.

79. Retención de conocimientos Al final de un curso de historia, los alumnos se sometieron a un examen. Como parte de un proyecto de investigación, los estudiantes seguirán respondiendo pruebas semejantes cada mes durante n meses. La calificación promedio del grupo después de n meses puede determinarse mediante la función $A(n) = 72 - 18 \log(n + 1), n \geq 0$.

a) ¿Cuál fue la calificación promedio del grupo cuando se aplicó el examen original ($n = 0$)?

b) ¿Cuál fue la calificación promedio del grupo a los dos meses?

c) ¿Después de cuántos meses la calificación promedio del grupo fue 58.0?

Examen de práctica del capítulo 9

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en la que se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el **Chapter Test Prep Video CD.** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. **a)** Determine si la siguiente es una función uno a uno.
$$\{(4, 2), (-3, 8), (-1, 3), (6, -7)\}$$
b) Liste el conjunto de pares ordenados de la función inversa.

2. Dadas $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = x + 2$, determine **a)** $(f \circ g)(x)$. **b)** $(f \circ g)(6)$.

3. Dadas $f(x) = x^2 + 8$ y $g(x) = \sqrt{x - 5}, x \geq 5$, determine **a)** $(g \circ f)(x)$. **b)** $(g \circ f)(7)$.

En los ejercicios 4 y 5, **a)** *determine $f^{-1}(x)$ y* **b)** *grafique $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ en los mismos ejes.*

4. $y = f(x) = -3x - 5$

5. $y = f(x) = \sqrt{x - 1}, x \geq 1$

6. ¿Cuál es el dominio de $y = \log_5 x$?

7. Evalúe $\log_4 \dfrac{1}{256}$.

8. Grafique $y = 3^x$.

9. Grafique $y = \log_2 x$.

10. Escriba $2^{-5} = \dfrac{1}{32}$ en forma logarítmica.

11. Escriba $\log_5 125 = 3$ en forma exponencial.

Escriba los ejercicios 12 y 13 en forma exponencial y determine el valor que falta.

12. $4 = \log_2 (x + 3)$

13. $y = \log_{64} 16$

14. Desarrolle $\log_2 \dfrac{x^3(x - 4)}{x + 2}$.

15. Escriba como el logaritmo de una sola expresión.
$$7 \log_6 (x - 4) + 2 \log_6 (x + 3) - \frac{1}{2} \log_6 x.$$

16. Evalúe $10 \log_9 \sqrt{9}$.

17. **a)** Determine log 4620 redondeado a 4 lugares decimales.
b) Determine log 0.0692 redondeado a 4 lugares decimales.

18. Resuelva $3^x = 19$ para x.

19. Resuelva $\log 4x = \log (x + 3) + \log 2$ para x.

20. Resuelva $\log (x + 5) - \log (x - 2) = \log 6$ para x.

21. Si $\ln N = 2.79$, determine N; redondee su respuesta a 4 decimales.

22. Evalúe $\log_6 40$; utilice la fórmula de cambio de base y redondee su respuesta a 4 decimales.

23. Resuelva $100 = 250e^{-0.03t}$; redondee a 4 decimales.

24. **Cuenta de ahorros** Si Kim Lee invierte \$3500 en una cuenta de ahorros que genera 6% de interés compuesto cada trimestre, ¿cuánto dinero tendrá después de 10 años?

25. **Carbono 14** La cantidad de carbono 14 que queda después de t años se determina mediante la fórmula $v = v_0e^{-0.0001205t}$, en donde v_0 es la cantidad original de carbono 14. Si al principio un fósil tenía 60 gramos de carbono 14 y ahora contiene 40 gramos de dicho elemento, ¿cuál es la edad del fósil?

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen y verifique sus respuestas con las que aparecen al final. Revise las preguntas que haya respondido incorrectamente. Los números de la sección y el objetivo en donde se analiza el material correspondiente se indican después de cada respuesta.

1. Simplifique $\dfrac{(2xy^2z^{-3})^2}{(3x^{-1}yz^2)^{-1}}$.

2. Evalúe $5^2 - (2 - 3^2)^2 + 4^3$.

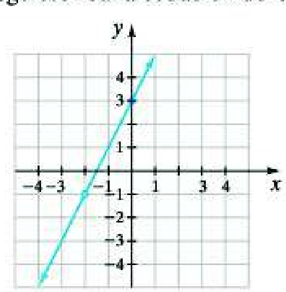
3. **Cena** Thomas Ferguson llevó a su esposa a cenar a un agradable restaurante. El costo de los alimentos antes de impuestos fue \$92. Si el precio total, incluyendo el impuesto, fue \$98.90, determine la tasa de impuesto.

4. Resuelva la desigualdad $-3 \leq 2x - 7 < 8$ y escriba la respuesta como un conjunto solución y en notación de intervalos.

5. Despeje y en $2x - 3y = 8$.

6. Sea $h(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x + 6}$. Determine $h(-4)$.

7. Determine la pendiente de la recta que se muestra en la figura siguiente. Luego escriba la ecuación de la recta dada.



8. Grafique $4x = 3y - 3$.

9. Grafique $y \leq \frac{1}{3}x + 6$.

10. Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 13$$

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{8}y = 5$$

11. Divida $\frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 9}{x + 1}$.

12. Factorice $x^2 - 2xy + y^2 - 64$.

13. Resuelva $(2x + 1)^2 - 9 = 0$.

14. Resuelva $\frac{2x + 3}{x + 1} = \frac{3}{2}$.

15. Despeje d en $a_n = a_1 + nd - d$.

16. Si L varía inversamente respecto del cuadrado de P. Determine L cuando $P = 4$ y $K = 100$.

17. Simplifique $4\sqrt{45x^3} + \sqrt{5x}$.

18. Resuelva $\sqrt{2a + 9} - a + 3 = 0$.

19. Resuelva $(x^2 - 5)^2 + 3(x^2 - 5) - 10 = 0$.

20. Sea $g(x) = x^2 - 4x - 5$.

a) Exprese a $g(x)$ en la forma $g(x) = a(x - h)^2 + k$.

b) Trace la gráfica y marque el vértice.