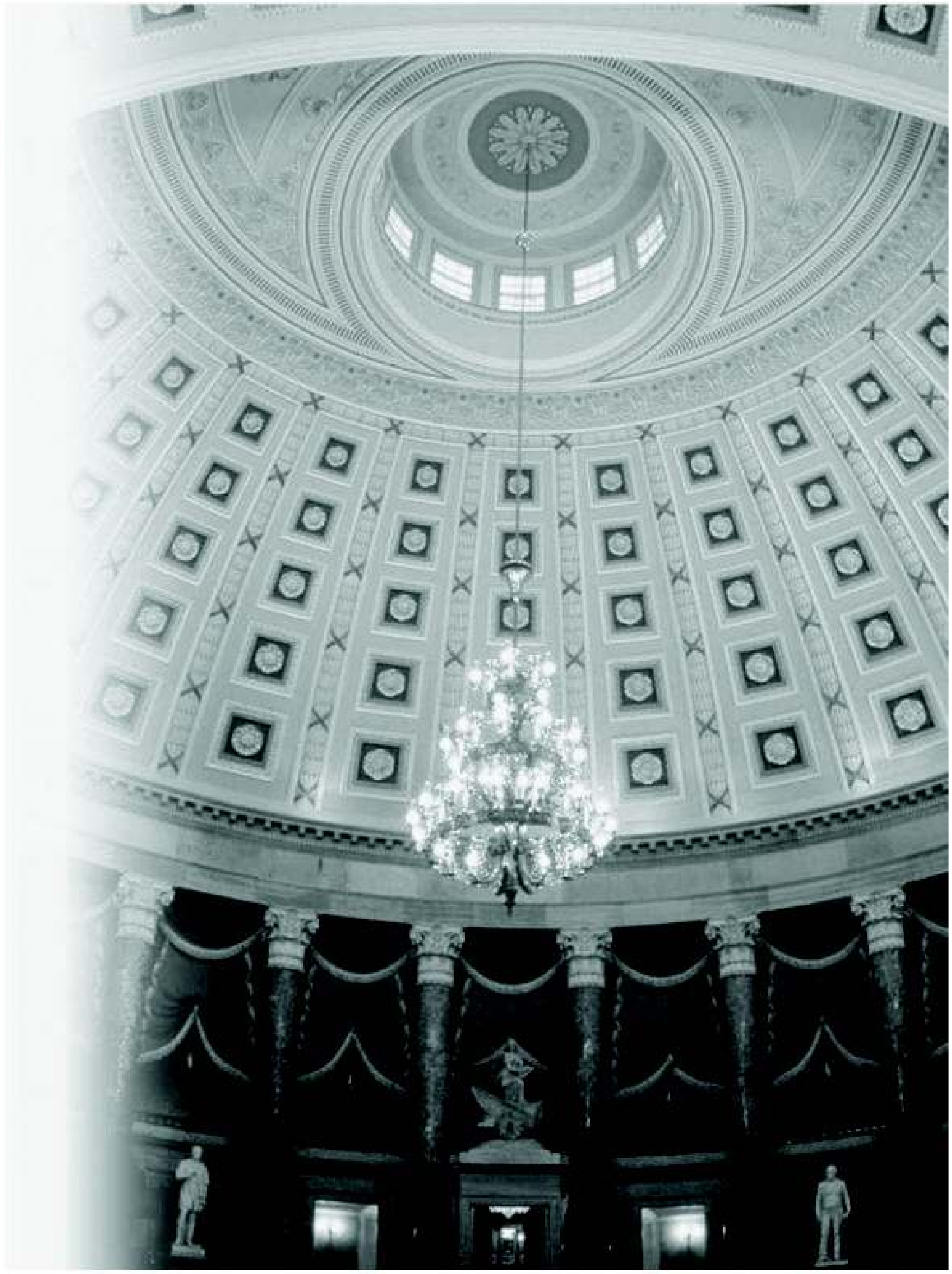
10 Secciones cónicas



OBJETIVOS DE ESTE CAPÍTULO

El objetivo en este capítulo es graficar las secciones cónicas. Éstas incluyen la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. Ya hemos analizado las parábolas. En este capítulo aprenderemos más sobre ellas. También resolveremos sistemas de ecuaciones no lineales, tanto de forma algebraica como gráfica.

LA FORMA DE UNA ELIPSE le da una característica especial. Cualquier objeto que se lance desde un punto focal hacia una pared con forma elíptica rebotará hacia el otro punto focal. Esta característica se ha utilizado en arquitectura y en medicina, entre otras disciplinas. Un ejemplo es el Salón Nacional de las Estatuas en el Edificio del Capitolio, que tiene una cúpula, o domo, de forma elíptica. Si habla suavemente en uno de los puntos focales, sus murmullos pueden escucharse en el otro punto focal. Del mismo modo, una bola que se golpea en un foco en una mesa de billar de forma elíptica, rebotará hacia el otro punto focal. En el ejercicio 56 de la página 674 determinará la ubicación de los focos de una mesa de billar elíptica.

10.1 La parábola y la circunferencia

1. Identificar y describir las secciones cónicas.
2. Repasar parábolas.
3. Graficar parábolas de la forma $x = a(y - k)^2 + h$.
4. Aprender las fórmulas de la distancia y del punto medio.
5. Graficar circunferencias con centros en el origen.
6. Graficar circunferencias con centros en (h, k).

1 Identificar y describir las secciones cónicas

En los capítulos anteriores analizamos las parábolas y vimos que una **parábola** es un tipo de sección cónica; en este apartado estudiaremos más acerca de las parábolas. Otras secciones cónicas son las circunferencias, las elipses y las hipérbolas. Cada una de estas formas es una sección cónica, ya que se puede construir rebanando un cono y observando la forma de la rebanada. La **figura 10.1** ilustra los métodos para rebanar el cono y obtener cada sección cónica.

FIGURA 10.1 Parábola Circunferencia Elipse Hipérbola

2 Repasar parábolas

En la sección 8.5 analizamos las parábolas. El ejemplo 1 servirá para que recuerde cómo graficar parábolas de la forma $y = ax^2 + bx + c$ y $y = a(x - h)^2 + k$.

EJEMPLO 1 ▸ Considere $y = 2x^2 + 4x - 6$.

a) Escriba la ecuación en la forma $y = a(x - h)^2 + k$.
b) Determine si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
c) Determine el vértice de la parábola.
d) Determine la intercepción con el eje y de la parábola.
e) Determine las intercepciones con el eje x de la parábola.
f) Grafique la parábola.

Solución

a) Primero, factorice el 2 en los dos términos que tienen la variable, para que el coeficiente del término cuadrático sea 1. (No factorice el 2 de la constante, -6). Luego complete el cuadrado.

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x^2 + 2x) - 6 \\ &= 2(x^2 + 2x + 1) - 2 - 6 \qquad \text{Completar el cuadrado.} \\ &= 2(x + 1)^2 - 8 \end{aligned}$$

b) La parábola abre hacia arriba, ya que $a = 2$, que es mayor a 0.

c) El vértice de la gráfica de una ecuación de la forma $y = a(x - h)^2 + k$ es (h, k). Por lo tanto, el vértice de la gráfica de $y = 2(x + 1)^2 - 8$ es $(-1, -8)$. El vértice de una parábola también puede determinarse por medio de

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \quad \text{o} \quad \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Ahora, muestre que estos dos procedimientos dan $(-1, -8)$ como el vértice de la parábola.

d) Para determinar la intercepción con el eje y, haga $x = 0$ y despeje y.

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)^2 - 8 \\ &= 2(0+1)^2 - 8 \\ &= -6 \end{aligned}$$

La intercepción con el eje y es $(0, -6)$.

e) Para determinar las intersecciones con el eje x, haga $y = 0$ y despeje x.

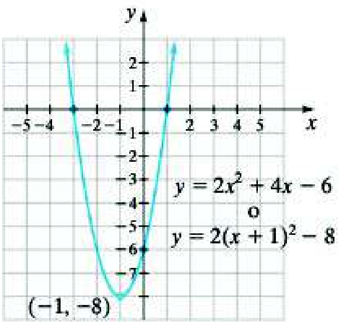


FIGURA 10.2

$$\begin{aligned} y &= 2(x+1)^2 - 8 \\ 0 &= 2(x+1)^2 - 8 && \text{Sustituir 0 por } y. \\ 8 &= 2(x+1)^2 && \text{Sumar 8 a ambos lados.} \\ 4 &= (x+1)^2 && \text{Dividir ambos lados entre 2.} \\ \pm 2 &= x + 1 && \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ -1 \pm 2 &= x && \text{Restar 1 de ambos lados.} \end{aligned}$$

$$x = -1 - 2 \quad \text{o} \quad x = -1 + 2$$
$$x = -3 \qquad\qquad x = 1$$

Las intercepciones con el eje x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$. Estas intercepciones podrían determinarse sustituyendo 0 por y en $y = 2x^2 + 4x - 6$ y resolviendo la ecuación por factorización o mediante la fórmula cuadrática. Haga esto y vea que obtiene las mismas intercepciones con el eje x.

f) Utilizamos el vértice y las intercepciones con el eje x y con el eje y para trazar la gráfica que se muestra en la **figura 10.2**.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 19

3 Graficar parábolas de la forma $x = a(y - k)^2 + h$

Las parábolas también pueden abrirse a la derecha o a la izquierda. La gráfica de una ecuación de la forma $x = a(y - k)^2 + h$ será una parábola cuyo vértice está en el punto (h, k). Si a es un número positivo, la parábola abrirá hacia la derecha y si a es un número negativo, la parábola abrirá hacia la izquierda. La **figura 10.3** muestra las cuatro formas diferentes de una parábola.

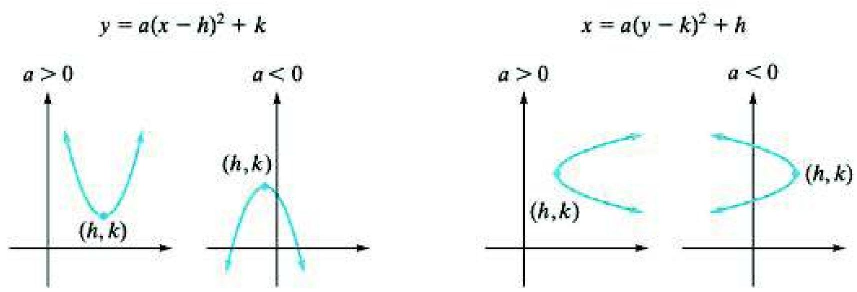


FIGURA 10.3

Parábola con vértice en (h, k)

1. $y = a(x - h)^2 + k$, $a > 0$ (abre hacia arriba)
2. $y = a(x - h)^2 + k$, $a < 0$ (abre hacia abajo)
3. $x = a(y - k)^2 + h$, $a > 0$ (abre hacia la derecha)
4. $x = a(y - k)^2 + h$, $a < 0$ (abre hacia la izquierda)

Observe que las ecuaciones de la forma $y = a(x - h)^2 + k$ son funciones, ya que sus gráficas cumplen el criterio de la recta vertical. Sin embargo, las ecuaciones de la forma $x = a(y - k)^2 + h$ no son funciones, ya que sus gráficas no cumplen el criterio de la recta vertical.

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $x = -2(y + 4)^2 - 1$.

Solución La gráfica abre hacia la izquierda, ya que la ecuación es de la forma $x = a(y - k)^2 + h$ y $a = -2$, que es menor que 0. La ecuación puede expresarse como $x = -2[y - (-4)]^2 - 1$. Así, $h = -1$ y $k = -4$. El vértice de la gráfica es $(-1, -4)$. Vea la **figura 10.4**. Si hacemos $y = 0$, vemos que la intersección con el eje x está en $-2(0 + 4)^2 - 1 = -2(16) - 1$ o -33. Al sustituir los valores de y puede determinar los valores correspondientes de x, cuando $y = -2$, $x = -9$ y cuando $y = -6$, $x = -9$. Estos puntos están marcados en la gráfica. Observe que esta gráfica no interseca al eje y.

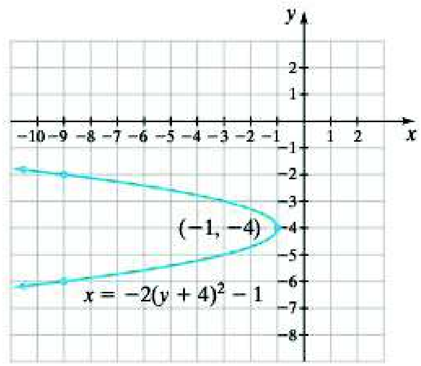


FIGURA 10.4

Ahora resuelva el ejercicio 31

EJEMPLO 3

a) Escriba la ecuación $x = 2y^2 + 12y + 13$ en la forma $x = a(y - k)^2 + h$.

b) Grafique $x = 2y^2 + 12y + 13$.

Solución

a) Primero factorice 2 de los dos primeros términos. Luego complete el cuadrado de la expresión que está dentro de los paréntesis.

$$\begin{aligned} x &= 2y^2 + 12y + 13 \\ &= 2(y^2 + 6y) + 13 \\ &= 2(y^2 + 6y + 9) + (2)(-9) + 13 \\ &= 2(y^2 + 6y + 9) - 18 + 13 \\ &= 2(y + 3)^2 - 5 \end{aligned}$$

b) Como $a > 0$, la parábola abre hacia la derecha; observe que cuando $y = 0$, $x = 2(0)^2 + 12(0) + 13 = 13$. Por lo tanto, la intersección de x es $(13, 0)$. El vértice de la parábola es $(-5, -3)$. Cuando $y = -6$, tenemos que $x = 13$. Así, otro punto en la gráfica es $(13, -6)$, y mediante la fórmula cuadrática podemos determinar que las intersecciones con el eje y son alrededor de $(0, -4.6)$ y $(0, -1.4)$. En la **figura 10.5** se muestra la gráfica.

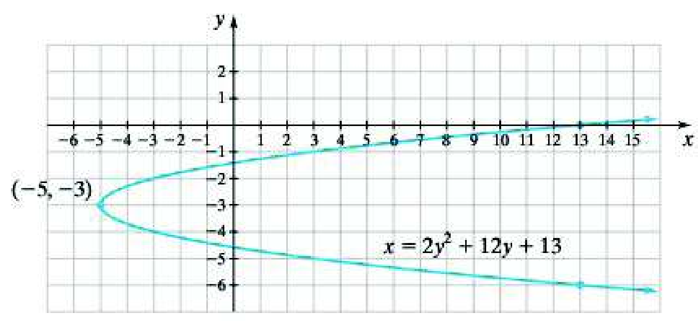


FIGURA 10.5

Ahora resuelva el ejercicio 45

4 Aprender las fórmulas de la distancia y del punto medio

Ahora deduciremos una fórmula para determinar la **distancia** entre dos puntos de una recta. Dentro de poco utilizaremos esta fórmula para desarrollar la fórmula para la **circunferencia**. Considere la **figura 10.6.**

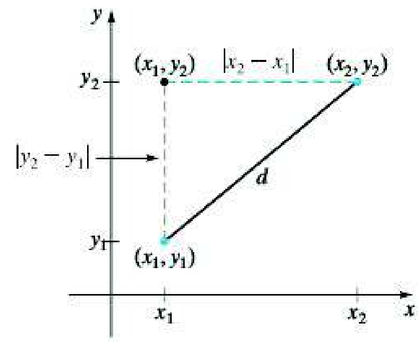


FIGURA 10.6

La distancia horizontal entre los dos puntos (x_1, y_2) y (x_2, y_2), indicada por la línea discontinua horizontal en color rojo, es $|x_2 - x_1|$. Utilizamos el valor absoluto ya que la distancia debe ser positiva. Si x_1 fuese mayor que x_2, entonces $x_2 - x_1$ sería negativo. La distancia vertical entre los puntos (x_1, y_1) y (x_1, y_2), indicada por medio de la línea discontinua vertical en color gris, es $|y_2 - y_1|$. Usando el teorema de Pitágoras, donde d es la distancia entre los dos puntos, obtenemos

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

Como cualquier número distinto de cero elevado al cuadrado es positivo, no necesitamos los signos de valor absoluto. Por lo tanto, podemos escribir

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Por medio de la propiedad de la raíz cuadrada, con la raíz cuadrada principal, obtenemos la distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), que es $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Fórmula de la distancia

La distancia, d, entre cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puede determinarse mediante la fórmula de la distancia

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La distancia entre cualesquiera dos puntos siempre será un número positivo. ¿Puede explicar por qué? Cuando determinamos la distancia, es indistinto cuál punto designemos como punto 1, (x_1, y_1) o como punto 2, (x_2, y_2). Observe que al elevar al cuadrado cualquier número real, el resultado siempre será mayor o igual a 0. Por ejemplo, $(5 - 2)^2 = (2 - 5)^2 = 9$.

EJEMPLO 4 ▸ Determine la distancia entre los puntos (4, 5) y (−2, 3).

Solución Como ayuda, trazamos los puntos (vea la **figura 10.7**). Marque (4, 5) como punto 1 y (−2, 3) como punto 2. Así, (x_2, y_2) representa a (−2, 3) y (x_1, y_1) representa a (4, 5). Ahora usemos la fórmula de la distancia para determinar la distancia, d.

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 4)^2 + (3 - 5)^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{36 + 4} \\ &= \sqrt{40} \quad \text{o} \quad \approx 6.32 \end{aligned}$$

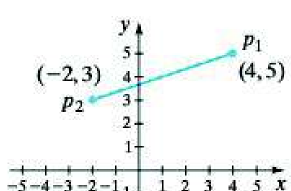


FIGURA 10.7

Por lo tanto, la distancia entre los puntos (4, 5) y (−2, 3) es $\sqrt{40}$ o alrededor de 6.32 unidades.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 57

Cómo evitar errores comunes

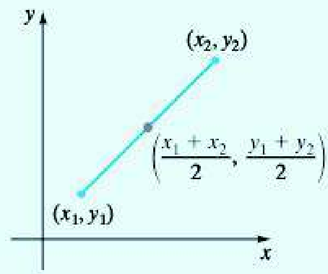
Los estudiantes algunas veces inician bien la determinación de la distancia mediante la fórmula de la distancia, pero olvidan tomar la raíz cuadrada de la suma $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ para obtener la respuesta correcta. Cuando se obtiene la raíz cuadrada, recuerde que $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$.

Con frecuencia es necesario encontrar el **punto medio** de un segmento de recta determinado por dos puntos dados. Para hacerlo utilizamos la fórmula del punto medio.

Fórmula del punto medio

Dados cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el punto que se encuentra a la mitad de los puntos dados puede determinarse mediante la fórmula del punto medio:

$$\text{punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Para determinar el punto medio, tomamos el promedio (media) de las coordenadas x y de las coordenadas y.

EJEMPLO 5 Un segmento de recta que pasa por el centro de una circunferencia la interseca en los puntos $(-3, 6)$ y $(4, 1)$. Determine el centro de la circunferencia.

Solución Para determinar el centro de la circunferencia, determinamos el punto medio del segmento de recta entre $(-3, 6)$ a $(4, 1)$. No importa qué punto se marque como (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Hacemos que $(-3, 6)$ sea (x_1, y_1) y que $(4, 1)$ sea (x_2, y_2). Vea la **figura 10.8**.

$$\text{punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{-3 + 4}{2}, \frac{6 + 1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

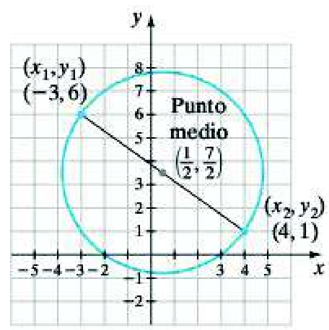


FIGURA 10.8

El punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ está a la mitad del segmento determinado por los puntos $(-3, 6)$ y $(4, 1)$. También es el centro de la circunferencia.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 69

5 Graficar circunferencias con centros en el origen

Una **circunferencia**, puede definirse como el conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado su **centro**.

La fórmula para la *forma general* de la ecuación de una circunferencia cuyo centro está en el origen puede deducirse utilizando la fórmula de la distancia. Sea (x, y) un punto de una circunferencia de radio r con centro en $(0, 0)$, vea la **figura 10.9**. Mediante la fórmula de la distancia, tenemos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{Fórmula de la distancia.}$$

$$\text{o} \quad r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \quad \text{Sustituir } r \text{ por } d, (x, y) \text{ por } (x_2, y_2) \text{ y } (0, 0) \text{ por } (x_1, y_1).$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{Simplificar el radicando.}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

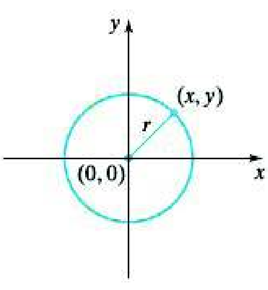


FIGURA 10.9

Circunferencia con centro en el origen y radio r

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 16$ es una circunferencia con centro en el origen y radio 4, y $x^2 + y^2 = 10$ es una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{10}$. Observe que $4^2 = 16$ y que $(\sqrt{10})^2 = 10$.

EJEMPLO 6 ▶ Grafique las ecuaciones siguientes.

a) $x^2 + y^2 = 64$ **b)** $y = \sqrt{64 - x^2}$ **c)** $y = -\sqrt{64 - x^2}$

Solución

a) Si reescribimos la ecuación como

$$x^2 + y^2 = 8^2$$

vemos que el radio de la circunferencia es 8. La **figura 10.10** ilustra la gráfica.

b) Si despejamos y en la ecuación $x^2 + y^2 = 64$, obtenemos

$$y^2 = 64 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{64 - x^2}$$

En la ecuación $y = \pm\sqrt{64 - x^2}$, la ecuación $y = +\sqrt{64 - x^2}$ o simplemente $y = \sqrt{64 - x^2}$, representa la mitad superior de la circunferencia, mientras que la ecuación $y = -\sqrt{64 - x^2}$ representa la semicircunferencia inferior. Por lo tanto, la gráfica de $y = \sqrt{64 - x^2}$, donde y representa la raíz cuadrada principal, se encuentra en y sobre el eje x. Para cualquier valor de x del dominio de la función, el valor de y debe ser mayor o igual que 0. ¿Por qué? La gráfica es la semicircunferencia de la **figura 10.11**.

c) La gráfica de $y = -\sqrt{64 - x^2}$ también es una semicircunferencia. Sin embargo, esta gráfica se encuentra en y bajo el eje x. Para cualquier valor de x del dominio de la función, el valor de y debe ser menor o igual que 0. ¿Por que? La **figura 10.12** muestra la gráfica.

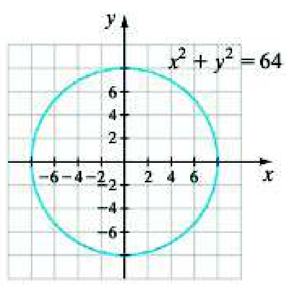


FIGURA 10.10

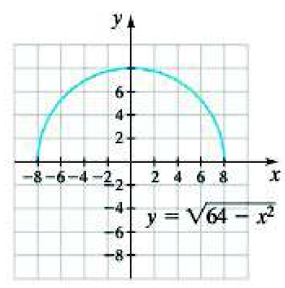


FIGURA 10.11

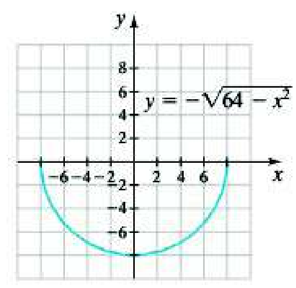


FIGURA 10.12

▶ Ahora resuelva el ejercicio 101

Considere las ecuaciones $y = \sqrt{64 - x^2}$ y $y = -\sqrt{64 - x^2}$ del ejemplo **6 b)** y **6 c)**. Si eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación y reordena los términos, obtendrá $x^2 + y^2 = 64$. Inténtelo y vea que así es.

CÓMO USAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Al utilizar su calculadora para obtener una gráfica, usted inserta la función que desea graficar a la derecha de $y =$. Las circunferencias no son funciones, ya que no cumplen el criterio de la recta vertical. Para graficar la ecuación $x^2 + y^2 = 64$, que sabemos es una circunferencia con radio 8, despejamos y en la ecuación para obtener $y = \pm\sqrt{64 - x^2}$. Después graficamos las dos funciones $Y_1 = \sqrt{64 - x^2}$ y $Y_2 = -\sqrt{64 - x^2}$ en los mismos ejes para obtener la circunferencia. La **figura 10.13** ilustra estas gráficas. Por la distorsión (descrita en el recuadro Cómo usar su calculadora graficadora de la sección 9.1), la gráfica no parece ser una circunferencia. Si utiliza la característica SQUARE de su calculadora para hacer que las unidades en ambos ejes tengan la misma longitud, la figura aparece como una circunferencia (vea la **figura 10.14**).

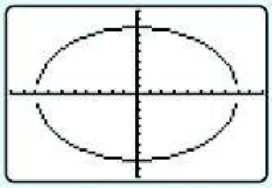

$-10, 10, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 10.13

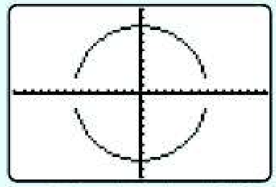

$\approx -15.2, \approx 15.2, 1, -10, 10, 1$

FIGURA 10.14

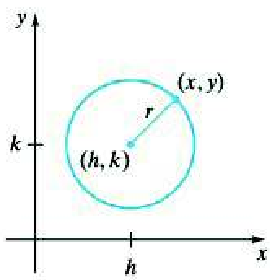


FIGURA 10.15

6 Graficar circunferencias con centros en (h, k)

La forma general de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r puede deducirse mediante la fórmula de la distancia. Sea (h, k) el centro de la circunferencia y sea (x, y) cualquier punto de la circunferencia (vea la **figura 10.15**). Si el radio r representa la distancia entre los puntos (x, y), en la circunferencia y el centro de la circunferencia (h, k), entonces la fórmula de la distancia implica

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación para obtener la forma general de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r.

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Circunferencia con centro en (h, k) y radio r

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

EJEMPLO 7 Determine la ecuación de la circunferencia que se muestra en la **figura 10.16**.

Solución El centro es $(-3, 2)$ y el radio es 3.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$[x - (-3)]^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$
$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

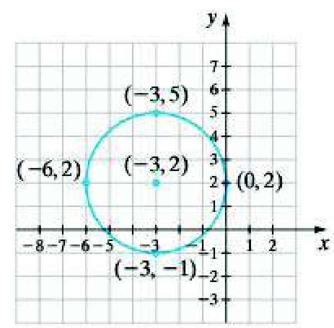


FIGURA 10.16

Ahora resuelva el ejercicio 87

EJEMPLO 8

a) Muestre que la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$ es una circunferencia.
b) Determine el centro y el radio de la circunferencia y luego trácela.
c) Determine el área de la circunferencia.

Solución

a) Escribiremos esta ecuación en la forma general, mediante el proceso de completar cuadrados. Primero reescribimos la ecuación, colocando juntos todos los términos con variables semejantes.

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y - 6 = 0$$

Luego, pase la constante al lado derecho de la ecuación.

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y = 6$$

Ahora completamos dos cuadrados, uno para cada variable. Primero lo hacemos para la variable x.

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y = 6 + 9$$

Y luego para la variable y.

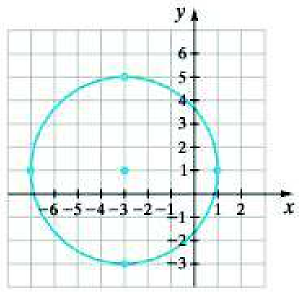
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 6 + 9 + 1$$

o

$$\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{(x+3)^2} + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{(y-1)^2} = 16$$

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$$



$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

FIGURA 10.17

b) El centro de la circunferencia está en $(-3, 1)$ y el radio es 4. La circunferencia está bosquejada en la **figura 10.17**.

c) El área es

$$A = \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi \approx 50.3 \text{ unidades cuadradas.}$$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 111

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.1

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. Liste el nombre de cada una de las cuatro secciones cónicas. Trace una figura que muestre cómo se forma cada una.

2. Explique cómo determinar la dirección hacia donde abre una parábola, examinando la ecuación.

3. ¿Son funciones las parábolas de la forma $y = a(x - h)^2 + k$, $a > 0$? Explique. ¿Cuál es el dominio y el rango de $y = a(x - h)^2 + k, a > 0$?

4. ¿Son funciones las parábolas de la forma $x = a(y - k)^2 + h$, $a > 0$? Explique. ¿Cuál es el dominio y el rango de $x = a(y - k)^2 + h, a > 0$?

5. Compare las gráficas de $y = 2(x - 3)^2 + 4$ y $y = -2(x - 3)^2 + 4$.

6. Dé la fórmula de la distancia.

7. Cuando se determina la distancia entre dos puntos diferentes mediante la fórmula de la distancia, ¿por qué la distancia siempre debe ser un número positivo?

8. Proporcione la fórmula del punto medio.

9. ¿Cuál es la definición de circunferencia?

10. ¿Cuál es la ecuación de una circunferencia con centro (h, k)?

11. La ecuación $x^2 - y^2 = 9$, ¿es la ecuación de una circunferencia? Explique.

12. La ecuación $-x^2 + y^2 = 25$, ¿es la ecuación de una circunferencia? Explique.

13. La ecuación $2x^2 + 3y^2 = 6$, ¿es la ecuación de una circunferencia? Explique.

14. La ecuación $x = y^2 - 6y + 3$, ¿es la ecuación de una parábola? Explique.

15. La ecuación $x^2 = y^2 - 6y + 3$, ¿es la ecuación de una parábola? Explique.

16. La ecuación $x = y + 2$, ¿es la ecuación de una parábola? Explique.

Práctica de habilidades

Grafique cada ecuación.

17. $y = (x - 2)^2 + 3$

18. $y = (x - 2)^2 - 3$

19. $y = (x + 3)^2 + 2$

20. $y = (x + 3)^2 - 2$

21. $y = (x - 2)^2 - 1$

22. $y = (x + 2)^2 + 1$

23. $y = -(x - 1)^2 + 1$

24. $y = -(x + 4)^2 - 5$

25. $y = -(x + 3)^2 + 4$

26. $y = 2(x + 1)^2 - 3$

27. $y = -3(x - 5)^2 + 3$

28. $x = (y - 1)^2 + 1$

29. $x = (y - 4)^2 - 3$

30. $x = -(y - 2)^2 + 1$

31. $x = -(y - 5)^2 + 4$

32. $x = -2(y - 4)^2 + 4$

33. $x = -5(y + 3)^2 - 6$

34. $x = 3(y + 1)^2 + 5$

35. $y = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 6$

36. $y = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

En los ejercicios 37 a 50, **a)** *escriba la ecuación en la forma* $y = a(x - h)^2 + k$*, o en la forma* $x = a(y - k)^2 + h$. **b)** *Grafique la ecuación.*

37. $y = x^2 + 2x$

38. $y = x^2 - 2x$

39. $y = x^2 + 6x$

40. $y = x^2 - 4x$

41. $x = y^2 + 4y$

42. $x = y^2 - 6y$

43. $y = x^2 + 7x + 10$

44. $y = x^2 + 2x - 7$

45. $x = -y^2 + 6y - 9$

46. $x = -y^2 - 5y - 4$

47. $y = -x^2 + 4x - 4$

48. $y = 2x^2 - 4x - 4$

49. $x = -y^2 + 3y - 4$

50. $x = 3y^2 - 12y - 36$

Determine la distancia entre cada pareja de puntos. Cuando sea apropiado, utilice una calculadora y redondee sus respuestas al centésimo más cercano.

51. $(5, -1)$ y $(5, -6)$

52. $(-7, 2)$ y $(-3, 2)$

53. $(-1, 6)$ y $(8, 6)$

54. $(1, 8)$ y $(4, 12)$

55. $(-1, -3)$ y $(4, 9)$

56. $(-4, -5)$ y $(2, 3)$

57. $(-4, -5)$ y $(5, -2)$

58. $(6, 7)$ y $(11, 0)$

59. $(3, -1)$ y $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$

60. $\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, 6\right)$

61. $(-1.6, 3.5)$ y $(-4.3, -1.7)$

62. $(5.2, -3.6)$ y $(-1.6, 2.3)$

63. $(\sqrt{7}, \sqrt{3})$ y $(0, 0)$

64. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{5})$ y $(0, 0)$

Determine el punto medio del segmento de recta que está entre cada par de puntos.

65. $(1, 3)$ y $(5, 9)$

66. $(0, 8)$ y $(4, -6)$

67. $(-7, 2)$ y $(7, -2)$

68. $(4, 7)$ y $(1, -3)$

69. $(-1, 4)$ y $(4, 6)$

70. $(-2, -9)$ y $(-6, -3)$

71. $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ y $(2, -4)$

72. $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ y $\left(2, \frac{9}{2}\right)$

73. $(\sqrt{3}, 2)$ y $(\sqrt{2}, 7)$

74. $(-\sqrt{7}, 8)$ y $(\sqrt{5}, \sqrt{3})$

Escriba la ecuación de cada circunferencia con el centro y radio dados.

75. Centro $(0, 0)$, radio 4.

76. Centro $(0, 0)$, radio 7.

77. Centro $(2, 0)$, radio 5.

78. Centro $(-3, 0)$, radio 9.

79. Centro $(0, 5)$, radio 1.

80. Centro $(0, -6)$, radio 6.

81. Centro $(3, 4)$, radio 8.

82. Centro $(-5, 2)$, radio 2.

83. Centro $(7, -6)$, radio 10.

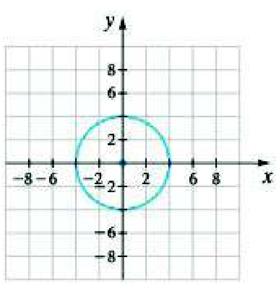
84. Centro $(-6, -1)$, radio 7.

85. Centro $(1, 2)$, radio $\sqrt{5}$

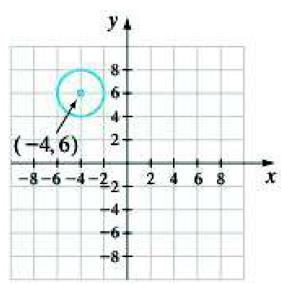
86. Centro $(-7, -2)$, radio $\sqrt{13}$

Escriba la ecuación de cada circunferencia. Suponga que el radio es un número entero positivo.

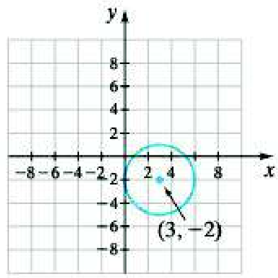
87.



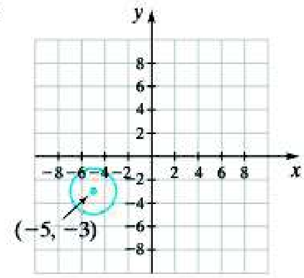
88.



89.



90.



Grafique cada ecuación.

91. $x^2 + y^2 = 16$

92. $x^2 + y^2 = 5$

93. $x^2 + y^2 = 10$

94. $(x - 1)^2 + y^2 = 7$

95. $(x + 4)^2 + y^2 = 25$

96. $x^2 + (y + 1)^2 = 9$

97. $x^2 + (y - 3)^2 = 4$

98. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

99. $(x + 8)^2 + (y + 2)^2 = 9$

100. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$

101. $y = \sqrt{25 - x^2}$

102. $y = \sqrt{16 - x^2}$

103. $y = -\sqrt{4 - x^2}$

104. $y = -\sqrt{49 - x^2}$

En los ejercicios 105 a 112, **a)** *utilice el método de completar el cuadrado para escribir cada ecuación en la forma general.* **b)** *Trace la gráfica.*

105. $x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0$

106. $x^2 + y^2 + 4y = 0$

107. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

108. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

109. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$

110. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

111. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 13 = 0$

112. $x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{3}{2} = 0$

Resolución de problemas

113. Determine el área de la circunferencia del ejercicio 95.

114. Determine el área de la circunferencia del ejercicio 97.

En los ejercicios 115 a 118, determine, si las hay, las intercepciones con los ejes x y y de la gráfica de cada ecuación.

115. $x = y^2 - 6y - 7$

116. $x = -y^2 + 8y - 12$

117. $x = 2(y - 3)^2 + 6$

118. $x = -(y + 2)^2 - 8$

119. Si conoce el punto medio de un segmento de recta, ¿es posible determinar la longitud del segmento de recta? Explique.

120. Si conoce uno de los extremos de un segmento de recta y la longitud del segmento, ¿es posible determinar el otro extremo? Explique.

121. Determine la longitud del segmento de recta cuyo punto medio es $(4, -6)$ y uno de sus extremos está en $(7, -2)$.

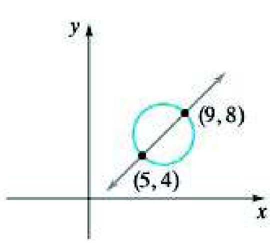
122. Determine la longitud del segmento de recta cuyo punto medio está en $(-2, 4)$ y uno de sus extremos está en $(3, 6)$.

123. Determine la ecuación de una circunferencia con centro en $(-6, 2)$ que es tangente al eje x (esto es, la circunferencia toca al eje x en un solo punto).

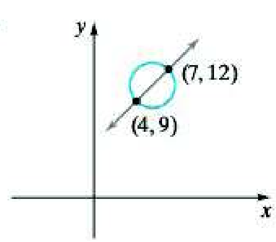
124. Determine la ecuación de una circunferencia con centro en $(-3, 5)$ que es tangente al eje y.

En los ejercicios 125 y 126, determine **a)** *el radio de la circunferencia cuyo diámetro está en la línea que se muestra,* **b)** *el centro de la circunferencia, y* **c)** *la ecuación de la circunferencia.*

125.

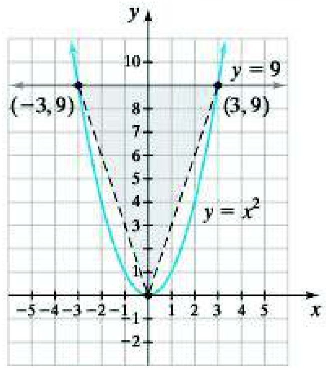


126.



127. Puntos de intersección ¿Cuál es el número máximo y cuál el número mínimo posible de puntos de intersección para las gráficas de $y = a(x - h_1)^2 + k_1$ y $x = a(y - k_2)^2 + h_2$? Explique.

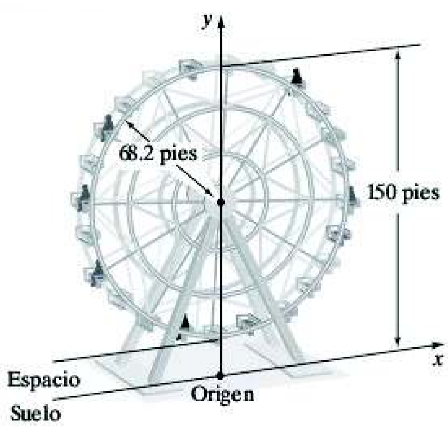
128. Triángulo inscrito Considere la figura siguiente.



a) Determine el área del triángulo sombreado.

b) Cuando se inscribe un triángulo dentro de una parábola, como en la figura, el área que encierra la parábola desde la base del triángulo es $\frac{4}{3}$ del área del triángulo. Determine el área que encierra la parábola desde $x = -3$ hasta $x = 3$.

129. Rueda de la fortuna La rueda de la fortuna en el muelle Navy en Chicago, tiene una altura de 150 pies. El radio de la rueda es 68.2 pies.

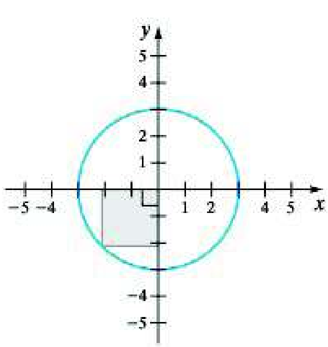


a) ¿Cuál es el espacio libre del suelo a la rueda?

b) ¿A qué distancia del suelo queda el centro de la rueda?

c) Determine la ecuación de la rueda. Suponga que el origen está en el suelo, directamente debajo del centro de la rueda.

130. Área sombreada Determine el área cuadrada sombreada en la figura. La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 9$.



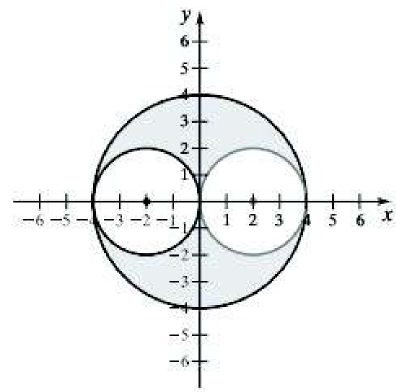
131. Área sombreada Considere la figura siguiente. Escriba una ecuación para:

a) la circunferencia mayor.

b) la circunferencia interna de la derecha.

c) la circunferencia interna de la izquierda.

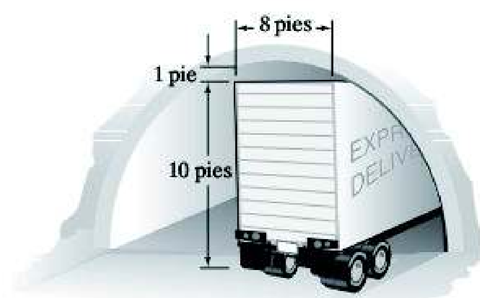
d) Determine el área sombreada.



132. Puntos de intersección Considere las ecuaciones $x^2 + y^2 = 16$ y $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Tomando en cuenta el centro y radio de cada circunferencia, determine el número de puntos de intersección de las dos circunferencias.

133. Circunferencias concéntricas Determine el área de las dos circunferencias concéntricas cuyas ecuaciones son $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$ y $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 64$. *Circunferencias concéntricas* son aquellas que tienen el mismo centro.

134. Túnel El departamento de autopistas planea construir un túnel semicircular que pase a través de una montaña. El túnel debe ser lo suficientemente grande para que un camión de 8 pies de ancho y 10 pies de alto pase por el centro del túnel con 1 pie de espacio entre las esquina superiores del camión y el túnel (como se muestra en la figura siguiente). Determine el radio mínimo que debe tener el túnel.



Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan la pregunta 135.

135. Ecuación de una parábola La ecuación de una parábola se puede determinar si se conocen tres puntos de ella. Para hacerlo, inicien con $y = ax^2 + bx + c$. Luego sustituyan las coordenadas x y y del primer punto en la ecuación. Esto dará como resultado una ecuación en a, b y c. Repitan el procedimiento para los otros dos puntos. Este proceso da lugar a un sistema de tres ecuaciones con tres variables. Después resuelvan el sistema para a, b y c. Para determinar la ecuación de la parábola, sustituyan los valores que se encontraron para a, b y c en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

Tres puntos de una parábola son $(0, 12)$, $(3, -3)$ y $(-2, 32)$.

a) En forma individual, determinen un sistema de ecuaciones con tres variables que pueda usarse para encontrar la ecuación de la parábola. Luego comparen sus respuestas. Si cada miembro del grupo no tiene el mismo sistema, determinen por qué razón.

b) De forma individual, resuelvan el sistema y determinen los valores de a, b y c. Luego comparen sus respuestas.

c) De forma individual, escriban la ecuación de la parábola que pasa por $(0, 12)$, $(3, -3)$ y $(-2, 32)$. Luego comparen sus respuestas.

d) En forma individual, escriban la ecuación en la forma

$$y = a(x - h)^2 + k$$

Luego comparen sus respuestas.

e) De forma individual, grafiquen la ecuación de la parte **d)**. Después comparen sus respuestas.

Ejercicios de repaso acumulativo

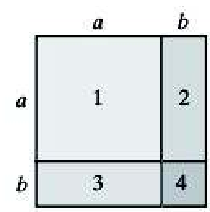
[1.5] **136.** Simplifique $\dfrac{6x^{-3}y^4}{18x^{-2}y^3}$.

[2.5] **137.** Resuelva la desigualdad $-4 < 3x - 4 < 17$. Escriba la solución en notación de intervalos.

[4.5] **138.** Evalúe el determinante.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

[5.2] **139. a)** Escriba expresiones para representar cada una de las cuatro áreas sombreadas en la figura.



b) Exprese el área total mostrada como el cuadrado de un binomio.

[10.1] **140.** Grafique $y = (x - 4)^2 + 1$.

10.2 La elipse

1. Graficar elipses.
2. Graficar elipses con centros en (h, k).

1 Graficar elipses

Una **elipse** puede definirse como un conjunto de puntos de un plano, la suma de cuyas distancias a dos puntos fijos es una constante. Los dos puntos fijos se llaman **focos** (cada uno es un foco) de la elipse (vea la **figura 10.18**). En esta figura, F_1 y F_2 representan los dos focos.

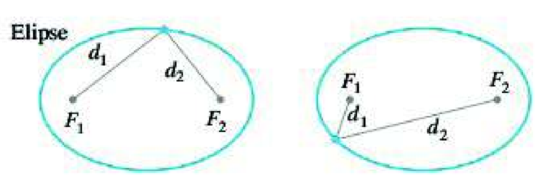


FIGURA 10.18

FIGURA 10.19

Podemos construir una elipse utilizando una cuerda y dos clavos. Coloque los dos clavos ligeramente cerca uno de otro (**figura 10.19**). Luego ate los extremos de la cuerda a los clavos. Con un lápiz o un bolígrafo, estire la cuerda y, manteniendo la cuerda tensa, dibuje la elipse moviendo el lápiz alrededor de los clavos.

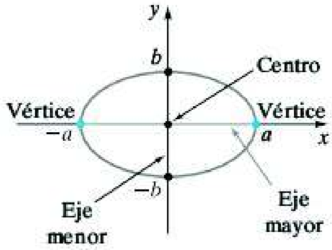


FIGURA 10.20

En la **figura 10.20**, el segmento de $-a$ a a en el eje x es el **eje principal** *o mayor* y el segmento de $-b$ a b en el **eje menor** *o más corto* de la elipse. El eje mayor de una elipse, también podría estar en el eje y. La **figura 10.20** también muestra el centro de la elipse y los dos vértices (los puntos en color rojo). Los vértices son los extremos del eje mayor.

A continuación proporcionamos la forma general de la elipse con su centro en el origen.

Elipse con centro en el origen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son las intersecciones con el eje x y $(0, b)$ y $(0, -b)$ son las intersecciones con el eje y.

Observe que las intersecciones con el eje x se determinan mediante la constante en el denominador del término de x^2, y las intersecciones con el eje y se determinan mediante el denominador del término de y^2. Si $a^2 > b^2$; el eje mayor de la elipse estará en el eje x, y si $b^2 > a^2$, el eje mayor de la elipse estará en el eje y.

En el ejemplo 1, el eje principal de la elipse está en el eje x.

EJEMPLO 1 Grafique $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Solución Podemos rescribir la ecuación como

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Así, $a = 3$ y las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Como $b = 2$, las intersecciones con el eje y son $(0, 2)$ y $(0, -2)$. La **figura 10.21** ilustra esta elipse.

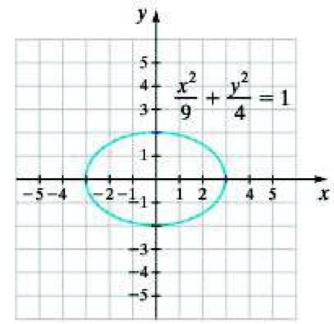


FIGURA 10.21

Ahora resuelva el ejercicio 15

Una ecuación puede estar escrita de tal manera que no sea evidente que su gráfica sea una elipse. Esto se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Trace la gráfica de $20x^2 + 9y^2 = 180$.

Solución Si dividimos ambos lados de la ecuación entre 180 para igualar a 1 el lado derecho de la ecuación, obtenemos una ecuación que podemos reconocer como una elipse.

$$\frac{20x^2 + 9y^2}{180} = \frac{180}{180}$$

$$\frac{20x^2}{180} + \frac{9y^2}{180} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{20} = 1$$

Ahora la ecuación puede reconocerse como una elipse en forma general.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como $a^2 = 9$, $a = 3$. Sabemos que $b^2 = 20$; así $b = \sqrt{20}$ (o aproximadamente 4.47).

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{20})^2} = 1$$

Las intersecciones con el eje x son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Las intersecciones con el eje y son $(0, -\sqrt{20})$ y $(0, \sqrt{20})$. La **figura 10.22** ilustra la gráfica. Observe que el eje mayor se encuentra a lo largo del eje y en vez de a lo largo del eje x.

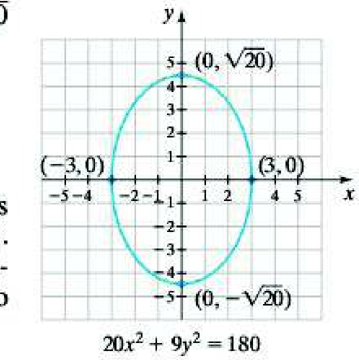


FIGURA 10.22

▸ Ahora resuelva el ejercicio 19

En el ejemplo 1, como $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$ y en consecuencia $a^2 > b^2$, el eje mayor está en el eje x. En el ejemplo 2, como $a^2 = 9$ y $b^2 = 20$, se tiene $b^2 > a^2$, el eje mayor está en el eje y. En el caso específico en que $a^2 = b^2$, la figura es una circunferencia. Así, la circunferencia es un caso especial de una elipse.

EJEMPLO 3 ▸ Escriba la ecuación de la elipse de la **figura 10.23**.

Solución Las intersecciones con el eje x son $(-\sqrt{10}, 0)$ y $(\sqrt{10}, 0)$; así que, $a = \sqrt{10}$ y $a^2 = 10$. Las intersecciones con el eje y son $(0, -12)$ y $(0, 12)$, por lo que $b = 12$ y $b^2 = 144$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{144} = 1$$

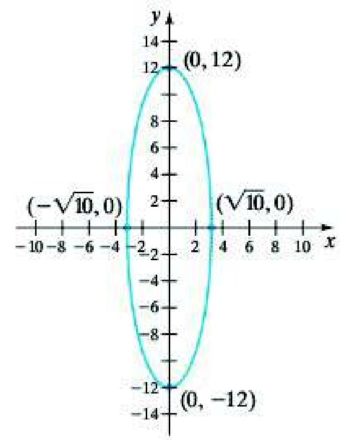


FIGURA 10.23

▸ Ahora resuelva el ejercicio 45

La fórmula para el **área de una elipse** es $A = \pi ab$. En el ejemplo 1, donde $a = 3$ y $b = 2$, el área es $A = \pi(3)(2) = 6\pi \approx 18.8$ unidades cuadradas.

En el ejemplo 2, donde $a = 3$ y $b = \sqrt{20}$, el área es $A = \pi(3)(\sqrt{20}) = \pi(3)(2\sqrt{5}) = 6\pi\sqrt{5} \approx 42.1$ unidades cuadradas.

2 Graficar elipses con centros en (h, k)

Para obtener la ecuación de una elipse con centro en (h, k), se podría requerir el uso de traslaciones horizontales y verticales, similares a las que se utilizaron en el capítulo 8.

Elipse con centro en (h, k)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

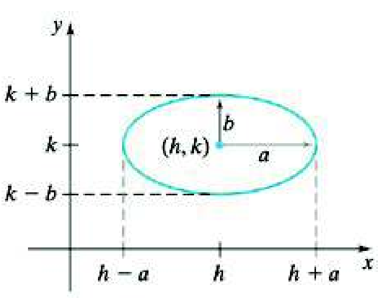


FIGURA 10.24

En la fórmula, la h desplaza la gráfica hacia la izquierda o hacia la derecha del origen y la k hacia arriba o hacia abajo, como se muestra en la **figura 10.24**.

EJEMPLO 4 Grafique $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1.$

Solución Ésta es la gráfica de $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ o $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ trasladada de modo que su centro esté en $(2, -3)$. Observe que $a = 5$ y $b = 4$. La gráfica se muestra en la **figura 10.25**.

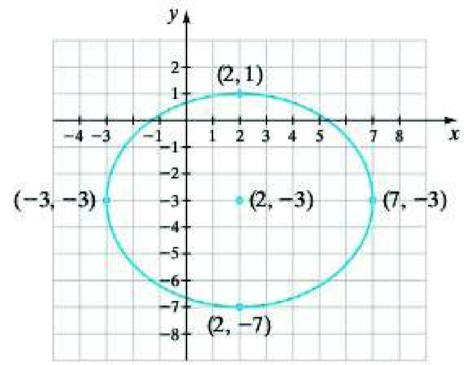


FIGURA 10.25

Ahora resuelva el ejercicio 33

FIGURA 10.26

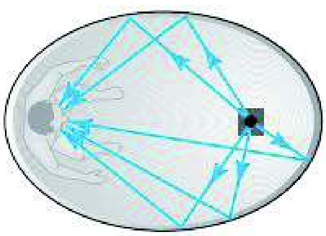


FIGURA 10.27

En muchas áreas es muy útil entender de manera clara las elipses. Los astrónomos saben que los planetas giran alrededor del sol en órbitas elípticas. Los satélites de comunicación se mueven alrededor de la Tierra en órbitas elípticas (vea la **figura 10.26**).

Las elipses se utilizan en medicina para deshacer piedras (cálculos) en los riñones. Cuando una señal sale de un foco de una elipse, la señal se refleja en el otro foco. En las máquinas para deshacer cálculos renales, la persona se coloca de modo que el cálculo que será destruido quede en uno de los focos de una cámara con forma elíptica llamada litotripter (vea la **figura 10.27** y los ejercicios 57 y 58).

En ciertas construcciones con techos elipsoidales, una persona de pie en uno de los focos puede murmurar algo y una persona parada en el otro foco puede oír claramente lo que la primera persona murmure. Existen muchos otros usos de las elipses, como las lámparas que concentran la luz en un punto específico.

CÓMO USAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Las elipses no son funciones. Para graficarlas mediante una calculadora graficadora, despejamos y. Esto dará las dos ecuaciones que usamos para graficar la elipse.

En el ejemplo 1, graficamos $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Al despejar y, obtenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$36 \cdot \frac{x^2}{9} + 36 \cdot \frac{y^2}{4} = 1 \cdot 36 \qquad \textit{Multiplicar por el MCD.}$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$9y^2 = 36 - 4x^2$$

$$y^2 = \frac{36 - 4x^2}{9}$$

$$y^2 = \frac{4(9 - x^2)}{9} \qquad \textit{Factorizar 4 del numerador.}$$

$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \qquad \textit{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

Para graficar la elipse, hacemos $Y_1 = \dfrac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ y $Y_2 = -\dfrac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ y graficamos ambas ecuaciones. Las gráficas de Y_1 y Y_2 se ilustran en la **figura 10.28**.

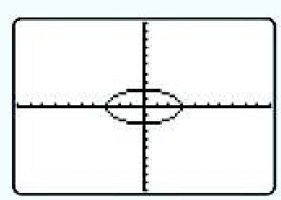


FIGURA 10.28

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.2

MathXL® MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cuál es la definición de una elipse?
2. ¿Cuál es la ecuación de una elipse con su centro en el origen?
3. ¿Cuál es la ecuación de una elipse cuyo centro está en (h, k)?
4. Analice las gráficas de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cuando $a > b$, $a < b$ y cuando $a = b$.
5. Explique por qué la circunferencia es un caso especial de la elipse.
6. En la fórmula $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ¿qué representan a y b?
7. Al graficar la elipse cuya ecuación es $10x^2 + 36y^2 = 180$, ¿cuál es el primer paso que debe hacer?
8. Al graficar la elipse cuya ecuación es $9x^2 + 25y^2 = 225$, ¿cuál es el primer paso que debe hacer?
9. ¿La ecuación $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = 1$ es de una elipse? Explique.
10. ¿La ecuación $-\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{81} = 1$ es de una elipse? Explique.

Práctica de habilidades

Grafique cada ecuación.

11. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$
12. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$
13. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
14. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
15. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
16. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{16} = 1$
17. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
18. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{49} = 1$
19. $x^2 + 16y^2 = 16$
20. $x^2 + 25y^2 = 25$
21. $49x^2 + y^2 = 49$
22. $9x^2 + 25y^2 = 225$
23. $9x^2 + 16y^2 = 144$
24. $25x^2 + 4y^2 = 100$
25. $25x^2 + 100y^2 = 400$
26. $100x^2 + 25y^2 = 400$
27. $x^2 + 2y^2 = 8$
28. $x^2 + 36y^2 = 36$
29. $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
30. $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$
31. $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$
32. $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{49} = 1$
33. $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
34. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$
35. $(x+3)^2 + 9(y+1)^2 = 81$
36. $18(x-1)^2 + 2(y+3)^2 = 72$
37. $(x-5)^2 + 4(y+4)^2 = 4$
38. $4(x-2)^2 + 9(y+2)^2 = 36$
39. $12(x+4)^2 + 3(y-1)^2 = 48$
40. $16(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = 16$

Resolución de problemas

41. Determine el área de la elipse del ejercicio 11.
42. Determine el área de la elipse del ejercicio 15.
43. ¿Cuántos puntos tiene la gráfica de $16x^2 + 25y^2 = 0$? Explique.
44. Considere la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Cuando el valor de b se hace cada vez más cercano al valor de a, ¿qué le sucede a la forma de la gráfica? ¿Cuál es la forma de la gráfica cuando $a = b$?

En los ejercicios del 45 al 48, determine la ecuación de la elipse que tiene los cuatro puntos dados como extremos de los ejes mayor y menor.

45. $(3, 0), (-3, 0), (0, 4), (0, -4)$
46. $(6, 0), (-6, 0), (0, 5), (0, -5)$
47. $(2, 0), (-2, 0), (0, 3), (0, -3)$
48. $(1, 0), (-1, 0), (0, 7), (0, -7)$
49. ¿Cuántos puntos de intersección tendrán las gráficas de las ecuaciones $x^2 + y^2 = 49$ y $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$? Explique.
50. ¿Cuántos puntos de intersección tendrán las gráficas de las ecuaciones $y = 2(x-2)^2 - 3$ y $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$? Explique.

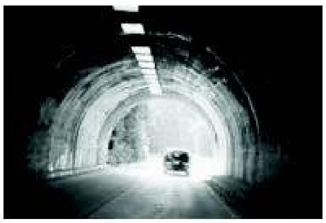
En los ejercicios 51 y 52, escriba la ecuación siguiente en forma general. Determine el centro de la elipse.

51. $x^2 + 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$
52. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$

53. Galería de arte Una galería de arte tiene un salón elíptico. La distancia máxima de un foco a la pared es 90.2 pies y la distancia mínima es 20.7 pies. Determine la distancia entre los focos.

54. Satélite de comunicaciones Un transbordador espacial transportó un satélite de comunicaciones al espacio. Éste recorre una órbita elíptica alrededor de la Tierra. La distancia máxima del satélite a la Tierra es 23,200 millas y la distancia mínima es 22,800 millas. La Tierra está en un foco de la elipse. Determine la distancia de la Tierra al otro foco.

55. Túnel a través de una montaña El túnel de la foto tiene una bóveda en forma semielíptica. El túnel tiene 20 pies de ancho y 24 de alto.

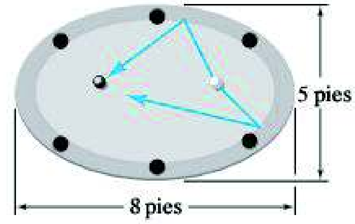


a) Si describe una elipse completa con el centro de la elipse como el centro del camino, determine la ecuación de la elipse.

b) Determine el área de la elipse que determinó en la parte **a)**.

c) Determine el área de la abertura del túnel.

56. Mesa de billar Una mesa elíptica de billar tiene 8 pies de largo y 5 de ancho. Determine la ubicación de los focos. En tal mesa, si una bola se coloca en cada foco y una de ellas se golpea con la fuerza suficiente, golpeará a la otra, sin importar dónde rebote en la mesa.



57. Máquina litotripter Suponga que la máquina litotripter descrita en la página 672 tiene 6 pies de largo y 4 de ancho. Describa la ubicación de los focos.

58. Litotripter En la página 672 dimos una breve introducción del litotripter, que utiliza ondas de ultrasonido para deshacer cálculos renales. Investigue y escriba un reporte detallado que describa el procedimiento que se utiliza para deshacer los cálculos renales. Asegúrese de explicar cómo se dirigen las ondas a la piedra.

59. Galería de los murmullos El Salón Nacional de las Estatuas en el edificio del Capitolio en Washington, D.C., es una "galería de murmullos". Investigue y explique por qué una persona parada en cierto punto puede murmurar algo y alguien de pie, alejado una distancia considerable, puede escuchar ese murmullo.

60. Compruebe su respuesta al ejercicio 11 con su graficadora.

61. Compruebe su respuesta al ejercicio 17 con su graficadora.

Retos

Determine la ecuación de la elipse que tiene los cuatro puntos siguientes como extremos de los ejes mayor y menor.

62. $(-7, 3), (5, 3), (-1, 5), (-1, 1)$

63. $(-3, 2), (11, 2), (4, 5), (4, -1)$

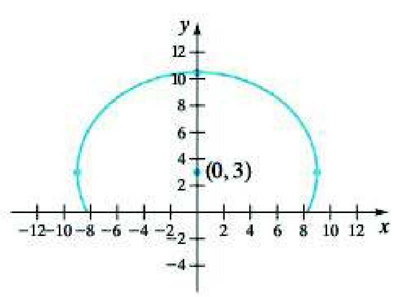
Actividad en grupo

Resuelvan el problema 64 de forma individual y luego comparen sus respuestas.

64. Túnel La fotografía muestra un túnel elíptico (la parte inferior de la elipse no se muestra) que se encuentra cerca del centro Rockefeller en la ciudad de Nueva York. El ancho máximo del túnel es de 18 pies y la altura máxima *desde el piso hasta la parte superior* es de 10.5 pies.

a) Si *se completara la elipse* tendría una altura máxima de 15 pies, ¿a qué altura del piso está el centro del túnel elíptico?

b) Considere la gráfica siguiente, que puede utilizarse para representar al túnel.



Si la elipse se continuara, ¿cuál sería la otra intersección con el eje y de la gráfica?

c) Escriba la ecuación de la elipse, si se completa, de la parte **b)**.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **65.** Despeje l de la fórmula $S = \frac{n}{2}(f + l)$.

[5.4] **66.** Divida $\frac{2x^2 + 2x - 7}{2x - 3}$.

[7.6] **67.** Resuelva $\sqrt{3b - 2} = 10 - b$.

[8.6] **68.** Resuelva $\frac{3x + 5}{x - 4} \leq 0$, y proporcione la solución en notación de intervalos.

[9.7] **69.** Determine $\log_8 321$.

Examen de mitad de capítulo: 10.1-10.2

Para determinar su comprensión del material que se ha abordado hasta este momento, resuelva este pequeño examen. Las respuestas, y la sección en la cual se trató el material por primera vez, se proporcionan al final del libro. Repase el material de las preguntas que respondió de forma incorrecta.

Grafique cada ecuación.

1. $y = (x - 2)^2 - 1$

2. $y = -(x + 1)^2 + 3$

3. $x = -(y - 4)^2 + 1$

4. $x = 2(y + 3)^2 - 2$

5. $y = x^2 + 6x + 10$

Determine la distancia entre cada par de puntos. Donde sea apropiado, redondee su respuesta al centésimo más cercano.

6. $(-7, 4)$ y $(-2, -8)$

7. $(5, -3)$ y $(2, 9)$

Determine el punto medio del segmento de recta entre cada par de puntos.

8. $(9, -1)$ y $(-11, 6)$

9. $\left(-\frac{5}{2}, 7\right)$ y $\left(8, \frac{1}{2}\right)$

10. Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en $(-3, 2)$ y un radio de 5 unidades.

Grafique cada ecuación.

11. $x^2 + (y - 1)^2 = 16$

12. $y = \sqrt{36 - x^2}$

13. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

14. ¿Cuál es la definición de circunferencia?

Grafique cada ecuación.

15. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

16. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$

17. $\frac{(x - 1)^2}{49} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$

18. $36(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36.$

19. Determine el área de la elipse del ejercicio 15.

20. Determine la ecuación de la elipse que tienen los cuatro puntos $(8, 0)$, $(-8, 0)$, $(0, 5)$ y $(0, -5)$ como los extremos de los ejes mayor y menor.

10.3 La hipérbola

1 Graficar hipérbolas.

2 Repaso de secciones cónicas.

1 Graficar hipérbolas

Una **hipérbola** es el conjunto de puntos en un plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es una constante. En la **figura 10.29a** se ilustra una hipérbola. En la figura, para cada punto en la hipérbola, la diferencia $M - N$, es la misma constante. Una hipérbola puede parecer como un par de parábolas. Sin embargo, las formas son totalmente diferentes. Una hipérbola tiene dos **vértices**. El punto a la mitad de la distancia entre los dos vértices es el **centro** de la hipérbola. La recta que pasa por los vértices se llama **eje transversal**. En la **figura 10.29b** el eje transversal está a lo largo del eje x, y en la **figura 10.29c** el eje transversal está a lo largo del eje y.

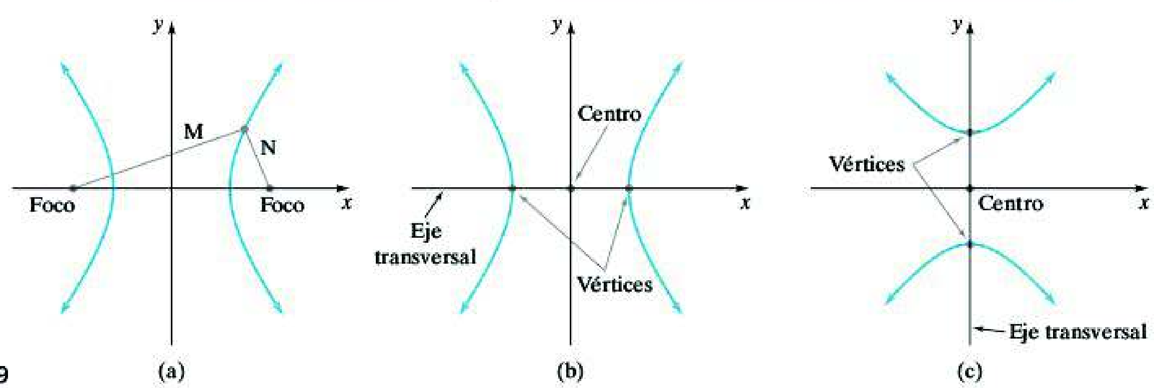


FIGURA 10.29

Las líneas discontinuas en la **figura 10.30** se llaman **asíntotas**. Las asíntotas no son parte de la hipérbola, pero sirven para graficarla. Más adelante analizaremos las asíntotas. La **figura 10.30** también tiene la forma general de la ecuación de cada hipérbola. En la **figura 10.30a**, cada vértice está a a unidades del origen. En la **figura 10.30b**, cada vértice está a b unidades del origen. Observe que en la forma general de la ecuación, el denominador de x^2 siempre es a^2 y el denominador de y^2 siempre es b^2.

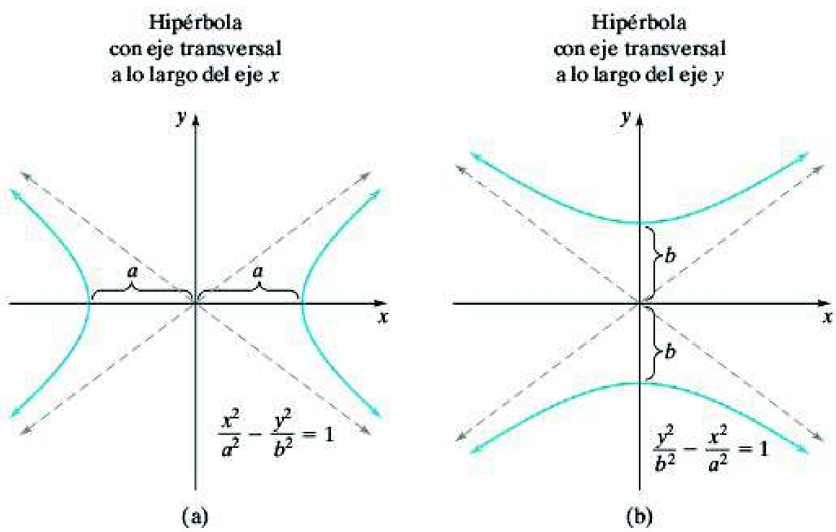


FIGURA 10.30

Una hipérbola con centro en el origen y cuyo eje transversal es uno de los ejes coordenados tiene intersecciones con el eje x (**figura 10.30a**) o intersecciones con el eje y (**figura 10.30b**), pero no ambas. Cuando una hipérbola está centrada en el origen, las intersecciones son los vértices de la hipérbola. Cuando se escribe en la forma general, las intersecciones estarán en el eje indicado por la variable con el coeficiente positivo. Las intersecciones serán las raíces cuadradas positiva y negativa del denominador del término positivo.

Ejemplos	Intersecciones con el	Intersecciones
$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$	eje x	$(-7, 0)$ y $(7, 0)$
$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$	eje y	$(0, -4)$ y $(0, 4)$

Las asíntotas pueden servir para graficar las hipérbolas. Las asíntotas son dos rectas que pasan por el centro de la hipérbola (vea la **figura 10.30**). Cuando los valores de x y y crecen, la gráfica de la hipérbola se aproxima a las asíntotas. Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola cuyo centro es el origen son

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Podemos trazar las asíntotas rápidamente localizando los cuatro puntos (a, b), $(-a, b)$, $(a, -b)$ y $(-a, -b)$, y luego unir estos puntos con rectas discontinuas para formar un rectángulo. Después trazamos las diagonales del rectángulo para obtener las gráficas de las asíntotas.

Hipérbola con centro en el origen

EJE TRANSVERSAL A LO LARGO DEL EJE x (ABRE HACIA LA DERECHA Y HACIA LA IZQUIERDA)	EJE TRANSVERSAL A LO LARGO DEL EJE y (ABRE HACIA ARRIBA Y HACIA ABAJO)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

ASÍNTOTAS

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

EJEMPLO 1

a) Determine ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

b) Trace la hipérbola utilizando las asíntotas.

Solución

a) El valor de a^2 es 9; la raíz cuadrada positiva de 9 es 3. El valor de b^2 es 16; la raíz cuadrada positiva de 16 es 4. Las asíntotas son

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

o

$$y = \frac{4}{3}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{4}{3}x$$

b) Para graficar la hipérbola, primero trazamos las asíntotas. Para graficar las asíntotas podemos trazar los puntos $(3, 4)$, $(-3, 4)$, $(3, -4)$ y $(-3, -4)$ y dibujamos el rectángulo como se ilustra en la **figura 10.31**. Las asíntotas son las diagonales del rectángulo que aparecen con líneas discontinuas.

Como el término en x de la ecuación original es positivo, la gráfica interseca el eje x. Como el denominador del término positivo es 9, los vértices están en $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Ahora trazamos la hipérbola, aproximándola a sus asíntotas (**figura 10.32**). Observe que las asíntotas están dibujadas con líneas discontinuas ya que no son parte de la hipérbola, sólo se utilizan como ayuda para el trazo de la gráfica.

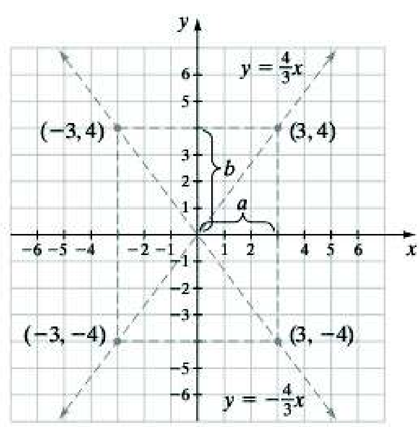
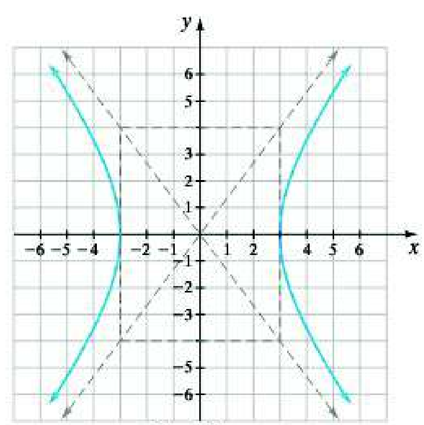


FIGURA 10.31



$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

FIGURA 10.32

Ahora resuelva el ejercicio 21

EJEMPLO 2

a) Muestre que la ecuación $-25x^2 + 4y^2 = 100$ es una hipérbola, expresando la ecuación en forma canónica.

b) Determine las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica.

c) Trace la gráfica.

Solución

a) Dividimos ambos lados de la ecuación entre 100 para obtener 1 del lado derecho de la ecuación.

$$\frac{-25x^2 + 4y^2}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\frac{-25x^2}{100} + \frac{4y^2}{100} = 1$$

$$\frac{-x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Reescribimos la ecuación en forma general (primero el término positivo) y obtenemos

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$$

b) Como $a = 2$ y $b = 5$, las ecuaciones de las asíntotas son

$$y = \frac{5}{2}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{5}{2}x$$

c) La gráfica interseca el eje y en $(0, 5)$ y $(0, -5)$. La **figura 10.33a**, ilustra las asíntotas y la **figura 10.33b** ilustra la hipérbola.

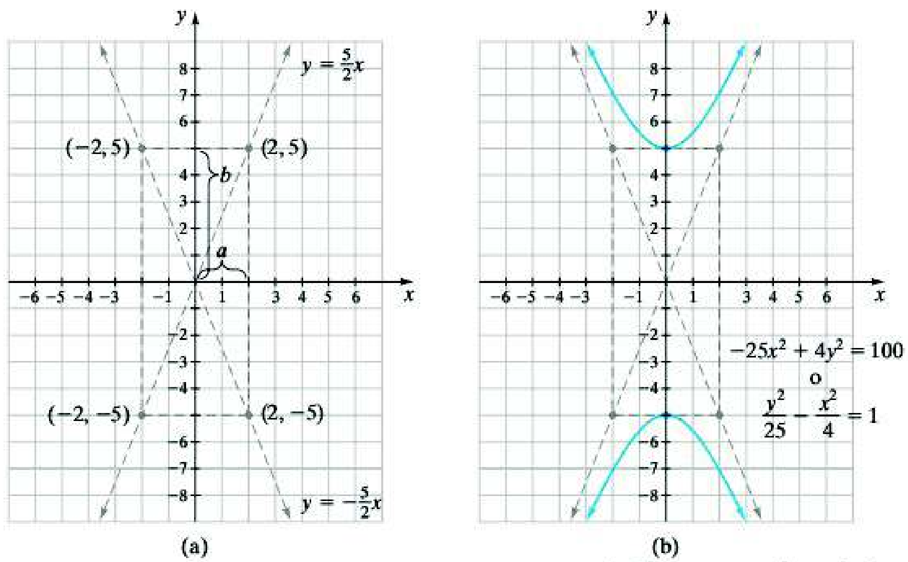


FIGURA 10.33

▸ Ahora resuelva el ejercicio 29

Hemos analizado hipérbolas con centro en el origen; las hipérbolas no tienen por qué tener necesariamente su centro en el origen. En este texto no analizaremos tales hipérbolas.

CÓMO USAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Podemos graficar hipérbolas igual que lo hicimos para circunferencias y elipses. Para hacerlo en una calculadora graficadora, despejamos y y graficamos cada parte. Considere el ejemplo 1,

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Muestre que si despeja y obtiene $y = \pm\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$. Hacemos $Y_1 = \frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$ y $Y_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}$. Las **figuras 10.34a**, **10.34b**, **10.34c** y **10.34d**, en la página siguiente, muestran las gráficas de Y_1 y Y_2 para diferentes ajustes de la ventana. Los ajustes de la ventana se indican arriba de cada gráfica.

(*continúa en la página siguiente*)

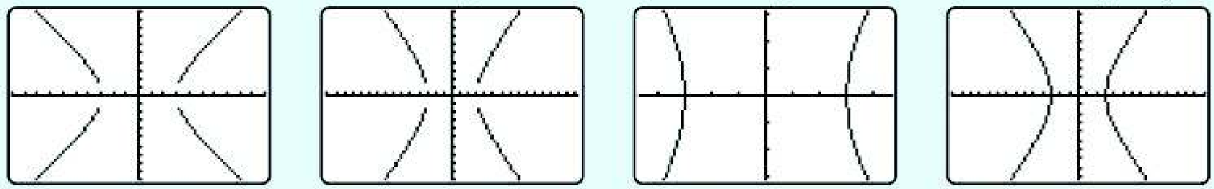
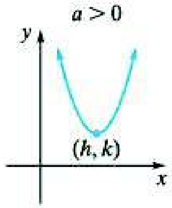
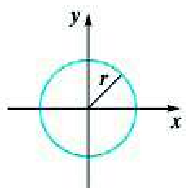
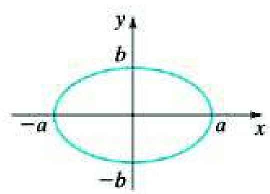
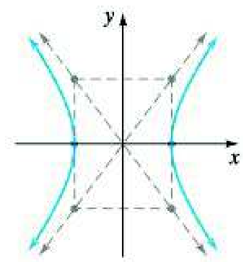
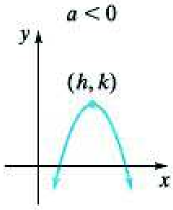
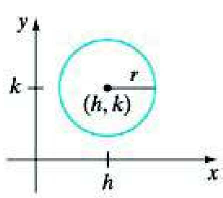
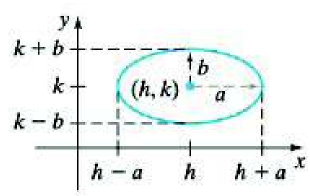
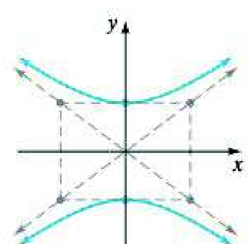
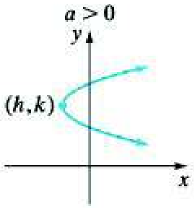
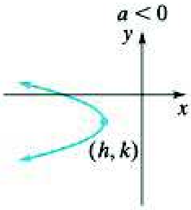


FIGURA 10.34

En la parte (d), el "ajuste de ventana amigable", la razón de la longitud del eje x (28.2 unidades) a la longitud del eje y (18.6 unidades) es de alrededor de 1.516, que es la misma razón de la longitud al ancho de la ventana de visualización de la calculadora TI−84 Plus.

2 Repaso de secciones cónicas

La tabla siguiente muestra un resumen de las secciones cónicas.

Parábola	Circunferencia	Elipse	Hipérbola
$y = a(x - h)^2 + k$ o $y = ax^2 + bx + c$	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$a > 0$ 			
$a < 0$ 	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
$x = a(y - k)^2 + h$ o $x = ay^2 + by + c$			
$a > 0$ 			*Asíntotas* $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$
$a < 0$ 			

EJEMPLO 3 Indique si cada ecuación representa una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola.

a) $6x^2 = -6y^2 + 48$ **b)** $x - y^2 = 9y + 3$ **c)** $2x^2 = 8y^2 + 72$

Solución

a) Esta ecuación tiene un término cuadrático de x y un término cuadrático de y; coloque todos los términos cuadráticos del lado izquierdo de la ecuación.

$$6x^2 = -6y^2 + 48$$
$$6x^2 + 6y^2 = 48 \qquad \text{Sumar } 6y^2 \text{ a ambos lados.}$$

Como los coeficientes de los dos términos cuadráticos tienen el mismo número, dividimos ambos lados entre este número. Divida ambos lados entre 6.

$$\frac{6x^2 + 6y^2}{6} = \frac{48}{6}$$
$$x^2 + y^2 = 8$$

Esta ecuación es de la forma $x^2 + y^2 = r^2$ donde $r^2 = 8$.

La ecuación $6x^2 = -6y^2 + 48$ representa una circunferencia.

b) Esta ecuación tiene un término cuadrático de y, pero no de x. Despejamos x en la ecuación.

$$x - y^2 = 9y + 3$$
$$x = y^2 + 9y + 3 \qquad \text{Sumar } y^2 \text{ a ambos lados.}$$

Esta ecuación es de la forma $x = ay^2 + by + c$, en la que $a = 1$, $b = 9$ y $c = 3$.

La ecuación $x - y^2 = 9y + 3$ representa una parábola que abre hacia la derecha.

c) Esta ecuación tiene términos cuadráticos de x y de y. Coloque todos los términos cuadráticos del lado izquierdo de la ecuación.

$$2x^2 = 8y^2 + 72$$
$$2x^2 - 8y^2 = 72 \qquad \text{Restar } 8y^2 \text{ de ambos lados.}$$

Como los coeficientes de los términos cuadráticos son números diferentes, necesitamos dividir la ecuación entre la constante del lado derecho. Divida ambos lados entre 72.

$$\frac{2x^2 - 8y^2}{72} = \frac{72}{72}$$
$$\frac{2x^2}{72} - \frac{8y^2}{72} = 1$$
$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Esta ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en la que $a^2 = 36$ (o $a = 6$) y $b^2 = 9$ (o $b = 3$).

La ecuación $2x^2 = 8y^2 + 72$ representa una hipérbola.

Ahora resuelva el ejercicio 53

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.3

MathXL MyMathLab

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Cuál es la definición de una hipérbola?
2. ¿Qué son las asíntotas? ¿Cómo determina las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola?
3. Analice la gráfica de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ para números reales diferentes de cero a y b. Incluya los ejes transversales, vértices y asíntotas.

4. Analice la gráfica de $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ para números reales diferentes de cero a y b. Incluya los ejes transversales, vértices y asíntotas.

5. ¿Es la ecuación $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{64} = 1$ de una hipérbola? Explique.

6. ¿Es la ecuación $-\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{64} = 1$ de una hipérbola? Explique.

7. ¿Es la ecuación $4x^2 - 25y^2 = 100$ de una hipérbola? Explique.

8. ¿Es la ecuación $36x^2 - 9y^2 = -324$ de una hipérbola? Explique.

9. ¿Cuál es el primer paso al graficar la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - 9y^2 = 81$? Explique.

10. ¿Cuál es el primer paso al graficar la hipérbola cuya ecuación es $4x^2 - y^2 = -64$? Explique.

Práctica de habilidades

a) *Para cada ecuación, determine las ecuaciones de las asíntotas.* **b)** *Grafique la ecuación.*

11. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
12. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$
13. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$
14. $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$
15. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$
16. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$
17. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$
18. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$
19. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{36} = 1$
20. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$
21. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$
22. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
23. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$
24. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$
25. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{16} = 1$
26. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{81} = 1$

En los ejercicios 27 a 36, **a)** *escriba cada ecuación en la forma general y determine las ecuaciones de las asíntotas.* **b)** *Dibuje la gráfica.*

27. $x^2 - 25y^2 = 25$
28. $25y^2 - x^2 = 25$
29. $4y^2 - 16x^2 = 64$
30. $16x^2 - 4y^2 = 64$
31. $9y^2 - x^2 = 9$
32. $x^2 - 9y^2 = 9$
33. $25x^2 - 9y^2 = 225$
34. $9y^2 - 25x^2 = 225$
35. $4y^2 - 36x^2 = 144$
36. $64y^2 - 25x^2 = 1600$

En los ejercicios 37 a 60, indique si la ecuación representa una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola. Vea el ejemplo 3.

37. $10x^2 + 10y^2 = 40$
38. $15x^2 - 5y^2 = 75$
39. $x^2 + 16y^2 = 64$
40. $x = 5y^2 + 15y + 1$
41. $4x^2 - 4y^2 = 29$
42. $11x^2 + 11y^2 = 99$
43. $2y = 12x^2 - 8x + 16$
44. $4y^2 - 6x^2 = 72$
45. $6x^2 + 9y^2 = 54$
46. $9.2x^2 + 9.2y^2 = 46$
47. $3x = -2y^2 + 9y - 15$
48. $12x^2 - 3y^2 = 48$
49. $6x^2 + 6y^2 = 36$
50. $9x^2 = -9y^2 + 99$
51. $14y^2 = 7x^2 + 35$
52. $9x^2 = -18y^2 + 36$
53. $x + y = 2y^2 + 6$
54. $2x^2 = -2y^2 + 32$
55. $12x^2 = 4y^2 + 48$
56. $-8x^2 = -9y^2 - 72$
57. $y - x + 4 = x^2$
58. $17x^2 = -2y^2 + 34$
59. $-3x^2 - 3y^2 = -27$
60. $x - y^2 = 15$

Resolución de problemas

61. Determine una ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $(0, 2)$ y $(0, -2)$ y cuyas asíntotas son $y = \frac{1}{2}x$ y $y = -\frac{1}{2}x$.

62. Determine una ecuación de una hipérbola cuyos vértices son $(0, 6)$ y $(0, -6)$ y cuyas asíntotas son $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$.

63. Determine una ecuación de la hipérbola cuyos vértices son $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ y cuyas asíntotas son $y = 2x$ y $y = -2x$.

64. Determine una ecuación de una hipérbola cuyos vértices son $(7, 0)$ y $(-7, 0)$ y cuyas asíntotas son $y = \frac{4}{7}x$ y $y = -\frac{4}{7}x$.

65. Determine una ecuación de una hipérbola cuyo eje transversal está a lo largo del eje x y cuyas ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{5}{3}x$ y $y = -\frac{5}{3}x$. La solución que encontró, ¿es la única posible? Explique.

66. Determine una ecuación de una hipérbola cuyo eje transversal está a lo largo del eje y y cuyas ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{2}{3}x$ y $y = -\frac{2}{3}x$. La solución que encontró, ¿es la única posible? Explique.

67. Las hipérbolas de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ¿son funciones? Explique.

68. Las hipérbolas de la forma $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, ¿son funciones? Explique.

69. Con base en la gráfica de $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$, determine el dominio y rango de la relación.

70. Considerando la gráfica de $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{9} = 1$, determine el dominio y el rango de la relación.

71. Si se grafica la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b$, y luego se intercambian los valores de a y b, y se grafica la ecuación que se obtiene, ¿cómo son las gráficas? Compárelas y explique su respuesta.

72. Si se grafica la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b$, luego se cambian los signos de los términos del lado izquierdo y se grafica la nueva ecuación, ¿cómo son las gráficas? Compárelas y explique su respuesta.

73. Con su calculadora graficadora compruebe su respuesta al ejercicio 15.

74. Con su calculadora graficadora compruebe su respuesta al ejercicio 21.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.4] **75.** Escriba la ecuación, en la forma pendiente intercepción, de la recta que pasa por los puntos $(-6, 4)$ y $(-2, 2)$.

[3.6] **76.** Sea $f(x) = 3x^2 - x + 5$ y $g(x) = 6 - 4x^2$. Determine $(f + g)(x)$.

[4.4] **77.** Resuelva el sistema de ecuaciones.

$$-4x + 9y = 7$$
$$5x + 6y = -3$$

[6.2] **78.** Sume $\frac{3x}{2x - 3} + \frac{2x + 4}{2x^2 + x - 6}$.

[8.3] **79.** Despeje v de la fórmula $E = \frac{1}{2}mv^2$.

[9.6] **80.** Resuelva la ecuación $\log(x + 4) = \log 5 - \log x$.

10.4 Sistemas de ecuaciones no lineales y sus aplicaciones

1. Resolver sistemas no lineales mediante sustitución.
2. Resolver sistemas no lineales mediante eliminación.
3. Resolver aplicaciones.

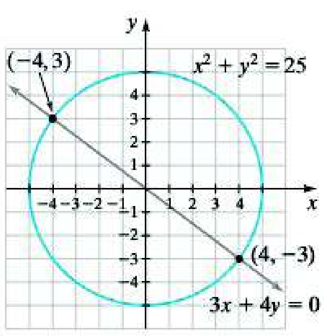


FIGURA 10.35

1 Resolver sistemas no lineales mediante sustitución

En el capítulo 4 estudiamos sistemas de ecuaciones lineales. Aquí analizamos sistemas de ecuaciones no lineales. Un **sistema de ecuaciones no lineales** es un sistema de ecuaciones en el que al menos una ecuación no es lineal (esto es, una cuya gráfica no es una línea recta).

La solución a un sistema de ecuaciones es el punto o puntos que satisfacen todas las ecuaciones del sistema. Considere el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$3x + 4y = 0$$

En la **figura 10.35**, ambas ecuaciones se grafican en los mismos ejes. Observe que las gráficas parece que se intersecan en los puntos $(-4, 3)$ y $(4, -3)$. La comprobación muestra que estos puntos satisfacen ambas ecuaciones del sistema y por lo tanto son soluciones para el sistema.

Compruebe $(-4, 3)$

$x^2 + y^2 = 25$	$3x + 4y = 0$
$(-4)^2 + 3^2 \stackrel{?}{=} 25$	$3(-4) + 4(3) \stackrel{?}{=} 0$
$16 + 9 \stackrel{?}{=} 25$	$-12 + 12 \stackrel{?}{=} 0$
$25 = 25$ Verdadero	$0 = 0$ Verdadero

Compruebe $(4, -3)$

$$4^2 + (-3)^2 = 25 \qquad\qquad 3(4) + 4(-3) = 0$$
$$16 + 9 \stackrel{?}{=} 25 \qquad\qquad 12 - 12 \stackrel{?}{=} 0$$
$$25 = 25 \text{ Verdadero} \qquad\qquad 0 = 0 \text{ Verdadero}$$

El procedimiento gráfico para resolver un sistema de ecuaciones puede ser impreciso ya que tenemos que estimar el punto o puntos de intersección. Una solución exacta se puede obtener de forma algebraica.

Para resolver un sistema de ecuaciones de forma algebraica, con frecuencia despejamos una variable de una o varias de las ecuaciones y luego utilizamos la sustitución. Este procedimiento se ilustra en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 1 ▸ Resuelva el sistema de ecuaciones anterior de forma algebraica usando el método de sustitución.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$3x + 4y = 0$$

Solución Primero despejamos x o y de la ecuación lineal $3x + 4y = 0$. Lo haremos para y,

$$3x + 4y = 0$$
$$4y = -3x$$
$$y = -\frac{3x}{4}$$

Ahora sustituimos $-\frac{3x}{4}$ por y en la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ y resolvemos la ecuación para x.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 = 25$$
$$x^2 + \frac{9x^2}{16} = 25$$
$$16\left(x^2 + \frac{9x^2}{16}\right) = 16(25)$$
$$16x^2 + 9x^2 = 400$$
$$25x^2 = 400$$
$$x^2 = \frac{400}{25} = 16$$
$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

A continuación, sustituyendo cada valor de x (uno a la vez) en la ecuación en que está despejada y, determinamos los valores correspondientes para y.

$$x = 4 \qquad\qquad x = -4$$
$$y = -\frac{3x}{4} \qquad\qquad y = -\frac{3x}{4}$$
$$= -\frac{3(4)}{4} \qquad\qquad = -\frac{3(-4)}{4}$$
$$= -3 \qquad\qquad = 3$$

Las soluciones son $(4, -3)$ y $(-4, 3)$. Esto coincide con las soluciones que obtuvimos de forma gráfica en la **figura 10.35**.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 9

Nuestro objetivo al usar la sustitución es obtener una sola ecuación con una sola variable.

Sugerencia útil *Consejo de estudio*

En esta sección utilizaremos el método de sustitución y el método de eliminación (o de suma) para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Ambos métodos se introdujeron en el capítulo 4 para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Si no recuerda cómo utilizarlos, es buen momento para repasar el capítulo 4.

En los ejemplos 1 y 2 resolvemos sistemas mediante el método de sustitución, mientras que en los ejemplos 3 y 4, resolvemos los sistemas mediante el método de eliminación.

Si el método de eliminación no lleva a una ecuación que pueda resolverse con facilidad, puede elegir el método de sustitución, como es el caso con los sistemas de los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 2 ▸ Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método de sustitución.

$$y = x^2 - 3$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

Solución Como ambas ecuaciones tienen a x^2, despejamos x^2 de una de las ecuaciones. Elegimos hacerlo de $y = x^2 - 3$,

$$y = x^2 - 3$$
$$y + 3 = x^2$$

Ahora sustituimos $y + 3$ por x^2 en la ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ y + 3 + y^2 &= 9 \\ y^2 + y + 3 &= 9 \\ y^2 + y - 6 &= 0 \\ (y + 3)(y - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$y + 3 = 0 \quad \text{o} \quad y - 2 = 0$$
$$y = -3 \qquad\qquad y = 2$$

Ahora determinamos los valores correspondientes para x sustituyendo los valores que se encontraron para y.

$y = -3$	$y = 2$
$y = x^2 - 3$	$y = x^2 - 3$
$-3 = x^2 - 3$	$2 = x^2 - 3$
$0 = x^2$	$5 = x^2$
$0 = x$	$\pm\sqrt{5} = x$

Este sistema tiene tres soluciones $(0, -3)$, $(\sqrt{5}, 2)$ y $(-\sqrt{5}, 2)$.

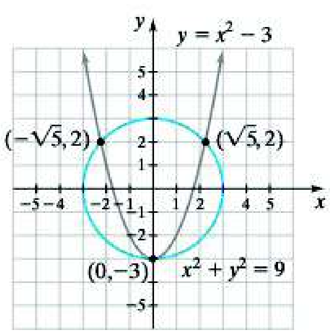


FIGURA 10.36

Observe que la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 3$ es una parábola y la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ es una circunferencia. Ambas gráficas se ilustran en la **figura 10.36**.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 19

Sugerencia útil

En ocasiones los estudiantes resuelven para una variable y suponen que tienen la solución. Recuerde que la solución, si existe, para un sistema con dos variables, consiste en una o más parejas ordenadas.

2 Resolver sistemas no lineales mediante eliminación

Con frecuencia podemos resolver sistemas de ecuaciones con mayor facilidad mediante el método de eliminación que se analizó en la sección 4.1. Al igual que en el método de sustitución, nuestro objetivo es obtener una sola ecuación con una sola variable.

EJEMPLO 3 Resuelva el sistema de ecuaciones mediante el método de eliminación.

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$2x^2 - y^2 = -6$$

Solución Si sumamos las dos ecuaciones, obtendremos una ecuación que sólo tiene una variable

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9 \\ \underline{2x^2 - y^2} &\underline{= -6} \\ 3x^2 \qquad &= 3 \\ x^2 &= 1 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos para y sustituyendo $x = \pm 1$ en *cualquiera* de las ecuaciones originales.

$$\begin{array}{cc} x = 1 & x = -1 \\ x^2 + y^2 = 9 & x^2 + y^2 = 9 \\ 1^2 + y^2 = 9 & (-1)^2 + y^2 = 9 \\ 1 + y^2 = 9 & 1 + y^2 = 9 \\ y^2 = 8 & y^2 = 8 \\ y = \pm\sqrt{8} & y = \pm\sqrt{8} \\ = \pm 2\sqrt{2} & = \pm 2\sqrt{2} \end{array}$$

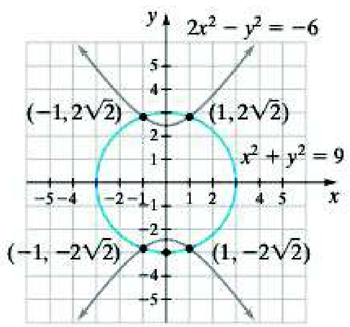


FIGURA 10.37

Existen cuatro soluciones para este sistema de ecuaciones:

$$(1, 2\sqrt{2}), (1, -2\sqrt{2}), (-1, 2\sqrt{2}) \text{ y } (-1, -2\sqrt{2})$$

En la **figura 10.37** se muestran las gráficas de las ecuaciones del sistema. Observe los cuatro puntos de intersección de las dos gráficas.

▶ Ahora resuelva el ejercicio 25

Es posible que un sistema de ecuaciones no tenga solución real (por lo tanto, las gráficas no se intersecan). Tal caso se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Resuelva el sistema de ecuaciones mediante el método de eliminación.

$$x^2 + 4y^2 = 16 \quad \text{(ec. 1)}$$
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(ec. 2)}$$

Solución Multiplique la (ec. 2) por -1 y sume la ecuación resultante a la (ec. 1).

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 16 \\ \underline{-x^2 - y^2} &\underline{= -1} \qquad \text{(ec. 2) multiplicada por } -1. \\ 3y^2 &= 15 \\ y^2 &= 5 \\ y &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Ahora resuelva x.

$$\begin{array}{rlcrl} y &= \sqrt{5} & \qquad & y &= -\sqrt{5} \\ x^2 + y^2 &= 1 & & x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 + (\sqrt{5})^2 &= 1 & & x^2 + (-\sqrt{5})^2 &= 1 \\ x^2 + 5 &= 1 & & x^2 + 5 &= 1 \\ x^2 &= -4 & & x^2 &= -4 \\ x &= \pm\sqrt{-4} & & x &= \pm\sqrt{-4} \\ x &= \pm 2i & & x &= \pm 2i \end{array}$$

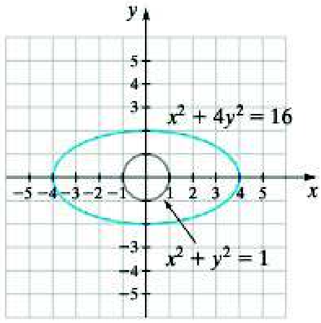


FIGURA 10.38

Como x es un número imaginario para ambos valores de y, este sistema de ecuaciones no tiene solución real. Al resolver sistemas de ecuaciones no lineales lo que nos interesa es encontrar todas las soluciones que son números reales.

En la **figura 10.38** se muestran las gráficas de las ecuaciones. Observe que las dos gráficas no se intersecan; por lo tanto, no existe solución real. Esto coincide con la respuesta que obtuvimos de forma algebraica.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 37

3 Resolver aplicaciones

Ahora estudiaremos algunas aplicaciones de sistemas no lineales.

FIGURA 10.39

EJEMPLO 5 ▸ **Jardín floral** Fred y Judy Vespucci quieren construir un jardín floral rectangular atrás de su casa. Fred compró suficiente mantillo para cubrir 150 metros cuadrados de terreno. Judy compró 50 metros de cerca para el perímetro del jardín. ¿Cómo deben construir el jardín para utilizar todo el mantillo y toda la cerca que compraron?

Solución Entienda el problema y traduzca Empezamos haciendo un bosquejo (vea la **figura 10.39**).

$$\text{Sea } x = \text{longitud del jardín,}$$
$$y = \text{ancho del jardín.}$$

Como $A = xy$ y Fred compró mantillo para cubrir 150 metros cuadrados, tenemos

$$xy = 150$$

Como $P = 2x + 2y$ y Judy compró 50 metros de cerca para el perímetro del jardín, tenemos

$$2x + 2y = 50$$

El sistema de ecuaciones es

$$xy = 150$$
$$2x + 2y = 50$$

Realice los cálculos Resolveremos el sistema mediante sustitución. La ecuación $2x + 2y = 50$ es lineal, de la cual despejaremos y. (Podríamos también despejar x).

$$2x + 2y = 50$$
$$2y = 50 - 2x$$
$$y = \frac{50 - 2x}{2} = \frac{50}{2} - \frac{2x}{2} = 25 - x$$

Ahora sustituimos $25 - x$ por y en la ecuación $xy = 150$.

$$\begin{aligned} xy &= 150 \\ x(25 - x) &= 150 \\ 25x - x^2 &= 150 \\ 0 &= x^2 - 25x + 150 \\ 0 &= (x - 10)(x - 15) \end{aligned}$$

$$x - 10 = 0 \quad \text{o} \quad x - 15 = 0$$
$$x = 10 \qquad\qquad x = 15$$

Responda Si $x = 10$, entonces $y = 25 - 10 = 15$. Y, si $x = 15$, entonces $y = 25 - 15 = 10$. Así, que en cualquier caso, las dimensiones del jardín floral son de 10 por 15 metros.

▸ Ahora resuelva el ejercicio 43

EJEMPLO 6 ▸ **Bicicletas** Una compañía que produce y vende bicicletas tiene una ecuación de costo semanal $C = 50x + 400$, $0 \le x \le 160$, y una ecuación de ingreso semanal $R = 100x - 0.3x^2$, $0 \le x \le 160$, donde x es el número de bicicletas producidas y vendidas cada semana. Determine el número de bicicletas que debe producir y vender para estar en el punto de equilibrio.

Solución **Entienda el problema y traduzca** Una compañía está en el punto de equilibrio cuando sus costos y sus ingresos son iguales. Cuando el costo es mayor que los ingresos, la compañía tiene pérdidas. Cuando el ingreso excede a los costos, la compañía tiene una ganancia.

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} C &= 50x + 400 \\ R &= 100x - 0.3x^2 \end{aligned}$$

Para que la compañía esté en el punto de equilibrio, sus costos deben ser iguales a sus ingresos. Por lo tanto, escribimos

$$C = R$$
$$50x + 400 = 100x - 0.3x^2$$

Realice los cálculos Al escribir esta ecuación cuadrática en la forma general, obtenemos

$$0.3x^2 - 50x + 400 = 0, \quad 0 \le x \le 160$$

Resolveremos esta ecuación mediante la fórmula cuadrática.

$$a = 0.3, \quad b = -50, \quad c = 400$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(0.3)(400)}}{2(0.3)} \\ &= \frac{50 \pm \sqrt{2020}}{0.6} \end{aligned}$$

$$x = \frac{50 + \sqrt{2020}}{0.6} \approx 158.2 \quad \text{o} \quad x = \frac{50 - \sqrt{2020}}{0.6} \approx 8.4$$

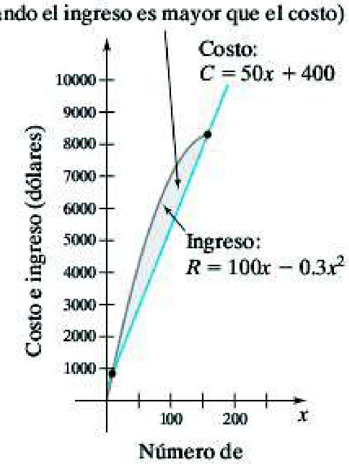


FIGURA 10.40

Responda El costo será igual a los ingresos y la compañía estará en el punto de equilibrio cuando se vendan aproximadamente 8 bicicletas. El costo también será igual a los ingresos cuando se vendan aproximadamente 158 bicicletas. La compañía tendrá ganancias cuando se vendan entre 9 y 158 bicicletas. Cuando se vendan menos de 9 y más de 158 bicicletas la compañía tendrá pérdidas (vea la **figura 10.40**).

Ahora resuelva el ejercicio 55

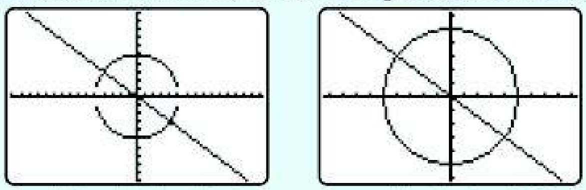
CÓMO UTILIZAR SU CALCULADORA GRAFICADORA

Para resolver sistemas de ecuaciones no lineales de forma gráfica, grafique las ecuaciones y determine las intersecciones de las gráficas. Considere el sistema del ejemplo 1, $x^2 + y^2 = 25$ y $3x + 4y = 0$. Para graficar $x^2 + y^2 = 25$, utilizamos $Y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ $Y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$.

Si resolvemos $3x + 4y = 0$ para y obtenemos $y = -\frac{3}{4}x$. Así que usamos $Y_3 = -\frac{3}{4}x$. Por lo tanto, para resolver este sistema determinamos las intersecciones de

$$Y_1 = \sqrt{25 - x^2}$$
$$Y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$$
$$Y_3 = -\frac{3}{4}x$$

En la **figura 10.41a**, el sistema se graficó con la característica ZOOM:5 (ZSquared)*. En la **figura 10.41b**, graficamos estas ecuaciones utilizando los "números adecuados" que se muestran debajo de la figura. Por medio de la calculadora con la característica TRACE o ZOOM, o la característica INTERSECT, determinará que las soluciones son $(4, -3)$ y $(-4, 3)$.



$\approx -15.2, \approx 15.2, 1, -10, 10, 1$ $\quad$ $-9.4, 9.4, 1, -6.2, 6.2, 1$

(a) $\quad$ (b)

FIGURA 10.41

*Para obtener esta gráfica, inicie con la ventana estándar y luego seleccione ZOOM:5.

CONJUNTO DE EJERCICIOS 10.4

Ejercicios de concepto/redacción

1. ¿Qué es un sistema de ecuaciones no lineales?
2. Explique cómo pueden resolverse gráficamente sistemas de ecuaciones no lineales.
3. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales tener exactamente una solución? Si es así, proporcione un ejemplo. Explique.
4. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales tener exactamente dos soluciones? Si es así, proporcione un ejemplo. Explique.
5. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales tener exactamente tres soluciones? Si es así, proporcione un ejemplo. Explique.
6. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales carecer de soluciones reales? Si es así, proporcione un ejemplo. Explique.

Práctica de habilidades

Mediante el método de sustitución, determine todas las soluciones reales para cada sistema de ecuaciones.

7. $x^2 + y^2 = 18$
   $x + y = 0$
8. $x^2 + y^2 = 18$
   $x - y = 0$
9. $x^2 + y^2 = 9$
   $x + 2y = 3$
10. $x^2 + y^2 = 4$
    $x - 2y = 4$
11. $y = x^2 - 5$
    $3x + 2y = 10$
12. $x + y = 4$
    $x^2 - y^2 = 4$
13. $x^2 + y = 6$
    $y = x^2 + 4$
14. $y - x = 2$
    $x^2 - y^2 = 4$
15. $2x^2 + y^2 = 16$
    $x^2 - y^2 = -4$
16. $x + y^2 = 4$
    $x^2 + y^2 = 6$
17. $x^2 + y^2 = 4$
    $y = x^2 - 6$
18. $x^2 - 4y^2 = 36$
    $x^2 + 2y^2 = 5$
19. $x^2 + y^2 = 9$
    $y = x^2 - 3$
20. $x^2 + y^2 = 16$
    $y = x^2 - 4$
21. $2x^2 - y^2 = -8$
    $x - y = 6$
22. $x^2 + y^2 = 1$
    $y - x = 3$

Por medio del método de eliminación (suma), determine todas las soluciones reales para cada sistema de ecuaciones.

23. $x^2 - y^2 = 4$
    $2x^2 + y^2 = 8$
24. $x^2 + y^2 = 36$
    $x^2 - y^2 = 36$
25. $x^2 + y^2 = 16$
    $2x^2 - 5y^2 = 25$
26. $x^2 + y^2 = 25$
    $x^2 - 2y^2 = 7$

27. $3x^2 - y^2 = 4$
$x^2 + 4y^2 = 10$

28. $3x^2 + 2y^2 = 30$
$x^2 + y^2 = 13$

29. $4x^2 + 9y^2 = 36$
$2x^2 - 9y^2 = 18$

30. $x^2 + 4y^2 = 16$
$-9x^2 + y^2 = 4$

31. $2x^2 - y^2 = 7$
$x^2 + 2y^2 = 6$

32. $5x^2 - 2y^2 = -13$
$3x^2 + 4y^2 = 39$

33. $x^2 + y^2 = 25$
$2x^2 - 3y^2 = -30$

34. $x^2 - 2y^2 = 7$
$x^2 + y^2 = 34$

35. $x^2 + y^2 = 9$
$16x^2 - 4y^2 = 64$

36. $3x^2 + 4y^2 = 35$
$2x^2 + 5y^2 = 42$

37. $x^2 + y^2 = 4$
$16x^2 + 9y^2 = 144$

38. $x^2 + y^2 = 1$
$9x^2 - 4y^2 = 36$

39. $x^2 + 4y^2 = 4$
$10y^2 - 9x^2 = 90$

40. $x^2 + y^2 = 81$
$25x^2 + 4y^2 = 100$

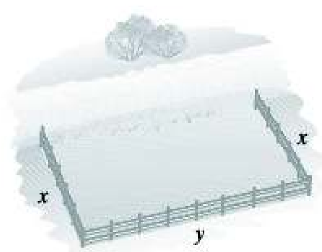
Resolución de problemas

41. Construya su propio sistema de ecuaciones no lineales cuya solución sea el conjunto vacío. Explique cómo sabe que el sistema no tiene solución.

42. Si un sistema de ecuaciones consiste en una elipse y una hipérbola, ¿cuál es el número máximo de puntos de intersección? Haga un bosquejo para ilustrar esto.

43. **Pista de baile** Kris Hundley quiere construir una pista rectangular de baile en su gimnasio. La pista tendrá un perímetro de 84 metros y un área de 440 metros cuadrados. Determine las dimensiones de la pista de baile.

44. **Región rectangular** Ellen Dupree cerca un área rectangular a lo largo de la orilla de un río, como se ilustra. Si 20 pies de cerca encierran un área de 48 pies cuadrados, determine las dimensiones del área encerrada.



45. **Hortaliza** James Cannon planea construir una hortaliza rectangular atrás de su casa; tendrá un perímetro de 78 pies y un área de 270 pies cuadrados. Determine las dimensiones de la hortaliza.

46. **Región rectangular** Un área rectangular que está a lo largo de un río, será cercada, como se ilustró en el ejercicio 44. Si 20 pies de cerca encierran un área de 50 pies cuadrados, determine las dimensiones del área encerrada.

47. **Moneda** Las monedas en circulación de un país incluyen un billete que tiene un área de 112 centímetros cuadrados con una diagonal de $\sqrt{260}$ centímetros. Determine la longitud y el ancho del billete.

48. **Pista de patinaje** Una pista rectangular de patinaje sobre hielo tiene un área de 3000 pies cuadrados. Si la diagonal de la pista es de 85 pies, determine las dimensiones de la pista.

Plaza Rockefeller, Ciudad de Nueva York

49. **Pieza de madera** Frank Samuelson, un carpintero, tiene una pieza rectangular de madera. Mide su diagonal y determina que es de 34 pulgadas. Cuando corta la madera a lo largo de la diagonal, el perímetro de cada triángulo que se forma es de 80 pulgadas. Determine las dimensiones de la pieza original de madera.

50. **Velero** Una vela de un velero tiene la forma de un triángulo rectángulo con perímetro de 36 metros y una hipotenusa de 15 metros. Determine la longitud de los catetos del triángulo.

51. **Beisbol y futbol** Paul Martin lanza hacia arriba un balón de fútbol, desde el piso. La altura del balón, con respecto al piso en cualquier instante, t, está dada por la fórmula $d = -16t^2 + 64t$. Al mismo tiempo que se lanza el balón de fútbol, Shannon Ryan lanza una pelota de béisbol hacia arriba desde lo alto de un edificio de 80 pies de altura. La altura con respecto al piso en cualquier instante, t, está dada por la fórmula $d = -16t^2 + 16t + 80$. Determine el instante en el que la pelota y el balón estarán a la misma altura respecto al piso. (No tome en cuenta la resistencia del aire).

52. **Pelota de tenis y una bola de nieve** Robert Snell deja caer una pelota de tenis desde un helicóptero que vuela a una altura de 950 pies. La altura de la pelota con respecto al piso en cualquier instante está dada por la fórmula $d = -16t^2 - 10t + 950$. En el instante en que se deja caer la pelota desde el helicóptero, Ramón Sánchez lanza una bola de nieve hacia arriba desde lo alto de un edificio de 750 pies de altura. La altura con respecto al piso de la bola de nieve en cualquier instante, t, se determina mediante la fórmula $d = -16t^2 + 80t + 750$. ¿En qué instante la pelota y la bola están a la misma altura? (No tome en cuenta la resistencia del aire).

53. **Interés simple** El interés simple se calcula mediante la fórmula de interés simple, interés = capital · tasa · tiempo, o $i = prt$. Si Seana Hayden invierte cierto capital a una tasa específica de interés durante 1 año, el interés que ella obtiene es $7.50. Si aumenta el capital en $25 y la tasa de interés disminuye en 1%, el interés permanece igual. Determine el capital y la tasa de interés.

54. **Interés simple** Si Claire Brooke invierte cierto capital a una tasa específica de interés durante 1 año, el interés que obtiene es $72. Si aumenta el capital en $120 y la tasa de interés disminuye en 2%, el interés que recibe no cambia. Determine el capital y la tasa de interés. Utilice $i = prt$.

Para las ecuaciones de costo y de ingreso dadas, determine el o los puntos de equilibrio.

55. $C = 10x + 300,\ R = 30x - 0.1x^2$

56. $C = 0.6x^2 + 9,\ R = 12x - 0.2x^2$

57. $C = 12.6x + 150,\ R = 42.8x - 0.3x^2$

58. $C = 80x + 900,\ R = 120x - 0.2x^2$

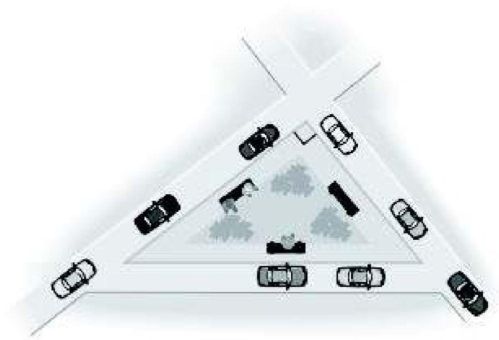
Con su calculadora graficadora, resuelva los sistemas siguientes. Redondee sus respuestas al centésimo más cercano.

59. $3x - 5y = 12$
$x^2 + y^2 = 10$

60. $y = 2x^2 - x + 2$
$4x^2 + y^2 = 36$

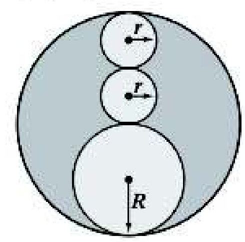
Retos

61. **Intersección de caminos** La intersección de tres caminos forma un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura.



Si la hipotenusa es de 26 yardas y el área es de 120 yardas cuadradas, determine la longitud de los dos catetos del triángulo.

62. En la figura que se muestra, R representa el radio del círculo interior más grande y r representa el radio de los círculos internos más pequeños. Si $R = 2r$ y si el área sombreada es de 122.5π, determine r y R.



Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **63.** Liste el orden que seguimos al evaluar una expresión.

[5.6] **64.** Factorice $(x + 1)^3 + 1$.

[6.6] **65.** Sabe que x varía inversamente con el cuadrado de P. Si $x = 10$ cuando P es 6, determine x cuando $P = 20$.

[7.5] **66.** Simplifique $\dfrac{5}{\sqrt{x+2} - 3}$.

[9.7] **67.** Despeje a k de $A = A_0e^{kt}$.

Resumen del capítulo 10

HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 10.1

Las cuatro **secciones cónicas** son la parábola, la circunferencia, la elipse y la hipérbola, que se obtienen al realizar cortes en un cono.

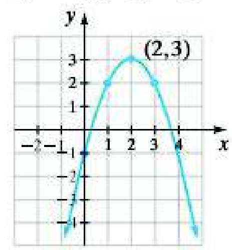
Parábola   Circunferencia   Elipse   Hipérbola

Las cuatro formas diferentes para ecuaciones de parábolas se resumen a continuación.*

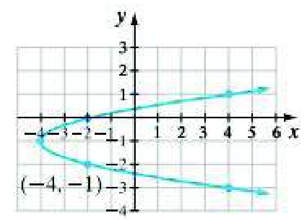
Parábola con vértice en (h, k)

1. $y = a(x - h)^2 + k, a > 0$ (abre hacia arriba)
2. $y = a(x - h)^2 + k, a < 0$ (abre hacia abajo)
3. $x = a(y - k)^2 + h, a > 0$ (abre hacia la derecha)
4. $x = a(y - k)^2 + h, a < 0$ (abre hacia la izquierda)

$y = -(x - 2)^2 + 3$



$x = 2(y + 1)^2 - 4$



Fórmula de la distancia

La distancia, d, entre cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puede determinarse mediante la fórmula de la distancia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

La distancia entre $(-1, 3)$ y $(4, 15)$ es

$$d = \sqrt{[4 - (-1)]^2 + (15 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

Fórmula del punto medio

Dados cualesquiera dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el punto que se encuentra a la mitad de los puntos dados se puede determinar mediante la fórmula del punto medio:

$$\text{punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

El punto medio del segmento de recta que une $(7, 6)$ y $(-11, 10)$ es

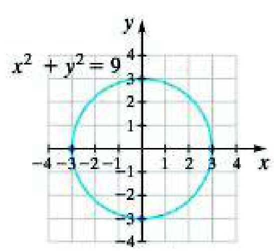
$$\text{punto medio} = \left(\frac{7 + (-11)}{2}, \frac{6 + 10}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{16}{2}\right) = (-2, 8)$$

Una **circunferencia** es un conjunto de puntos en un plano que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo llamado su **centro**.

Circunferencia con su centro en el origen y radio r

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Haga un bosquejo de la gráfica de $x^2 + y^2 = 9$.
La gráfica es una circunferencia con su centro en $(0, 0)$ y radio $r = 3$.



* Si la parábola está inclinada, como verá en cursos más avanzados, se tienen otras ecuaciones. (N. del T.).

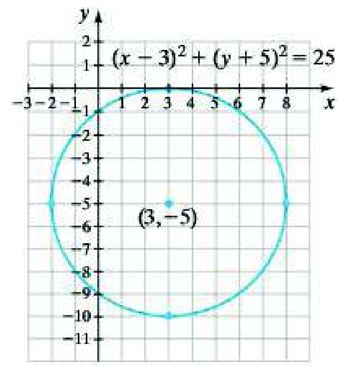
HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 10.1 (continuación)

Circunferencia con su centro en (h, k) y radio r

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Haga un bosquejo de la gráfica de $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$.
La gráfica es una circunferencia con su centro en $(3, -5)$ y radio $r = 5$.



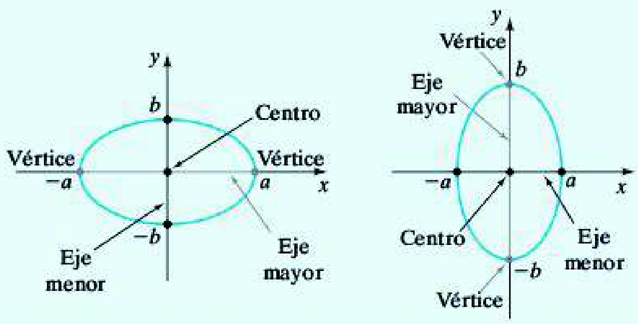
Sección 10.2

Una **elipse** es un conjunto de puntos en un plano, la suma de cuyas distancias a dos puntos fijos (denominados **focos**) es una constante.

Elipse con centro en el origen

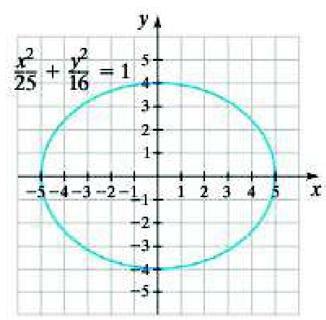
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son las intersecciones con el eje x y $(0, b)$ y $(0, -b)$ son las intersecciones con el eje y.



Bosqueje la gráfica de $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

La gráfica es una elipse. Como $a = 5$, las intersecciones con el eje x son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Como $b = 4$, las intersecciones con el eje y son $(0, -4)$ y $(0, 4)$.

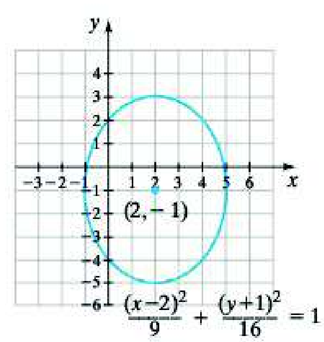


Elipse con centro en (h, k)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Haga un bosquejo de la gráfica de $\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$.

La gráfica es una elipse con su centro en $(2, -1)$, donde $a = 3$ y $b = 4$.



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES | **EJEMPLOS**

Sección 10.2 (continuación)

El área, A, de una elipse es $A = \pi ab$.

El área de la segunda elipse de la página 692 es

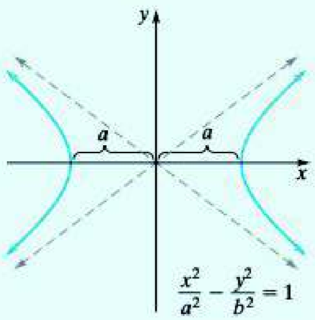
$$A = \pi ab = \pi \cdot 3 \cdot 4 = 12\pi \approx 37.70 \text{ unidades cuadradas.}$$

Sección 10.3

Una **hipérbola** es un conjunto de puntos en un plano, cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (llamados **focos**) es una constante.

Hipérbola con su centro en el origen

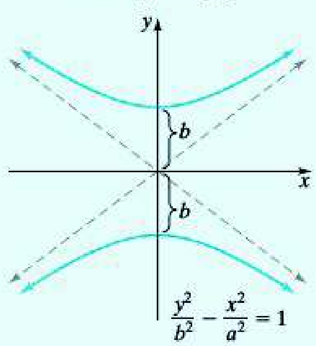
Hipérbola
con eje transversal
a lo largo del eje x



Asíntotas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Hipérbola
con eje transversal
a lo largo del eje y



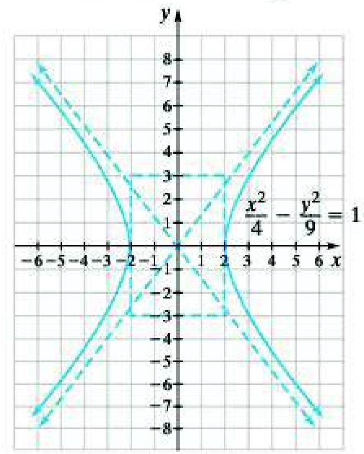
Asíntotas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Determine las ecuaciones de las asíntotas y bosqueje una gráfica de $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

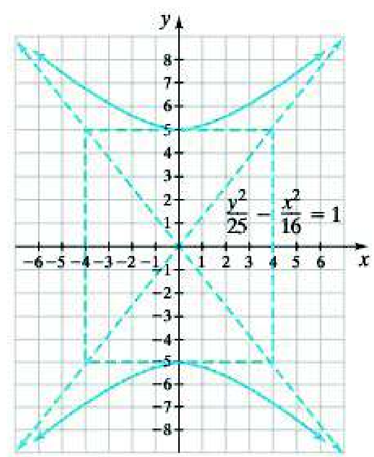
La gráfica es una hipérbola con $a = 2$ y $b = 3$.

Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$.



Determine las ecuaciones de las asíntotas y bosqueje una gráfica de $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$.

La gráfica es una hipérbola con $a = 4$ y $b = 5$. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{5}{4}x$ y $y = -\frac{5}{4}x$.



HECHOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 10.4	
Un **sistema no lineal de ecuaciones** es un sistema de ecuaciones en donde al menos una ecuación no es lineal. La solución de un sistema no lineal de ecuaciones es el punto o puntos que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.	Resuelva el sistema de ecuaciones. $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 14 \\ 5x^2 - y^2 &= -2 \end{aligned}$$ Resolveremos este sistema mediante el método de eliminación (suma). $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 14 \\ \underline{5x^2 - y^2} &\underline{= -2} \\ 6x^2 \qquad &= 12 \\ x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$ Para obtener el valor o valores para y, utilizamos la ecuación $x^2 + y^2 = 14$. $$\begin{array}{cc} x = \sqrt{2} & x = -\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 14 & x^2 + y^2 = 14 \\ (\sqrt{2})^2 + y^2 = 14 & (-\sqrt{2})^2 + y^2 = 14 \\ 2 + y^2 = 14 & 2 + y^2 = 14 \\ y^2 = 12 & y^2 = 12 \\ y = \pm\sqrt{12} & y = \pm\sqrt{12} \\ = \pm 2\sqrt{3} & = \pm 2\sqrt{3} \end{array}$$ El sistema tiene cuatro soluciones: $(\sqrt{2}, 2\sqrt{3}), (\sqrt{2}, -2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, -2\sqrt{3})$

Ejercicios de repaso del capítulo 10

[10.1] *Determine la longitud y el punto medio del segmento de recta definido por cada pareja de puntos.*

1. $(0, 0), (5, -12)$ **2.** $(-4, 1), (-1, 5)$ **3.** $(-9, -5), (-1, 10)$ **4.** $(-4, 3), (-2, 5)$

Grafique cada ecuación.

5. $y = (x - 2)^2 + 1$ **6.** $y = (x + 3)^2 - 4$ **7.** $x = (y - 1)^2 + 4$ **8.** $x = -2(y + 4)^2 - 3$

En los ejercicios 9 a 12, **a)** *escriba cada ecuación en la forma $y = a(x - h)^2 + k$ o $x = a(y - k)^2 + h$.* **b)** *Grafique la ecuación.*

9. $y = x^2 - 8x + 22$ **10.** $x = -y^2 - 2y + 5$ **11.** $x = y^2 + 5y + 4$ **12.** $y = 2x^2 - 8x - 24$

En los ejercicios 13 a 18, **a)** *escriba la ecuación de cada circunferencia en la forma general.* **b)** *Trace la gráfica.*

13. Centro $(0, 0)$, radio 4. **14.** Centro $(-3, 4)$, radio 1. **15.** $x^2 + y^2 - 4y = 0$

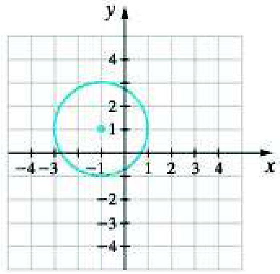
16. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ **17.** $x^2 - 8x + y^2 - 10y + 40 = 0$ **18.** $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 17 = 0$

Grafique cada ecuación.

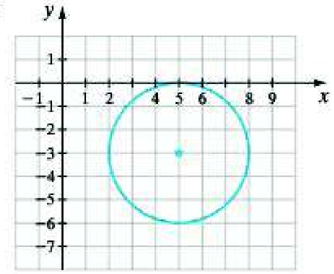
19. $y = \sqrt{9 - x^2}$ **20.** $y = -\sqrt{36 - x^2}$

Determine la ecuación de cada circunferencia.

21.



22.



[10.2] *Grafique cada ecuación.*

23. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

24. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

25. $4x^2 + 9y^2 = 36$

26. $9x^2 + 16y^2 = 144$

27. $\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

28. $\dfrac{(x+3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

29. $25(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 225$

30. Para la elipse del ejercicio 23, determine el área.

[10.3] *En los ejercicios 31 a 34,* **a)** *determine las ecuaciones de las asíntotas para cada ecuación.* **b)** *Trace la gráfica.*

31. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

32. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

33. $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

34. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

En los ejercicios 35 a 38, **a)** *escriba cada ecuación en la forma general.* **b)** *Determine las ecuaciones de las asíntotas.* **c)** *Trace la gráfica.*

35. $x^2 - 9y^2 = 9$

36. $25x^2 - 16y^2 = 400$

37. $4y^2 - 25x^2 = 100$

38. $49y^2 - 9x^2 = 441$

[10.1–10.3] *Identifique la gráfica de cada ecuación como circunferencia, parábola, elipse o hipérbola.*

39. $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

40. $4x^2 + 8y^2 = 32$

41. $5x^2 + 5y^2 = 125$

42. $4x^2 - 25y^2 = 25$

43. $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

44. $y = (x-2)^2 + 1$

45. $12x^2 + 9y^2 = 108$

46. $x = -y^2 + 8y - 9$

[10.4] *Mediante el método de sustitución, determine todas las soluciones reales para cada sistema de ecuaciones.*

47. $x^2 + 2y^2 = 25$
$x^2 - 3y^2 = 25$

48. $x^2 = y^2 + 4$
$x + y = 4$

49. $x^2 + y^2 = 9$
$y = 3x + 9$

50. $x^2 + 2y^2 = 9$
$x^2 - 6y^2 = 36$

Mediante el método de eliminación (suma), determine todas las soluciones reales para cada sistema de ecuaciones.

51. $x^2 + y^2 = 36$
$x^2 - y^2 = 36$

52. $x^2 + y^2 = 25$
$x^2 - 2y^2 = -2$

53. $-4x^2 + y^2 = -15$
$8x^2 + 3y^2 = -5$

54. $3x^2 + 2y^2 = 6$
$4x^2 + 5y^2 = 15$

55. Mesa de billar Jerry y Dennis tienen una mesa de billar en su casa. Tiene un área de 45 pies cuadrados y un perímetro de 28 pies. Determine las dimensiones de la mesa de billar.

56. Botellas de pegamento Una compañía tiene una ecuación de costos dada por $C = 20.3x + 120$ y una ecuación de ingresos dada por $R = 50.2x - 0.2x^2$, en donde x es el número de botellas de pegamento que vende. Determine el número de botellas de pegamento que la compañía debe vender para estar en el punto de equilibrio.

57. Cuenta de ahorros Si Kien Kempter invierte cierto capital a una tasa específica de interés durante 1 año, el interés es de \$120. Si aumenta el capital en \$2000 y la tasa de interés se disminuye en 1%, el interés que recibiría no cambia. Determine el capital y la tasa de interés. Utilice $i = prt$.

Examen de práctica del capítulo 10

Para determinar el nivel de comprensión del material del capítulo, haga este examen de práctica. Las respuestas y la sección en la que se estudia por primera vez el material, se proporciona en la parte final del libro. Además, cada problema está completamente resuelto en el **Chapter Test Prep Video CD.** *Revise el material de aquellas preguntas que respondió de forma incorrecta.*

1. ¿Por qué las parábolas, circunferencias, elipses e hipérbolas se denominan secciones cónicas?

2. Determine la longitud del segmento de recta cuyos extremos son $(-1, 8)$ y $(6, 7)$.

3. Determine el punto medio del segmento de recta cuyos extremos son $(-9, 4)$ y $(7, -1)$.

4. Determine el vértice de la gráfica de $y = -2(x + 3)^2 + 1$ y luego grafique la ecuación.

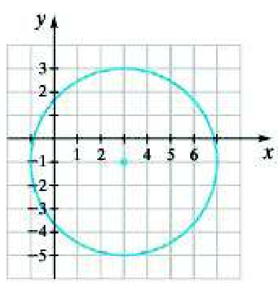
5. Grafique $x = y^2 - 2y + 4$.

6. Escriba la ecuación $x = -y^2 - 4y - 5$ en la forma $x = a(y - k)^2 + h$, y luego trace la gráfica.

7. Escriba la ecuación de la circunferencia con centro en $(2, 4)$ y radio 3 y luego trace la gráfica de la circunferencia.

8. Determine el área de la circunferencia cuya ecuación es $(x + 2)^2 + (y - 8)^2 = 9$.

9. Escriba una ecuación de la circunferencia que se muestra.

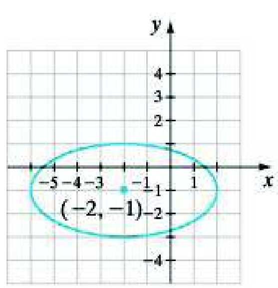


10. Grafique $y = -\sqrt{16 - x^2}$.

11. Escriba la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ en forma general, y luego trace la gráfica.

12. Grafique $4x^2 + 25y^2 = 100$.

13. ¿La gráfica siguiente es la gráfica de $\dfrac{(x + 2)^2}{4} + \dfrac{(y + 1)^2}{16} = 1$? Explique su respuesta



14. Grafique $4(x - 4)^2 + 36(y + 2)^2 = 36$.

15. Determine el centro de la elipse dada por la ecuación $3(x - 8)^2 + 6(y + 7)^2 = 18$.

16. Explique cómo determina si el eje transversal de la hipérbola está a lo largo del eje x o del eje y.

17. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{49} = 1$?

18. Grafique $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{1} = 1$.

19. Grafique $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

En los ejercicios 20 y 21, determine si la gráfica de la ecuación es una parábola, circunferencia, elipse o hipérbola.

20. $4x^2 - 15y^2 = 30$

21. $25x^2 + 4y^2 = 100$

Resuelva cada sistema de ecuaciones.

22. $x^2 + y^2 = 7$

$2x^2 - 3y^2 = -1$

23. $x + y = 8$

$x^2 + y^2 = 4$

24. **Hortaliza** En su rancho, Tom Wilson tiene una hortaliza rectangular con un área de 1500 metros cuadrados. Si el perímetro es de 160 metros, determine las dimensiones de la hortaliza.

25. **Plataforma de un camión** Gina Chang posee un camión. La plataforma rectangular del camión tiene un área de 60 pies cuadrados, y la diagonal mide 13 pies. Determine las dimensiones de la plataforma del camión.

Examen de repaso acumulativo

Resuelva el examen siguiente y verifique sus respuestas con las que aparecen al final del libro. Revise las preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo donde se estudia el material está indicado después de la respuesta.

1. Simplifique $(9x^2y^5)(-3xy^4)$.
2. Resuelva $4x - 2(3x - 7) = 2x - 5$.
3. Determine el conjunto solución de: $2(x - 5) + 2x = 4x - 7$.
4. Determine el conjunto solución de: $|3x + 1| > 4$
5. Grafique $y = -2x + 2$.
6. Si $f(x) = x^2 + 3x + 9$, determine $f(10)$.
7. Resuelva el sistema de ecuaciones.
$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2$$
$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y = 6$$
8. Factorice $x^4 - x^2 - 42$.
9. Un gran letrero de forma triangular tiene una altura que es 6 pies menor que su base. Si el área del letrero es de 56 pies cuadrados, determine la longitud de la base y la altura del letrero.

10. Multiplique $\frac{3x^2 - x - 4}{4x^2 + 7x + 3} \cdot \frac{2x^2 - 5x - 12}{6x^2 + x - 12}$.
11. Reste $\frac{x}{x + 3} - \frac{x + 5}{2x^2 - 2x - 24}$.
12. Resuelva $\frac{3}{x + 3} + \frac{5}{x + 4} = \frac{12x + 19}{x^2 + 7x + 12}$.
13. Simplifique $\left(\frac{18x^{1/2}y^3}{2x^{3/2}}\right)^{1/2}$.
14. Simplifique $\frac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x} - y}$.
15. Resuelva $3\sqrt[3]{2x + 2} = \sqrt[3]{80x - 24}$.
16. Resuelva $3x^2 - 4x + 5 = 0$ mediante la fórmula cuadrática.
17. Resuelva $\log(3x - 4) + \log 4 = \log(x + 6)$.
18. Resuelva $35 = 70e^{-0.3x}$.
19. Grafique $9x^2 + 4y^2 = 36$.
20. Grafique $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$.