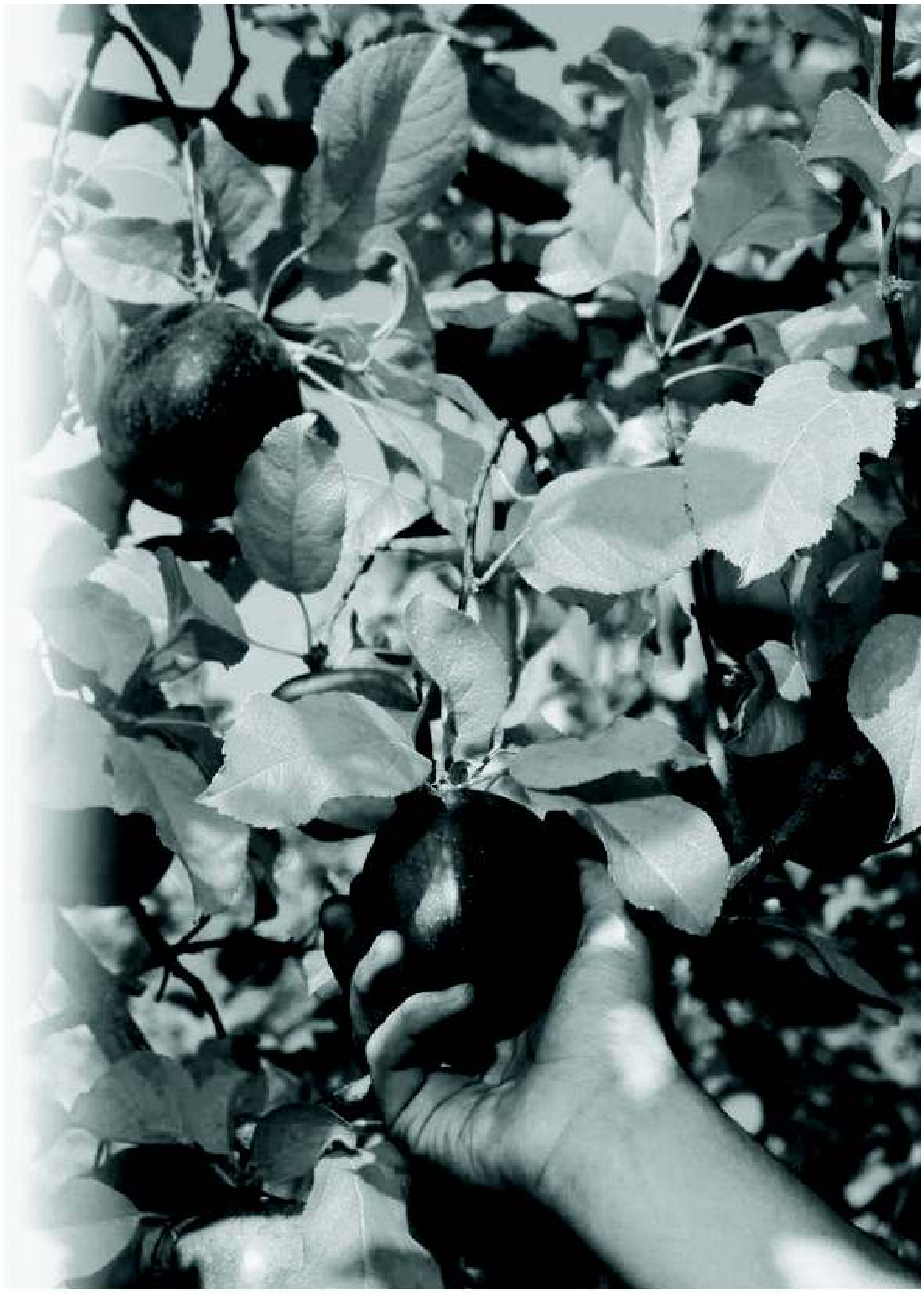
6 Expresiones racionales y ecuaciones



OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

Las expresiones racionales son expresiones que tienen fracciones, mientras que las *ecuaciones racionales* son ecuaciones que tienen expresiones racionales. En este capítulo aprenderá a trabajar con expresiones racionales, y a resolver ecuaciones racionales. Para tener éxito en este capítulo, debe tener una plena comprensión de las técnicas de factorización analizadas en el capítulo 5.

CUANDO DOS O MÁS personas realizan una tarea, tardan menos tiempo que si la realizan de manera aislada cada una de ellas. Por ejemplo, en las páginas 427 y 428, determinaremos el tiempo que tardan dos personas, trabajando juntas, en cosechar manzanas (ejercicio 11), limpiar canalones (ejercicio 13) o escardar un jardín (ejercicio 14), cuando sabemos el tiempo que cada persona tarda en completar la tarea si la realiza sola.

6.1 Dominios de funciones racionales y multiplicación y división de expresiones racionales

1. Determinar los dominios de funciones racionales.
2. Reducir expresiones racionales.
3. Multiplicar expresiones racionales.
4. Dividir expresiones racionales.

1 Determinar los dominios de funciones racionales

Para entender las expresiones racionales, es preciso comprender las técnicas de factorización que se analizaron en el capítulo 5. Una **expresión racional** es una expresión de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.

Ejemplos de expresiones racionales

$$\frac{2}{x}, \quad \frac{x+3}{x}, \quad \frac{x^2+4x}{x-6}, \quad \frac{a}{a^2-4}, \quad \frac{t^2-5t+7}{t^3+t^2-9t}$$

Observe que el denominador de una expresión racional no puede ser igual a 0, ya que la división entre 0 no está definida. En la expresión $\frac{x+3}{x}$, x no puede ser igual a 0, ya que el denominador tendría un valor 0. En $\frac{x^2+4x}{x-6}$ x no puede ser igual a 6, ya que el denominador tendría un valor 0. ¿Qué valores de a no pueden utilizarse en la expresión $\frac{a}{a^2-4}$? Si respondió 2 y -2, contestó correctamente.

Al escribir una expresión racional con una variable en el denominador, siempre suponemos que el valor o valores de la variable que hacen el denominador igual a cero quedan excluidos. Por ejemplo, si escribimos $\frac{5}{x-3}$, suponemos que $x \neq 3$, aunque esto no se indique de manera específica.

En la sección 5.1 estudiamos las funciones polinomiales. Ahora introducimos las funciones racionales. Una **función racional** es la de la forma $f(x) = \frac{p}{q}$ o $y = \frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.

Ejemplos de funciones racionales

$$f(x) = \frac{4}{x} \qquad y = \frac{x^2+2}{x+3} \qquad T(a) = \frac{a+9}{a^2-4} \qquad h(x) = \frac{7x-8}{2x+1}$$

El **dominio** de una función racional será el conjunto de valores que pueden utilizarse para reemplazar la variable. Por ejemplo, en la función racional $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, el dominio será el conjunto de todos los números reales, excepto el 3, lo que se escribe $\{x|x \neq 3\}$. Si x fuera 3, el denominador sería 0, y la división entre 0 no está definida.

EJEMPLO 1 Para las funciones dadas $f(x)$ y $g(x)$, determine el dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

a) $f(x) = x^2, g(x) = x^2 - 4$
b) $f(x) = x - 3, g(x) = x^2 + 2x - 15$
c) $f(x) = x, g(x) = x^2 + 8$

Solución

a) Como $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomiales, el dominio de cada una es el conjunto de todos los números reales. Por lo tanto, el dominio del cociente de las funciones $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ será el conjunto de todos los números reales para los que el denominador del cociente sea diferente de 0. Con base en lo aprendido en la sección 3.6 sabemos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Por lo tanto, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ *Sustituir expresiones para f(x) y g(x).*

$= \frac{x^2}{(x+2)(x-2)}$ *Factorizar el denominador.*

Con base en esta forma factorizada, vemos que x no puede ser 2 ni -2. Así, el dominio está formado por todos los números reales excepto 2 y –2, y puede expresarse como $\{x|x \neq 2 \text{ y } x \neq -2\}$.

b)

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{x - 3}{x^2 + 2x - 15} \quad \text{Sustituir expresiones para } f(x) \text{ y } g(x).$$

$$= \frac{x - 3}{(x - 3)(x + 5)} \quad \text{Factorizar el denominador.}$$

Observe que $x - 3$ en el numerador se cancelaría con $x - 3$ en el denominador. Sin embargo, cuando determinamos el dominio del cociente de funciones, lo hacemos *antes* de simplificar la expresión. Como el denominador no puede ser 0, x no puede tener valores de 3 ni de -5. El dominio es $\{x|x \neq 3 \text{ y } x \neq -5\}$.

c)

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{x}{x^2 + 8}$$

Como ningún valor de x puede hacer que el denominador sea 0, el dominio está formado por todos los números reales y puede escribirse como $\{x|x \text{ es un número real}\}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 21

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Si usted tiene una calculadora graficadora, sería recomendable que practicara en ella la graficación de algunas funciones racionales. Esto le dará una idea de la gran variedad de gráficas que pueden producir las funciones racionales.

Si graficara en su calculadora la expresión $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ del ejemplo 1**a)**, la pantalla podría verse como la de la **figura 6.1**.

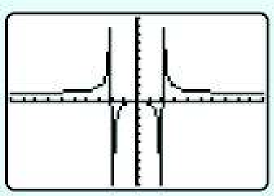


FIGURA 6.1

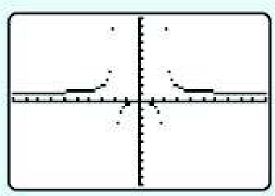


FIGURA 6.2

El dominio de esta función está formado por todos los números reales, excepto 2 y -2.

Observe lo que parecen ser líneas verticales en $x = 2$ y $x = -2$, los valores de x donde la función no está definida. Esta calculadora está en un modo llamado *modo de conexión*. Cuando está en este modo, conectará todos los puntos que grafique, pasando del punto con la coordenada x más pequeña al siguiente mayor. Justo a la izquierda de -2, el valor de y es un número positivo grande, y justo a la derecha de -2, el valor de y es un número negativo grande. La recta vertical es el intento de la calculadora para conectar estos dos puntos de x y y. Una situación similar ocurre en $x = 2$.

En ocasiones es preferible que la calculadora esté en *modo de puntos*. Cuando está en este modo muestra puntos desconectados que se han calculado. Lea el manual que acompaña a su calculadora para aprender cómo cambiar de modo de conexión a modo de puntos y viceversa. En la **figura 6.2** se muestra la misma gráfica de la **figura 6.1**, pero esta vez en una calculadora en modo de puntos.

2 Reducir expresiones racionales

Al resolver problemas que incluyen expresiones racionales, debemos asegurarnos de escribir la respuesta en los términos mínimos. Una expresión racional está **simplificada** cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes, salvo el 1. La fracción $\frac{6}{9}$ no está simplificada, ya que 6 y 9 tienen como factor común el número 3. Cuando se factoriza el número 3, la fracción simplificada es $\frac{2}{3}$.

$$\frac{6}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

La expresión racional $\frac{ab - b^2}{2b}$ no está simplificada, ya que el numerador y el denominador tienen un factor, b. Para simplificar esta expresión, factorice b en cada término del numerador; luego, divida.

$$\frac{ab - b^2}{2b} = \frac{\cancel{b}(a - b)}{2\cancel{b}} = \frac{a - b}{2}$$

Así, $\frac{ab - b^2}{2b}$ se convierte en $\frac{a - b}{2}$ cuando se simplifica.

Para simplificar expresiones racionales

1. Factorice de la manera más completa posible el numerador y el denominador.
2. Divida el denominador y el numerador entre los factores comunes.

EJEMPLO 2 Simplifique. **a)** $\frac{x^2 + 5x + 4}{x + 4}$ **b)** $\frac{3x^3 - 3x^2}{x^3 - x}$

Solución

a) Factorice el numerador; luego divida entre el factor común.

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x + 4} = \frac{\cancel{(x + 4)}(x + 1)}{\cancel{x + 4}} = x + 1$$

La expresión racional se simplifica a $x + 1$.

b) Factorice el numerador y el denominador. Luego divida entre los factores comunes.

$$\frac{3x^3 - 3x^2}{x^3 - x} = \frac{3x^2(x - 1)}{x(x^2 - 1)}$$

$$= \frac{3\overset{x}{\cancel{x^2}}\cancel{(x - 1)}}{\cancel{x}(x + 1)\cancel{(x - 1)}} \qquad \text{Factorizar } x^2 - 1.$$

$$= \frac{3x}{x + 1}$$

La expresión racional se simplifica a $\frac{3x}{x + 1}$.

Ahora resuelva el ejercicio 33

Cuando los términos de un numerador sólo difieren en el signo respecto de los términos de un denominador, podemos factorizar -1 del numerador o bien del denominador. *Cuando se factoriza –1 en un polinomio, los signos de todos los término del polinomio cambian.* Por ejemplo,

$$-2x + 3 = -1(2x - 3) = -(2x - 3)$$

$$6 - 5x = -1(-6 + 5x) = -(5x - 6)$$

$$-3x^2 + 8x - 6 = -1(3x^2 - 8x + 6) = -(3x^2 - 8x + 6)$$

EJEMPLO 3 Simplifique $\dfrac{27x^3 - 8}{2 - 3x}$.

Solución

$$\frac{27x^3 - 8}{2 - 3x} = \frac{(3x)^3 - (2)^3}{2 - 3x}$$

Escriba el numerador como una diferencia de dos cubos.

$$= \frac{(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)}{2 - 3x}$$

Factorice; recuerde que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

$$= \frac{\cancel{(3x - 2)}(9x^2 + 6x + 4)}{-1\cancel{(3x - 2)}}$$

Factorice -1 del denominador y divida entre los factores comunes.

$$= \frac{9x^2 + 6x + 4}{-1}$$

$$= -(9x^2 + 6x + 4) \quad \text{o} \quad -9x^2 - 6x - 4$$

Ahora resuelva el ejercicio 41

Cómo evitar errores comunes

INCORRECTO	INCORRECTO
$\cancel{\dfrac{\overset{x}{\cancel{x^2}} + 6}{\underset{1}{\cancel{x}}}}$	$\cancel{\dfrac{x + \overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}}$

Recuerde que sólo se puede dividir entre **factores** comunes. Por lo tanto, las expresiones $\dfrac{x^2 + 6}{x}$ y $\dfrac{x + 8}{4}$ no pueden simplificarse. Solamente cuando las expresiones están *multiplicadas* pueden factorizarse. Ninguna de las expresiones anteriores puede simplificarse de su forma original.

CORRECTO	INCORRECTO
$\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x + 2)\cancel{(x - 2)}}{\cancel{x - 2}} = x + 2$	$\cancel{\dfrac{\overset{x}{\cancel{x^2}} - \overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{x}} - \underset{1}{\cancel{2}}}}$

3 Multiplicar expresiones racionales

Ahora que sabemos cómo simplificar una expresión racional, podemos analizar la multiplicación de expresiones racionales.

Para multiplicar expresiones racionales

Para multiplicar expresiones racionales, utilice la siguiente regla:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

Para multiplicar expresiones racionales, siga estos pasos:

1. Factorice tanto como sea posible todos los numeradores y los denominadores.
2. Divida entre los factores comunes.
3. Multiplique usando la regla anterior.
4. Cuando sea posible, simplifique la respuesta. (Este paso no es necesario si se realiza correctamente el paso 2).

Si se factorizaron todos los factores comunes en el paso 2, su respuesta en el paso 4 debe estar en la forma simplificada. Sin embargo, si olvidó un factor común en el paso 2, puede factorizarlo en el paso 4 para obtener una respuesta más simplificada.

EJEMPLO 4 Multiplique. **a)** $\dfrac{x-5}{6x}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x^2-7x+10}$ **b)** $\dfrac{2x-3}{x-4}\cdot\dfrac{x^2-8x+16}{3-2x}$

Solución

a) $$\frac{x-5}{6x}\cdot\frac{x^2-2x}{x^2-7x+10}=\frac{\cancel{x-5}}{6\cancel{x}}\cdot\frac{\cancel{x}\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\,\cancel{(x-5)}}$$ Factorice; divida entre los factores comunes.

$$=\frac{1}{6}$$

b) $$\frac{2x-3}{x-4}\cdot\frac{x^2-8x+16}{3-2x}=\frac{2x-3}{x-4}\cdot\frac{(x-4)(x-4)}{3-2x}$$ Factorice.

$$=\frac{\cancel{2x-3}}{\cancel{x-3}}\cdot\frac{\cancel{(x-4)}(x-4)}{-1\cancel{(2x-3)}}$$ Factorice -1 del denominador; divida entre los factores comunes.

$$=\frac{x-4}{-1}$$

$$=-(x-4)\quad\text{o}\quad -x+4\quad\text{o}\quad 4-x$$

Ahora resuelva el ejercicio 61

EJEMPLO 5 Multiplique $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}\cdot\dfrac{x+4y}{2x^2-xy-y^2}$.

Solución

$$\frac{x^2-y^2}{x+y}\cdot\frac{x+4y}{2x^2-xy-y^2}=\frac{\cancel{(x+y)}\,\cancel{(x-y)}}{\cancel{x+y}}\cdot\frac{x+4y}{(2x+y)\cancel{(x-y)}}$$ Factorice; divida entre los factores comunes.

$$=\frac{x+4y}{2x+y}$$

Ahora resuelva el ejercicio 55

EJEMPLO 6 Multiplique $\dfrac{ab-ac+bd-cd}{ab+ac+bd+cd}\cdot\dfrac{b^2+bc+bd+cd}{b^2+bd-bc-cd}$.

Solución Factorice los numeradores y denominadores mediante agrupación. Luego divida entre los factores comunes.

$$\frac{ab-ac+bd-cd}{ab+ac+bd+cd}\cdot\frac{b^2+bc+bd+cd}{b^2+bd-bc-cd}$$

$$=\frac{a(b-c)+d(b-c)}{a(b+c)+d(b+c)}\cdot\frac{b(b+c)+d(b+c)}{b(b+d)-c(b+d)}$$ Propiedad distributiva.

$$=\frac{(b-c)(a+d)}{(b+c)(a+d)}\cdot\frac{(b+c)(b+d)}{(b+d)(b-c)}$$ Factorice completamente;

$$=\frac{\cancel{(b-c)}\,\cancel{(a+d)}}{\cancel{(b+c)}\,\cancel{(a+d)}}\cdot\frac{\cancel{(b+c)}\,\cancel{(b+d)}}{\cancel{(b+d)}\,\cancel{(b-c)}}=1$$ divida entre los factores comunes.

Ahora resuelva el ejercicio 75

4 Dividir expresiones racionales

A continuación analizaremos la división de expresiones racionales.

Para dividir expresiones racionales

Para dividir expresiones racionales, utilice la regla siguiente:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

Para dividir expresiones racionales, invertimos el divisor (la segunda fracción, o fracción inferior) y procedemos como cuando multiplicamos expresiones racionales.

EJEMPLO 7 Divida $\frac{18x^4}{5y^3} \div \frac{3x^5}{25y}$.

Solución

$$\frac{18x^4}{5y^3} \div \frac{3x^5}{25y} = \frac{\overset{6}{\cancel{18}}\,\cancel{x^4}}{\cancel{5}\,\underset{y^2}{\cancel{y^3}}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{25}}\,\cancel{y}}{\cancel{3}\,\underset{x}{\cancel{x^5}}}$$ Invierta el divisor; divida entre los factores comunes.

$$= \frac{6 \cdot 5}{y^2 x} = \frac{30}{xy^2}$$

Ahora resuelva el ejercicio 51

En el ejemplo 7 todos los numeradores y denominadores fueron monomios. Cuando los numeradores o denominadores son binomios o trinomios, los factorizamos, si es posible, para dividir entre factores comunes. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Divida. **a)** $\frac{x^2 - 25}{x + 7} \div \frac{x - 5}{x + 7}$ **b)** $\frac{12a^2 - 22a + 8}{3a} \div \frac{3a^2 + 2a - 8}{8a^2 + 16a}$

Solución

a) $$\frac{x^2 - 25}{x + 7} \div \frac{x - 5}{x + 7} = \frac{x^2 - 25}{x + 7} \cdot \frac{x + 7}{x - 5}$$ Invierta el divisor.

$$= \frac{(x + 5)\cancel{(x - 5)}}{\cancel{x + 7}} \cdot \frac{\cancel{x + 7}}{\cancel{x - 5}}$$ Factorice una vez más; divida entre los factores comunes.

$$= x + 5$$

b) $$\frac{12a^2 - 22a + 8}{3a} \div \frac{3a^2 + 2a - 8}{8a^2 + 16a}$$

$$= \frac{12a^2 - 22a + 8}{3a} \cdot \frac{8a^2 + 16a}{3a^2 + 2a - 8}$$ Invierta el divisor.

$$= \frac{2(6a^2 - 11a + 4)}{3a} \cdot \frac{8a(a + 2)}{(3a - 4)(a + 2)}$$ Factorice.

$$= \frac{2\cancel{(3a - 4)}(2a - 1)}{3\cancel{a}} \cdot \frac{8\cancel{a}\cancel{(a + 2)}}{\cancel{(3a - 4)}\cancel{(a + 2)}}$$ Factorice una vez más; divida entre los factores comunes.

$$= \frac{16(2a - 1)}{3}$$

Ahora resuelva el ejercicio 59

EJEMPLO 9 Divida $\dfrac{x^4 - y^4}{x - y} \div \dfrac{x^2 + xy}{x^2 - 2xy + y^2}$.

Solución

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} \div \frac{x^2 + xy}{x^2 - 2xy + y^2}$$

$$= \frac{x^4 - y^4}{x - y} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + xy} \qquad \text{Invierta el divisor.}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x - y} \cdot \frac{(x - y)(x - y)}{x(x + y)} \qquad \text{Factorice.}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)\cancel{(x + y)}\cancel{(x - y)}}{\cancel{x - y}} \cdot \frac{(x - y)(x - y)}{x\cancel{(x + y)}} \qquad \text{Factorice una vez más; divida entre los factores comunes.}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(x - y)^2}{x}$$

Ahora resuelva el ejercicio 69

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

A lo largo de este capítulo necesitaremos factorizar polinomios. Es importante que usted entienda las técnicas de factorización que se trataron en el capítulo 5. Si tiene dificultad al factorizar, repase ahora ese tema.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) ¿Qué es una expresión racional?
   b) Proporcione su propio ejemplo de una expresión racional.
2. Explique por qué $\dfrac{\sqrt{x}}{x + 3}$ no es una expresión racional.
3. a) ¿Qué es una función racional?
   b) Proporcione su propio ejemplo de una función racional.
4. Explique por qué $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x + 4}}$ no es una función racional.
5. a) ¿Qué es el dominio de una función racional?
   b) ¿Cuál es el dominio de $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 25}$?
6. a) Explique cómo simplificar una expresión racional.
   b) Mediante el procedimiento que estableció en la parte **a)**, simplifique
   $$\frac{6x^2 + 19x + 10}{4x^2 - 25}$$
7. a) Explique cómo simplificar una expresión racional en donde el numerador y del denominador sólo difieren en el signo.
   b) Mediante el procedimiento que explicó en la parte **a)**, simplifique
   $$\frac{3x^2 - 2x - 7}{-3x^2 + 2x + 7}$$
8. a) Explique cómo multiplicar expresiones racionales.
   b) Mediante el procedimiento indicado en la parte **a)**, multiplique
   $$\frac{6a^2 + a - 1}{3a^2 + 2a - 1} \cdot \frac{3a^2 + 4a + 1}{6a^2 + 5a + 1}$$
9. a) Explique cómo dividir expresiones racionales.
   b) Mediante el procedimiento indicado en la parte **a)**, divida
   $$\frac{r + 2}{r^2 + 9r + 18} \div \frac{(r + 2)^2}{r^2 + 5r + 6}$$
10. Considere $f(x) = \dfrac{x}{x}$. ¿Será $f(x) = 1$ para todos los valores de x?

Práctica de habilidades

Determine los valores que deben excluirse en las expresiones siguientes.

11. $\dfrac{4x}{5x - 20}$
12. $\dfrac{x + 2}{x^2 - 64}$
13. $\dfrac{4}{2x^2 - 15x + 25}$
14. $\dfrac{2}{(x - 6)^2}$
15. $\dfrac{x - 3}{x^2 + 12}$
16. $\dfrac{-2}{49 - r^2}$
17. $\dfrac{x^2 + 81}{x^2 - 81}$
18. $\dfrac{x^2 - 36}{x^2 + 36}$

Determine el dominio de cada función.

19. $f(p) = \dfrac{p+1}{p-2}$

20. $f(z) = \dfrac{3}{-18z+9}$

21. $y = \dfrac{5}{x^2+x-6}$

22. $y = \dfrac{9}{x^2+4x-21}$

23. $f(a) = \dfrac{3a^2-6a+4}{2a^2+3a-2}$

24. $f(x) = \dfrac{10-3x}{x^3+8x}$

25. $g(x) = \dfrac{x^2-x+8}{x^2+4}$

26. $h(x) = \dfrac{x^3-64x}{x^2+81}$

27. $m(a) = \dfrac{a^2+36}{a^2-36}$

28. $k(b) = \dfrac{b^2-36}{b^2+36}$

Simplifique cada expresión racional.

29. $\dfrac{x-xy}{x}$

30. $\dfrac{x^2-5x}{x}$

31. $\dfrac{5x^2-20xy}{15x}$

32. $\dfrac{x^2+7x}{x^2-2x}$

33. $\dfrac{x^3-x}{x^2-1}$

34. $\dfrac{4x^2y+12xy+18x^3y^3}{10xy^2}$

35. $\dfrac{5r-8}{8-5r}$

36. $\dfrac{4x^2-16x^4+6x^5y}{14x^3y^2}$

37. $\dfrac{p^2-2p-24}{6-p}$

38. $\dfrac{4x^2-9}{2x^2-x-3}$

39. $\dfrac{a^2-3a-10}{a^2+5a+6}$

40. $\dfrac{y^2-10yz+24z^2}{y^2-5yz+4z^2}$

41. $\dfrac{8x^3-125y^3}{2x-5y}$

42. $\dfrac{64x^3-27z^3}{3z-4x}$

43. $\dfrac{(x+6)(x-3)+(x+6)(x-2)}{2(x+6)}$

44. $\dfrac{(2x-1)(x+4)+(2x-1)(x+1)}{3(2x-1)}$

45. $\dfrac{a^2+7a-ab-7b}{a^2-ab+5a-5b}$

46. $\dfrac{xy-yw+xz-zw}{xy+yw+xz+zw}$

47. $\dfrac{x^2-x-12}{x^3+27}$

48. $\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$

Multiplique o divida como se indica. Simplifique todas las respuestas.

49. $\dfrac{2x}{5y}\cdot\dfrac{y^3}{6}$

50. $\dfrac{32x^2}{y^4}\cdot\dfrac{5x^3}{8y^2}$

51. $\dfrac{9x^3}{4}\div\dfrac{3}{16y^2}$

52. $\dfrac{10m^4}{49x^5y^7}\div\dfrac{25m^5}{21x^{12}y^5}$

53. $\dfrac{3-r}{r-3}\cdot\dfrac{r-9}{9-r}$

54. $\dfrac{7a+7b}{5}\div\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$

55. $\dfrac{x^2+3x-10}{4x}\cdot\dfrac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$

56. $\dfrac{p^2+7p+10}{p+5}\cdot\dfrac{1}{p+2}$

57. $\dfrac{r^2+10r+21}{r+7}\div\dfrac{(r^2-5r-24)}{r^3}$

58. $(x-3)\div\dfrac{x^2+3x-18}{x^3}$

59. $\dfrac{x^2+12x+35}{x^2+4x-5}\div\dfrac{x^2+3x-28}{7x-7}$

60. $\dfrac{x+1}{x^2-17x+30}\div\dfrac{8x+8}{x^2+7x-18}$

61. $\dfrac{a-b}{9a+9b}\div\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2a+1}$

62. $\dfrac{2x^2+8xy+8y^2}{x^2+4xy+4y^2}\cdot\dfrac{2x^2+7xy+6y^2}{4x^2+14xy+12y^2}$

63. $\dfrac{3x^2-x-4}{4x^2+5x+1}\cdot\dfrac{2x^2-5x-12}{6x^2+x-12}$

64. $\dfrac{6x^3-x^2-x}{2x^2+x-1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+x}$

65. $\dfrac{x+2}{x^3-8}\cdot\dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$

66. $\dfrac{x^4-y^8}{x^2+y^4}\div\dfrac{x^2-y^4}{x^2}$

67. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}\div\dfrac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$

68. $\dfrac{(x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)^3}\div\dfrac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$

69. $\dfrac{2x^4+4x^2}{6x^2+14x+4}\div\dfrac{x^2+2}{3x^2+x}$

70. $\dfrac{8a^3-1}{4a^2+2a+1}\div\dfrac{a^2-2a+1}{(a-1)^2}$

71. $\dfrac{(a-b)^3}{a^3-b^3}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$

72. $\dfrac{r^2-16}{r^3-64}\div\dfrac{r^2+8r+16}{r^2+4r+16}$

73. $\dfrac{4x+y}{5x+2y}\cdot\dfrac{10x^2-xy-2y^2}{8x^2-2xy-y^2}$

74. $\dfrac{2x^3-7x^2+3x}{x^2+2x-3}\cdot\dfrac{x^2+3x}{(x-3)^2}$

75. $\dfrac{ac-ad+bc-bd}{ac+ad+bc+bd}\cdot\dfrac{pc+pd-qc-qd}{pc-pd+qc-qd}$

76. $\dfrac{2p^2+2pq-pq^2-q^3}{p^3+p^2+pq^2+q^2}\div\dfrac{p^3+p+p^2q+q}{p^3+p+p^2+1}$

77. $\dfrac{3r^2+17rs+10s^2}{6r^2+13rs-5s^2}\div\dfrac{6r^2+rs-2s^2}{6r^2-5rs+s^2}$

78. $\dfrac{x^3-4x^2+x-4}{x^5-x^4+x^3-x^2}\cdot\dfrac{2x^3+2x^2+x+1}{2x^3-8x^2+x-4}$

Resolución de problemas

79. Construya una expresión racional que no esté definida en $x = 2$ y $x = -3$. Explique cómo determinó su respuesta.

80. Construya una expresión racional que no esté definida en $x = 4$ y $x = -5$. Explique cómo determinó su respuesta.

81. Considere la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Explique por qué esta función nunca puede ser igual a 0.

82. Considere la función racional $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$. Explique por qué esta función nunca puede ser igual a 0.

83. Considere la función racional $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-36}$. ¿Para cuáles valores de x, si los hay, esta función **a)** es igual a 0? **b)** no está definida? Explique.

84. Considere la función $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-81}$. ¿Para cuáles valores de x, si los hay, esta función **a)** es igual a 0; **b)** no está definida? Explique.

85. Proporcione una función que no esté definida en $x = 3$ y $x = -1$, y que tenga un valor de 0 en $x = 2$. Explique cómo determinó su respuesta.

86. Proporcione una función que no esté definida en $x = -4$ y $x = -2$, y que tenga un valor de 0 en $x = 5$. Explique cómo determinó su respuesta.

Determine el polinomio que debe colocarse en el área sombreada para obtener un enunciado verdadero. Explique cómo determinó su respuesta.

87. $\dfrac{\boxed{\quad}}{x^2+2x-15}=\dfrac{1}{x-3}$

88. $\dfrac{\boxed{\quad}}{3x+2}=x-3$

89. $\dfrac{y^2-y-20}{\boxed{\quad}}=\dfrac{y+4}{y+1}$

90. $\dfrac{\boxed{\quad}}{6p^2+p-15}=\dfrac{2p-1}{2p-3}$

Determine el polinomio que debe colocarse en el área sombreada para obtener un enunciado verdadero. Explique cómo determinó su respuesta.

91. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+2x-3}\cdot\dfrac{\boxed{\quad}}{x^2-2x-8}=1$

92. $\dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}\cdot\dfrac{2x^2+x-6}{\boxed{\quad}}=\dfrac{x-2}{2x+5}$

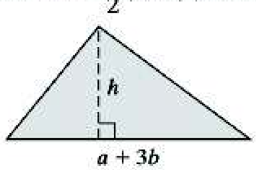
93. $\dfrac{x^2-9}{2x^2+3x-2}\div\dfrac{2x^2-9x+9}{\boxed{\quad}}=\dfrac{x+3}{2x-1}$

94. $\dfrac{4r^2-r-18}{\boxed{\quad}}\div\dfrac{4r^3-9r^2}{6r^2-9r+3}=\dfrac{3(r-1)}{r^2}$

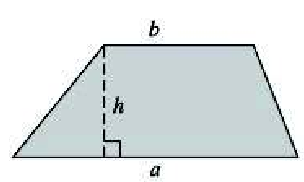
95. **Área** Considere el siguiente rectángulo. Su área es $3a^2 + 7ab + 2b^2$, y su longitud es $2a + 4b$. Determine su ancho, w, en términos de a y b, dividiendo su área entre su longitud.

96. **Área** Considere el siguiente rectángulo. Su área es $a^2 + 2ab + b^2$, y su longitud es $3a + 3b$. Determine su ancho, w, en términos de a y b, dividiendo su área entre su longitud.

97. **Área** Considere el siguiente triángulo. Si su área es $a^2 + 2ab + 3b^2$ y su base es $a + 3b$, determine su altura, h. Utilice la fórmula área $= \dfrac{1}{2}$(base)(altura).



98. **Área** Considere el siguiente trapecio. Si su área es $a^2 + 2ab + b^2$ determine su altura, h. Utilice la fórmula área $= \dfrac{1}{2}h(a+b)$.



Realice cada operación indicada.

99. $\left(\dfrac{2x^2 - 3x - 14}{2x^2 - 9x + 7} \div \dfrac{6x^2 + x - 15}{3x^2 + 2x - 5}\right) \cdot \dfrac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}$

100. $\left(\dfrac{a^2 - b^2}{2a^2 - 3ab + b^2} \cdot \dfrac{2a^2 - 7ab + 3b^2}{a^2 + ab}\right) \div \dfrac{ab - 3b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$

101. $\dfrac{5x^2(x - 1) - 3x(x - 1) - 2(x - 1)}{10x^2(x - 1) + 9x(x - 1) + 2(x - 1)} \cdot \dfrac{2x + 1}{x + 3}$

102. $\dfrac{x^2(3x - y) - 5x(3x - y) - 24(3x - y)}{x^2(3x - y) - 9x(3x - y) + 8(3x - y)} \cdot \dfrac{x - 1}{x + 3}$

103. $\dfrac{(x - p)^n}{x^{-2}} \div \dfrac{(x - p)^{2n}}{x^{-6}}$

104. $\dfrac{x^{-3}}{(a - b)^r} \div \dfrac{x^{-5}}{(a - b)^{r+2}}$

Simplifique.

105. $\dfrac{x^{5y} + 3x^{4y}}{3x^{3y} + x^{4y}}$

106. $\dfrac{m^{2x} - m^x - 2}{m^{2x} - 4}$

En los ejercicios 107 a 110,

a) *Determine el dominio de la función.*

b) *Grafique la función en modo de conexión.*

c) *¿La función crece, decrece o permanece igual conforme x se aproxima a 2, acercándose a 2 por el lado izquierdo?*

d) *¿La función crece, decrece o permanece igual conforme x se aproxima a 2, acercándose a 2 desde el lado derecho?*

107. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

108. $f(x) = \dfrac{x}{x - 2}$

109. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

110. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 2}$

111. Con base en la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Determine el dominio de la función.

b) Complete la tabla siguiente.

x	-10	-1	-0.5	-0.1	-0.01	0.01	0.1	0.5	1	10
y										

c) Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Considere qué le sucede a la función conforme x se aproxima a 0, tanto por la izquierda como por la derecha.

d) ¿Esta gráfica puede tener un valor de 0? Explique su respuesta.

Actividad en grupo

112. Consideren la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

a) Determinen en equipo su dominio.

b) De manera individual cada miembro del grupo complete la siguiente tabla para la función.

x	-2	-1	0	1	1.9	1.99	2.01	2.1	3	4	5	6
y												

c) Comparen sus respuestas a la parte **b)**, y pónganse de acuerdo acerca de cuáles son los valores correctos de la tabla.

d) Tracen en grupo la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. ¿La función está definida cuando $x = 2$?

e) ¿Esta gráfica puede tener algún valor de 0? Si es así, ¿para qué valor o valores de a es $f(a) = 0$?

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **113.** Despeje y de $6(x - 2) + 6y = 12x$.

[2.5] **114.** Resuelva $4 + \dfrac{4x}{3} < 6$ y proporcione la respuesta en notación de intervalo.

[2.6] **115.** Resuelva $\left|\dfrac{2x - 4}{12}\right| = 5$.

[3.2] **116.** Sea $f(x) = |6 - 3x| - 2$. Determine $f(1.3)$.

[4.1] **117.** Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$3x + 4y = 2$$
$$2x + 5y = -1$$

[5.6] **118.** Factorice $9x^2 + 6xy + y^2 - 4$.

6.2 Suma y resta de expresiones racionales

1 Sumar y restar expresiones con un denominador común.
2 Determinar el mínimo común denominador (MCD).
3 Sumar y restar expresiones sin denominadores comunes.
4 Analizar una aplicación de expresiones racionales.

1 Sumar y restar expresiones con un denominador común

Al sumar (o restar) dos expresiones racionales con un común denominador, sumamos (o restamos) los numeradores y conservamos el denominador común.

Para sumar o restar expresiones racionales

Para sumar o restar expresiones racionales, utilice las siguientes reglas.

SUMA

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \quad c \neq 0$$

RESTA

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, \quad c \neq 0$$

Para sumar o restar expresiones racionales con un denominador común.

1. Sume o reste los numeradores, tal como indican las reglas anteriores.
2. Si es posible, simplifique las expresiones.

EJEMPLO 1 Sume.

a) $\dfrac{3}{x+6} + \dfrac{x-4}{x+6}$ **b)** $\dfrac{x^2+3x-2}{(x+5)(x-3)} + \dfrac{4x+12}{(x+5)(x-3)}$

Solución

a) Como los denominadores son iguales, sumamos los numeradores y conservamos el denominador común.

$$\frac{3}{x+6} + \frac{x-4}{x+6} = \frac{3+(x-4)}{x+6} \qquad \text{Sumar numeradores.}$$

$$= \frac{x-1}{x+6}$$

b)

$$\frac{x^2+3x-2}{(x+5)(x-3)} + \frac{4x+12}{(x+5)(x-3)} = \frac{x^2+3x-2+(4x+12)}{(x+5)(x-3)} \qquad \text{Sumar numeradores.}$$

$$= \frac{x^2+7x+10}{(x+5)(x-3)} \qquad \text{Reducir términos semejantes.}$$

$$= \frac{\cancel{(x+5)}(x+2)}{\cancel{(x+5)}(x-3)} \qquad \text{Factorizar; dividir entre los factores comunes.}$$

$$= \frac{x+2}{x-3}$$

Ahora resuelva el ejercicio 11

Al restar expresiones racionales, asegúrese de restar todo el numerador de la fracción. Lea con atención el recuadro siguiente. Cómo evitar errores comunes.

Cómo evitar errores comunes

En ocasiones, los estudiantes cometen el error siguiente. Estudie la información que se presenta para evitarlo.

¿Cómo simplificaría este problema?

$$\frac{4x}{x-2} - \frac{2x+1}{x-2}$$

CORRECTO

$$\begin{aligned}\frac{4x}{x-2} - \frac{2x+1}{x-2} &= \frac{4x-(2x+1)}{x-2}\\ &= \frac{4x-2x-1}{x-2}\\ &= \frac{2x-1}{x-2}\end{aligned}$$

INCORRECTO

$$\cancel{\begin{aligned}\frac{4x}{x-2} - \frac{2x+1}{x-2} &= \frac{4x-2x+1}{x-2}\\ &= \frac{2x+1}{x-2}\end{aligned}}$$

El procedimiento del lado derecho es incorrecto, ya que hay que restar *todo el numerador*, $2x + 1$, de $4x$, y no sólo $2x$. Observe que **debe cambiar el signo de cada término del numerador de la fracción restada** (no sólo el signo del primer término). Observe que, de acuerdo con la propiedad distributiva, $-(2x + 1) = -2x - 1$.

EJEMPLO 2 Reste $\dfrac{a}{a-6} - \dfrac{a^2-4a-6}{a-6}$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{a}{a-6} - \frac{a^2-4a-6}{a-6} &= \frac{a-(a^2-4a-6)}{a-6} && \text{Restar numeradores.}\\ &= \frac{a-a^2+4a+6}{a-6}\\ &= \frac{-a^2+5a+6}{a-6} && \text{Reducir términos semejantes.}\\ &= \frac{-(a^2-5a-6)}{a-6} && \text{Factorizar } -1.\\ &= \frac{-\cancel{(a-6)}(a+1)}{\cancel{a-6}} && \text{Factorizar; dividir entre los factores comunes.}\\ &= -(a+1) \text{ o } -a-1\end{aligned}$$

Ahora resuelva el ejercicio 13

2 Determinar el mínimo común denominador (MCD)

Para sumar o restar dos fracciones numéricas con *denominadores distintos*, primero debemos obtener un denominador común. Para obtener el denominador común, muchas veces es necesario escribir los valores numéricos como productos de números primos. Un **número primo** es un número mayor que 1 que sólo tiene dos divisores, él mismo y 1. Algunos números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13 y 17. A continuación se muestra cómo los números 36 y 48 se escriben como un producto de números primos:

$$36 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 = 2^2\cdot 3^2$$

$$48 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = 2^4\cdot 3$$

Para determinar el **mínimo común denominador** de una expresión racional, podríamos necesitar escribir coeficientes numéricos como productos de números primos.

Para determinar el mínimo común denominador (MCD) de expresiones racionales

1. Escriba como producto de números primos cada coeficiente no primo (distinto de 1) de los monomios del denominador.
2. Factorice por completo cada denominador. Cualquier factor que aparezca más de una vez debe expresarse como potencia. Por ejemplo, $(x + 5)(x + 5)$ debe expresarse como $(x + 5)^2$.
3. Liste todos los factores diferentes (distintos de 1) que aparezcan en cualquiera de los denominadores. Cuando el mismo factor aparezca en más de un denominador, escríbalo con la mayor potencia.
4. El mínimo común denominador es el producto de todos los factores encontrados en el paso 3.

EJEMPLO 3 Determine el MCD de cada expresión.

a) $\dfrac{3}{5x} - \dfrac{2}{x^2}$ **b)** $\dfrac{1}{18x^3y} + \dfrac{5}{27x^2y^3}$ **c)** $\dfrac{3}{x} - \dfrac{2y}{x+5}$ **d)** $\dfrac{7}{x^2(x+1)} + \dfrac{3z}{x(x+1)^3}$

Solución

a) Los factores que aparecen en el denominador son 5 y x. Liste cada factor con su máxima potencia. El MCD es el producto de estos factores.

Mayor potencia de x

$$\text{MCD} = 5 \cdot x^2 = 5x^2$$

b) Los coeficientes numéricos escritos como productos de números primos son $18 = 2 \cdot 3^2$ y $27 = 3^3$. Los factores variables que aparecen son x y y. Utilizamos las máximas potencias de los factores para obtener el MCD.

$$\text{MCD} = 2 \cdot 3^3 \cdot x^3y^3 = 54x^3y^3$$

c) Los factores son x y $x + 5$. Observe que la x del segundo denominador, $x + 5$, no es un factor del denominador, ya que la operación es una suma y no una multiplicación.

$$\text{MCD} = x(x + 5)$$

d) Los factores son x y $x + 1$. La mayor potencia de x es 2, y la mayor potencia de $x + 1$ es 3.

$$\text{MCD} = x^2(x + 1)^3$$

Ahora resuelva el ejercicio 31

En ocasiones es necesario factorizar todos los denominadores para obtener el MCD. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Determine el MCD de cada expresión.

a) $\dfrac{3}{2x^2 - 4x} + \dfrac{8x}{x^2 - 4x + 4}$ **b)** $\dfrac{4x}{x^2 - x - 12} - \dfrac{6x^2}{x^2 - 7x + 12}$

Solución

a) Factorice ambos denominadores.

$$\frac{3}{2x^2 - 4x} + \frac{8x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{3}{2x(x-2)} + \frac{8x}{(x-2)^2}$$

Los factores son 2, x y $x - 2$. Multiplique los factores elevados a la mayor potencia a la que aparezca cada uno.

$$\text{MCD} = 2 \cdot x \cdot (x - 2)^2 = 2x(x - 2)^2$$

b) Factorice ambos denominadores.

$$\frac{4x}{x^2 - x - 12} - \frac{6x^2}{x^2 - 7x + 12} = \frac{4x}{(x + 3)(x - 4)} - \frac{6x^2}{(x - 3)(x - 4)}$$
$$\text{MCD} = (x + 3)(x - 4)(x - 3)$$

Observe que aunque $x - 4$ es un factor común a cada denominador, la máxima potencia de ese factor que aparece en cada denominador es 1.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 29

3 Sumar y restar expresiones sin denominadores comunes

El procedimiento que se usa para sumar o restar expresiones racionales sin denominadores comunes, se explica a continuación.

Para sumar o restar expresiones racionales con denominadores distintos

1. Determine el MCD.
2. Reescriba cada fracción como una fracción equivalente con el MCD. Esto se hace multiplicando el numerador y el denominador de cada fracción por los factores necesarios para obtener el MCD.
3. Conserve el denominador en forma factorizada, pero desarrolle el numerador.
4. Sume o reste los numeradores, conservando el MCD.
5. Cuando sea posible reducir la fracción mediante factorización del numerador, hágalo.

EJEMPLO 5 ▸ Sume. **a)** $\frac{2}{x} + \frac{9}{y}$ **b)** $\frac{5}{4a^2} + \frac{3}{14ab^3}$

Solución

a) Primero determinamos el MCD.

$$\text{MCD} = xy$$

A continuación escribimos cada fracción con el MCD. Para esto, multiplicamos *tanto* el numerador *como* el denominador de cada fracción por los factores necesarios para obtener el MCD.

En este problema, la primera fracción debe multiplicarse por $\frac{y}{y}$ y la segunda por $\frac{x}{x}$.

$$\frac{2}{x} + \frac{9}{y} = \frac{y}{y} \cdot \frac{2}{x} + \frac{9}{y} \cdot \frac{x}{x} = \frac{2y}{xy} + \frac{9x}{xy}$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por el mismo factor, en realidad estamos multiplicando por 1, lo cual no cambia el valor de la fracción, pero sí su apariencia. Así, la nueva fracción es equivalente a la fracción original.

Ahora sumamos los numeradores y dejamos solo al MCD.

$$\frac{2y}{xy} + \frac{9x}{xy} = \frac{2y + 9x}{xy} \quad \text{o} \quad \frac{9x + 2y}{xy}$$

Por lo tanto, $\frac{2}{x} + \frac{9}{y} = \frac{9x + 2y}{xy}$.

b) El MCD de 4 y 14 es 28. El MCD de las dos fracciones es $28a^2b^3$. Debemos escribir cada fracción con el denominador $28a^2b^3$. Para esto, multiplicamos la primera fracción por $\frac{7b^3}{7b^3}$ y la segunda fracción de la derecha por $\frac{2a}{2a}$.

$$\frac{5}{4a^2} + \frac{3}{14ab^3} = \frac{7b^3}{7b^3} \cdot \frac{5}{4a^2} + \frac{3}{14ab^3} \cdot \frac{2a}{2a} \quad \text{Multiplicar para obtener el MCD.}$$
$$= \frac{35b^3}{28a^2b^3} + \frac{6a}{28a^2b^3}$$
$$= \frac{35b^3 + 6a}{28a^2b^3} \quad \text{Sumar numeradores.}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 39**

EJEMPLO 6 ▸ Reste $\frac{x+2}{x-4} - \frac{x+5}{x+4}$.

Solución El MCD es $(x - 4)(x + 4)$. Escribimos cada fracción con el denominador $(x - 4)(x + 4)$.

$$\frac{x+2}{x-4} - \frac{x+5}{x+4} = \frac{x+4}{x+4} \cdot \frac{x+2}{x-4} - \frac{x+5}{x+4} \cdot \frac{x-4}{x-4} \quad \text{Multiplicar para obtener el MCD.}$$
$$= \frac{(x+4)(x+2)}{(x+4)(x-4)} - \frac{(x+5)(x-4)}{(x+4)(x-4)}$$
$$= \frac{x^2+6x+8}{(x+4)(x-4)} - \frac{x^2+x-20}{(x+4)(x-4)} \quad \text{Multiplicar los binomios en el numerador.}$$
$$= \frac{x^2+6x+8-(x^2+x-20)}{(x+4)(x-4)} \quad \text{Restar numeradores.}$$
$$= \frac{x^2+6x+8-x^2-x+20}{(x+4)(x-4)}$$
$$= \frac{5x+28}{(x+4)(x-4)} \quad \text{Reducir términos semejantes.}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 45**

EJEMPLO 7 ▸ Sume $\frac{2}{x-3} + \frac{x+5}{3-x}$.

Solución Observe que cada denominador es el opuesto, o inverso aditivo, del otro. (Los términos de los denominadores sólo difieren en el signo.) Cuando surge esta situación especial, podemos multiplicar el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones por -1 para obtener el MCD.

$$\frac{2}{x-3} + \frac{x+5}{3-x} = \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{-1} \cdot \frac{(x+5)}{(3-x)} \quad \text{Multiplicar para obtener el MCD.}$$
$$= \frac{2}{x-3} + \frac{-x-5}{x-3}$$
$$= \frac{2-x-5}{x-3} \quad \text{Sumar denominadores.}$$
$$= \frac{-x-3}{x-3} \quad \text{Reducir términos semejantes.}$$

Ya que no hay factores comunes en el numerador y en el denominador, $\frac{-x-3}{x-3}$ no puede simplificarse más.

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 43**

EJEMPLO 8 ▶ Reste $\dfrac{3x+4}{2x^2-5x-12}-\dfrac{2x-3}{5x^2-18x-8}$.

Solución Factorice el denominador de cada expresión.

$$\frac{3x+4}{2x^2-5x-12}-\frac{2x-3}{5x^2-18x-8}=\frac{3x+4}{(2x+3)(x-4)}-\frac{2x-3}{(5x+2)(x-4)}$$

El MCD es $(2x+3)(x-4)(5x+2)$.

$$\frac{3x+4}{(2x+3)(x-4)}-\frac{2x-3}{(5x+2)(x-4)}$$

$$=\frac{5x+2}{5x+2}\cdot\frac{3x+4}{(2x+3)(x-4)}-\frac{2x-3}{(5x+2)(x-4)}\cdot\frac{2x+3}{2x+3}$$ Multiplicar para obtener el MCD.

$$=\frac{15x^2+26x+8}{(5x+2)(2x+3)(x-4)}-\frac{4x^2-9}{(5x+2)(2x+3)(x-4)}$$ Multiplicar los numeradores.

$$=\frac{15x^2+26x+8-(4x^2-9)}{(5x+2)(2x+3)(x-4)}$$ Restar los numeradores.

$$=\frac{15x^2+26x+8-4x^2+9}{(5x+2)(2x+3)(x-4)}$$

$$=\frac{11x^2+26x+17}{(5x+2)(2x+3)(x-4)}$$ Reducir términos semejantes.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 49

EJEMPLO 9 ▶ Realice las operaciones indicadas.

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-6}{x^2-4}$$

Solución Primero factorizamos x^2-4. El MCD de las tres fracciones es $(x+2)(x-2)$.

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-6}{x^2-4}$$

$$=\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-6}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{x+2}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x-2}{x-2}+\frac{x-6}{(x+2)(x-2)}$$ Multiplicar para obtener el MCD.

$$=\frac{x^2+x-2}{(x+2)(x-2)}-\frac{x^2-x-2}{(x+2)(x-2)}+\frac{x-6}{(x+2)(x-2)}$$ Multiplicar numeradores.

$$=\frac{x^2+x-2-(x^2-x-2)+(x-6)}{(x+2)(x-2)}$$ Restar y sumar numeradores.

$$=\frac{x^2+x-2-x^2+x+2+x-6}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{3x-6}{(x+2)(x-2)}$$ Reducir términos semejantes.

$$=\frac{3\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}}$$ Factorizar; dividir entre factores comunes.

$$=\frac{3}{x+2}$$

▶ Ahora resuelva el ejercicio 67

CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

En el ejemplo 9, encontramos que

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-6}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}$$

Suponga que, en una calculadora graficadora, definimos

$$Y_1=\frac{x-1}{x-2}-\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-6}{x^2-4}$$
$$Y_2=\frac{3}{x+2}$$

Si utilizamos la característica TABLE de su calculadora graficadora, ¿cómo son los valores de Y_1 y Y_2? La función Y_1 no está definida en $x = -2$ y $x = 2$. La función Y_2 no está definida en $x = -2$. Para todos los valores de x distintos de -2 y 2, los valores de Y_1 y Y_2 deben ser iguales, a menos que hayamos cometido algún error. La siguiente es una tabla de valores de Y_1 y Y_2, para valores de x de -3 a 3.

X	Y1	Y2
-3	-3	-3
-2	ERROR	ERROR
-1	3	3
0	1.5	1.5
1	1	1
2	ERROR	.75
3	.6	.6

X= -3

Las gráficas de Y_1 y Y_2 se muestran en las **figuras 6.3** y **6.4**, respectivamente. Ilustramos las gráficas en este formato (en lugar de la pantalla de una calculadora graficadora) para mostrar más detalles. El círculo vacío de la gráfica de la **figura 6.3** no es visible en una graficadora. Observe que la gráfica de Y_1 tiene un círculo vacío en 2, ya que Y_1 no está definida en $x = 2$. Como Y_2 sí está definida en ese punto, la gráfica de la **figura 6.4** no incluye este círculo abierto. Ninguna de las dos funciones está definida en $x = -2$.

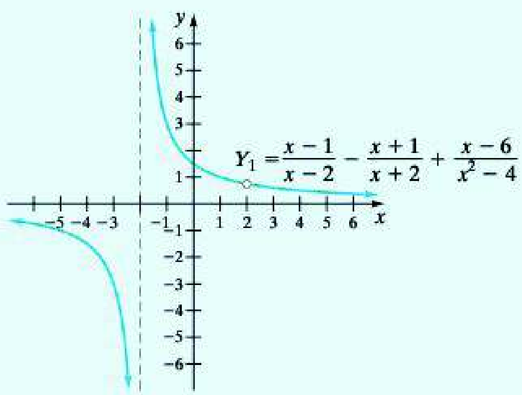


FIGURA 6.3

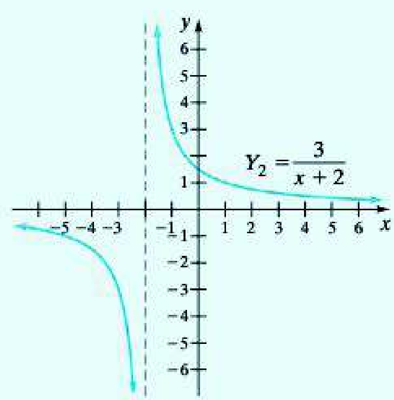


FIGURA 6.4

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

Ahora que hemos analizado las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de expresiones racionales, resumamos rápidamente los procedimientos.

Para sumar o restar expresiones racionales, obtenga el MCD. Exprese cada fracción con el MCD. Luego sume o reste los numeradores y escriba el resultado sobre el MCD.

Para multiplicar expresiones racionales, factorice cada expresión completamente, divida entre los factores comunes, multiplique los numeradores, y multiplique los denominadores.

Para dividir expresiones racionales, multiplique la primera fracción (la superior) por el recíproco de la segunda fracción (la inferior). Luego factorice cada expresión por completo, divida entre los factores comunes, multiplique los numeradores, y multiplique los denominadores.

4 Analizar una aplicación de expresiones racionales

En la sección 6.5 se abordará el tema de las aplicaciones de expresiones racionales, pero por el momento presentaremos una aplicación que implica la suma y resta de expresiones o funciones racionales.

En economía se estudian conceptos como el ingreso, el costo y la utilidad. Si $R(x)$ es una función del ingreso y $C(x)$ es una función del costo, entonces la función de la utilidad, $P(x)$, es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

donde x es el número de artículos fabricados y vendidos por una compañía. Usaremos esta información en el ejemplo 10.

EJEMPLO 10 **Botes de vela** La compañía de botes de vela Don Perrione fabrica y vende al menos seis botes cada semana.

Suponga que $$R(x) = \frac{6x - 7}{x + 2} \quad \text{y} \quad C(x) = \frac{4x - 13}{x + 3}$$

donde x es el número de botes de vela vendidos. Determine la función de la utilidad.

Solución **Entienda el problema y traduzca** Para determinar la función de la utilidad, restamos la función del costo de la función del ingreso.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$
$$P(x) = \frac{6x - 7}{x + 2} - \frac{4x - 13}{x + 3}$$

El MCD es $(x + 2)(x + 3)$.

Realice los cálculos

$$= \frac{x + 3}{x + 3} \cdot \frac{6x - 7}{x + 2} - \frac{4x - 13}{x + 3} \cdot \frac{x + 2}{x + 2} \qquad \textit{Multiplicar para obtener el MCD.}$$

$$= \frac{6x^2 + 11x - 21}{(x + 3)(x + 2)} - \frac{4x^2 - 5x - 26}{(x + 3)(x + 2)} \qquad \textit{Multiplicar los numeradores.}$$

$$= \frac{(6x^2 + 11x - 21) - (4x^2 - 5x - 26)}{(x + 3)(x + 2)} \qquad \textit{Restar los numeradores.}$$

$$= \frac{6x^2 + 11x - 21 - 4x^2 + 5x + 26}{(x + 3)(x + 2)}$$

$$= \frac{2x^2 + 16x + 5}{(x + 3)(x + 2)} \qquad \textit{Reducir términos semejantes.}$$

Responda La función de utilidad es $P(x) = \dfrac{2x^2 + 16x + 5}{(x + 3)(x + 2)}$.

Ahora resuelva el ejercicio 81

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.2

Ejercicios de concepto/redacción

1. a) ¿Qué es el mínimo común denominador de dos o más expresiones racionales?

b) Explique cómo determinar el MCD.

c) Por medio del procedimiento que indicó en la parte **b)**, determine el MCD de

$$\frac{5}{64x^2 - 121} \quad \text{y} \quad \frac{1}{8x^2 - 27x + 22}$$

2. a) Explique cómo sumar o restar dos expresiones racionales.

b) Sume $\dfrac{4}{x + 2} + \dfrac{x}{3x^2 - 4x - 20}$ siguiendo el procedimiento que indicó en la parte **a)**.

En los ejercicios 3 y 4, **a)** *explique por qué la resta no es correcta, y* **b)** *realice la resta correcta.*

3. $\dfrac{x^2 - 4x}{(x + 3)(x - 2)} - \dfrac{x^2 + x - 2}{(x + 3)(x - 2)} \neq \dfrac{x^2 - 4x - x^2 + x - 2}{(x + 3)(x - 2)}$

4. $\dfrac{x - 5}{(x + 4)(x - 3)} - \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x + 4)(x - 3)} \neq \dfrac{x - 5 - x^2 - 6x + 5}{(x + 4)(x - 3)}$

Práctica de habilidades

Sume o reste.

5. $\frac{3x}{x+2}+\frac{5}{x+2}$

6. $\frac{3x}{x+4}+\frac{12}{x+4}$

7. $\frac{7x}{x-5}-\frac{2}{x-5}$

8. $\frac{10x}{x-6}-\frac{60}{x-6}$

9. $\frac{x}{x+3}+\frac{9}{x+3}-\frac{2}{x+3}$

10. $\frac{2x}{x+7}+\frac{17}{x+7}-\frac{3}{x+7}$

11. $\frac{5x-6}{x-8}+\frac{2x-5}{x-8}$

12. $\frac{-4x+6}{x^2+x-6}+\frac{5x-3}{x^2+x-6}$

13. $\frac{x^2-2}{x^2+6x-7}-\frac{-4x+19}{x^2+6x-7}$

14. $\frac{-x^2}{x^2+5xy-14y^2}+\frac{x^2+xy-2y^2}{x^2+5xy-14y^2}$

15. $\frac{x^3-12x^2+45x}{x(x-8)}-\frac{x^2+5x}{x(x-8)}$

16. $\frac{3r^2+15r}{r^3+2r^2-8r}+\frac{2r^2+5r}{r^3+2r^2-8r}$

17. $\frac{3x^2-x}{2x^2-x-21}+\frac{2x-8}{2x^2-x-21}-\frac{x^2-2x+27}{2x^2-x-21}$

18. $\frac{2x^2+9x-15}{2x^2-13x+20}-\frac{3x+10}{2x^2-13x+20}-\frac{3x-5}{2x^2-13x+20}$

Determine el mínimo común denominador.

19. $\frac{5}{2a^2}+\frac{9}{3a^3}$

20. $\frac{1}{9x^2}-\frac{8}{6x^5}$

21. $\frac{-4}{8x^2y^2}+\frac{7}{5x^4y^6}$

22. $\frac{x+12}{16x^2y}-\frac{x^2}{3x^3}$

23. $\frac{2}{3a^4b^2}+\frac{7}{2a^3b^5}$

24. $\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x-3}$

25. $\frac{4x}{x+3}+\frac{6}{x+9}$

26. $\frac{4}{(r-7)(r+2)}-\frac{r+8}{r-7}$

27. $5z^2+\frac{9z}{z-6}$

28. $\frac{b^2+3}{18b}-\frac{b-7}{12(b+8)}$

29. $\frac{x}{x^4(x-2)}-\frac{x+9}{x^2(x-2)^3}$

30. $\frac{x+2}{(x-3)^3(x+4)^2}+\frac{x-7}{(x+4)^4(x-9)}$

31. $\frac{a-2}{a^2-5a-24}+\frac{3}{a^2+11a+24}$

32. $\frac{3x-5}{6x^2+13xy+6y^2}+\frac{3}{3x^2+5xy+2y^2}$

33. $\frac{x}{2x^2-7x+3}+\frac{x-3}{4x^2+4x-3}-\frac{x^2+1}{2x^2-3x-9}$

34. $\frac{3}{x^2+3x-4}-\frac{4}{4x^2+5x-9}+\frac{x+2}{4x^2+25x+36}$

Sume o reste.

35. $\frac{2}{3r}+\frac{8}{r}$

36. $\frac{9}{x^2}+\frac{3}{2x}$

37. $\frac{5}{12x}-\frac{1}{4x^2}$

38. $\frac{5x}{4y}+\frac{7}{6xy}$

39. $\frac{3}{8x^4y}+\frac{1}{5x^2y^3}$

40. $\frac{7}{4xy^3}+\frac{1}{6x^2y}$

41. $\frac{b}{a-b}-\frac{a+b}{b}$

42. $\frac{4x}{3xy}+11$

43. $\frac{a}{a-b}-\frac{a}{b-a}$

44. $\frac{9}{b-2}+\frac{3b}{2-b}$

45. $\frac{4x}{x-4}+\frac{x+3}{x+1}$

46. $\frac{x}{x^2-9}-\frac{4(x-3)}{x+3}$

47. $\frac{3}{a+2}+\frac{3a+1}{a^2+4a+4}$

48. $\frac{2m+9}{m-5}-\frac{4}{m^2-3m-10}$

49. $\frac{x}{x^2+2x-8}+\frac{x+1}{x^2-3x+2}$

50. $\frac{-x^2+5x}{(x-5)^2}+\frac{x+8}{x-5}$

51. $\frac{5x}{x^2-9x+8}-\frac{3(x+2)}{x^2-6x-16}$

52. $\frac{2}{(2p-3)(p+4)}-\frac{3}{(p+4)(p-4)}$

53. $4-\frac{x-1}{x^2+3x-10}$

54. $\frac{3x}{2x-3}+\frac{3x+6}{2x^2+x-6}$

55. $\frac{3a+2}{4a+1}-\frac{3a+6}{4a^2+9a+2}$

56. $\frac{7}{3q^2+q-4}+\frac{9q+2}{3q^2-2q-8}$

57. $\frac{x-y}{x^2-4xy+4y^2}+\frac{x-3y}{x^2-4y^2}$

58. $\frac{x+2y}{x^2-xy-2y^2}-\frac{y}{x^2-3xy+2y^2}$

59. $\frac{2r}{r-4}-\frac{2r}{r+4}+\frac{64}{r^2-16}$

60. $\frac{4}{p+1}+\frac{3}{p-1}+\frac{p+4}{p^2-1}$

61. $\dfrac{-4}{x^2+2x-3}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x-1}$

62. $\dfrac{2}{x^2-16}+\dfrac{x+1}{x^2+8x+16}+\dfrac{3}{x-4}$

63. $\dfrac{3}{3x-2}-\dfrac{1}{x-4}+5$

64. $\dfrac{x}{3x+4}+\dfrac{3x+2}{x-5}-\dfrac{7x^2+24x+28}{3x^2-11x-20}$

65. $2-\dfrac{1}{8r^2+2r-15}+\dfrac{r+2}{4r-5}$

66. $\dfrac{x}{x^2-10x+24}-\dfrac{3}{x-6}+1$

67. $\dfrac{3}{5x+6}+\dfrac{x^2-x}{5x^2-4x-12}-\dfrac{4}{x-2}$

68. $\dfrac{3}{x^2-13x+36}+\dfrac{4}{2x^2-7x-4}+\dfrac{1}{2x^2-17x-9}$

69. $\dfrac{3m}{6m^2+13mn+6n^2}+\dfrac{2m}{4m^2+8mn+3n^2}$

70. $\dfrac{(x-y)^2}{x^3-y^3}+\dfrac{2}{x^2+xy+y^2}$

71. $\dfrac{5r-2s}{25r^2-4s^2}-\dfrac{2r-s}{10r^2-rs-2s^2}$

72. $\dfrac{6}{(2r-1)^2}+\dfrac{2}{2r-1}-3$

73. $\dfrac{2}{2x+3y}-\dfrac{4x^2-6xy+9y^2}{8x^3+27y^3}$

74. $\dfrac{4}{4x-5y}-\dfrac{3x^2+2y^2}{64x^3-125y^3}$

Resolución de problemas

75. Cuando dos expresiones racionales se suman o restan, ¿sus numeradores deben factorizarse? Explique.

76. ¿Las expresiones $\dfrac{x-3}{4-x}$ y $-\dfrac{x-3}{x-4}$ son equivalentes? Explique.

77. ¿Las expresiones $\dfrac{8-x}{3-x}$ y $\dfrac{x-8}{x-3}$ son equivalentes? Explique.

78. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales, ¿$(f+g)(x)$ siempre será una función racional?

79. Si $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$ y $g(x)=\dfrac{x}{x+4}$, determine

a) el dominio de $f(x)$.
b) el dominio de $g(x)$.
c) $(f+g)(x)$.
d) el dominio de $(f+g)(x)$.

80. Si $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-9}$ y $g(x)=\dfrac{x}{x-3}$, determine

a) el dominio de $f(x)$.
b) el dominio de $g(x)$.
c) $(f+g)(x)$.
d) el dominio de $(f+g)(x)$.

Utilidad *En los ejercicios 81 a 84, determine la función de la utilidad, $P(x)$. (Vea el ejemplo 10.)*

81. $R(x)=\dfrac{4x-5}{x+1}$ y $C(x)=\dfrac{2x-7}{x+2}$

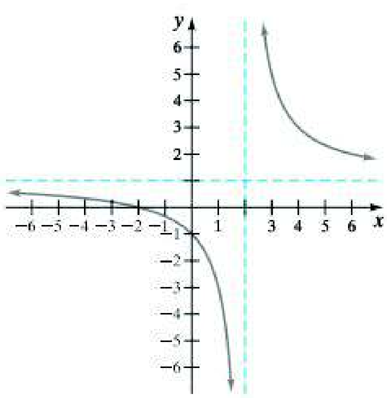
82. $R(x)=\dfrac{5x-2}{x+2}$ y $C(x)=\dfrac{3x-4}{x+1}$

83. $R(x)=\dfrac{8x-3}{x+2}$ y $C(x)=\dfrac{5x-8}{x+3}$

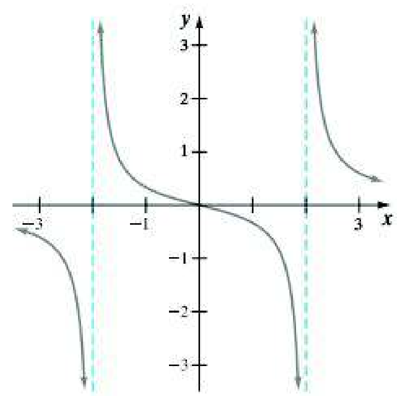
84. $R(x)=\dfrac{7x-10}{x+3}$ y $C(x)=\dfrac{5x-8}{x+4}$

En las figuras siguientes, las líneas punteadas de color rojo se denominan ***asíntotas****. Las asíntotas no son parte de la gráfica pero se utilizan para mostrar valores a los que ésta se aproxima, pero no toca. En los ejercicios 85 y 86, determine el dominio y el rango de la función racional que se muestra.*

85.



86.



En los ejercicios 87 a 90, utilice $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ *y* $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + x - 6}$*. Determine lo siguiente.*

87. $(f + g)(x)$

88. $(f - g)(x)$

89. $(f \cdot g)(x)$

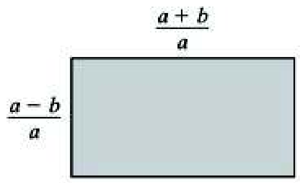
90. $(f/g)(x)$

91. Demuestre que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.

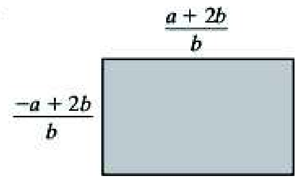
92. Demuestre que $x^{-1} + y^{-1} = \dfrac{x + y}{xy}$.

Área y perímetro *Observe los rectángulos siguientes. Determine* **a)** *su perímetro;* **b)** *su área.*

93.



94.



Determine el polinomio que debe colocarse en el área sombreada para obtener un enunciado verdadero. Explique cómo determinó su respuesta.

95. $\dfrac{5x^2 - 6}{x^2 - x - 1} - \dfrac{\boxed{}}{x^2 - x - 1} = \dfrac{-2x^2 + 6x - 12}{x^2 - x - 1}$

96. $\dfrac{r^2 - 6}{r^2 - 5r + 6} - \dfrac{\boxed{}}{r^2 - 5r + 6} = \dfrac{1}{r - 2}$

Realice las operaciones indicadas.

97. $\left(3 + \dfrac{1}{x + 3}\right)\left(\dfrac{x + 3}{x - 2}\right)$

98. $\left(\dfrac{3}{r + 1} - \dfrac{4}{r - 2}\right)\left(\dfrac{r - 2}{r + 10}\right)$

99. $\left(\dfrac{5}{a - 5} - \dfrac{2}{a + 3}\right) \div (3a + 25)$

100. $\left(\dfrac{x^2 + 4x - 5}{2x^2 + x - 3} \cdot \dfrac{2x + 3}{x + 1}\right) - \dfrac{2}{x + 2}$

101. $\left(\dfrac{x + 5}{x - 3} - x\right) \div \dfrac{1}{x - 3}$

102. $\left(\dfrac{x + 5}{x^2 - 25} + \dfrac{1}{x + 5}\right)\left(\dfrac{2x^2 - 13x + 15}{4x^2 - 6x}\right)$

103. El promedio ponderado de dos valores a y b está dado por $a\left(\dfrac{x}{n}\right) + b\left(\dfrac{n - x}{n}\right)$, donde $\dfrac{x}{n}$ es el peso dado a a y $\dfrac{n - x}{n}$ es el peso dado a b.

a) Exprese esta suma como una sola fracción.

b) En un examen a usted recibió una calificación de 60, y en un examen b obtuvo 92. Si el examen a cuenta $\dfrac{2}{5}$ de su calificación final y el examen b cuenta $\dfrac{3}{5}$, determine su promedio ponderado.

104. Demuestre que $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^{-1} + (xy)^{-1} = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{xy}$.

En los ejercicios 105 y 106, realice la operación indicada.

105. $(a - b)^{-1} + (a - b)^{-2}$

106. $\left(\dfrac{a - b}{a}\right)^{-1} - \left(\dfrac{a + b}{a}\right)^{-1}$

Utilice su calculadora graficadora para determinar si las sumas siguientes son correctas.

107. $\dfrac{x - 3}{x + 4} + \dfrac{x}{x^2 - 2x - 24} \stackrel{?}{=} \dfrac{x^2 - 10x + 18}{(x + 4)(x - 6)}$

108. $\dfrac{x - 2}{x^2 - 25} + \dfrac{x - 2}{2x^2 + 17x + 35} \stackrel{?}{=} \dfrac{3x^2 - 4x - 4}{(x + 5)(x - 5)(2x + 7)}$

Retos

109. Exprese cada suma como una sola fracción.

a) $1 + \dfrac{1}{x}$

b) $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

c) $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}$

d) $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \cdots + \dfrac{1}{x^n}$

110. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Determine $f(a + h) - f(a)$.

111. Sea $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$. Determine $g(a + h) - g(a)$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.4] **112. Llenado de cajas** Una máquina llena cajas de cereal a una velocidad de 80 por minuto. Después, la máquina baja su velocidad a 60 cajas por minuto. Si la suma de los dos periodos fue de 14 minutos y el número de cajas llenadas a alta velocidad fue el mismo que el número resultante a baja velocidad, determine **a)** el tiempo que trabajó la máquina a alta velocidad, y **b)** cuántas cajas llenó durante los 14 minutos.

[2.6] **113.** Resuelva para x y proporcione la solución en notación de conjuntos. $|x-3|-6<-1$

[3.4] **114.** Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(7, -3)$.

[4.5] **115.** Evalúe el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$.

[5.3] **116.** Divida $\dfrac{6x^2-5x+6}{2x+3}$.

[5.8] **117.** Resuelva $3p^2 = 22p - 7$.

6.3 Fracciones complejas

1. Reconocer fracciones complejas.
2. Simplificar fracciones complejas multiplicando por un denominador común.
3. Simplificar fracciones complejas simplificando el numerador y el denominador.

1 Reconocer fracciones complejas

Una **fracción compleja** es aquella que contiene una expresión fraccionaria en su numerador, en su denominador, o en ambos.

Ejemplos de fracciones complejas

$$\frac{\frac{2}{3}}{5}, \quad \frac{\frac{x+1}{x}}{4x}, \quad \frac{\frac{x}{y}}{x+1}, \quad \frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{a-b}{b}}, \quad \frac{9+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x}}$$

La expresión que se encuentra sobre la **línea principal de la fracción** es el numerador, y la expresión que está debajo de ella es el denominador.

$$\frac{a+b}{a} \longleftarrow \text{numerador de la fracción compleja}$$

$$\text{———} \longleftarrow \text{línea principal de la fracción}$$

$$\frac{a-b}{b} \longleftarrow \text{denominador de la fracción compleja}$$

A continuación explicaremos dos métodos que pueden utilizarse para simplificar las fracciones complejas. Simplificar una expresión compleja, significa escribirla eliminando las fracciones de su numerador y de su denominador.

2 Simplificar fracciones complejas multiplicando por un denominador común

El primer método implica la multiplicación del numerador y del denominador de la fracción compleja por un denominador común.

Para simplificar una fracción compleja multiplicando por un denominador común

1. Determine el mínimo común denominador de todas las fracciones que aparecen en la fracción compleja. Éste es el MCD de la fracción compleja.
2. Multiplique el numerador y el denominador de la fracción compleja por el MCD que se determinó en el paso 1.
3. Simplifique lo más posible.

En el paso 2, en realidad se multiplica la fracción compleja por $\dfrac{\text{MCD}}{\text{MCD}}$, lo cual es equivalente a multiplicarla por 1.

EJEMPLO 1 Simplifique $\dfrac{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x}}{\dfrac{x^2}{5}}$.

Solución Los denominadores de la fracción compleja son x^2, x y 5. Por lo tanto, el MCD de la fracción compleja es $5x^2$. Multiplicamos el numerador y el denominador por $5x^2$.

$$\frac{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x}}{\dfrac{x^2}{5}} = \frac{5x^2\left(\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x}\right)}{5x^2\left(\dfrac{x^2}{5}\right)} \qquad \text{Multiplicar el numerador y el denominador por } 5x^2.$$

$$= \frac{5\cancel{x^2}\left(\dfrac{4}{\cancel{x^2}}\right) - 5\overset{x}{\cancel{x^2}}\left(\dfrac{3}{\cancel{x}}\right)}{\cancel{5}x^2\left(\dfrac{x^2}{\cancel{5}}\right)} \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$= \frac{20 - 15x}{x^4} \qquad \text{Simplificar.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 13

EJEMPLO 2 Simplifique $\dfrac{a + \dfrac{3}{b}}{b + \dfrac{3}{a}}$.

Solución Multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción compleja por su MCD, ab.

$$\frac{a+\dfrac{3}{b}}{b+\dfrac{3}{a}}=\frac{ab\left(a+\dfrac{3}{b}\right)}{ab\left(b+\dfrac{3}{a}\right)}$$ *Multiplicar el numerador y el denominador por ab.*

$$=\frac{a^2b+3a}{ab^2+3b}$$ *Propiedad distributiva.*

$$=\frac{a\cancel{(ab+3)}}{b\cancel{(ab+3)}}=\frac{a}{b}$$ *Factorizar y simplificar.*

▸ Ahora resuelva el ejercicio 17

EJEMPLO 3 ▸ Simplifique $\dfrac{a^{-1}+ab^{-2}}{ab^{-2}-a^{-2}b^{-1}}$.

Solución Primero rescribimos cada expresión sin exponentes negativos.

$$\frac{a^{-1}+ab^{-2}}{ab^{-2}-a^{-2}b^{-1}}=\frac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{b^2}}{\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{1}{a^2b}}$$

$$=\frac{a^2b^2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{b^2}\right)}{a^2b^2\left(\dfrac{a}{b^2}-\dfrac{1}{a^2b}\right)}$$ *Multiplicar el numerador y el denominador por a^2b^2, el MCD de la fracción compleja.*

$$=\frac{\overset{a}{\cancel{a^2}}\,b^2\left(\dfrac{1}{\cancel{a}}\right)+a^2\cancel{b^2}\left(\dfrac{a}{\cancel{b^2}}\right)}{a^2\cancel{b^2}\left(\dfrac{a}{\cancel{b^2}}\right)-\cancel{a^2}\,\overset{b}{\cancel{b^2}}\left(\dfrac{1}{\cancel{a^2}\cancel{b}}\right)}$$ *Propiedad distributiva.*

$$=\frac{ab^2+a^3}{a^3-b}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 43

Aunque en el ejemplo 3 podríamos factorizar una a de ambos términos en el numerador de la respuesta, no seríamos capaces de simplificar más la respuesta dividiendo entre los factores comunes. De modo que conservaremos la respuesta hasta ese punto.

3 Simplificar fracciones complejas simplificando el numerador y el denominador

Las fracciones complejas también pueden simplificarse como sigue:

Para simplificar una fracción compleja simplificando el numerador y el denominador

1. Sume o reste, lo que sea necesario, para obtener una expresión racional en el numerador.
2. Sume o reste, lo que sea necesario, para obtener una expresión racional en el denominador.
3. Invierta el denominador de la fracción compleja y multiplique por el numerador de la fracción compleja.
4. Simplifique lo más posible.

El ejemplo 4 ilustra cómo puede simplificarse la fracción compleja del ejemplo 1 mediante este segundo método.

EJEMPLO 4 Simplifique $\dfrac{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x}}{\dfrac{x^2}{5}}$.

Solución Restamos las fracciones del numerador para obtener una expresión racional en él. El denominador común de las fracciones del numerador es x^2.

$$\frac{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x}}{\dfrac{x^2}{5}} = \frac{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x}\cdot\dfrac{x}{x}}{\dfrac{x^2}{5}} \qquad \text{Obtener el denominador común en el numerador.}$$

$$= \frac{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{5}}$$

$$= \frac{\dfrac{4 - 3x}{x^2}}{\dfrac{x^2}{5}}$$

$$= \frac{4 - 3x}{x^2}\cdot\frac{5}{x^2} \qquad \text{Invertir el denominador y multiplicar.}$$

$$= \frac{5(4 - 3x)}{x^4}$$

$$\text{o} \quad \frac{20 - 15x}{x^4}$$

Ésta es la misma respuesta que se obtuvo en el ejemplo 1.

Ahora resuelva el ejercicio 13

Sugerencia útil

Algunos estudiantes prefieren el segundo método cuando la fracción compleja consta de una sola fracción sobre una fracción única, como

$$\frac{\dfrac{x + 3}{18}}{\dfrac{x - 8}{6}}$$

Para fracciones más complejas, muchos estudiantes optan por el primer método, ya que de esta manera no tienen que sumar fracciones.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.3

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una fracción compleja?

2. Hemos indicado dos procedimientos para trabajar con fracciones complejas. ¿Cuál procedimiento prefiere? ¿Por qué?

Práctica de habilidades

Simplifique.

3. $\dfrac{\dfrac{15a}{b^2}}{\dfrac{b^3}{5}}$

4. $\dfrac{\dfrac{10x^2y^4}{3z^3}}{\dfrac{5xy}{9z^5}}$

5. $\dfrac{\dfrac{36x^4}{5y^4z^5}}{\dfrac{9xy^2}{15z^5}}$

6. $\dfrac{\dfrac{40x^3}{7y^5z^5}}{\dfrac{8x^2y^2}{28x^4z^5}}$

7. $\dfrac{\dfrac{10x^3y^2}{9yz^4}}{\dfrac{40x^4y^7}{27y^2z^8}}$

8. $\dfrac{\dfrac{3a^4b^3}{7b^4c}}{\dfrac{15a^2b^6}{14ac^7}}$

9. $\dfrac{1-\dfrac{x}{y}}{3x}$

10. $\dfrac{2+\dfrac{a}{b}}{5b}$

11. $\dfrac{x-\dfrac{x}{y}}{\dfrac{8+x}{y}}$

12. $\dfrac{a+\dfrac{2a}{b}}{\dfrac{7+a}{b}}$

13. $\dfrac{x+\dfrac{5}{y}}{1+\dfrac{x}{y}}$

14. $\dfrac{\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}$

15. $\dfrac{\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{2a}}{a+\dfrac{a}{2}}$

16. $\dfrac{3-\dfrac{1}{y}}{2-\dfrac{1}{y}}$

17. $\dfrac{\dfrac{a^2}{b}-b}{\dfrac{b^2}{a}-a}$

18. $\dfrac{x-\dfrac{4}{y}}{y-\dfrac{4}{x}}$

19. $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x+y}{x}}$

20. $\dfrac{\dfrac{1}{m}+\dfrac{9}{m^2}}{2+\dfrac{1}{m^2}}$

21. $\dfrac{\dfrac{a}{b}-6}{\dfrac{-a}{b}+6}$

22. $\dfrac{7-\dfrac{x}{y}}{\dfrac{x}{y}-7}$

23. $\dfrac{\dfrac{4x+8}{3x^2}}{\dfrac{4x^3}{9}}$

24. $\dfrac{\dfrac{x^2-y^2}{x}}{\dfrac{x+y}{x^4}}$

25. $\dfrac{\dfrac{a}{a+1}-1}{\dfrac{2a+1}{a-1}}$

26. $\dfrac{\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{x+4}{x}}$

27. $\dfrac{1+\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x-1}}$

28. $\dfrac{\dfrac{2}{x-1}+2}{\dfrac{2}{x+1}-2}$

29. $\dfrac{\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+1}}{\dfrac{a+1}{a-1}-\dfrac{a-1}{a+1}}$

30. $\dfrac{\dfrac{a-2}{a+2}-\dfrac{a+2}{a-2}}{\dfrac{a-2}{a+2}+\dfrac{a+2}{a-2}}$

31. $\dfrac{\dfrac{5}{5-x}+\dfrac{6}{x-5}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x-5}}$

32. $\dfrac{\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{3}{m-1}}{\dfrac{6}{m-1}}$

33. $\dfrac{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-2}}{\dfrac{1}{x}}$

34. $\dfrac{\dfrac{2}{x^2+x-20}+\dfrac{3}{x^2-6x+8}}{\dfrac{2}{x^2+3x-10}+\dfrac{3}{x^2+2x-24}}$

35. $\dfrac{\dfrac{2}{a^2-3a+2}+\dfrac{2}{a^2-a-2}}{\dfrac{2}{a^2-1}+\dfrac{2}{a^2+4a+3}}$

36. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2+5x+4}+\dfrac{2}{x^2+2x-8}}{\dfrac{2}{x^2-x-2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}}$

Simplifique.

37. $2a^{-2}+b$

38. $6a^{-2}+b^{-1}$

39. $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$

40. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{\dfrac{5}{ab}}$

41. $\dfrac{a^{-1}+1}{b^{-1}-1}$

42. $\dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-1}+y^{-1}}$

43. $\dfrac{a^{-2}-ab^{-1}}{ab^{-2}+a^{-1}b^{-1}}$

44. $\dfrac{xy^{-1}+x^{-1}y^{-2}}{x^{-1}-x^{-2}y^{-1}}$

45. $\dfrac{\dfrac{9a}{b}+a^{-1}}{\dfrac{b}{a}+a^{-1}}$

46. $\dfrac{x^{-2}+\dfrac{3}{x}}{3x^{-1}+x^{-2}}$

47. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{(a+b)^{-1}}$

48. $\dfrac{4a^{-1}-b^{-1}}{(a-b)^{-1}}$

49. $5x^{-1}-(3y)^{-1}$

50. $\dfrac{\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{y}}{(x-y)^{-1}}$

51. $\dfrac{\dfrac{2}{xy}-\dfrac{8}{y}+\dfrac{5}{x}}{3x^{-1}-4y^{-2}}$

52. $\dfrac{4m^{-1}+3n^{-1}+(2mn)^{-1}}{\dfrac{5}{m}+\dfrac{7}{n}}$

Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 53 a 56 se dan el área y el ancho de cada rectángulo. En cada caso, determine la longitud, l, mediante la división del área, A, entre el ancho, w.*

53. $A = \dfrac{x^2 + 12x + 35}{x + 3}$ $\quad w = \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 5x + 6}$ $\quad l$

54. $A = \dfrac{x^2 + 10x + 16}{x + 4}$ $(x > 1)$ $\quad w = \dfrac{x^2 + 11x + 24}{x^2 + 3x - 4}$ $\quad l$

55. $A = \dfrac{x^2 + 11x + 28}{x + 5}$ $(x > 1)$ $\quad w = \dfrac{x^2 + 8x + 7}{x^2 + 4x - 5}$ $\quad l$

56. $A = \dfrac{x^2 + 17x + 72}{x + 3}$ $(x > 2)$ $\quad w = \dfrac{x^2 + 11x + 18}{x^2 + x - 6}$ $\quad l$

57. Gato mecánico La eficiencia de un gato mecánico, E, está dada por la fórmula

$$E = \frac{\frac{1}{2}h}{h + \frac{1}{2}}$$

donde h está determinada por el paso de la rosca del gato mecánico.

Determine la eficiencia de un gato mecánico cuyo valor de h es:

a) $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{1}{3}$

58. Resistores Si se conectan en paralelo dos resistores con resistencia R_1 y R_2, podemos determinar su resistencia combinada, R_T, mediante la fórmula:

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Simplifique el lado derecho de la fórmula.

59. Resistores Si se conectan en paralelo tres resistores con resistencia R_1, R_2 y R_3, podemos determinar su resistencia combinada mediante la fórmula:

$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Simplifique el lado derecho de esta fórmula.

60. Óptica Una fórmula que se utiliza en el estudio de la óptica es

$$f = (p^{-1} + q^{-1})^{-1}$$

donde p es la distancia del objeto respecto de una lente, q es la distancia de la imagen respecto de la lente, y f es la longitud focal de la lente. Exprese el lado derecho de la fórmula sin exponentes negativos.

61. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, determine $f(f(a))$.

62. Si $f(x) = \dfrac{2}{x + 2}$, determine $f(f(a))$.

Retos

Para cada función, determine $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

63. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

64. $f(x) = \dfrac{5}{x}$

65. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

66. $f(x) = \dfrac{6}{x - 1}$

67. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

68. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

Simplifique.

69. $\dfrac{1}{2a + \dfrac{1}{2a + \dfrac{1}{2a}}}$

70. $\dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x + 1}}}$

71. $\dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}}}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **72.** Evalúe $\dfrac{\left|-\frac{3}{9}\right| - \left(-\frac{5}{9}\right)\cdot\left|-\frac{3}{8}\right|}{|-5-(-3)|}$.

[2.5] **73.** Resuelva $\dfrac{3}{5} < \dfrac{-x-5}{3} < 6$ y proporcione la solución en la notación de intervalos.

[2.6] **74.** Resuelva $|x-1| = |2x-4|$.

[3.5] **75.** Determine si las dos rectas representadas por las siguientes ecuaciones son paralelas, perpendiculares o ninguna de éstas.

$$6x + 2y = 5$$
$$4x - 9 = -2y$$

6.4 Resolución de ecuaciones racionales

1 Resolver ecuaciones racionales.
2 Verificar soluciones.
3 Resolver proporciones.
4 Resolver problemas que incluyen funciones racionales.
5 Resolver problemas de aplicación mediante expresiones racionales.
6 Despejar una variable en una fórmula con expresiones racionales.

1 Resolver ecuaciones racionales

En las secciones 6.1 a 6.3 se presentaron técnicas para sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones racionales. En esta sección analizaremos un método para resolver ecuaciones racionales. Una **ecuación racional** es aquella que contiene al menos una expresión racional.

Para resolver ecuaciones racionales

1. Determine el MCD de todas las expresiones racionales de la ecuación.
2. Multiplique *ambos* lados de la ecuación por el MCD. Esto dará por resultado que todos los términos de la ecuación queden multiplicados por el MCD.
3. Elimine los paréntesis que haya y reduzca los términos semejantes de cada lado de la ecuación.
4. Resuelva la ecuación utilizando las propiedades analizadas en secciones anteriores.
5. Verifique la solución en la ecuación *original*.

En el paso 2, multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD para eliminar fracciones. En algunos de los ejemplos siguientes no se mostrará la verificación para ahorrar espacio.

EJEMPLO 1 ▸ Resuelva $\dfrac{3x}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x-3}{4}$.

Solución Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, 4. Después utilizamos la propiedad distributiva, con la cual cada término de la ecuación quedará multiplicado por el MCD.

$$4\left(\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{2x-3}{4}\cdot 4 \quad \text{Multiplicar ambos lados por 4.}$$
$$4\left(\frac{3x}{4}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2x - 3 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$3x + 2 = 2x - 3$$
$$x + 2 = -3$$
$$x = -5$$

Una comprobación mostrará que -5 es la solución.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 15

2 Verificar soluciones

Siempre que aparezca una variable en algún denominador, usted deberá verificar su probable solución en la ecuación original. Si al hacerlo resulta que la solución probable da por resultado que un denominador sea igual a 0, ese valor no es solución de la ecuación. Estos valores son las **raíces extrañas** o **soluciones extrañas**. Una raíz extraña es un número que se obtiene al resolver una ecuación, pero que no es solución de la ecuación original.

EJEMPLO 2 Resuelva $2 - \frac{4}{x} = \frac{1}{3}$.

Solución Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, $3x$.

$$3x\left(2 - \frac{4}{x}\right) = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot 3x \quad \textit{Multiplicar ambos lados por } 3x.$$

$$3x(2) - 3x\left(\frac{4}{x}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)3x \quad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$6x - 12 = x$$

$$5x - 12 = 0$$

$$5x = 12$$

$$x = \frac{12}{5}$$

Compruebe

$$2 - \frac{4}{x} = \frac{1}{3}$$

$$2 - \frac{4}{\frac{12}{5}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{3} \quad \textit{Sustituir } x \textit{ por } \frac{12}{5}.$$

$$2 - \frac{20}{12} \stackrel{?}{=} \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \textit{Verdadero.}$$

Ahora resuelva el ejercicio 21

EJEMPLO 3 Resuelva $x - \frac{6}{x} = -5$.

Solución

$$x \cdot \left(x - \frac{6}{x}\right) = -5 \cdot x \quad \textit{Multiplicar ambos lados por el MCD, } x.$$

$$x(x) - x\left(\frac{6}{x}\right) = -5x \quad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$x^2 - 6 = -5x$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x - 1)(x + 6) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 6 = 0$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = -6$$

Al comprobar 1 y -6 se mostrará que ambos números son soluciones para la ecuación.

Ahora resuelva el ejercicio 35

EJEMPLO 4 Resuelva $\frac{3x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x - 2} = \frac{2}{x + 2}$.

Solución Primero factorice el denominador, $x^2 - 4$, y luego determine el MCD.

$$\frac{3x}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{1}{x - 2} = \frac{2}{x + 2}$$

El MCD es $(x + 2)(x - 2)$. Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, y después utilizamos la propiedad distributiva. Este proceso eliminará las fracciones de la ecuación.

$$(x+2)(x-2)\cdot\left[\frac{3x}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{x-2}\right]=\frac{2}{x+2}\cdot(x+2)(x-2)$$

$$\cancel{(x+2)}\,\cancel{(x-2)}\cdot\frac{3x}{\cancel{(x+2)}\,\cancel{(x-2)}}+(x+2)\cancel{(x-2)}\cdot\frac{1}{\cancel{(x-2)}}=\frac{2}{\cancel{(x+2)}}\cdot\cancel{(x+2)}(x-2)$$

$$\begin{aligned} 3x+(x+2)&=2(x-2)\\ 4x+2&=2x-4\\ 2x+2&=-4\\ 2x&=-6\\ x&=-3 \end{aligned}$$

Una verificación mostrará que -3 es la solución.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 39

EJEMPLO 5 ▸ Resuelva la ecuación $\dfrac{22}{2p^2-9p-5}-\dfrac{3}{2p+1}=\dfrac{2}{p-5}$.

Solución Factorizamos el denominador y después determinamos el MCD.

$$\frac{22}{(2p+1)(p-5)}-\frac{3}{2p+1}=\frac{2}{p-5}$$

Multiplique ambos lados de la ecuación por el MCD, $(2p+1)(p-5)$.

$$\cancel{(2p+1)}\,\cancel{(p-5)}\cdot\frac{22}{\cancel{(2p+1)}\,\cancel{(p-5)}}-\cancel{(2p+1)}(p-5)\cdot\frac{3}{\cancel{(2p+1)}}=\frac{2}{\cancel{p-5}}\cdot(2p+1)\cancel{(p-5)}$$

$$\begin{aligned} 22-3(p-5)&=2(2p+1)\\ 22-3p+15&=4p+2\\ 37-3p&=4p+2\\ 35&=7p\\ 5&=p \end{aligned}$$

Al parecer, la solución es 5. Sin embargo, hay que verificarlo, ya que aparece una variable en un denominador.

Compruebe

$$\frac{22}{2p^2-9p-5}-\frac{3}{2p+1}=\frac{2}{p-5}$$

$$\frac{22}{2(5)^2-9(5)-5}-\frac{3}{2(5)+1}\stackrel{?}{=}\frac{2}{5-5}\qquad \text{Sustituir 5 por } p.$$

$$\text{Indefinido}\longrightarrow\quad \frac{22}{0}-\frac{3}{11}=\frac{2}{0}\quad\longleftarrow\text{Indefinido}$$

Como 5 hace que el denominador sea 0 y la división entre 0 no está definida, 5 es una solución extraña. Por lo tanto, debe escribir como respuesta "**no existe solución**".

▸ Ahora resuelva el ejercicio 43

En el ejemplo 5, la única posible solución es 5. Sin embargo, cuando $p = 5$, el denominador $\dfrac{2}{p-5}$ es 0. Por lo tanto, 5 no puede ser solución. En realidad no teníamos que mostrar la comprobación completa, pero por claridad lo hicimos así en este ejemplo.

Sugerencia útil

Recuerde, siempre que resuelva una ecuación en la que aparezca una variable en algún denominador, debe verificar si la solución es o no una solución extraña. Si la solución da por resultado algún denominador 0, entonces es una solución extraña y no es una verdadera solución de la ecuación.

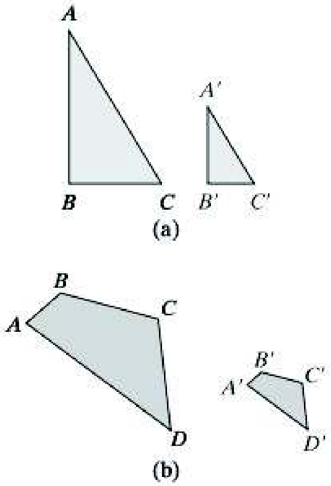


FIGURA 6.5

3 Resolver proporciones

Las **proporciones** son un tipo especial de ecuaciones racionales de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Pueden resolverse por medio de *multiplicación cruzada* como sigue. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$, $b \neq 0$, $d \neq 0$. Las proporciones también pueden resolverse multiplicando ambos lados de la proporción por el mínimo común denominador. En los ejemplos 6 y 7 resolveremos proporciones multiplicando ambos lados por el MCD. Luego se le pedirá que determine las soluciones, si es posible, mediante la multiplicación cruzada. *Cuando resuelva una proporción en la que el denominador de una o más razones contenga una variable, deberá verificar la solución para asegurarse de que no es extraña.*

Las proporciones se suelen utilizar para trabajar con figuras semejantes. Las **figuras semejantes** son aquellas cuyos ángulos correspondientes son iguales y cuyos lados correspondientes son proporcionales. La **figura 6.5** ilustra dos conjuntos de figuras semejantes.

En la **figura 6.5a**, la razón de la longitud del lado AB respecto de la longitud del lado BC es igual a la razón de la longitud del lado $A'B'$ respecto de la longitud del lado $B'C'$. Es decir,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Si en un par de figuras semejantes se desconoce la longitud de un lado, con frecuencia éste puede determinarse utilizando proporciones, como se ilustra en el ejemplo 6.

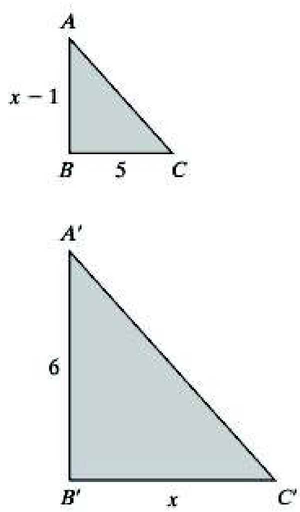


FIGURA 6.6

EJEMPLO 6 ▸ **Triángulos semejantes** Los triángulos ABC y $A'B'C'$ de la **figura 6.6** son figuras semejantes. Determine la longitud de los lados AB y $B'C'$.

Solución Podemos establecer una proporción y despejar x, para después determinar las longitudes.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$
$$\frac{x-1}{5} = \frac{6}{x}$$
$$5x \cdot \frac{x-1}{5} = \frac{6}{x} \cdot 5x \qquad \text{Multiplicar ambos lados por el MCD, } 5x.$$
$$x(x-1) = 6 \cdot 5$$
$$x^2 - x = 30$$
$$x^2 - x - 30 = 0$$
$$(x-6)(x+5) = 0 \qquad \text{Factorizar el trinomio.}$$
$$x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0$$
$$x = 6 \qquad\qquad x = -5$$

Como la longitud del lado de un triángulo no puede ser un número negativo, -5 no es una respuesta posible. Al sustituir x por 6, vemos que la longitud del lado $B'C'$ es 6 y la longitud del lado AB es $6 - 1$ o 5.

Compruebe

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$
$$\frac{5}{5} \stackrel{?}{=} \frac{6}{6}$$
$$1 = 1 \qquad \text{Verdadero}$$

▸ **Ahora resuelva el ejercicio 49**

La respuesta del ejemplo 6 también podría haberse obtenido mediante multiplicación cruzada. Ahora, trate de resolver el ejemplo 6 mediante multiplicación cruzada.

EJEMPLO 7 Resuelva $\dfrac{x^2}{x-3}=\dfrac{9}{x-3}$.

Solución Esta ecuación es una proporción. La resolveremos multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCD, $x-3$.

$$\cancel{(x-3)}\cdot\frac{x^2}{\cancel{x-3}}=\frac{9}{\cancel{x-3}}\cdot\cancel{(x-3)}$$
$$x^2=9$$
$$x^2-9=0$$
$$(x+3)(x-3)=0 \qquad \text{Factorizar la diferencia de dos cuadrados.}$$
$$x+3=0 \quad \text{o} \quad x-3=0$$
$$x=-3 \qquad\qquad x=3$$

Compruebe

$x=-3$

$$\frac{x^2}{x-3}=\frac{9}{x-3}$$
$$\frac{(-3)^2}{-3-3}\stackrel{?}{=}\frac{9}{-3-3}$$
$$\frac{9}{-6}\stackrel{?}{=}\frac{9}{-6}$$
$$-\frac{3}{2}=-\frac{3}{2} \qquad \text{Verdadero}$$

$x=3$

$$\frac{x^2}{x-3}=\frac{9}{x-3}$$
$$\frac{3^2}{3-3}\stackrel{?}{=}\frac{9}{3-3}$$
$$\frac{9}{0}\stackrel{?}{=}\frac{9}{0} \qquad \longleftarrow \text{Indefinido}$$

Como $x=3$, hace que el denominador sea 0, entonces 3 *no* es solución de la ecuación, sino una raíz extraña. La única solución de la ecuación es -3.

Ahora resuelva el ejercicio 45

En el ejemplo 7, ¿qué se obtendría si se comenzara con la multiplicación cruzada? Resuélvalo así y observe.

4 Resolver problemas que incluyen funciones racionales

Ahora resolveremos un problema que implica una función racional.

EJEMPLO 8 Considere la función $f(x)=x-\dfrac{2}{x}$. Determine todos los valores de a para los que $f(a)=1$.

Solución Como $f(a)=a-\dfrac{2}{a}$, necesitamos encontrar todos los valores para los que $a-\dfrac{2}{a}=1$, $a\neq 0$. Empezaremos por multiplicar ambos lados de la ecuación por a, el MCD.

$$a\cdot\left(a-\frac{2}{a}\right)=a\cdot 1$$
$$a^2-2=a$$
$$a^2-a-2=0$$
$$(a-2)(a+1)=0$$
$$a-2=0 \quad \text{o} \quad a+1=0$$
$$a=2 \qquad\qquad a=-1$$

Compruebe

$$f(x) = x - \frac{2}{x}$$
$$f(2) = 2 - \frac{2}{2} = 2 - 1 = 1$$
$$f(-1) = -1 - \frac{2}{(-1)} = -1 + 2 = 1$$

Para $a = 2$, o $a = -1$, $f(a) = 1$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 53

En el ejemplo 8, usamos $f(x) = x - \frac{2}{x}$. La **figura 6.7** muestra la gráfica de $f(x) = x - \frac{2}{x}$. En este curso no tendrá que graficar funciones como ésta. Ilustramos esta gráfica para reforzar la respuesta obtenida en el ejemplo 8.

Observe que la función está indefinida en $x = 0$, y que cuando $x = -1$ o $x = 2$, parece que $f(x) = 1$. Esto es lo que esperamos con base en los resultados obtenidos en el ejemplo 8.

El ejemplo 8 también podría haber sido resuelto por medio de una calculadora graficadora, estableciendo $y_1 = x - \frac{2}{x}$ y $y_2 = 1$ y determinando la coordenada x de las intersecciones de las dos rectas.

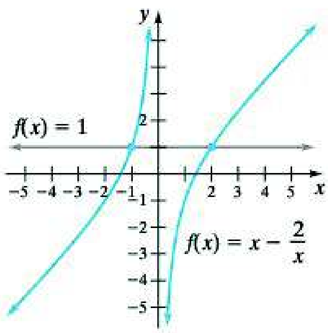


FIGURA 6.7

5 Resolver problemas de aplicación mediante expresiones racionales

Ahora veamos un problema de aplicación que involucra ecuaciones racionales.

EJEMPLO 9 ▸ Resistencia total En electrónica, la resistencia total R_T, de los resistores conectados en un circuito paralelo, se determina mediante la fórmula

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

donde $R_1, R_2, R_3, \ldots R_n$ son las resistencias de los resistores individuales (medidos en ohms, con el símbolo Ω) del circuito. Determine la resistencia total si dos resistores, uno de 100 ohms y el otro de 300 ohms, se conectan en un circuito paralelo. Vea la **figura 6.8**.

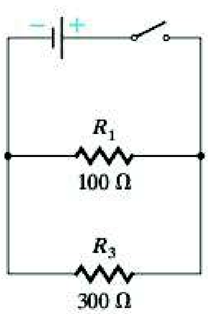


FIGURA 6.8

Solución Como sólo hay dos resistencias, utilizamos la fórmula

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Sea $R_1 = 100$ ohms y $R_2 = 300$ ohms; entonces

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{100} + \frac{1}{300}$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, $300R_T$.

$$300R_T \cdot \frac{1}{R_T} = 300R_T\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{300}\right)$$
$$300\,\cancel{R_T} \cdot \frac{1}{\cancel{R_T}} = \overset{3}{\cancel{300}}R_T\left(\frac{1}{\cancel{100}}\right) + \cancel{300}R_T\left(\frac{1}{\cancel{300}}\right)$$
$$300 = 3R_T + R_T$$
$$300 = 4R_T$$
$$R_T = \frac{300}{4} = 75$$

Así, la resistencia total del circuito paralelo es de 75 ohms. Tenga en cuenta que hay menos resistencia cuando los resistores se conectan en paralelo que cuando están en forma separada.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 95

6 Despejar una variable en una fórmula con expresiones racionales

En ocasiones se puede dar la necesidad de despejar una variable en una fórmula en la que dicha variable aparece en más de un término. Cuando esto sucede, es posible despejar la variable mediante factorización. Para hacerlo agrupe en un lado de la ecuación todos los términos que contienen la variable que quiere despejar, y todos los demás términos en el otro lado. Luego factorice la variable. Este proceso se ilustra en los ejemplos 10 a 12.

EJEMPLO 10 ▸ **Óptica** Una fórmula que se utiliza en óptica es $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$. En la fórmula, p representa la distancia a la que está un objeto respecto de una lente o espejo, q representa la distancia de la imagen respecto de la lente o espejo, y f la longitud focal de la lente o espejo. En el caso de las personas que utilizan anteojos, la distancia de la imagen es la distancia que hay entre las lentes y su retina. Vea la **figura 6.9**. Despeje f de esta fórmula.

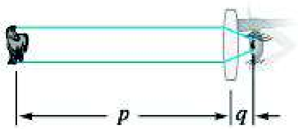


FIGURA 6.9

Solución Nuestro objetivo es aislar la variable f. Comenzamos por multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, pqf, para eliminar fracciones.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$pqf\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = pqf\left(\frac{1}{f}\right) \qquad \text{Multiplicar ambos lados por el MCD, } pqf.$$

$$\cancel{p}qf\left(\frac{1}{\cancel{p}}\right) + p\cancel{q}f\left(\frac{1}{\cancel{q}}\right) = pq\cancel{f}\left(\frac{1}{\cancel{f}}\right) \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$qf + pf = pq \qquad \text{Simplificar.}$$

$$f(q + p) = pq \qquad \text{Factorizar } f.$$

$$\frac{f\cancel{(q + p)}}{\cancel{q + p}} = \frac{pq}{q + p} \qquad \text{Dividir ambos lados entre } q + p.$$

$$f = \frac{pq}{q + p} \quad \text{o} \quad f = \frac{pq}{p + q}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

EJEMPLO 11 ▸ **Banca** Una fórmula que se utiliza en la banca es $A = P + Prt$, donde A representa la cantidad que debe pagarse al banco cuando se prestan P dólares a una tasa de interés simple, r, durante el tiempo, t, en años. Despeje P de esta ecuación.

Solución Como los dos términos que contienen la variable P están en el lado derecho de la ecuación, factorizamos P en ambos términos.

$$A = P + Prt \qquad P \text{ está en ambos términos.}$$

$$A = P(1 + rt) \qquad \text{Factorizar } P.$$

$$\frac{A}{1 + rt} = \frac{P(1 + rt)}{1 + rt} \qquad \text{Dividir ambos lados entre } 1 + rt \text{ para aislar a } P.$$

$$\frac{A}{1 + rt} = P$$

Así, $P = \frac{A}{1 + rt}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 73

EJEMPLO 12 ▶ **Física** Una fórmula que se usa para calcular la fuerza de las palancas es $d = \dfrac{fl}{f + w}$. Despeje f de esta fórmula.

Solución Empezamos por multiplicar ambos lados de la fórmula por $f + w$ para eliminar fracciones. Luego rescribimos la expresión con todos los términos que contienen f a un lado del signo igual, y todos los términos que no incluyen dicha variable al otro lado del signo igual.

$$d = \frac{fl}{f + w}$$

$$d(f + w) = \frac{fl}{\cancel{(f + w)}}\cancel{(f + w)} \qquad \text{Multiplicar por } f + w \text{ para eliminar fracciones.}$$

$$d(f + w) = fl$$

$$df + dw = fl \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$df - df + dw = fl - df \qquad \text{Aislar en el lado derecho de la ecuación los términos que contengan a } f.$$

$$dw = fl - df$$

$$dw = f(l - d) \qquad \text{Factorizar } f.$$

$$\frac{dw}{l - d} = \frac{f\cancel{(l - d)}}{\cancel{l - d}} \qquad \text{Aislar } f \text{ dividiendo ambos lados entre } l - d.$$

$$\frac{dw}{l - d} = f$$

Así, $f = \dfrac{dw}{l - d}$.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 79

Cómo evitar errores comunes

Después de resolver ecuaciones, como se hizo en esta sección, algunos estudiantes olvidan conservar su denominador común cuando suman o restan expresiones racionales. Recuerde, multiplicamos ambos lados de una *ecuación* por el MCD para eliminar el denominador común. Si *sumamos* o *restamos expresiones racionales*, escribimos las fracciones con el MCD y luego sumamos o restamos los numeradores, pero *conservamos el denominador común.*

Por ejemplo, considere el problema de suma

$$\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7}$$

CORRECTO

$$\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7} = \frac{x + 3}{x + 7}$$

INCORRECTO

$$\cancel{\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7} = (x + 7)\left(\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7}\right) = x + 3}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.4

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es una raíz extraña?
2. ¿En qué circunstancias es necesario verificar las respuestas que dan por resultado raíces extrañas?
3. Analice la ecuación $\dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{3} = 2$ y la expresión $\dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{3} + 2$.
   a) ¿Cuál es el primer paso para resolver la ecuación? Explique qué efecto tendrá el primer paso sobre la ecuación.
   b) Resuelva la ecuación.
   c) ¿Cuál es el primer paso para simplificar la expresión? Explique qué efecto tendrá este primer paso sobre la expresión.
   d) Simplifique la expresión.

4. Considere la ecuación $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 3$ y la expresión $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + 3$.

a) ¿Cuál es el primer paso para resolver la ecuación? Explique qué efecto tendrá el primer paso sobre la ecuación.

b) Resuelva la ecuación.

c) ¿Cuál es el primer paso para simplificar la expresión? Explique qué efecto tendrá este primer paso sobre la expresión.

d) Simplifique la expresión.

5. ¿Qué son las figuras semejantes?

6. **a)** Explique cómo resolver una ecuación racional.

b) Resuelva $\frac{3}{x-4} + \frac{1}{x+4} = \frac{4}{x^2-16}$ siguiendo el procedimiento indicado en la parte **a)**.

7. Tom Kelly al resolver una ecuación que contenía el término $\frac{7}{x-3}$ obtuvo la respuesta $x = 3$. ¿Puede ser correcta esta respuesta? Explique.

8. Geurfino Muldo al resolver una ecuación que contenía el término $\frac{21x}{x^2-16}$, obtuvo la respuesta $x = 4$. ¿Esta respuesta puede ser correcta? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación y compruebe su solución.

9. $\frac{5}{x} = 1$

10. $\frac{12}{x} = 3$

11. $\frac{11}{b} = 2$

12. $\frac{1}{4} = \frac{z+2}{12}$

13. $\frac{6x+7}{5} = \frac{2x+9}{3}$

14. $\frac{a+2}{7} = \frac{a-3}{2}$

15. $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} = \frac{2x-3}{8}$

16. $\frac{3x}{10} + \frac{2}{5} = \frac{4x-3}{5}$

17. $\frac{z}{3} - \frac{3z}{4} = -\frac{5z}{12}$

18. $\frac{w}{2} + \frac{2w}{3} = \frac{7w}{6}$

19. $\frac{3}{4} - x = 2x$

20. $\frac{2}{y} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2y}$

21. $\frac{2}{r} + \frac{5}{3r} = 1$

22. $3 + \frac{2}{x} = \frac{1}{4}$

23. $\frac{x-2}{x-5} = \frac{3}{x-5}$

24. $\frac{c+3}{c+1} = \frac{5}{2}$

25. $\frac{5y-2}{7} = \frac{15y-2}{28}$

26. $\frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-3}$

27. $\frac{5.6}{-p-6.2} = \frac{2}{p}$

28. $\frac{4.5}{y-3} = \frac{6.9}{y+3}$

29. $\frac{m+1}{m+10} = \frac{m-2}{m+4}$

30. $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x-6}{x+5}$

31. $x - \frac{4}{3x} = -\frac{1}{3}$

32. $x + \frac{2}{x} = \frac{27}{x}$

33. $\frac{2x-1}{3} - \frac{x}{4} = \frac{7.4}{6}$

34. $\frac{15}{x} + \frac{9x-7}{x+2} = 9$

35. $x + \frac{6}{x} = -7$

36. $b - \frac{8}{b} = -7$

37. $2 - \frac{5}{2b} = \frac{2b}{b+1}$

38. $\frac{3z-2}{z+1} = 4 - \frac{z+2}{z-1}$

39. $\frac{1}{w-3} + \frac{1}{w+3} = \frac{-5}{w^2-9}$

40. $\frac{6}{x+3} + \frac{5}{x+4} = \frac{12x+31}{x^2+7x+12}$

41. $\frac{8}{x^2-9} = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3}$

42. $a - \frac{a}{4} + \frac{a}{5} = 19$

43. $\frac{y}{2y+2} + \frac{2y-16}{4y+4} = \frac{2y-3}{y+1}$

44. $\frac{2}{w-5} = \frac{22}{2w^2-9w-5} - \frac{3}{2w+1}$

45. $\frac{x^2}{x-5} = \frac{25}{x-5}$

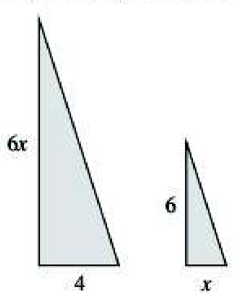
46. $\frac{x^2}{x-9} = \frac{81}{x-9}$

47. $\frac{5}{x^2+4x+3} + \frac{2}{x^2+x-6} = \frac{3}{x^2-x-2}$

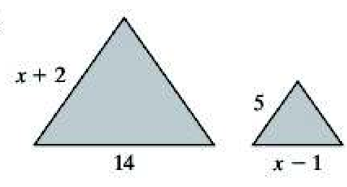
48. $\frac{2}{x^2+2x-8} - \frac{1}{x^2+9x+20} = \frac{4}{x^2+3x-10}$

Figuras semejantes *Determine la longitud de los dos lados desconocidos de cada par de figuras semejantes (es decir, la longitud de los lados que incluyen a la variable x).*

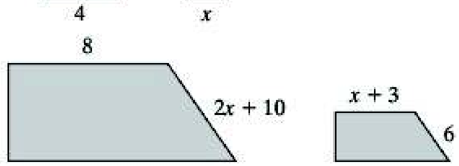
49.



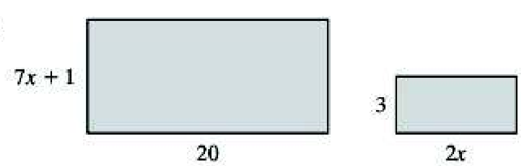
50.



51.



52.



Determine todos los valores para los que $f(a)$ tiene el valor indicado en cada función racional, para cada función racional que se proporciona.

53. $f(x) = 2x - \frac{4}{x}, f(a) = -2$

54. $f(x) = 3x - \frac{5}{x}, f(a) = -14$

55. $f(x) = \frac{x-2}{x+5}, f(a) = \frac{3}{5}$

56. $f(x) = \frac{x+3}{x+5}, f(a) = \frac{4}{7}$

57. $f(x) = \frac{6}{x} + \frac{6}{2x}, f(a) = 6$

58. $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{3}{2x}, f(a) = 4$

Despeje la variable indicada en cada fórmula.

59. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1}$, para P_2 (química).

60. $T_a = \frac{T_f}{1-f}$, para f (fórmula de inversión).

61. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1}$, para V_2 (química).

62. $S = \frac{a}{1-r}$, para r (matemáticas).

63. $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$, para y (pendiente).

64. $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$, para x_1 (pendiente).

65. $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$, para x (estadística).

66. $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$, para s (estadística).

67. $d = \frac{fl}{f + w}$, para w (física).

68. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$, por p (óptica)

69. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$, para q (óptica).

70. $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, para R_T (electrónica).

71. $at_2 - at_1 + v_1 = v_2$, para a (física).

72. $2P_1 - 2P_2 - P_1P_c = P_2P_c$, para P_c (economía).

73. $a_n = a_1 + nd - d$, para d (matemáticas).

74. $S_n - S_n r = a_1 - a_1 r^n$, para S_n (matemáticas).

75. $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$, para G (física).

76. $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$, para T_2 (física).

77. $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$, para T_1 (física).

78. $A = \frac{1}{2}h(a + b)$, para h (matemáticas).

79. $\frac{S - S_0}{V_0 + gt} = t$, para V_0 (física).

80. $\frac{E}{e} = \frac{R + r}{r}$, para e (ingeniería).

Simplifique cada expresión en **a)** *y resuelva la ecuación en* **b)**.

81. **a)** $\frac{2}{x-2} + \frac{5}{x^2-4}$

b) $\frac{2}{x-2} + \frac{5}{x^2-4} = 0$

82. **a)** $\frac{4}{x+3} + \frac{5}{2x+6} + \frac{1}{2}$

b) $\frac{4}{x+3} + \frac{5}{2x+6} = \frac{1}{2}$

83. **a)** $\frac{b+3}{b} - \frac{b+4}{b+5} - \frac{15}{b^2+5b}$

b) $\frac{b+3}{b} - \frac{b+4}{b+5} = \frac{15}{b^2+5b}$

84. **a)** $\frac{4x+3}{x^2+11x+30} - \frac{3}{x+6} + \frac{2}{x+5}$

b) $\frac{4x+3}{x^2+11x+30} - \frac{3}{x+6} = \frac{2}{x+5}$

Resolución de problemas

85. ¿Qué restricción debe agregarse al enunciado "Si $ac = bc$, entonces $a = b$"? Explique.

86. Considere $\frac{x-2}{x-5} = \frac{3}{x-5}$.

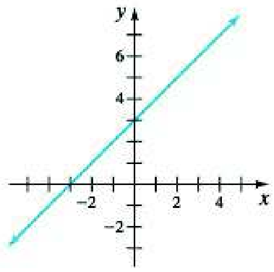
a) Resuelva la ecuación.

b) Si resta $\frac{3}{x-5}$ de ambos lados de la ecuación, obtiene $\frac{x-2}{x-5} - \frac{3}{x-5} = 0$. Simplifique la diferencia del lado izquierdo de la ecuación y resuelva la ecuación.

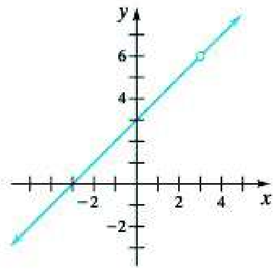
c) Utilice la información obtenida en las partes **a)** y **b)** para construir otra ecuación que no tenga solución.

87. A continuación se presentan dos gráficas. Una es la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ y la otra es la gráfica de $g(x) = x + 3$. Determine cuál gráfica corresponde a $f(x)$ y cuál a $g(x)$. Explique cómo determinó su respuesta.

a)



b)



88. Inversión libre de impuestos La fórmula $T_a = \dfrac{T_f}{1 - f}$ puede usarse para determinar el rendimiento gravable equivalente, T_a, de una inversión libre de impuestos, T_f. En esta fórmula, f es el rango de impuesto federal sobre los ingresos. Tran Du se encuentra en el rango de 25% de impuesto sobre los ingresos.

a) Determine el rendimiento gravable equivalente a una inversión libre de impuesto de 6%.

b) Resuelva esta ecuación para T_f.

c) Determine el rendimiento libre de impuestos equivalente a una inversión gravable de 10%.

89. Seguro Cuando el propietario de una casa compra una póliza de seguros para asegurar su propiedad por un monto mínimo de 80% sobre su valor de reemplazo, la compañía de seguros no reembolsará al propietario el total de su pérdida. La fórmula siguiente se utiliza para determinar cuánto pagará la compañía de seguros, I, cuando la propiedad esté asegurada por menos del 80% sobre el valor de reemplazo.

$$I = \frac{AC}{0.80R}$$

En la fórmula, A es el monto asegurado, C es el costo de reparar el área dañada y R es el valor de reemplazo de la propiedad. (El uso de esta fórmula tiene ciertas excepciones.)

a) Suponga que un incendio en la propiedad de Jan Burdett causó daños con valor de \$10,000. Si ella contrató un seguro por \$50,000 para una propiedad con valor de reemplazo de \$100,000, ¿cuánto pagaría la compañía de seguros por las reparaciones?

b) Resuelva esta fórmula para R, el valor de reemplazo.

90. Velocidad promedio La velocidad promedio se define como un cambio en la distancia dividido entre el cambio en el tiempo, o

$$v = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$$

Esta fórmula puede usarse cuando un objeto a la distancia d_1 en el instante t_1 viaja a la distancia d_2 en el instante t_2.

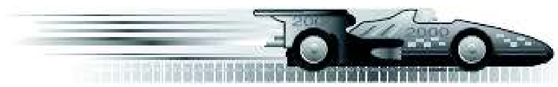
a) Suponga que $t_1 = 2$ horas, $d_1 = 118$ millas, $t_2 = 9$ horas y $d_2 = 412$ millas. Determine la velocidad promedio.

b) Resuelva la fórmula para t_2.

91. Aceleración promedio La aceleración promedio se define como el cambio en la velocidad, dividido entre el cambio en el tiempo, o

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Esta fórmula puede usarse cuando un objeto a la velocidad v_1 en el instante t_1 acelera (o desacelera) a la velocidad v_2 en el instante t_2.



a) Suponga que $v_1 = 20$ pies por minuto, $t_1 = 20$ minutos, $v_2 = 60$ pies por minuto y $t_2 = 22$ minutos. Determine la aceleración promedio. Las unidades serán pies/min^2.

b) Resuelva la fórmula para t_1.

92. Economía Una fórmula para analizar el punto del equilibrio es

$$Q = \frac{F + D}{R - V}$$

Esta fórmula se usa para determinar el número de unidades (o apartamentos), Q, que un inversionista debe alquilar en un edificio para alcanzar el punto de equilibrio (es decir, no ganar ni perder). En la fórmula, F son los gastos mensuales fijos de todo el edificio, D es el pago mensual de las deudas del edificio, R es el alquiler por unidad y V son los gastos variables por unidad.

Suponga que una persona está considerando invertir en un edificio con 50 unidades (o apartamentos). Cada apartamento de dos habitaciones puede alquilarse en \$500 al mes. Se estima que los gastos variables son de \$200 al mes por unidad, los gastos fijos son de \$2500 al mes, y el pago mensual de la deuda es de \$8000. ¿Cuántos apartamentos deben alquilarse para que el inversionista alcance el punto de equilibrio?

93. Tasa de descuento La *tasa de descuento*, P, expresada como una fracción o decimal, puede determinarse por medio de la fórmula

$$P = 1 - \frac{R - D}{R}$$

donde R es el precio regular de un artículo y d es el descuento (la cantidad que se ahorra respecto del precio normal).

a) Determine la tasa de descuento en un bolso con un precio normal de \$39.99 que se vende en \$30.99.

b) Resuelva la fórmula anterior para D.

c) Resuelva la fórmula anterior para R.

Para los ejercicios 94 a 96, consulte el ejemplo 9.

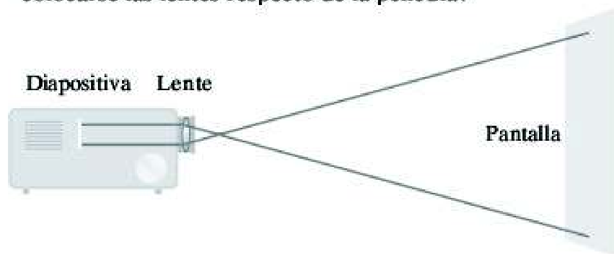
94. Resistencia total ¿Cuál es la resistencia total de un circuito si se conectan en paralelo resistores de 300, 500 y 3000 ohms?

95. Resistencia total ¿Cuál es la resistencia total de un circuito si se conectan en paralelo resistores de 200 y 600 ohms?

96. Resistencia total Tres resistores idénticos se conectan en paralelo. ¿Cuál debe ser la resistencia de cada uno si el circuito resultante tiene una resistencia total de 700 ohms?

Consulte el ejemplo 10 para resolver los ejercicios 97 y 98.

97. Longitud focal En un proyector de películas o diapositivas, la película actúa como el objeto cuya imagen se proyecta sobre una pantalla. Si se usa una lente con longitud focal de 100 mm (0.10 metros) para proyectar una imagen sobre una pantalla ubicada a una distancia de 7.5 metros, ¿a qué distancia deben colocarse las lentes respecto de la película?



98. Espejo cóncavo Un anillo de diamante se coloca a 20.0 cm de un espejo cóncavo (curvado hacia dentro) cuya longitud focal es 15.0 cm. Determine la posición de la imagen (o la *distancia de la imagen*).

99. Inversiones Algunas inversiones, como ciertos bonos municipales y fondos sobre bonos municipales, no sólo están libres de impuestos federales, sino también de impuestos municipales. Cuando se desea comparar una inversión gravable, T_a, con una inversión libre de impuesto federal, estatal y municipal, T_f, se puede utilizar la fórmula

$$T_a = \frac{T_f}{1 - [f + (s + c)(1 - f)]}$$

En la fórmula, s es el rango de impuesto estatal a pagar, c es el rango de impuestos municipales o locales a pagar, y f es el rango de impuestos federales. Howard Levy, quien vive en Detroit, Michigan, está en el rango de impuesto federal de 33%, en el rango de 4.6% de impuesto estatal y en el rango de 3% de impuesto local. Está eligiendo entre invertir en un portafolio bursátil libre de los tres impuestos, que produce 6.01%, y un fondo bursátil gravable que produce 7.68%.

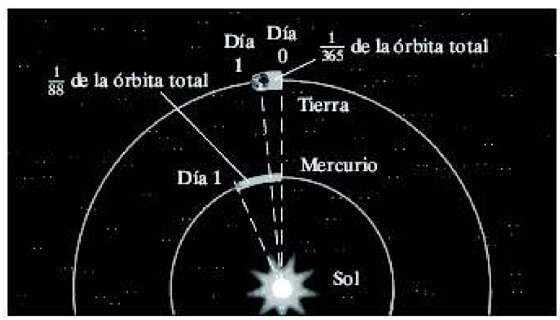
a) Tomando en cuenta su rango de impuestos, determine el equivalente gravable a 6.01% de rendimiento libre de impuestos.

b) ¿Por cuál inversión debe optar Howard? Explique su respuesta.

100. Periodos de planetas El periodo sinódico de Mercurio es el tiempo que dicho planeta necesita para llevar una vuelta de ventaja a la Tierra en sus órbitas alrededor del Sol. Si los periodos orbitales (en días terrestres) de los dos planetas son P_m y P_e, se verá que Mercurio se mueve en promedio a $1/P_m$ de una revolución por día, mientras que la Tierra se mueve al $1/P_e$ de una revolución por día detrás de aquel. La ventaja diaria de Mercurio respecto de la Tierra es $(1/P_m) - (1/P_e)$ de una revolución, de modo que el tiempo que tarda en aventajar a la Tierra en una revolución completa (periodo sinódico), s, puede determinarse mediante la fórmula

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{P_m} - \frac{1}{P_e}$$

Si P_e es 365 días y P_m es 88 días, determine el periodo sinódico en días terrestres.



Retos

101. Construya una ecuación que no pueda tener a 4 ni a -2 como soluciones. Explique cómo determinó su respuesta.

102. Construya una ecuación que contenga la suma de dos expresiones racionales en la variable x, y cuya solución sea el conjunto de *números reales*. Explique cómo determinó su respuesta.

103. Construya una ecuación que contenga dos expresiones racionales en la variable x, y cuya solución sea el conjunto de números reales excepto 0. Explique cómo determinó su respuesta.

Actividad en grupo

104. Longitud focal Una lente con longitud focal de 80 mm se utiliza para enfocar una imagen y fotografiarla con una cámara. La distancia máxima permitida entre la lente y la película plana es de 120 mm.

a) Miembro 1 del grupo: Determine qué tan lejos debe estar la lente respecto de la película, si el objeto que será fotografiado está a 10 metros de distancia.

b) Miembro 2 del grupo: Repita la parte **a)** para una distancia de 3 metros.

c) Miembro 3 del grupo: Repita la parte **a)** para una distancia de 1 metro.

d) Determinen de manera individual cuál es la distancia más corta a la que debe estar un objeto para poder fotografiarlo claramente.

e) Comparen sus respuestas para ver si parecen razonables y consistentes.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] **105.** Resuelva la desigualdad $-1 \leq 5 - 2x < 7$.

[3.4] **106.** Determine la pendiente y la intersección con el eje y de la recta que resulta al graficar la ecuación $3(y - 4) = -(x - 2)$.

[5.1] **107.** Simplifique $3x^2y - 4xy + 2y^2 - (3xy + 6y^2 + 9x)$.

[5.8] **108. Jardinería** Se colocará un pasillo de ancho uniforme alrededor del jardín de Jessyca Nino Aquino. El jardín y el pasillo juntos cubren un área de 320 pies cuadrados. Si el jardín mide 12 por 16 pies, determine el ancho del pasillo.

Examen de mitad de capítulo: 6.1-6.4

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en donde se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

1. Determine el dominio de $h(x) = \dfrac{2x + 13}{x^3 - 25x}$.

2. Simplifique la expresión racional $\dfrac{x^2 + 9x + 20}{2x^2 + 5x - 12}$.

Multiplique o divida como se indica.

3. $\dfrac{11a + 11b}{3} \div \dfrac{a^3 + b^3}{15b}$

4. $\dfrac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 5x - 6} \cdot \dfrac{x^2 - 2x - 24}{x^2 + 11x + 28}$

5. $\dfrac{4a^2 + 4a + 1}{4a^2 + 6a - 2a - 3} \div \dfrac{2a^2 - 17a - 9}{(2a + 3)^2}$

6. Rectángulo El área de un rectángulo es $12a^2 + 13ab + 3b^2$. Si el largo es $18a + 6b$, determine una expresión para el ancho dividiendo el área entre el largo.

7. Determine el mínimo común denominador para $\dfrac{x^2 - 5x - 7}{x^2 - x - 30} + \dfrac{3x^2 + 19}{x^2 - 4x - 12}$.

Sume o reste. Simplifique todas las respuestas.

8. $\dfrac{5x}{x - 5} - \dfrac{25}{x - 5}$

9. $\dfrac{10}{3x^2y} + \dfrac{a}{6xy^3}$

10. $\dfrac{4}{2x^2 + 5x - 12} - \dfrac{3}{x^2 - 16}$

Simplifique cada fracción compleja.

11. $\dfrac{9 + \dfrac{a}{b}}{\dfrac{3 - c}{b}}$

12. $\dfrac{\dfrac{5}{x} - \dfrac{8}{x^2}}{6 - \dfrac{1}{x}}$

13. $\dfrac{y^{-2} + 7y^{-1}}{7y^{-3} + y^{-4}}$

14. ¿Qué es una raíz extraña? Explique bajo qué condiciones debe comprobar la existencia de raíces extrañas.

Resuelva cada ecuación y compruebe sus soluciones.

15. $\dfrac{3x - 1}{7} = \dfrac{-x + 9}{2}$

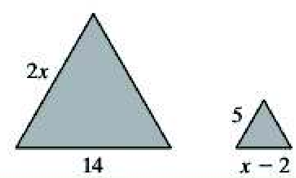
16. $\dfrac{m - 7}{m - 11} = \dfrac{4}{m - 11}$

17. $x = 1 + \dfrac{12}{x}$

18. Despeje a de $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$.

19. Despeje r de $x = \dfrac{4}{1 - r}$.

20. Triángulos Los dos triángulos son semejantes. Determine las longitudes de los dos lados desconocidos que incluyen la variable x.



6.5 Ecuaciones racionales: aplicaciones y resolución de problemas

1. Resolver problemas de trabajo.
2. Resolver problemas numéricos.
3. Resolver problemas de movimiento.

En la sección 6.4 y en el conjunto de ejercicios 6.4, se explicó cómo resolver algunos problemas de aplicación que contienen ecuaciones con expresiones racionales. En esta sección examinaremos algunas aplicaciones más. En primer lugar analizaremos problemas de trabajo.

1 Resolver problemas de trabajo

Por **problemas de trabajo** nos referimos a aquellos que involucran a dos o más máquinas o personas que trabajan juntas para realizar alguna tarea. Para resolver este tipo de problemas, partimos del hecho de que la parte del trabajo realizado por la persona 1 (o máquina 1) más la parte del trabajo realizado por la persona 2 (o máquina 2) es igual a la cantidad de trabajo total realizado por ambas personas (o máquinas) o 1 (para 1 tarea completa terminada).

$$\left(\begin{array}{c}\text{parte de la tarea}\\ \text{hecha por la primera}\\ \text{persona o máquina}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{parte de la tarea}\\ \text{hecha por la segunda}\\ \text{persona o máquina}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}1\\ \text{(una tarea completa}\\ \text{terminada)}\end{array}\right)$$

Para determinar la parte de la tarea realizada por cada persona o máquina, utilizamos la fórmula

parte de la tarea concluida = velocidad · tiempo

Esta fórmula es muy similar a la fórmula *cantidad = velocidad · tiempo* que analizamos en la sección 2.4.

Veamos ahora cómo determinar la velocidad. Si, por ejemplo, John puede realizar cierta tarea en 5 horas, podría concluir $\frac{1}{5}$ de la tarea en 1 hora. De este modo, su velocidad es $\frac{1}{5}$ de la tarea por hora. Si Kishi completa un trabajo en 6 horas, su velocidad es $\frac{1}{6}$ del trabajo por hora. De igual manera, si María realiza un trabajo en x minutos, su velocidad es $\frac{1}{x}$ del trabajo por minuto. *En general, si una persona o máquina puede concluir una tarea en x unidades de tiempo, la velocidad es* $\frac{1}{x}$.

EJEMPLO 1 **Sembrado de flores** Sana y Jerry Jenkins trabajan en un jardín botánico, alrededor de cuyos terrenos se agregarán varios diseños florales. Sana, quien tiene más experiencia, puede plantar las flores y hacer el diseño en 3 horas. Jerry necesita 5 horas de trabajo para realizar el mismo diseño. Si Sana y Jerry trabajan juntos, ¿cuánto tardarán en realizar el diseño?

Solución **Entienda el problema** Necesitamos determinar cuánto tiempo necesitan Sana y Jerry, trabajando juntos, para hacer el diseño floral. Sea x = tiempo, en horas, en que Sana y Jerry hacen juntos el diseño floral. Construiremos una tabla para ayudarnos a determinar la parte de la tarea completada por cada persona.

Trabajador	Velocidad de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la tarea realizada
Sana	$\frac{1}{3}$	x	$\frac{x}{3}$
Jerry	$\frac{1}{5}$	x	$\frac{x}{5}$

Traduzca

$$\left(\begin{array}{c}\text{parte del diseño floral hecho}\\ \text{por Sana en } x \text{ horas}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{parte del diseño floral hecho}\\ \text{por Jerry en } x \text{ horas}\end{array}\right) = 1(\text{diseño floral completo})$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 1$$

Realice los cálculos Multiplicamos ambos lados de la ecuación por el MCD, 15. Luego despejamos x, el número de horas.

$$15\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{5}\right) = 15 \cdot 1 \qquad \textit{Multiplicar por el MCD, 15.}$$

$$15\left(\frac{x}{3}\right) + 15\left(\frac{x}{5}\right) = 15 \qquad \textit{Propiedad distributiva.}$$

$$5x + 3x = 15$$

$$8x = 15$$

$$x = \frac{15}{8}$$

Responda Sana y Jerry pueden hacer el diseño floral en $\frac{15}{8}$ horas. Este tiempo es razonable, ya que es menor al que necesita cualquiera de las dos personas para hacer el diseño de manera individual.

Ahora resuelva el ejercicio 15

En ocasiones un problema puede incluir decimales, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 ▸ **Llenado de una bañera** Jim y Joy McEnroy tienen una bañera con jacuzzi. Cuando abren el grifo para llenar la bañera, el agua está turbia. Desean dejar correr tanta agua como sea necesario hasta que el agua salga limpia. Para hacerlo abren el grifo de agua fría y destapan el desagüe de la bañera. El grifo del agua fría llena la bañera en 7.6 minutos y el desagüe la vacía en 10.3 minutos. Si el desagüe está abierto y se abre el grifo del agua fría, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse de agua la bañera?

Solución Entienda el problema Mientras el grifo llena la bañera, el desagüe la vacía, así el grifo y el desagüe están trabajando uno en contra del otro. Sea x = la cantidad de tiempo necesaria para llenar la bañera.

	Velocidad de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la bañera que se llena o se vacía
Grifo llenando la bañera	$\frac{1}{7.6}$	x	$\frac{x}{7.6}$
Desagüe vaciando la bañera	$\frac{1}{10.3}$	x	$\frac{x}{10.3}$

Traduzca Como el grifo y el desagüe están trabajando uno contra el otro, *restamos* la parte de la bañera que se está vaciando de la parte de la bañera que se va llenando.

$$\begin{pmatrix}\text{parte de la bañera llena}\\ \text{en } x \text{ minutos}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{parte de la bañera vaciada}\\ \text{en } x \text{ minutos}\end{pmatrix} = 1(\text{bañera completamente llena})$$

$$\frac{x}{7.6} - \frac{x}{10.3} = 1$$

Realice los cálculos Con ayuda de una calculadora, podemos determinar que el MCD es $(7.6)(10.3) = 78.28$. Ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por 78.28 para eliminar las fracciones.

$$78.28\left(\frac{x}{7.6} - \frac{x}{10.3}\right) = 78.28\,(1)$$

$$\overset{10.3}{\cancel{78.28}}\left(\frac{x}{\cancel{7.6}}\right) - \overset{7.6}{\cancel{78.28}}\left(\frac{x}{\cancel{10.3}}\right) = 78.28(1)$$

$$10.3x - 7.6x = 78.28$$

$$2.7x = 78.28$$

$$x \approx 28.99$$

Responda La bañera se llenará en más o menos 29 minutos.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 25

EJEMPLO 3 ▸ **Trabajo en un viñedo** Chris Burdett y Mark Greenlaugh trabajan en un viñedo en California. Cuando trabajan juntos, pueden revisar todas las plantas de un terreno determinado en 24 minutos. Para hacer ese trabajo solo, Chris necesita 36 minutos. ¿Cuánto tardará Mark en revisar las plantas él solo?

Solución Entienda el problema Sea x = cantidad de tiempo que necesita Mark para revisar las plantas él solo. Sabemos que cuando trabajan juntos pueden hacer ese trabajo en 24 minutos. Organicemos esta información en una tabla.

Trabajador	Velocidad de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de las plantas revisadas
Chris	$\frac{1}{36}$	24	$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$
Mark	$\frac{1}{x}$	24	$\frac{24}{x}$

Traduzca

$$\begin{pmatrix}\text{parte de las plantas}\\ \text{revisadas por Chris}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{parte de las plantas}\\ \text{revisadas por Mark}\end{pmatrix} = 1(\text{terreno completo revisado})$$

$$\frac{2}{3} + \frac{24}{x} = 1$$

Realice los cálculos

$$3x\left(\frac{2}{3} + \frac{24}{x}\right) = 3x \cdot 1 \quad \text{Multiplicar ambos lados por el MCD, } 3x.$$

$$2x + 72 = 3x$$

$$72 = x$$

Responda Mark puede revisar las plantas, él solo, en 72 minutos.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 23

Observe que en el ejemplo 3 usamos $\frac{2}{3}$ en lugar de $\frac{24}{36}$ para indicar la parte de las plantas revisada por Chris. Utilice siempre fracciones simplificadas cuando plantee y resuelva ecuaciones.

2 Resolver problemas numéricos

Veamos ahora un **problema numérico**, en el que se debe encontrar un número relacionado con uno o más números.

EJEMPLO 4 ▸ **Problema numérico** Cuando el recíproco del triple de un número se resta de 5, el resultado es el recíproco del doble del número. Determine de qué número se trata.

Solución Entienda el problema Sea x = el número desconocido. Entonces $3x$ es el triple del número, y $\frac{1}{3x}$ es el recíproco del triple del número. El doble del número es $2x$, y $\frac{1}{2x}$ es el recíproco del doble del número.

Traduzca

$$7 - \frac{1}{3x} = \frac{1}{2x}$$

Realice los cálculos

$$6x\left(7 - \frac{1}{3x}\right) = 6x \cdot \frac{1}{2x} \quad \text{Multiplicar por el MCD, } 6x.$$

$$6x(7) - 6x\left(\frac{1}{3x}\right) = 6x\left(\frac{1}{2x}\right)$$

$$42x - 2 = 3$$

$$42x = 5$$

$$x = \frac{5}{42}$$

Responda Una comprobación verificará que el número es $\frac{5}{42}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 33

3 Resolver problemas de movimiento

El último tipo de problema que veremos son los **problemas de movimiento**. Recuerde que estudiamos problemas de movimiento en la sección 2.4, donde aprendimos que distancia = velocidad · tiempo. En ocasiones es conveniente despejar el tiempo cuando resolvemos este tipo de problemas

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

EJEMPLO 5 ▶ Vuelo en aeroplano Sally Sestani pilotea un monoplano marca Cessna. Cuando hace su plan de vuelo, determina que hay un viento de 20 millas por hora moviéndose de este a oeste a la misma altura a la que volará. Si viaja hacia el oeste (con el viento a favor), puede recorrer 400 millas en el mismo tiempo en que podría recorrer 300 millas volando hacia el este (con el viento en contra). Vea la **figura 6.10**. Suponiendo que, si no hubiese viento, el monoplano volaría a la misma velocidad viajando hacia el este o hacia el oeste, determine la velocidad a la que vuela con el viento en calma.

FIGURA 6.10

Solución **Entienda el problema** Sea x = velocidad del monoplano con el viento en calma. Construyamos una tabla que nos ayude a responder la pregunta.

Aeroplano	Distancia	Velocidad	Tiempo
Con el viento en contra	300	$x - 20$	$\frac{300}{x-20}$
Con el viento a favor	400	$x + 20$	$\frac{400}{x+20}$

Traduzca Como los tiempos son los mismos, planteamos y resolvemos la siguiente ecuación:

$$\frac{300}{x-20} = \frac{400}{x+20}$$

Realice los cálculos

$$\begin{aligned} 300(x+20) &= 400(x-20) \quad \text{Multiplicación cruzada.} \\ 300x + 6000 &= 400x - 8000 \\ 6000 &= 100x - 8000 \\ 14{,}000 &= 100x \\ 140 &= x \end{aligned}$$

Responda La velocidad del monoplano con el viento en calma es de 140 millas por hora.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 41

EJEMPLO 6 ▶ Paseo en bicicleta acuática Becky y Al Ryckman pasean en una bicicleta acuática. Cuando viajan en contra de la corriente (alejándose de la costa), promedian 2 millas por hora. De regreso (acercándose a la costa), viajan con la corriente a favor y promedian 3 millas por hora. Si tardan $\frac{1}{4}$ de hora más de ida que de vuelta a la costa, ¿qué tanto se alejaron de la costa durante su paseo?

Solución **Entienda el problema** En este problema, el tiempo de ida y de regreso no son iguales. La pareja necesitó $\frac{1}{4}$ de hora más para alejarse de la costa que para el regreso. Por lo tanto, para igualar los tiempos podemos sumar $\frac{1}{4}$ de hora al tiempo que les tomó el regreso (o restar $\frac{1}{4}$ de hora del tiempo de ida). Sea x = la distancia que les llevó alejarse de la costa.

Bicicleta	Distancia	Velocidad	Tiempo
Viaje de ida	x	2	$\frac{x}{2}$
Viaje de regreso	x	3	$\frac{x}{3}$

Traduzca tiempo del viaje de regreso + $\frac{1}{4}$ de hora = tiempo del viaje de ida

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2}$$

Realice los cálculos

$$12\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right) = 12\cdot\frac{x}{2} \quad \text{Multiplicar por el MCD, 12.}$$

$$12\left(\frac{x}{3}\right)+12\left(\frac{1}{4}\right) = 12\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$4x + 3 = 6x$$

$$3 = 2x$$

$$1.5 = x$$

Responda Por lo tanto, la pareja se alejó 1.5 millas de la costa.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 53

EJEMPLO 7 ▸ **De viaje** Dawn Puppel vive en Buffalo, Nueva York y viaja a la escuela en South Bend, Indiana. En algunas carreteras, la velocidad límite es de 55 millas por hora, y en otras es de 65 millas por hora. La distancia total que recorre Dawn para llegar a su escuela es de 490 millas. Si Dawn respeta los límites de velocidad y le toma 8 horas el recorrido, ¿cuánto tiempo maneja a 55 millas por hora y cuánto a 65 millas por hora?

Solución **Entienda el problema y traduzca**

Sea x = número de millas recorridas a 55 mph.
Entonces $490 - x$ = número de millas recorridas a 65 mph.

Límite de velocidad	Distancia	Velocidad	Tiempo
55 mph	x	55	$\frac{x}{55}$
65 mph	$490 - x$	65	$\frac{490-x}{65}$

Como el recorrido total dura 8 horas, escribimos

$$\frac{x}{55}+\frac{490-x}{65} = 8$$

Realice los cálculos El MCD de 55 y 65 es 715.

$$715\left(\frac{x}{55}+\frac{490-x}{65}\right) = 715\cdot 8$$

$$715\left(\frac{x}{55}\right)+715\left(\frac{490-x}{65}\right) = 5720$$

$$13x + 11(490 - x) = 5720$$

$$13x + 5390 - 11x = 5720$$

$$2x + 5390 = 5720$$

$$2x = 330$$

$$x = 165$$

Responda El número de millas recorridas a 55 mph es de 165. Por lo tanto, el tiempo recorrido a 55 mph es $\frac{165}{55} = 3$ horas, y el tiempo recorrido a 65 mph es $\frac{490-165}{65} = \frac{325}{65} = 5$ horas.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 59

En el ejemplo 7, observe que la respuesta a la pregunta no fue el valor obtenido para x, ya que se refiere a distancia y lo que nos pidieron determinar fue el tiempo. *Al trabajar con problemas expresados con palabras, lea con atención y resuélvalos con mucho cuidado, asegurándose de responder la pregunta planteada.*

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.5

MathXL® MyMathLab

Práctica de habilidades y resolución de problemas

1. **Pinta de una pared** Dos hermanos necesitan exactamente el mismo tiempo cada uno para pintar una pared. Si hacen juntos el trabajo, el tiempo total que necesitarán ¿será menor que $\frac{1}{2}$ del tiempo, igual a $\frac{1}{2}$ del tiempo o mayor que $\frac{1}{2}$ del tiempo que requieren si lo hicieran de manera individual? Explique.

2. **Tractores** Dos tractores, uno grande y uno pequeño, trabajan juntos para nivelar un terreno. En la misma cantidad de tiempo, el tractor grande nivela más tierra que el pequeño. Trabajando solo, ¿le tomará más o menos tiempo al tractor pequeño realizar la labor que a los dos trabajando juntos? Explique.

3. **a)** **Trabajo en equipo** Bill y Bob están planeando hacer una tarea juntos. Bill puede hacerla en siete horas, y Bob puede realizarla en 9 horas. Sea $x =$ el tiempo que Bill y Bob hacen juntos la tarea. Complete la siguiente tabla.

Trabajador	Velocidad de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la tarea terminada
Bill		x	
Bob		x	

b) Analice los ejemplos que se explicaron en esta sección. Luego escriba la ecuación que puede usarse para despejar x. (No la resuelva.)

c) Si trabajan juntos, ¿les tomará más o menos de siete horas terminar la tarea? Explique.

4. **a)** **Trabajo en grupo** Juanita y Sally planean hacer una tarea juntas. Sally puede hacerla en 3.6 horas, y Juanita puede realizarla en 5.2 horas. Sea $x =$ el tiempo en que Sally y Juanita realizan la tarea juntas. Complete la siguiente tabla.

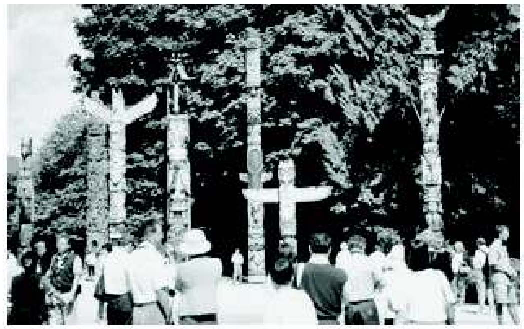
Trabajadora	Velocidad de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la tarea terminada
Sally		x	
Juanita		x	

b) Analice los ejemplos que se explicaron en esta sección. Luego escriba la ecuación que puede usarse para despejar x. (No la resuelva.)

c) Si trabajan juntas, ¿les tomará más o menos de 3.6 horas completar la tarea? Explique.

Los ejercicios 5 a 36 se refieren a problemas de trabajo. Responda la pregunta que se hace en cada uno. Cuando sea necesario, redondee las respuestas al centésimo más cercano.

5. **Escultura** Marilyn Mays necesita dos meses para tallar una escultura en madera. Larry Gilligan necesita 6 meses para hacer el mismo trabajo. Si ambos escultores trabajan juntos, ¿en cuánto tiempo tallarán la escultura?



6. **Limpiaventanas** Un trabajador puede lavar todas las ventanas de un edificio en 3 horas, y otro puede hacer el mismo trabajo en 4 horas. ¿Cuánto tardarán en lavar todas las ventanas del edificio si trabajan juntos?

7. **Servicio de limpieza** Jason La Rue puede lavar la alfombra del piso principal de un edificio en 3 horas. Tom Lockheart puede hacer el mismo trabajo en 6 horas. Si trabajan juntas, ¿cuánto tiempo les tomará lavar la alfombra?

8. **Impresión de cheques** Una empresa tiene dos computadoras para imprimir los cheques de nómina de sus empleados; una lo hace en 3 horas, y la otra en 7 horas. ¿Cuánto tiempo tardará la impresión de los cheques si ambas computadoras trabajan juntas?

9. **Granja lechera** En una pequeña granja lechera, Jin Chenge puede ordeñar 10 vacas en 30 minutos. Su hijo, Ming, requiere 50 minutos para realizar la misma tarea. ¿Cuánto tardarán ambos si ordeñan juntos las 10 vacas?

10. **Jardinería** Julio y Marcela López podan el césped durante los meses de verano. Con una podadora automática, Julio puede podar un área grande en 9 horas. Con otra podadora, Marcela puede podar el mismo césped en 4 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en podar el césped del terreno si trabajan juntos?

11. **Cosecha de manzanas** En un huerto en Sodus, Nueva York, Kevin Bamard puede cosechar 25 bushels de manzanas en 6 horas. Su hijo tarda el doble en cosechar 25 bushels. ¿Cuánto tardarán juntas en cosechar 25 bushels?

12. **Recolección de fresas** En un terreno de fresas en Jacksonville, North Carolina, Amanda Heinl puede recolectar 80 cuartos de fresas en 10 horas. Su hija, Emily, también puede recolectar 80 cuartos de fresas, pero en 15 horas. ¿Cuánto tardarán en recolectar juntas 80 cuartos de fresas?

13. **Limpieza de canalones** En un complejo habitacional en Altoona, Pennsylvania, Olga Palmieri puede limpiar los canalones de 28 casas en 4.5 días. Su compañero de trabajo, Jien-Ping, puede limpiar los mismos canalones en 5.5 días. ¿Si trabajan juntos, cuánto tiempo tardarán en limpiar los canalones de las 28 casas?

14. **Desyerbar** En una granja cerca de Portland, Maine, Val Short puede desyerbar un surco de papas en 70 minutos. Su amigo, Jason, puede hacerlo en 80 minutos. Si trabajan juntos, ¿cuánto tardarán en desyerbar este surco de papas?

15. **Arado de un campo** Wanda Garner puede arar su maizal en 4 horas. Shawn Robinson hace el mismo trabajo en 6 horas. ¿Cuánto tiempo necesitarán para arar el maizal si trabajan juntas?

16. **Pintura** Karen Sharp y Hephner Bennet son pintores. Karen puede pintar la sala de una casa en 6 horas, Hephner puede hacer el mismo trabajo en 4.5 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en pintar la sala si trabajan juntas?

17. **Llenado de una alberca** Una manguera de $\frac{1}{2}$ pulgada de diámetro puede llenar una alberca en 8 horas, mientras que una manguera de $\frac{4}{5}$ pulgadas de diámetro puede hacerlo en 5 horas. ¿Cuánto tiempo se necesitará para llenar la alberca si se usan ambas mangueras?

18. **Tanque de leche** En una planta lechera, una tanque de leche puede llenarse en 6 horas usando la válvula de llenado. Mediante una válvula de salida, el tanque puede vaciarse en 8 horas. Si las dos válvulas se abren al mismo tiempo ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el tanque?

19. **Refinería** Una refinería tiene grandes tanques para almacenar petróleo. Cada tanque tiene una válvula de entrada y una válvula de salida. El tanque puede llenarse en 20 horas cuando la válvula de entrada está totalmente abierta y la válvula de salida está cerrada. Cuando la válvula de salida está abierta completamente, el tanque puede vaciarse en 25 horas, si la válvula de entrada está cerrada. Si se pone en operación un nuevo tanque y se abren completamente las dos válvulas, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el tanque?

20. **Fabricantes de armarios** Laura Burton y Marcia Klienz son fabricantes de muebles. Laura puede fabricar una alacena para cocina en 10 horas. Si Laura y Marcia trabajan juntas, pueden fabricar la misma alacena en 8 horas. ¿Cuánto tiempo tardará Marcia en fabricar la alacena?

21. **Arqueología** El doctor Indiana Jones y su padre, el doctor Henry Jones, están haciendo una excavación cerca del Foro romano. Trabajando juntos, estos arqueólogos pueden revisar un terreno específico en 2.6 meses. De manera individual, Indiana puede realizar el mismo trabajo en 3.9 meses. ¿Cuánto tiempo tardará Henry en revisar el área completa él solo?

22. **Excavación de una zanja** Arthur Altshiller y Sally Choi trabajan en una empresa de telefonía. Juntos tardan 2.4 horas en cavar una zanja en la que se colocarán ciertos cables. Si Arthur puede excavar la zanja en 3.2 horas, ¿cuánto tiempo tardará Sally en excavarla ella sola?

23. **Tanques de medusas** Wade Martin y Shane Wheeler trabajan en un acuario. Wade tarda 50 minutos en limpiar los tanques de las medusas. Como Shane está aprendiendo a hacerlo, requiere más tiempo para realizar el mismo trabajo. Cuando trabajan juntos, pueden realizar la tarea en 30 minutos. ¿Cuánto tiempo necesita Shane para hacer la tarea ella sola?

24. **Plantío de flores** María Vasquez y LaToya Johnson plantan petunias en su jardín de flores. María tarda el doble de tiempo que LaToya en plantar las flores. Trabajando juntas pueden plantar las flores en 10 horas. ¿Cuánto tardará LaToya en plantar las flores ella sola?

25. **Llenado de una tina** Cuando sólo está abierto el grifo de agua fría, una tina se llena en 8 minutos. Cuando sólo está abierto el grifo de agua caliente, la tina se llena en 12 minutos. Cuando el desagüe de la tina está abierto, la tina se vacía completamente en 7 minutos. Si están abiertos los dos grifos, el de agua caliente y el de agua fría, y también lo está el desagüe, ¿cuánto tardará la tina en llenarse?

26. **Irrigación de cosechas** En la granja de Jed Saifer se usa un gran tanque para regar las cosechas. El tanque tiene dos tubos de entrada y un tubo de salida. Los dos tubos de entrada pueden llenar el tanque en 8 y 12 horas, respectivamente. El tubo de salida puede vaciar el tanque en 15 horas. Si el tanque está vacío, ¿cuánto tardará en llenarse cuando las tres válvulas están abiertas?

27. **Bombeo de agua** Después de una inundación, el departamento de bomberos de Rushville utiliza tres bombas para drenar agua de los sótanos inundados. Las tres bombas pueden drenar toda el agua de un sótano inundado en 6 horas, 5 horas y 4 horas, respectivamente. Si las tres bombas trabajan juntas, ¿cuánto tardarán en vaciar el sótano?

28. **Instalación de ventanas** Adam, Frank y Willy son expertos en instalación de ventanas. Adam puede instalar cinco ventanas en 10 horas. Frank puede hacer el mismo trabajo en 8 horas, y Willy puede hacerlo en 6 horas. Si los tres trabajan juntos, ¿cuánto tardarán en instalar las ventanas?

29. **Techado de una casa** Gary Glaze requiere 15 horas para poner un nuevo techo en una casa. De manera individual, su aprendiz, Anna Gandy, puede colocar el techo de la casa en 20 horas. Después de trabajar solo en un techo durante 6 horas, Gary interrumpe la labor; Anna la retoma y completa el trabajo. ¿Cuánto tiempo le tomará a Anna completar el trabajo?

30. **Llenado del tanque** Se usan dos tubos para llenar un tanque de petróleo. Cuando se utiliza sólo el tubo más grande, el tanque se llena en 60 horas; cuando se utiliza sólo el tubo más pequeño, el tanque se llena en 80 horas. Un día, se abre el tubo más grande para empezar a llenar el tanque; después de 20 horas, se cierra el tubo más grande y se abre el más pequeño. ¿Cuánto tiempo más se necesitará para terminar de llenar el tanque?

Los ejercicios 31 a 40 incluyen problemas numéricos. Responda la pregunta que se hace en cada uno.

31. ¿Que número multiplicado por el numerador y sumado al denominador de la fracción $\frac{4}{3}$ da por resultado la fracción $\frac{5}{2}$?

32. ¿Que número sumado al numerador y multiplicado por el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$ da por resultado la fracción $\frac{1}{15}$?

33. Un número es el doble de otro. La suma de sus recíprocos es $\frac{3}{4}$. Determine ambos números.

34. La suma de los recíprocos de dos enteros consecutivos da por resultado $\frac{11}{30}$. Determine los dos enteros.

35. La suma de los recíprocos de dos enteros pares consecutivos es $\frac{5}{12}$. Determine los dos enteros.

36. Cuando un número se suma al numerador y al denominador de la fracción $\frac{7}{9}$, la fracción resultante es $\frac{5}{6}$. Determine el número que se sumó.

37. Cuando el número 3 se suma al doble del recíproco de otro número, el resultado es $\frac{31}{10}$. Determine el número.

38. El recíproco de 3 menos que un cierto número es el doble del recíproco de 6 menos que el doble del número. Determine el o los números.

39. Si el triple de un número se suma al doble del recíproco del número, el resultado es 5. Determine el o los números.

40. Si el triple del recíproco de un número se resta del doble del recíproco del cuadrado del número, la diferencia es -1. Determine el o los números.

Los ejercicios 41 a 61 son problemas de movimiento. Responda la pregunta que se hace en cada uno. Cuando sea necesario, redondee las respuestas al centésimo más cercano.

41. **Góndola** Cuando Angelo Burnini rema en su góndola por aguas tranquilas (sin corriente), en Venecia, Italia, recorre 3 millas por hora. Cuando rema con la misma intensidad en el Gran Canal, le toma el mismo tiempo viajar 2.4 millas con la corriente a favor que recorrer 2.3 millas con la corriente en contra. Determine la velocidad de la corriente del río.

42. **Transporte por tren** El tren Amtrak viaja sin escalas de Lorton, Virginia a Sanford, Florida. June White desea transportar dos automóviles a Florida para el invierno, así que decide enviar uno por tren y conducir el otro. El tren viaja 600 kilómetros en el mismo tiempo en que ella conduce 400 kilómetros. Si la velocidad promedio del tren es 40 kilómetros por hora mayor que la velocidad del automóvil de June, determine las velocidades del tren y del automóvil.

43. **Banda sinfín** Una banda sinfín, en el aeropuerto de Chicago se mueve a una velocidad de 2.0 pies por segundo. Utilizando la banda, Nancy Killian recorre una distancia de 120 pies en el mismo tiempo que le tomaría recorrer 52 pies caminando. ¿Qué tan rápido camina Nancy?

44. **Banda sinfín** Una banda sinfín del aeropuerto de Filadelfia, se mueve a una velocidad de 1.8 pies por segundo. Nathan Trotter recorre 100 pies sobre la banda sinfín, después da la vuelta sobre la misma banda y recorre 40 pies a la misma velocidad en dirección opuesta. Si el tiempo utilizado en el recorrido en cada dirección fue el mismo, determine la velocidad a la que camina Nathan.

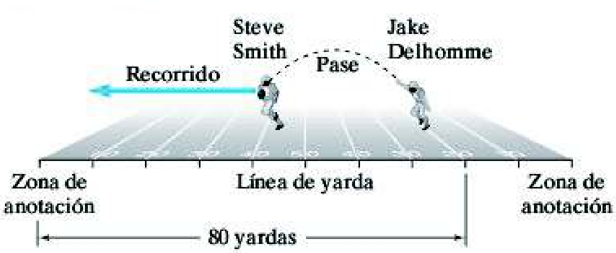
45. Esquí Bonnie Hellier y Clide Vincent darán un paseo en esquí a campo traviesa en las montañas Adirondack. Clide es un esquiador experto, capaz de recorrer 10 millas por hora, mientras que Bonnie promedia 6 millas por hora. Si Bonnie necesita 1/2 hora más que Clide para recorrer el mismo tramo, ¿cuál es la longitud del camino?

46. De excursión Ruth y Jerry Mackin salen a dar un paseo por el Parque Memorial en Houston, Texas. Ruth trota y Jerry va en patines. Javier patina a 2.9 millas por hora más rápido de lo que Ruth trota. Cuando Jerry ha patinado 5.7 millas, Ruth ha trotado 3.4 millas. Determine la velocidad de trote de Ruth.

47. Visita a un centro turístico Phil Mahler condujo 60 millas hasta el parque nacional de Yosemite. Él empleó el doble de tiempo en recorrerlo que lo que necesitó para llegar a él. El tiempo total utilizado en conducir hasta el parque y recorrerlo fue de 5 horas. Determine la velocidad promedio a la que condujo hacia el parque nacional de Yosemite.

48. Viaje en bote Ray Packerd inició un viaje en bote a las 8 a.m. El bote de Ray puede viajar a 20 millas por hora en aguas tranquilas. ¿Qué tan lejos río abajo puede ir Rafael, si la corriente es de 5 millas por hora y él desea ir y regresar en 4 horas?

49. Partido de fútbol americano En un partido de fútbol americano, las Panteras de Carolina tienen el balón en la yarda 20 de su propio terreno. Jake Delhomme pasa el balón a Steve Smith, quien lo atrapa y corre hacia la zona de anotación. Suponga que el balón viajó a 14.7 yardas por segundo en el pase, y que una vez que lo atrapó, Steve corrió a 5.8 yardas por segundo hasta la zona de anotación. Si la jugada completa, desde el momento en que Jake soltó el balón hasta el momento en que Steve llegó a la zona de anotación, duró 10.6 segundos, ¿qué tan lejos lanzó el balón Jake para que Steve lo atrapara? Suponga que toda la jugada se llevó a cabo en el centro del campo.



50. Viaje Cierto día, Pauline Shannon recorrió en su automóvil una distancia de 492 millas, desde Front Royal, Virginia hasta Asheville, North Carolina. Parte del viaje, Pauline condujo a una velocidad constante de 50 millas por hora, y en otra manejó a una velocidad constante de 35 millas por hora. Si el tiempo total del viaje fue de 11.13 horas, ¿qué distancia recorrió a cada velocidad?

51. Trenes subterráneos El tren número 4 en el sistema de trenes subterráneos de Nueva York va de la avenida Woodlawn/Jerome en el Bronx a la avenida Flatbush en Brooklyn. La distancia entre estas dos paradas es de 24.2 millas. En esta ruta, hay dos vías paralelas, una para el tren local y otra para el tren expreso. Ambos trenes inician su recorrido al mismo tiempo, desde Woodland. Cuando el tren expreso llega al final de la ruta en Flatbush, el tren local se encuentra a 7.8 millas de Flatbush. Si el tren expreso es más rápido que el normal en 5.2 millas promedio, determine las velocidades de los dos trenes.

52. Equitación Cada mañana, Ron Lucky monta su caballo, Belleza, y cabalga al trote una distancia de 5.4 millas; luego, deja que Belleza camine a su propio ritmo 2.3 millas. La velocidad del caballo al trotar es 4.2 veces su velocidad al caminar. Si todo el paseo dura 1.5 horas, determine la velocidad a que camina Belleza.

53. Viaje Un automóvil y un tren inician su recorrido hacia un poblado al mismo tiempo y desde el mismo punto; su destino está a 390 millas de distancia. Si la velocidad del automóvil promedia el doble de la velocidad del tren y el automóvil llega 6.5 horas antes que el tren, determine la velocidad del automóvil y la velocidad del tren.

54. Viaje Un tren y un automóvil salen de la estación de trenes de Pasadena, California, hacia la feria estatal de Sacramento. El automóvil promedia 50 millas por hora y el tren promedia 70 millas por hora. Si el tren llega a la feria 2 horas antes que el automóvil, determine la distancia de la estación de trenes a la feria.

55. Viaje Dos amigos recorren, cada uno por su lado, una distancia de 600 millas. Mary Ann Zilke viaja por autopista y llega a su destino dos horas antes que Carla Canola, quien tomó una ruta diferente. Si la velocidad promedio del automóvil de Marie fue 10 millas por hora más rápida que la del automóvil de Carla, determine la velocidad promedio a la que viajó el automóvil de Mary Ann.

56. Carrera de veleros *Bucanero*, el velero ganador de una competencia, completó su recorrido de 30 millas 10 minutos antes que el segundo lugar, *Cuervo*. Si la velocidad promedio de *Bucanero* fue de dos millas por hora más rápida que la de *Cuervo*, determine la velocidad promedio del velero ganador.

57. Viaje en helicóptero Kathy Angel viajó en helicóptero hasta la cima del monte Cook, en Nueva Zelanda. El recorrido fue de 60 kilómetros. Kathy permaneció en la cima del monte $\frac{1}{2}$ hora, y después voló a la ciudad de Te Anu, a 140 kilómetros de distancia. El helicóptero voló en promedio 20 kilómetros por hora más rápido al ir a Te Anu que durante el vuelo hacia la cima del monte. El tiempo total del viaje fue de dos horas. Determine la velocidad promedio a la que voló el helicóptero en su recorrido hacia el monte.

58. **Veleros** Dos veleros, el *Serendipity* y el *Zerwilliker*, inician su recorrido en el mismo punto y al mismo instante en el lago Michigan, y se dirigen hacia el mismo restaurante en el lago. El *Serendipity* navega a un promedio de 5.2 millas por hora, y el *Zerwilliker* lo hace a un promedio de 4.6 millas por hora. Si el *Serendipity* llega a su destino 0.4 horas antes que el *Zerwilliker*, determine la distancia que hay entre el punto en que iniciaron el recorrido al restaurante.

59. **Paseo en bicicleta** Robert Wiggins pasea en su bicicleta desde DuPont Circle en Washington, D.C. a Mount Vernon en Virgina. Tarda $2\frac{1}{2}$ horas en completar el viaje de 17 millas. En la parte lenta del viaje, Robert pedalea a una velocidad de 6 millas por hora. En la parte rápida del viaje, él pedalea a 10 millas por hora. ¿Cuánto tiempo viaja a 6 millas por hora y cuánto tiempo viaja a 10 millas por hora?

60. **Patinaje y trote** Sharon McGhee patina y trota en una pista que tiene una longitud de 38 millas. En la parte que está pavimentada, ella patina a una velocidad de 11 millas por hora. En la parte sin pavimentar, trota a 7 millas por hora. El viaje completo le toma 4 horas en terminarlo. ¿Cuánto tiempo patina y cuánto trota?

61. **Puente colgante** Un puente colgante tiene una longitud de 450 pies. Phil y Heim empiezan a cruzarlo a pie al mismo tiempo. La velocidad de Heim fue 2 pies por minuto más rápida que la de Phil. Si Heim terminó de cruzar el puente $2\frac{1}{2}$ minutos antes que Phil, determine la velocidad promedio, en pies por minuto, a la que lo cruzó Phil.

62. **Vía de tren inclinada** Un paseo por el monte Pilatos, cerca de Lucerna, Suiza, incluye un recorrido a lo largo de una vía de tren inclinada que sube hacia la cima; después, se pasa algún tiempo ahí, y luego se regresa por el lado opuesto del monte, a bordo de un teleférico. La distancia que se recorre hacia la cima del monte es de 7.5 kilómetros, y la distancia del descenso es de 8.7 kilómetros. La velocidad del teleférico es 1.2 veces la velocidad del tren sobre la vía inclinada. Si una familia permaneció en la cima del monte durante 3 horas, y el tiempo total del paseo fue de 9 horas, determine la velocidad del recorrido por la vía inclinada.

63. **Lanzamiento de cohetes** Dos cohetes serán lanzados al mismo tiempo desde el principal centro de operaciones de la NASA en Houston, Texas, y se encontrarán en una estación espacial a muchas millas de distancia de la Tierra. El primer cohete viaja a 20,000 millas por hora, y el segundo a 18,000 millas por hora. Si el primer cohete llegará a la estación espacial 0.6 horas antes que el segundo, ¿qué tan lejos se encuentra la estación espacial del centro de operaciones de la NASA?

64. Construya su propio problema de aplicación y determine la solución.

65. Construya su propio problema de movimiento y determine la solución.

66. Construya su propio problema numérico y determine la solución.

Reto

67. Una oficial que pilota una aeronave de patrullaje determina que un automóvil, que está a una distancia de 10 millas, está siendo conducido a una velocidad de 90 millas por hora.
    a) Si la aeronave viaja a 150 millas por hora, ¿cuántos minutos tardará en alcanzar al automóvil?
    b) ¿Qué distancia recorrerá el automóvil antes de que la aeronave le dé alcance?
    c) Si la oficial desea alcanzar al automóvil en exactamente 8 minutos, ¿qué tan rápido debe volar la aeronave?

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] 68. Simplifique $\dfrac{(2x^{-2}y^{-2})^{-3}}{(3x^{-1}y^{3})^{2}}$.

[1.6] 69. Exprese 9,260,000,000 en notación científica.

[2.3] 70. **Salario semanal** Sandy Ivey recibe un salario semanal de $240, más 12% de comisión sobre el volumen de sus ventas totales. ¿Cuál debe ser su volumen de ventas en una semana para ganar $540?

[3.1] 71. Grafique $y = |x| - 2$.

[5.4] 72. Factorice $2a^4 - 2a^3 - 5a^2 + 5a$.

6.6 Variación

1 Resolver problemas de variación directa.

2 Resolver problemas de variación inversa.

3 Resolver problemas de variación conjunta.

4 Resolver problemas de variación combinada.

En las secciones 6.4 y 6.5 analizamos muchas aplicaciones de ecuaciones que contienen expresiones racionales. En esta sección veremos algunas más.

1 Resolver problemas de variación directa

Muchas fórmulas científicas se expresan como variaciones. Una **variación** es una ecuación que relaciona una variable con una o más variables distintas, utilizando las operaciones de multiplicación y/o división. Esencialmente, existen tres tipos de problemas de este tipo: de variación directa, de variación inversa y de variación conjunta.

En la **variación directa**, las dos variables relacionadas aumentan o disminuyen juntas; esto es, conforme una aumenta la otra también, y a medida que una disminuye la otra también lo hace.

Piense, por ejemplo, en un automóvil que viaja a 30 millas por hora; el automóvil recorre 30 millas en una hora, 60 millas en 2 horas y 90 millas en 3 horas. Observe que al aumentar el tiempo, la distancia recorrida también aumenta.

La fórmula utilizada para calcular la distancia recorrida es

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

Como la velocidad es constante, 30 millas por hora, la fórmula puede escribirse como

$$d = 30t$$

Decimos que la distancia varía directamente respecto del tiempo, o que la distancia es directamente proporcional al tiempo. Éste es un ejemplo de variación directa.

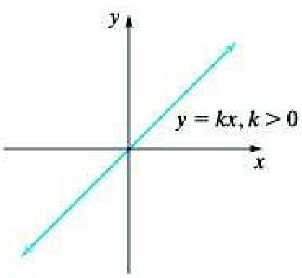


FIGURA 6.11

Variación directa

Si una variable y varía directamente respecto de una variable x, entonces

$$y = kx$$

donde k es la **constante de proporcionalidad** (o la constante de variación).

La gráfica de $y = kx$, $k > 0$, siempre da por resultado una recta que pasa por el origen (vea la **figura 6.11**). La pendiente de la recta depende del valor de k. Entre mayor sea el valor de k, mayor será la pendiente.

EJEMPLO 1 **Círculo** La circunferencia de un círculo, C, es directamente proporcional a (o varía directamente respecto de) su radio, r. Escriba la ecuación de la circunferencia de un círculo si la constante de proporcionalidad, k, es 2π.

Solución $C = kr$ (C varía directamente respecto de r)

$C = 2\pi r$ (la constante de proporcionalidad es 2π)

Ahora resuelva el ejercicio 11

EJEMPLO 2 **Administración de medicamentos** La cantidad, a, de cierto medicamento que se administra a un paciente es directamente proporcional a la masa corporal del paciente, m, en kilogramos.

a) Escriba esta variación como una ecuación.

b) Si le dan 150 mg a un chico cuya masa corporal es de 30 kg, determine la constante de proporcionalidad.

c) ¿Qué cantidad de este medicamento debe administrarse a un paciente cuya masa corporal es de 62 kg?

Solución **a)** Dijimos que ésta es una variación directa. Es decir, a mayor masa corporal del paciente, mayor cantidad de medicamento tendrá que administrársele. Por lo tanto, planteamos una variación directa,

$$a = km$$

b) Entienda el problema y traduzca Para determinar el valor de la constante de proporcionalidad, sustituimos los valores dados por la cantidad del medicamento y la masa corporal del paciente. Después despejamos k.

$$a = km$$

$$150 = k(30) \quad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos

$$5 = k$$

Responda Así, $k = 5$ mg. Se deben administrar 5 miligramos del medicamento por cada kilogramo de masa corporal de un paciente.

c) Entienda el problema y traduzca Ahora que conocemos la constante de proporcionalidad, podemos usarla para determinar la cantidad de medicamento que se debe administrar según la masa corporal de un paciente. Planteamos la variación y sustituimos los valores para k y m.

$$a = km$$

$$a = 5(62) \quad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos

$$a = 310$$

Responda Así, a un paciente con una masa corporal de 62 kg, se le deben administrar 310 mg del medicamento.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 57

EJEMPLO 3 ▸ La variable y varía directamente respecto del cuadrado de z. Si y es 80 cuando z es 20, determine y cuando z es 45.

Solución Como y varía directamente respecto del *cuadrado de z,* comenzamos con la fórmula $y = kz^2$. En vista de que no se indica cuál es la constante de proporcionalidad, primero debemos determinar k con la información dada.

$$y = kz^2$$

$$80 = k(20)^2 \quad \text{Sustituir los valores dados.}$$

$$80 = 400k \quad \text{Despejar } k.$$

$$\frac{80}{400} = \frac{400k}{400}$$

$$0.2 = k$$

Ahora utilizamos $k = 0.2$ para determinar y cuando z es 45.

$$y = kz^2$$

$$y = 0.2(45)^2 \quad \text{Sustituir los valores dados.}$$

$$y = 405$$

De este modo, cuando z es igual a 45, y es igual a 405.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 35

2 Resolver problemas de variación inversa

Un segundo tipo de variación es la **variación inversa**. Cuando dos cantidades varían inversamente, significa que conforme una cantidad aumenta, la otra disminuye, y viceversa.

Para explicar la variación inversa, utilicemos una vez más la fórmula distancia = velocidad · tiempo. Si despejamos el tiempo, obtenemos tiempo $= \dfrac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$. Suponga que la distancia se determina en 120 millas; entonces

$$\text{tiempo} = \frac{120}{\text{velocidad}}$$

A 120 millas por hora, se requeriría 1 hora para recorrer la distancia; a 60 millas por hora, se necesitarían 2 horas; a 30 millas por hora, serían necesarias 4 horas. Observe que cuando la velocidad (o rapidez) disminuye, el tiempo aumenta, y viceversa.

La ecuación anterior puede escribirse como

$$t = \frac{120}{r}$$

Esta ecuación es un ejemplo de variación inversa. El tiempo y la velocidad son inversamente proporcionales. La constante de proporcionalidad es 120.

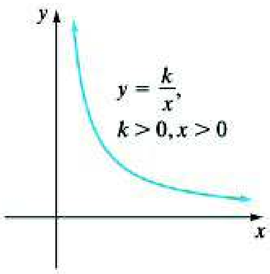


FIGURA 6.12

Variación inversa

Si una variable y varía inversamente respecto de una variable x, entonces

$$y = \frac{k}{x} \qquad (\text{o } xy = k)$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Dos cantidades varían inversamente, o son inversamente proporcionales, si una de ellas aumenta a medida que la otra disminuye. La gráfica de $y = \frac{k}{x}$, para $k > 0$ y $x > 0$, tendrá la forma que se ilustra en la **figura 6.12**. La gráfica de una variación inversa no está definida en $x = 0$, ya que 0 no está en el dominio de la función $y = \frac{k}{x}$.

EJEMPLO 4 ▶ **Hielo derretido** El tiempo, t, que tarda en derretirse un bloque de hielo cuando se le sumerge en agua es inversamente proporcional a la temperatura del agua, T.

a) Escriba esta variación como una ecuación.
b) Si un bloque de hielo tarda 15 minutos en derretirse cuando se le sumerge en agua con una temperatura de 60°F, determine la constante de proporcionalidad.
c) Determine en cuánto tiempo se derretirá un bloque de hielo del mismo tamaño si la temperatura del agua es de 50°F.

Solución **a)** Entre más caliente esté el agua, más rápido se derretirá el hielo. La variación inversa es

$$t = \frac{k}{T}$$

b) Entienda el problema y traduzca Para determinar la constante de proporcionalidad, sustituimos los valores para la temperatura y el tiempo y despejamos k.

$$t = \frac{k}{T}$$

$$15 = \frac{k}{60} \qquad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos $\quad 900 = k$

Responda La constante de proporcionalidad es 900.

c) Entienda el problema y traduzca Ahora que conocemos la constante de proporcionalidad, podemos usarla para determinar en cuánto tiempo se derretirá un bloque de hielo del mismo tamaño si se le sumerge en agua con una temperatura de 50°F. Para ello, establecemos la proporción, sustituimos los valores para k y T, y despejamos t.

$$t = \frac{k}{T}$$

$$t = \frac{900}{50} \qquad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos $\quad t = 18$

Responda El bloque de hielo sumergido en el agua con temperatura de 50°F se derretirá en 18 minutos.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 61

EJEMPLO 5 ▸ **Iluminación** La iluminación, I, que produce una fuente de luz varía inversamente respecto del cuadrado de la distancia, d, a la que se esté de la fuente. Suponiendo que la iluminación es de 75 unidades a una distancia de 4 metros, determine la ecuación que expresa la relación entre iluminación y distancia.

Solución Entienda el problema y traduzca Como la iluminación varía inversamente respecto del *cuadrado* de la distancia, la forma general de la ecuación es

$$I = \frac{k}{d^2} \qquad (\text{o } Id^2 = k)$$

Para determinar k, sustituimos los valores dados para I y d.

$$75 = \frac{k}{4^2} \qquad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos

$$75 = \frac{k}{16} \qquad \text{Despejar } k.$$

$$(75)(16) = k$$

$$1200 = k$$

Responda La fórmula es $I = \dfrac{1200}{d^2}$.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 65

3 Resolver problemas de variación conjunta

Una cantidad puede variar en relación al producto de dos o más cantidades distintas. Este tipo de variación se llama **variación conjunta**.

Variación conjunta

Si y varía conjuntamente respecto de x y z, entonces

$$y = kxz$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

EJEMPLO 6 ▸ **Área de un triángulo** El área, A, de un triángulo varía conjuntamente respecto de su base b, y su altura h. Si el área de un triángulo mide 48 pulgadas cuadradas cuando su base mide 12 pulgadas y su altura es 8 pulgadas, determine el área de un triángulo cuya base mide 15 pulgadas y cuya altura mide 40 pulgadas.

Solución Entienda el problema y traduzca Primero escribimos la variación conjunta; después sustituimos los valores conocidos y despejamos k.

$$A = kbh$$

$$48 = k(12)(8) \qquad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos

$$48 = k(96) \qquad \text{Despejar } k.$$

$$\frac{48}{96} = k$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Ahora despejamos el área del triángulo dado.

$$A = kbh$$

$$= \frac{1}{2}(15)(40) \qquad \text{Sustituir los valores dados.}$$

$$= 300$$

Responda El área del triángulo mide 300 pulgadas cuadradas.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

Resumen de variaciones

DIRECTA	INVERSA	CONJUNTA
$y = kx$	$y = \dfrac{k}{x}$	$y = kxz$

4 Resolver problemas de variación combinada

En situaciones de la vida real, muchas veces una variable varía respecto de una combinación de variables. Los siguientes ejemplos ilustran el uso de las **variaciones combinadas**.

EJEMPLO 7 ▸ **Tienda de galletas** Los propietarios de una tienda de galletas determinan que su venta semanal, S, varía directamente respecto de su presupuesto de publicidad, A, e inversamente respecto del precio de las galletas, P. Cuando el presupuesto de publicidad es de \$400 y el precio de las galletas es de \$1, se venden 6200 galletas.

a) Escriba una ecuación de variación que exprese a S en términos de A y P. Incluya el valor de la constante.

b) Determine las ventas esperadas, si el presupuesto de publicidad es de \$600 y el precio de las galletas es de \$1.20.

Solución **a)** Entienda el problema y traduzca Comenzamos con la ecuación

$$S = \frac{kA}{P}$$

Realice los cálculos

$$6200 = \frac{k(400)}{1} \qquad \text{Sustituir los valores dados.}$$

$$6200 = 400k \qquad \text{Despejar } k.$$

$$15.5 = k$$

Responda Por lo tanto, la ecuación para calcular las ventas de galletas es $S = \dfrac{15.5A}{P}$.

b) Entienda el problema y traduzca Ahora que conocemos la ecuación de la variación combinada, podemos usarla para determinar las ventas según los valores dados.

$$S = \frac{15.5A}{P}$$

$$= \frac{15.5(600)}{1.20} \qquad \text{Sustituir los valores dados.}$$

Realice los cálculos

$$= 7750$$

Responda La tienda puede vender 7750 galletas.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 71

EJEMPLO 8 ▸ **Fuerza electrostática** La fuerza electrostática, F, de repulsión entre dos cargas eléctricas positivas, es conjuntamente proporcional respecto de las dos cargas q_1 y q_2, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, d, entre las dos cargas. Exprese F, en términos de q_1, q_2 y d.

Solución

$$F = \frac{kq_1q_2}{d^2}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 75

CONJUNTO DE EJERCICIOS 6.6

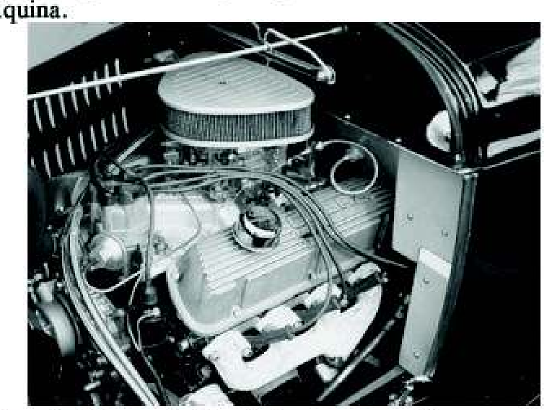
MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. **a)** Explique qué significa cuando dos elementos varían en proporción directa.
   b) Proporcione su propio ejemplo de dos cantidades que varíen directamente.
   c) Escriba la variación directa para su ejemplo de la parte **b)**.
2. **a)** Explique qué significa cuando dos elementos varían en proporción inversa.
   b) Proporcione su propio ejemplo de dos cantidades que varíen inversamente.
   c) Escriba la variación inversa para su ejemplo de la parte **b)**.
3. ¿Qué se entiende por variación conjunta?
4. ¿Qué se entiende por variación combinada?
5. **a)** En la ecuación $y = \frac{17}{x}$, cuando x aumenta, ¿el valor de y aumenta o disminuye?
   b) ¿Éste es un ejemplo de variación directa o inversa? Explique.
6. **a)** En la ecuación $z = 0.8x^3$, cuando x aumenta, ¿el valor de z aumenta o disminuye?
   b) ¿Éste es un ejemplo de variación directa o inversa? Explique.

Variación *Utilice su intuición para determinar si la variación entre las cantidades indicadas es directa o inversa.*

7. La velocidad y la distancia recorrida por un ciclista.
8. El número de páginas que puede leer Tom en un periodo de dos horas, y su velocidad de lectura.
9. La velocidad de un atleta y el tiempo en que recorre una distancia de 10 kilómetros.
10. El salario semanal de Bárbara, y la cantidad de dinero que se le retiene por concepto de impuesto sobre los ingresos.
11. El radio de un círculo y su área.
12. El lado de un cubo y su volumen.
13. El radio de un globo y su volumen.
14. El diámetro de un círculo y su circunferencia.
15. El diámetro de una manguera y el volumen de agua que pasa por ella.
16. El peso de un cohete (debido a la gravedad terrestre) y la distancia que recorre desde la Tierra.
17. El tiempo que tarda en deshacerse un cubo de hielo sumergido en agua y la temperatura del agua.
18. La distancia entre dos ciudades en un mapa, y la distancia real entre ambas.
19. La abertura del obturador de una cámara fotográfica y la cantidad de luz que llega a la película.
20. El desplazamiento de pulgadas cúbicas expresado en litros producido por una máquina y los caballos de fuerza de la máquina.



21. La longitud de una tabla y la fuerza necesaria para romperla en el centro.
22. El número de calorías ingeridas y la cantidad de ejercicio necesario para quemarlas.
23. La luz que ilumina un objeto y la distancia entre la luz y el objeto.
24. El número de calorías que hay en una hamburguesa y el tamaño de la hamburguesa.

Práctica de habilidades

En los ejercicios 25 a 32, **a)** *escriba la variación, y* **b)** *determine la cantidad que se pide.*

25. x varía directamente respecto de y. Determine x cuando $y = 12$ y $k = 6$.
26. C varía directamente respecto del cuadrado de Z. Determine C cuando $Z = 9$ y $k = \frac{3}{4}$.
27. y varía directamente respecto de R. Determine y cuando $R = 180$ y $k = 1.7$
28. x varía inversamente respecto de y. Determine x cuando $y = 25$ y $k = 5$.
29. R varía inversamente respecto de W. Determine R cuando $W = 160$ y $k = 8$.
30. L varía inversamente respecto del cuadrado de P. Determine L cuando $P = 4$ y $k = 100$.
31. A varía directamente respecto de B, e inversamente respecto de C. Determine A cuando $B = 12$, $C = 4$ y $k = 3$.
32. A varía conjuntamente respecto de R_1 y R_2, e inversamente respecto del cuadrado de L. Determine A cuando $R_1 = 120$, $R_2 = 8$, $L = 5$ y $k = \frac{3}{2}$.

En los ejercicios 33 al 42, **a)** *escriba la variación, y* **b)** *determine la cantidad indicada.*

33. x varía directamente con y. Si x es 12 cuando y es 3, determine x cuando y es 5.
34. Z varía directamente con W. Si Z es 7 cuando W es 28, determine Z cuando W es 140.
35. y varía directamente con el cuadrado de R. Si y es 5 cuando $R = 5$, determine y cuando R es 10.
36. P varía directamente con el cuadrado de Q. Si P es 32 cuando Q es 4, determine P cuando Q es 7.
37. S varía inversamente con G. Si S es 12 cuando G es 0.4, determine S cuando G es 5.
38. C varía inversamente con J. Si C es 7 cuando J es 0.7, determine C cuando J es 12.

39. x varía inversamente con el cuadrado de P. Si x es 4, cuando P es 5, determine x cuando P es 2.

40. R varía inversamente con el cuadrado de T. Si R es 3 cuando T es 6, determine R cuando T es 2.

41. F varía conjuntamente con M_1 y M_2, e inversamente con d. Si F es 20 cuando $M_1 = 5$, $M_2 = 10$ y $d = 0.2$, determine F cuando $M_1 = 10$, $M_2 = 20$ y $d = 0.4$.

42. F varía conjuntamente con q_1 y q_2, e inversamente con el cuadrado de d. Si F es 8 cuando $q_1 = 2$, $q_2 = 8$ y $d = 4$, determine F cuando $q_1 = 28$, $q_2 = 12$ y $d = 2$.

Resolución de problemas

43. Suponga que a varía directamente con b. Si b se duplica, ¿cómo afectará a a? Explique.

44. Suponga que a varía directamente con b^2. Si b se duplica, ¿cómo afectará a a? Explique.

45. Suponga que y varía inversamente con x. Si x se duplica, ¿cómo afectará a y? Explique.

46. Suponga que y varía inversamente con a^2. Si a se duplica, ¿cómo afectará a y? Explique.

En los ejercicios 47 a 52, utilice la fórmula $F = \dfrac{km_1m_2}{d^2}$.

47. Si m_1 se duplica, ¿cómo afectará a F?

48. Si m_1 se cuadruplica y d se duplica, ¿cómo afectará a F?

49. Si m_1 se duplica, y m_2 se divide entre dos, ¿cómo afectará a F?

50. Si d se divide entre dos, ¿cómo afectará a F?

51. Si m_1 se divide entre dos, y m_2 se cuadriplica, ¿cómo afectará a F?

52. Si m_1 se duplica, m_2 se cuadriplica y d se cuadriplica, ¿cómo afectará a F?

En los ejercicios 53 y 54, determine si la variación es de la forma $y = kx$ *o* $y = \dfrac{k}{x}$ *y determine* k.

53.

x	y
2	$\frac{5}{2}$
5	1
10	$\frac{1}{2}$
20	$\frac{1}{4}$

54.

x	y
6	2
9	3
15	5
27	9

55. **Utilidad** La utilidad por la venta de lámparas es directamente proporcional al número de lámparas vendidas. Cuando se venden 150 lámparas, la utilidad es de \$2542.50. Determine la utilidad cuando se venden 520 lámparas.

56. **Utilidad** La utilidad por la venta de estéreos es directamente proporcional al número de estéreos vendidos. Cuando se venden 65 estéreos, la utilidad es de \$4056. Determine la utilidad cuando se venden 80 estéreos.

57. **Antibiótico** La dosis recomendada, d, de un medicamento antibiótico, vancomycin, es directamente proporcional al peso de la persona. Si a Phuong Kim, quien pesa 132 libras, se le administran 2376 miligramos, determine la dosis recomendada para Nathan Brown, quien pesa 172 libras.

58. **Dólares y pesos** La conversión de dólares estadounidenses a pesos mexicanos es una variación directa. Entre más dólares convierta más pesos recibe. La semana pasada, Carlos Manuel convirtió 275 dólares en 2433.75 pesos. Ahora su tía le dio 400 dólares. Si el tipo de cambio sigue siendo el mismo, cuando él convierta los 400 dólares, ¿cuántos pesos recibirá?

59. **Ley de Hooke** La ley de Hooke establece que la longitud que un resorte se estira, S, varía directamente con la fuerza (o peso), F, que se le aplica. Si un resorte se estira 1.4 pulgadas cuando se aplica un peso de 20 libras, ¿cuánto se estirará cuando se aplique un peso de 15 libras?

60. **Distancia** Cuando un automóvil viaja a una velocidad constante, la distancia recorrida, d, es directamente proporcional al tiempo, t. Si un automóvil recorre 150 millas en 2.5 horas, ¿qué tan lejos viajará el mismo automóvil en 4 horas?

61. **Presión y volumen** El volumen de un gas, V, varía inversamente con su presión, P. Si el volumen, V, es de 800 centímetros cúbicos cuando la presión es de 200 milímetros (mm) de mercurio, determine el volumen cuando la presión es de 25 mm de mercurio.

62. **Construcción de un muro de ladrillos** El tiempo, t, requerido para construir un muro de ladrillos varía inversamente con el número de personas, n, que trabajen en él. Si 5 albañiles necesitan 8 horas para construir un muro, ¿cuánto tardarán 4 albañiles en realizar la misma tarea?

63. **Carrera** El tiempo, t, que necesita un corredor para cubrir una distancia específica es inversamente proporcional a su velocidad. Si Jann Avery corre a un promedio de 6 millas por hora, terminará una carrera en 2.6 horas. ¿Cuánto tiempo necesitará Jackie Donofrio, quien corre a 5 millas por hora, para terminar la misma carrera?

64. Lanzamiento de una bola Cuando se lanza una bola en un juego profesional de béisbol, el tiempo, t, que tarda en llegar al home varía inversamente con la velocidad, s, del lanzamiento.* Una bola lanzada a 90 millas por hora tarda 0.459 segundos en llegar al home. ¿Cuánto tardará una bola lanzada a 75 millas por hora en llegar al home?

65. Intensidad de la luz La intensidad, I, de la luz emitida por una fuente de energía varía inversamente con el cuadrado de la distancia, d, a la que está dicha fuente. Si la intensidad de la luz es de 20 pies-bujías a 15 pies, determine la intensidad de la luz a 10 pies.

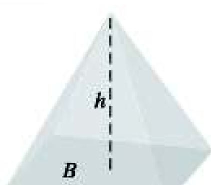
66. Pelota de tenis Cuando un tenista sirve una pelota, el tiempo que le toma a la pelota golpear el piso de la caja de servicio es inversamente proporcional a la velocidad a la que viaja. Si Andy Roddick sirve a 122 millas por hora, la pelota necesita 0.21 segundos para pegar en el piso. ¿Cuánto tardará la pelota en pegar en el piso, si Andy sirve a 80 millas por hora?

Andy Roddick

67. Distancia para detenerse Suponga que la distancia que una camioneta necesita para detenerse varía directamente con el cuadrado de su velocidad. Una camioneta que viaja a 40 millas por hora puede detenerse en 60 pies. Si la camioneta está viajando a 56 millas por hora, ¿qué distancia necesita para detenerse?

68. Rocas que caen Se deja caer una roca desde lo alto de un risco. La distancia que recorre al caer, en pies, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo en segundos. Si la roca cae 4 pies en $\frac{1}{2}$ segundo, ¿qué distancia caerá en 3 segundos?

69. Volumen de una pirámide El volumen, V, de una pirámide varía conjuntamente con el área de su base, B, y su altura h (vea la figura). Si el volumen de la pirámide es 160 metros cúbicos, cuando el área de su base es de 48 metros cúbicos y su altura es de 10 metros, determine el volumen de una pirámide cuando el área de su base es de 42 metros cuadrados y su altura es de 9 metros.



70. Pago de hipoteca El pago mensual de una hipoteca, P, varía conjuntamente con la tasa de interés, r, y el monto de la hipoteca, m. Si el pago mensual de la hipoteca sobre un monto de $50,000 a 7% de tasa de interés es $332.50, determine el pago mensual sobre una hipoteca de $66,000 a 7%.

71. Alquiler de DVD El alquiler semanal de DVD, R, en una tienda especializada varía directamente respecto de su presupuesto de publicidad, A, e inversamente respecto del precio diario de alquiler, P. Cuando el presupuesto de publicidad es de $400 y el precio diario del alquiler es de $2, la tienda alquila 4600 DVD por semana. ¿Cuántas cintas alquilaría por semana si aumentara su presupuesto de publicidad a $500 y subieran su precio de alquiler a $2.50?

72. Resistencia eléctrica La resistencia eléctrica de un cable, R, varía directamente respecto de su longitud, L, e inversamente respecto del área de su sección transversal, A. Si la resistencia de un cable es de 0.2 ohms cuando la longitud es de 200 pies, y el área de su sección transversal mide 0.05 pulgadas cuadradas, determine la resistencia de un cable cuya longitud mide 5000 pies, y el área de su sección transversal mide 0.01 pulgadas cuadradas.

73. Peso de un objeto El peso, w, de un objeto en la atmósfera de la Tierra varía inversamente respecto del cuadrado de la distancia, d, entre el objeto y el centro de la Tierra. Una persona que pesa 140 libras se encuentra aproximadamente a 4000 millas de distancia del centro de la Tierra. Determine el peso (o fuerza de atracción gravitacional) de esta persona si estuviera a una distancia de 100 millas sobre la superficie de la Tierra.

74. Consumo de energía El consumo de energía, en watts, de un aparato, W, varía conjuntamente respecto del cuadrado de la corriente, I, y la resistencia, R. Si el consumo es de 3 watts cuando la corriente es de 0.1 amperes y la resistencia es de 100 ohms, determine el consumo de energía cuando la corriente es de 0.4 amperes y la resistencia es de 250 ohms.

75. Llamadas telefónicas El número de llamadas telefónicas entre dos ciudades durante un periodo dado, N, varía directamente respecto del número de habitantes, p_1 y p_2, de las dos ciudades, e inversamente respecto de la distancia, d, entre ellas. Si se realizan 100,000 llamadas entre dos ciudades que se encuentran a una distancia de 300 millas, y el número de habitantes de las ciudades es de 60,000 y 200,000, respectivamente, ¿cuántas llamadas se realizan entre dos ciudades con poblaciones de 125,000 y 175,000 que se encuentran a 450 millas de distancia?

76. Cobro por consumo de agua En una región específica del país, el monto de la factura por consumo de agua de un cliente, W, es directamente proporcional a la temperatura diaria promedio durante el mes, T, el área del jardín, A, y la raíz cuadrada de F, el tamaño de la familia, e inversamente proporcional al número de pulgadas de lluvia, R.

*Una bola se va deteniendo poco a poco a lo largo de su camino al home, debido a la resistencia al viento. Para un lanzamiento de 95 mph, la bola es alrededor de 8 mph más rápida cuando sale de la mano del lanzador que cuando cruza el home.

En un mes, la temperatura promedio es 78°F, y el número de pulgadas de lluvia es 5.6. Si una familia promedio de cuatro integrantes tiene un jardín de 1000 pies cuadrados y paga \$68 por consumo de agua, calcule cuánto pagará en el mismo mes una familia de seis miembros, cuyo jardín mide 1500 pies cuadrados.

77. Intensidad de iluminación En un artículo de la revista *Outdoor and Travel Photography* se establece que: "Si una superficie se ilumina mediante una fuente de luz puntual (un flash), la intensidad de la iluminación producida es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa".

Si quiere fotografiar un objeto que está a 4 pies de distancia del flash, y la iluminación en su objetivo es $\frac{1}{16}$ de la luz del flash, ¿cuál es la intensidad de iluminación sobre un objeto que está a 7 pies de distancia del flash?

78. Fuerza de atracción Una de las leyes de Newton establece que la fuerza de atracción, F, entre dos masas, es directamente proporcional a las masas de los dos objetos, m_1 y m_2, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, d, entre las dos masas.

a) Escriba la fórmula que representa la ley de Newton.

b) ¿Qué le sucede a la fuerza de atracción si una masa se duplica, la otra se triplica, y la distancia entre los objetos se divide entre dos?

79. Presión sobre un objeto La presión P, en libras por pulgadas cuadradas (psi), que se ejerce sobre un objeto a x pies bajo el nivel del mar es de 14.70 psi más el producto de una constante de proporcionalidad, k y el número de pies, x, al que el objeto se encuentra por debajo del nivel del mar (vea la figura). La cifra 14.70 representa el peso, en libras, de la columna de aire (a partir del nivel del mar y hasta la parte superior de la atmósfera) que está sobre un área de 1 pulgada por 1 pulgada de agua de mar. El producto kx representa el peso, en libras, de una columna de agua de 1 pulgada por 1 pulgada por x pies.

a) Escriba una fórmula para calcular la presión que se ejerce sobre un objeto que se encuentra a x pies por debajo del nivel del mar.

b) Si el barómetro de un submarino que se ubica a 60 pies de profundidad registra 40.5 psi, determine la constante k.

c) Si un submarino está construido para soportar una presión de 160 psi, ¿hasta qué profundidad puede descender?

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **80.** Despeje h de la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^2 h$.

[3.6] **81.** Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = -5x + 1$. Determine $f(-4) \cdot g(-2)$.

[5.2] **82.** Multiplique $(7x - 3)(-2x^2 - 4x + 5)$.

[5.7] **83.** Factorice $(x + 1)^2 - (x + 1) - 6$.

Resumen del capítulo 6

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 6.1	
Una **expresión racional** es una expresión de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.	$\frac{7}{x}$, $\frac{x^2 - 5}{x + 1}$, $\frac{t^2 - t + 1}{3t^2 + 5t - 7}$
Una **función racional** es una función de la forma $f(x) = \frac{p}{q}$ o $y = \frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.	$y = \frac{x - 8}{x + 9}$, $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{9x^2 - x + 3}$
El **dominio** de una función racional es el conjunto de valores que pueden usarse para remplazar a la variable.	El dominio de $f(x) = \frac{x + 9}{x - 2}$ es $\{x \mid x \neq 2\}$.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 6.1 (continuación)

Para simplificar expresiones racionales

1. Factorice completamente el numerador y el denominador.
2. Divida el numerador y el denominador entre los factores comunes, si los hay.

$$\frac{x^3-8}{x^2-4}=\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{(x+2)\cancel{(x-2)}}=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$$

Para multiplicar expresiones racionales

Para multiplicar expresiones racionales, factorice todos los numeradores y denominadores y luego utilice la regla:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\quad b\neq 0, d\neq 0$$

$$\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{2x-1}=\frac{\cancel{(x+1)}\,\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)}\cdot\frac{x+1}{\cancel{2x-1}}=\frac{x+1}{x-1}$$

Para dividir expresiones racionales

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c},\quad b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$$

$$\frac{x^2+4x+3}{x+1}\div\frac{x+3}{x}=\frac{\cancel{(x+3)}\,\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}\cdot\frac{x}{\cancel{x+3}}=x$$

Sección 6.2

Para sumar o restar expresiones racionales

Suma

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},\quad c\neq 0$$

Resta

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c},\quad c\neq 0$$

$$\frac{x}{x^2-49}-\frac{7}{x^2-49}=\frac{x-7}{x^2-49}=\frac{\cancel{x-7}}{(x+7)\cancel{(x-7)}}=\frac{1}{x+7}$$

Para determinar el mínimo común denominador (MCD) de expresiones racionales

1. Escriba cada coeficiente no primo (diferente de 1) de monomios que aparezcan en los denominadores como un producto de números primos.
2. Factorice completamente cada denominador.
3. Liste todos los factores diferentes de cada denominador. Cuando aparezca el mismo factor en más de un denominador, escriba el factor con la mayor potencia que aparezca.
4. El mínimo común denominador es el producto de todos los factores que se encontraron en el paso 2.

El MCD de $\dfrac{7}{9x^2y}+\dfrac{17}{3xy^3}$ es $3\cdot 3\cdot x^2\cdot y^3=9x^2y^3$.

El MCD de $\dfrac{1}{x^2-36}-\dfrac{4x+3}{x^2+13x+42}$ es $(x+6)(x-6)(x+7)$. Observe que $x^2-36=(x+6)(x-6)$ y $x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$.

Para sumar o restar expresiones racionales con denominadores diferentes

1. Determine el MCD.
2. Rescriba cada fracción como una fracción equivalente con el MCD.
3. Deje el denominador en la forma factorizada, pero desarrolle el numerador.
4. Sume o reste los numeradores conservando el MCD.
5. Cuando sea posible reducir la fracción factorizando el numerador, hágalo.

Sume $\dfrac{2a}{x^2y}+\dfrac{b}{xy^3}$.

El MCD es x^2y^3.

$$\begin{aligned}\frac{2a}{x^2y}+\frac{b}{xy^3}&=\frac{y^2}{y^2}\cdot\frac{2a}{x^2y}+\frac{b}{xy^3}\cdot\frac{x}{x}\\&=\frac{2ay^2}{x^2y^3}+\frac{bx}{x^2y^3}\\&=\frac{2ay^2+bx}{x^2y^3}\end{aligned}$$

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS

Sección 6.3

Una **fracción compleja** es aquella que tiene una expresión racional en su numerador o en su denominador o en los dos.

$$\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{x^2}{x+1}}, \qquad \frac{7-\frac{6}{y}}{\frac{1}{y^2}+\frac{8}{y^3}}$$

Para simplificar una fracción compleja mediante la multiplicación por un denominador común

1. Determine el MCD de todas las fracciones que aparezcan en la fracción compleja.
2. Multiplique el numerador y el denominador de la fracción compleja por el MCD de la fracción compleja, que se determinó en el paso 1.
3. Cuando sea posible, simplifique.

Simplifique $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x}$.

El MCD es x.

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{x} = \frac{x}{x}\cdot\frac{1+\frac{1}{x}}{x} = \frac{x(1)+x\left(\frac{1}{x}\right)}{x(x)} = \frac{x+1}{x^2}$$

Para simplificar una fracción compleja mediante la simplificación del numerador y el denominador

1. Cuando sea necesario, sume o reste, para obtener una expresión racional en el numerador.
2. Cuando sea necesario, sume o reste para obtener una expresión racional en el denominador.
3. Invierta el denominador de la fracción compleja y multiplique por el numerador de la fracción compleja.
4. Cuando sea posible, simplifique.

Simplifique $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{x}$.

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{x} = \frac{\frac{x+1}{x}}{x} = \frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x+1}{x^2}$$

Sección 6.4

Para resolver ecuaciones racionales

1. Determine el MCD de todas las expresiones racionales en la ecuación.
2. Multiplique *ambos* lados de la ecuación por el MCD.
3. Elimine todos los paréntesis y reduzca los términos semejantes en cada lado de la ecuación.
4. Resuelva la ecuación, mediante las propiedades que se estudiaron en las secciones anteriores.
5. Compruebe la solución en la ecuación *original*.

Resuelva $\dfrac{5}{x}+1=\dfrac{11}{x}$.

Multiplique ambos lados por el MCD, x.

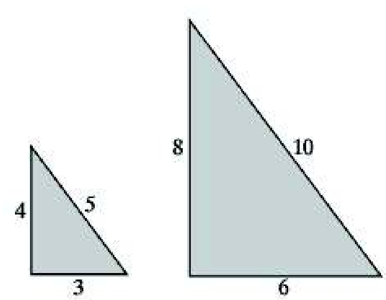
$$\begin{aligned} x\left(\frac{5}{x}+1\right) &= x\left(\frac{11}{x}\right) \\ x\cdot\frac{5}{x}+x\cdot 1 &= x\cdot\frac{11}{x} \\ 5+x &= 11 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

La respuesta es correcta.

Las **proporciones** son ecuaciones de la forma $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.

$\dfrac{2}{7}=\dfrac{9}{x}$ es una proporción.

Figuras semejantes son figuras cuyos ángulos correspondientes son iguales y cuyos lados correspondientes son proporcionales.



son figuras semejantes.

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 6.5	
Aplicaciones **Problemas de trabajo:** Un problema de trabajo es aquél en donde dos o más máquinas o personas trabajan juntas para completar una tarea.	Carlos y Alí plantan flores en un jardín. Carlos puede plantar una maceta de flores en 30 minutos. Alí puede plantar la misma maceta en 20 minutos. ¿Cuánto tardarán en plantar la maceta de flores si trabajan juntos?
Problemas numéricos: Un problema numérico es un problema en donde un número está relacionado con otro número.	Cuando el recíproco de un número se resta de 5, el resultado es el recíproco del doble del número, Determine el número.
Problemas de movimiento: Un problema de movimiento es un problema que incluye tiempo, velocidad y distancia.	Tom parte en un viaje en canoa a mediodía. Él puede remar a 5 millas por hora en aguas tranquilas. ¿A qué distancia puede ir río abajo, si la corriente es de 2 millas por hora y el va y regresa en 4 horas?
Sección 6.6	
Variación directa Si una variable y varía directamente con una variable x, entonces $y = kx$, en donde k es la constante de proporcionalidad.	$y = 3x$
Variación inversa Si una variable y varía inversamente con una variable x, entonces $y = \frac{k}{x}$ (o $xy = k$) en donde k es la constante de proporcionalidad.	$y = \frac{3}{x}$
Variación conjunta Si y varía conjuntamente con x y z, entonces $y = kxz$ en donde k es la constante de proporcionalidad	$y = 3xz$

Ejercicios de repaso del capítulo 6

[6.1] *Determine el valor o valores de la variable que debe excluirse en cada expresión racional.*

1. $\frac{3}{x - 5}$ **2.** $\frac{x}{x + 1}$ **3.** $\frac{-2x}{x^2 + 9}$

Determine el dominio de cada función racional.

4. $y = \frac{5}{(x + 3)^2}$ **5.** $f(x) = \frac{x + 6}{x^2}$ **6.** $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 4x - 12}$

Simplifique cada expresión.

7. $\frac{x^2 + xy}{x + y}$ **8.** $\frac{x^2 - 36}{x + 6}$ **9.** $\frac{7 - 5x}{5x - 7}$ **10.** $\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 4x - 12}$

11. $\frac{2x^2 - 6x + 5x - 15}{2x^2 + 7x + 5}$ **12.** $\frac{a^3 - 8b^3}{a^2 - 4b^2}$ **13.** $\frac{27x^3 + y^3}{9x^2 - y^2}$ **14.** $\frac{2x^2 + x - 6}{x^3 + 8}$

[6.2] *Determine el mínimo común denominador de cada expresión.*

15. $\dfrac{6x}{x+4} - \dfrac{3}{x}$

16. $\dfrac{3x+1}{x+2y} + \dfrac{7x-2y}{x^2-4y^2}$

17. $\dfrac{19x-5}{x^2+2x-35} + \dfrac{3x-2}{x^2-3x-10}$

18. $\dfrac{3}{(x+2)^2} - \dfrac{6(x+3)}{x^2-4} - \dfrac{4x}{x+3}$

[6.1, 6.2] *Realice la operación indicada.*

19. $\dfrac{30x^2y^3}{3z} \cdot \dfrac{6z^3}{5xy^3}$

20. $\dfrac{x}{x-9} \cdot \dfrac{9-x}{6}$

21. $\dfrac{18x^2y^4}{xz^5} \div \dfrac{2x^2y^4}{x^4z^{10}}$

22. $\dfrac{11}{3x} + \dfrac{2}{x^2}$

23. $\dfrac{4x-4y}{x^2y} \cdot \dfrac{y^3}{16x}$

24. $\dfrac{4x^2-11x+4}{x-3} - \dfrac{x^2-4x+10}{x-3}$

25. $\dfrac{6}{xy} + \dfrac{3y}{5x^2}$

26. $\dfrac{x+2}{x-1} \cdot \dfrac{x^2+3x-4}{x^2+6x+8}$

27. $\dfrac{3x^2-7x+4}{3x^2-14x-5} - \dfrac{x^2+2x+9}{3x^2-14x-5}$

28. $5 + \dfrac{a+2}{a+1}$

29. $7 - \dfrac{b+1}{b-1}$

30. $\dfrac{a^2-b^2}{a+b} \cdot \dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^3+a^2b}$

31. $\dfrac{1}{a^2+8a+15} \div \dfrac{3}{a+5}$

32. $\dfrac{a+c}{c} - \dfrac{a-c}{a}$

33. $\dfrac{4x^2+8x-5}{2x+5} \cdot \dfrac{x+1}{4x^2-4x+1}$

34. $(a+b) \div \dfrac{a^2-2ab-3b^2}{a-3b}$

35. $\dfrac{x^2-3xy-10y^2}{6x} \div \dfrac{x+2y}{24x^2}$

36. $\dfrac{a+1}{2a} + \dfrac{3}{4a+8}$

37. $\dfrac{x-2}{x-5} - \dfrac{3}{x+5}$

38. $\dfrac{x+4}{x^2-4} - \dfrac{3}{x-2}$

39. $\dfrac{x+1}{x-3} \cdot \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+7x+6}$

40. $\dfrac{2}{x^2-x-6} - \dfrac{3}{x^2-4}$

41. $\dfrac{4x^2-16y^2}{9} \div \dfrac{(x+2y)^2}{12}$

42. $\dfrac{a^2+5a+6}{a^2+4a+4} \cdot \dfrac{3a+6}{a^4+3a^3}$

43. $\dfrac{x+5}{x^2-15x+50} - \dfrac{x-2}{x^2-25}$

44. $\dfrac{x+2}{x^2-x-6} + \dfrac{x-3}{x^2-8x+15}$

45. $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{6}{x^2-9}$

46. $\dfrac{a-4}{a-5} - \dfrac{3}{a+5} - \dfrac{10}{a^2-25}$

47. $\dfrac{x^3+64}{2x^2-32} \div \dfrac{x^2-4x+16}{2x+12}$

48. $\dfrac{a^2-b^4}{a^2+2ab^2+b^4} \div \dfrac{3a-3b^2}{a^2+3ab^2+2b^4}$

49. $\left(\dfrac{x^2-x-56}{x^2+14x+49} \cdot \dfrac{x^2+4x-21}{x^2-9x+8}\right) + \dfrac{3}{x^2+8x-9}$

50. $\left(\dfrac{x^2-8x+16}{2x^2-x-6} \cdot \dfrac{2x^2-7x-15}{x^2-2x-24}\right) \div \dfrac{x^2-9x+20}{x^2+2x-8}$

51. Si $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{x}{x+4}$, determine

a) el dominio de $f(x)$.

b) el dominio de $g(x)$.

c) $(f+g)(x)$.

d) el dominio de $(f+g)(x)$.

52. Si $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$ y $g(x) = \dfrac{x+4}{x-3}$, determine

a) el dominio de $f(x)$.

b) el dominio de $g(x)$.

c) $(f+g)(x)$.

d) el dominio de $(f+g)(x)$.

[6.3] *Simplifique cada fracción compleja.*

53. $\dfrac{\dfrac{9a^2b}{2c}}{\dfrac{6ab^4}{4c^3}}$

54. $\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}}{\dfrac{x}{y}+y^2}$

55. $\dfrac{\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{y^2}}{7+\dfrac{1}{y^2}}$

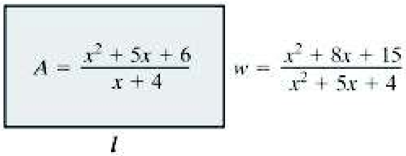
56. $\dfrac{a^{-1}+5}{a^{-1}+\dfrac{1}{a}}$

57. $\dfrac{x^{-2}+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}$

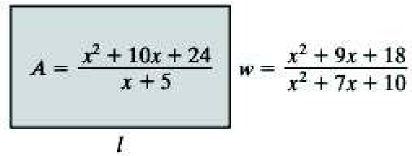
58. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2-3x-18}+\dfrac{2}{x^2-2x-15}}{\dfrac{3}{x^2-11x+30}+\dfrac{1}{x^2-9x+20}}$

Área *En los ejercicios 59 y 60 se indica el área y el ancho de cada rectángulo. Determine la longitud, l, dividiendo el área, A, entre el ancho, w.*

59.



60.



[6.4] *En los ejercicios 61 a 70, resuelva cada ecuación.*

61. $\dfrac{2}{x} = \dfrac{5}{9}$

62. $\dfrac{x}{1.5} = \dfrac{x - 4}{4.5}$

63. $\dfrac{3x + 4}{5} = \dfrac{2x - 8}{3}$

64. $\dfrac{x}{4.8} + \dfrac{x}{2} = 1.7$

65. $\dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{y}$

66. $\dfrac{2}{x + 4} - \dfrac{3}{x - 4} = \dfrac{-11}{x^2 - 16}$

67. $\dfrac{x}{x^2 - 9} + \dfrac{2}{x + 3} = \dfrac{4}{x - 3}$

68. $\dfrac{7}{x^2 - 5} + \dfrac{3}{x + 5} = \dfrac{4}{x - 5}$

69. $\dfrac{x - 3}{x - 2} + \dfrac{x + 1}{x + 3} = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^2 + x - 6}$

70. $\dfrac{x + 1}{x + 3} + \dfrac{x + 2}{x - 4} = \dfrac{2x^2 - 18}{x^2 - x - 12}$

71. Despeje b de $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$.

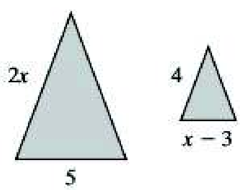
72. De la ecuación $z = \dfrac{x - \overline{x}}{s}$ despeje $\overline{x}$.

73. Resistores Tres resistores de 100, 200 y 600 ohms se conectan en paralelo. Determine la resistencia total del circuito. Utilice la fórmula $\dfrac{1}{R_T} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$.

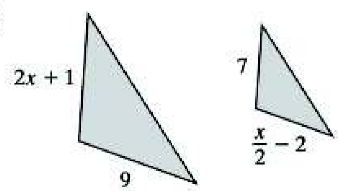
74. Longitud focal ¿Cuál es la longitud focal, f, de un espejo curvo, si la distancia respecto del objeto, p, es 6 centímetros y la distancia respecto de la imagen, q, es 3 centímetros? Utilice la fórmula $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{f}$.

Triángulos *En los ejercicios 75 y 76, cada par de triángulos son semejantes. Determine las longitudes de los lados desconocidos.*

75.



76.



[6.5] *En los ejercicios 77 a 82, responda la pregunta. Cuando sea necesario, redondee las respuestas al centésimo más cercano.*

77. Recolección de frijol Sanford y Jerome trabajan en una granja. Sanford puede recolectar una canasta de frijol en 40 minutos, mientras que Jerome puede hacer la misma tarea en 30 minutos. Si trabajan juntos, ¿en cuánto tiempo recolectarán una canasta de frijol?

78. Jardín Sam y Fran quieren plantar un jardín de flores. Juntos pueden hacerlo en 4.2 horas. Si Sam puede plantar solo el mismo jardín en 6 horas, ¿cuánto tiempo le tomará a Fran hacerlo sola?

79. Fracciones ¿Qué número sumado al numerador y restado al denominador de la fracción $\dfrac{1}{11}$ da por resultado $\dfrac{1}{2}$?

80. Fracciones Cuando el recíproco del doble de un número se resta de 1, el resultado es el recíproco del triple del número. Determine el número.

81. Recorrido en bote El bote de motor de Paul Webster puede viajar a 15 millas por hora en aguas tranquilas. Viajando con la corriente de un río, el bote puede viajar 20 millas en el mismo tiempo que necesita para recorrer 10 millas en contra de la corriente. Determine la velocidad de la corriente.

82. Vuelo en un aeroplano Un pequeño aeroplano y un automóvil inician su recorrido hacia la misma ciudad, que está a 450 millas de distancia, desde la misma posición y al mismo tiempo. La velocidad del aeroplano es el triple de la velocidad del automóvil, así que llega a la ciudad 6 horas antes que el automóvil. Determine la velocidad del automóvil y del aeroplano.

[6.6] *Determine cada cantidad solicitada.*

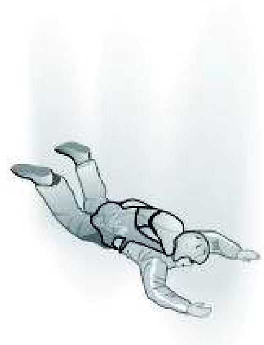
83. x es directamente proporcional al cuadrado de y. Si $x = 45$ cuando $y = 3$, determine x cuando $y = 2$.

84. W es directamente proporcional al cuadrado de L e inversamente proporcional a A. Si $W = 4$ cuando $L = 2$ y $A = 10$, determine W cuando $L = 5$ y $A = 20$.

85. z es conjuntamente proporcional a x y y e inversamente proporcional al cuadrado de r. Si $z = 12$ cuando $x = 20$, $y = 8$, y $r = 8$, determine z cuando $x = 10$, $y = 80$ y $r = 3$.

86. Cargo extra En sus facturas de electricidad, una compañía de energía eléctrica coloca un espacio para el cargo extra, s; dicho cargo es directamente proporcional a la cantidad de energía usada, e. Si el cargo extra es de \$7.20 cuando se usan 3600 kilowatt-hora, ¿cuál es el cargo extra cuando se usan 4200?

87. Caída libre La distancia, d, que recorre un objeto durante una caída libre es directamente proporcional al cuadrado del tiempo, t. Si una persona cae 16 pies en 1 segundo, ¿qué distancia caerá en 10 segundos? No tome en cuenta la resistencia del viento.



88. Área El área, A, de un círculo varía directamente con el cuadrado de su radio, r. Si el área es 78.5 cuando el radio es 5, determine el área cuando el radio es 8.

89. Fusión de un cubo de hielo El tiempo, t, para que un cubo de hielo se derrita es inversamente proporcional a la temperatura del agua en que se le sumerge. Si un cubo de hielo tarda 1.7 minutos en derretirse en agua con una temperatura de 70°F, ¿cuánto tardará en derretirse un cubo de hielo del mismo tamaño en agua a 50°F?

Examen de práctica del capítulo 6

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en donde se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el ***Chapter Test Prep Video CD.*** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. Determine los valores que deben excluirse en la expresión $\dfrac{x+4}{x^2+3x-28}$.

2. Determine el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x^2+7}{2x^2+7x-4}$.

Simplifique cada expresión.

3. $\dfrac{10x^7y^2 + 16x^2y + 22x^3y^3}{2x^2y}$

4. $\dfrac{x^2-4xy-12y^2}{x^2+3xy+2y^2}$

En los ejercicios 5 a 14, realice la operación indicada.

5. $\dfrac{3xy^4}{6x^2y^3} \cdot \dfrac{2x^2y^4}{x^5y^7}$

6. $\dfrac{x+1}{x^2-7x-8} \cdot \dfrac{x^2-x-56}{x^2+9x+14}$

7. $\dfrac{7a+14b}{a^2-4b^2} \div \dfrac{a^3+a^2b}{a^2-2ab}$

8. $\dfrac{x^3+y^3}{x+y} \div \dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2}$

9. $\dfrac{5}{x+1} + \dfrac{2}{x^2}$

10. $\dfrac{x-1}{x^2-9} - \dfrac{x}{x^2-2x-3}$

11. $\dfrac{m}{12m^2+4mn-5n^2} + \dfrac{2m}{12m^2+28mn+15n^2}$

12. $\dfrac{x+1}{4x^2-4x+1} + \dfrac{3}{2x^2+5x-3}$

13. $\dfrac{x^3-8}{x^2+5x-14} \div \dfrac{x^2+2x+4}{x^2+10x+21}$

14. Si $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$ y $g(x) = \dfrac{x}{2x+3}$, determine

a) $(f+g)(x)$.

b) el dominio de $(f+g)(x)$.

15. Área Si el área de un rectángulo es $\dfrac{x^2+11x+30}{x+2}$ y su longitud es $\dfrac{x^2+9x+18}{x+3}$, determine su ancho.

Para los ejercicios del 16 al 18, simplifique.

16. $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}}$

17. $\dfrac{\dfrac{a^2-b^2}{ab}}{\dfrac{a+b}{b^2}}$

18. $\dfrac{\dfrac{7}{x} - \dfrac{6}{x^2}}{4 - \dfrac{1}{x}}$

Resuelva cada ecuación.

19. $\dfrac{x}{5} - \dfrac{x}{4} = -1$

20. $\dfrac{x}{x - 8} + \dfrac{6}{x - 2} = \dfrac{x^2}{x^2 - 10x + 16}$

21. Despeje C de $A = \dfrac{2b}{C - d}$.

22. **Consumo de energía** El consumo de energía, en watts, de un aparato, W, varía conjuntamente respecto del cuadrado de la corriente, I, y la resistencia, R. Si el consumo es de 10 watts cuando la corriente es de 1 ampere y la resistencia es de 1000 ohms, determine el consumo de energía cuando la corriente es de 0.5 amperes y la resistencia es de 300 ohms.

23. R varía directamente con P e inversamente con el cuadrado de T. Si $R = 30$ cuando $P = 40$ y $T = 2$, determine R cuando $P = 50$ y $T = 5$.

24. **Lavado de ventanas** Paul Weston puede lavar las ventanas de una casa en 10 horas. Su amiga, Nancy Delaney, puede hacer el mismo trabajo en 7 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán si lavan juntos las ventanas de la casa?

25. **Paseo en patines** Cameron Barnette y Ashley Elliot, comienzan su recorrido en patines por un camino al mismo tiempo. Cameron promedia 8 millas por hora, mientras que Ashley promedia 5 millas por hora. Si Mónica necesita $\frac{1}{2}$ hora más que Cameron para llegar al final del camino, ¿cuál es la longitud del camino?

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo en donde se estudia el material está indicado después de la respuesta.

1. Ilustre el conjunto $\left\{x \middle| -\frac{5}{3} < x \le \frac{19}{4}\right\}$ en la recta numérica.

2. Evalúe $-3x^3 - 2x^2y + \frac{1}{2}xy^2$ cuando $x = 2$ y $y = \frac{1}{2}$.

3. Resuelva la ecuación $2(x + 1) = \frac{1}{2}(x - 5)$

4. **Aprendizaje a distancia** Internet ha hecho posible la educación a distancia. El siguiente diagrama muestra los tipos de cursos que más se ofrecen en línea en 2003.

Fuente: Foro CEO e Investigación de datos de mercado.

a) ¿Qué porcentaje corresponde a la categoría “Otros”?

b) Si se ofrecieron aproximadamente 220,000 cursos a través de programas en línea, ¿cuántos correspondieron a la categoría “Negocios”?

5. Evalúe $4x^2 - 3y - 8$ cuando $x = 4$ y $y = -2$.

6. Simplifique $\left(\dfrac{6x^5y^6}{12x^4y^7}\right)^3$.

7. Despeje m de $F = \dfrac{mv^2}{r}$.

8. **Interés simple** Carmalla Banjanie invirtió \$3000 en un certificado de depósito por 1 año. Cuando redimió el certificado, recibió \$3180; ¿cuál fue la tasa de interés simple?

9. **Reunión para un día de campo** Dawn y Paula hicieron una cita para pasar un día de campo en un punto intermedio respecto de sus casas, para lo cual salieron, cada uno por su lado, a las 8 a.m. Si Dawn viaja a 60 millas por hora y Paula a 50 millas por hora, y viven a 330 millas de distancia uno del otro, ¿en cuánto tiempo se encontrarán?

10. Resuelva $\left|\dfrac{3x + 5}{3}\right| - 3 = 6$.

11. Grafique $y = x^2 - 2$.

12. Sea $f(x) = \sqrt{2x + 7}$. Evalúe $f(9)$.

13. Determine la pendiente de la recta que pasa por $(2, -4)$ y $(-5, -3)$.

14. Determine una ecuación de la recta que pasa por $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y que es paralela a la recta que resulta al graficar $2x + 3y - 9 = 0$. Escriba la ecuación en la forma general.

15. Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 10x - y &= 2 \\ 4x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

16. Multiplique $(3x^2 - 5y)(3x^2 + 5y)$.

17. Factorice $3x^2 - 30x + 75$.

18. Grafique $y = |x| + 2$.

19. Sume $\dfrac{7}{3x^2 + x - 4} + \dfrac{9x + 2}{3x^2 - 2x - 8}$.

20. Resuelva $\dfrac{3y - 2}{y + 1} = 4 - \dfrac{y + 2}{y - 1}$.