GEOMETRIA ANALITICA MODERNA

William Wooton
Los Angeles Pierce College

Edwin F. Beckenbach
University of California, Los Angeles

Frank J. Fleming
Los Angeles Pierce College

Asesores Editoriales

Andrew M. Gleason
Harvard University

Albert E. Meder, Jr.
Rutgers University,
The State University of New Jersey

TERCERA REIMPRESION
MEXICO, 1985

PUBLICACIONES CULTURAL S. A. de C. V.

Título de la obra en inglés:
MODERN ANALYTIC GEOMETRY

Publicada por:

Estados Unidos de Norteamérica

Traducida por:
DR. ENRIQUE DALTABUIT GODAS
Investigador Titular
Instituto de Astronomía
Universidad Nacional Autónoma de México

Derechos reservados en español:

Lago Mayor 186, Col. Anáhuac, Delegación Miguel Hidalgo,
Código Postal 11320, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Registro Número 129

ISBN 968-439-040-8

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición; 1976
Segunda reimpresión: 1979

Prólogo

Es nuestra intención ofrecer a los estudiantes un curso moderno de geometría analítica. Los textos que se emplean para estudiar álgebra, geometría y trigonometría se han transformado en la última década, así como también se ha hecho evidente la necesidad de cambiar el espíritu y el contenido de los planes de estudio correspondientes.

Este texto proporciona una excelente preparación para el estudio del cálculo y el álgebra lineal, aunque es también interesante en sí mismo. Su contenido permite que se le use muy flexiblemente: Se ha planeado para un curso semestral, pero puede emplearse en casos especiales como base de un curso anual y es fácil adaptarlo a los intereses y preparación de los estudiantes. El gran número de problemas que contiene permite tener muchas opciones para asignar tareas y las demostraciones pueden considerarse superficial o profundamente sin menoscabo de la adquisición de los conceptos y razonamientos básicos. Se han colocado asteriscos para señalar aquellos ejercicios particularmente deficiles.

El estudio preliminar del álgebra y la geometría de los vectores en dos dimensiones es un tema novedoso para muchos y logra captar el interés del lector desde el principio. Con esa base se procede a emplear métodos vectoriales para desarrollar conceptos y técnicas de la geometría analítica, lo cual brindará a quienes continúen el estudio de las matemáticas una gran ventaja, y a quienes no lo hagan así una base sólida y moderna.

No obstante, hemos tenido cuidado de incluir un tratamiento completo de los métodos cartesianos tradicionales, paralelo al enfoque vectorial, porque sigue siendo muy importante adquirir una clara comprensión de los mismos. En nuestra opinión el curso que se ofrece en este libro proporciona a los estudiantes una oportunidad poco frecuente de ver cómo están íntimamente relacinadas dos ramas diferentes en apariencia, y de apreciar lo que vale contar con más de un método para resolver un problema determinado.

Al final se proporciona información que será de gran ayuda para el estudiante, como listas de identidades trigonométricas fundamentales, propiedades fundamentales de los números reales, símbolos importantes y un resumen de las fórmulas de la geometría analítica. Se emplean diagramas en color para enfocar la atención en los conceptos y procesos más importantes y para aclarar los ejemplos ilustrativos y los diagramas.

Por último, los estudiantes disfrutarán de la serie de estudios ilustrados que aparecen al final de cada capítulo. Estos estudios tienen como finalidad profundizar y ampliar el interés de los estudiantes en el tema en cuestión y en sus aplicaciones.

William Wooton
Edwin F. Beckenbach
Frank J. Fleming

Créditos

43	Cortesía de *Scripta Mathematica*
45	Cortesía de la Universidad de Yale
208	Cortesía de la Oficina Australiana de Información y Noticias
210	Cortesía de la División de Prensa e Información de la Embajada de Francia
303	Cortesía de General Dynamics
III, 359	Modelo cortesía del Instituto Tecnológico de Massachusetts; fotografía de John T. Urban (abajo)
359	Modelo cortesía de John Greenfield; fotografía de John T. Urban (arriba)
385	Cortesía de la Sra. Veblen

Contenido

Capítulo 1 Vectores en el plano

Capítulo 2 Rectas en el plano

Capítulo 3 Aplicaciones de la recta

Capítulo 4 Secciones cónicas

Capítulo 5 Transformaciones de coordenadas

Capítulo 6 Trazo de curvas

Capítulo 7 Coordenadas polares

Capítulo 8 Vectores en el espacio

Capítulo 9 Rectas y planos en el espacio

Capítulo 10
Superficies y transformaciones de coordenadas en el espacio

Simbología

$A \times B$	producto cartesiano	1
$\mathcal{R}$	conjunto de números reales	1
$\mathcal{R}^2$	$\mathcal{R} \times \mathcal{R}$	1
$d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$	distancia entre los puntos **A** y **B**	3
$\lvert x \rvert$	valor absoluto de x	4
$\mathbf{v}$, $\underset{\sim}{v}$, $\vec{v}$, (x, y)	vectores	6
u	escalar	6
$\lVert \mathbf{v} \rVert$	norma de un vector **v**	13
$m^{\circ}(\theta)$	medida de un ángulo θ en grados	14
$m^{R}(\theta)$	medida de un ángulo θ en radianes	14
cos	función coseno	14
sen	función seno	14
tan	función tangente	15
$\doteq$	aproximadamente iguales	15
1°	1 grado	15
$1'$	1 minuto	15
$\overline{\mathbf{ST}}$	segmento de línea cuyos puntos extremos son **S** y **T**	17
$\theta_{\mathbf{v}}$	ángulo de dirección de un vector **v**	18
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	producto interno de los vectores **u** y **v**	27
$\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$	el vector $(-y, x)$, donde $\mathbf{v} = (x, y)$	27
$\mathbf{Comp}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$	vector componente de **v** paralelo a **u**	36
$\mathbf{Comp}_{\mathbf{u_p}}\,\mathbf{v}$	vector componente de **v** perpendicular a **u**	36
$\mathrm{Comp}_{\mathbf{t}}\,\mathbf{v}$	componente escalar de **v** paralelo a **t**	37
$d(\mathbf{S}, \mathcal{L})$	distancia de un punto S a una recta **T**	89
$l(\mathbf{S}, \mathbf{T})$	distancia dirigida desde un punto S a un punto **T**	90
$\emptyset$	conjunto vacío o nulo	97
$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$	matriz	103
$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$	determinante	103
D, det M	determinante de la matriz M	103
e	excentricidad	154
Δ	discriminante de una ecuación cuadrática	191
$f(x)$	el valor de una función f en x (léase "f de x")	213

$\frac{f}{g}$	cociente de dos funciones f y g	220
$\log_{10}$	función logarítmica de base 10	230
$(r, m(\theta))$ o (r, θ)	coordenadas polares de un punto	243
sec	función secante	256
csc	función cosecante	256
cot	función cotangente	256
T^{-1}	transformación inversa o inversa de una matriz **T**	269, 302
$A \times B \times C$	producto cartesiano de los conjuntos A, B y C,	273
$\mathcal{R}^3$	$\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$	273
$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$	producto vectorial de los vectores **u** y **v**	294
I	matriz identidad	302
$(r, m(\theta), z)$ o (r, θ, z)	coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio	370
$(\rho, m(\theta), m(\phi))$ o (ρ, θ, ϕ)	coordenadas esféricas de un punto en el espacio	372

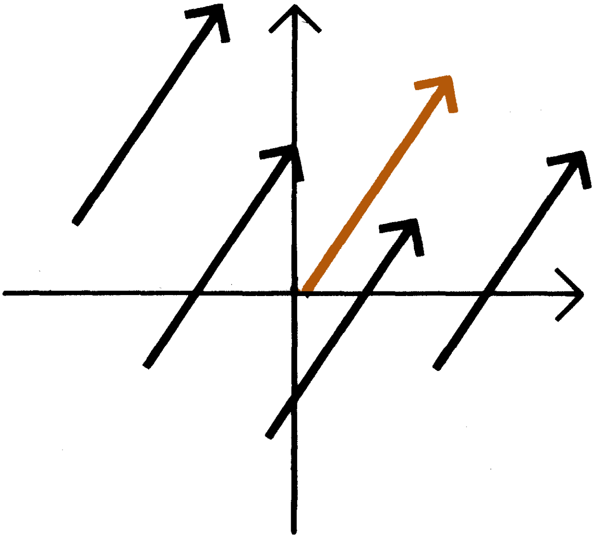
Alfabeto Griego

A	α	Alfa	I	ι	Iota	P	ρ	Rho
B	β	Beta	K	κ	Kappa	Σ	σ ς	Sigma
Γ	γ	Gama	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	Mu	Υ	υ	Upsilon
E	ϵ	Epsilon	N	ν	Nu	Φ	ϕ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	o	Omicron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

Alfabeto Manuscrito

$\mathcal{A}$
$\mathcal{B}$
$\mathcal{C}$
$\mathcal{D}$
$\mathcal{E}$
$\mathcal{F}$
$\mathcal{G}$
$\mathcal{H}$
$\mathcal{I}$
$\mathcal{J}$
$\mathcal{K}$
$\mathcal{L}$
$\mathcal{M}$
$\mathcal{N}$
$\tilde{\mathcal{N}}$
$\mathcal{O}$
$\mathcal{P}$
$\mathcal{Q}$
$\mathcal{R}$
$\mathcal{S}$
$\mathcal{T}$
$\mathcal{U}$
$\mathcal{V}$
$\mathcal{W}$
$\mathcal{X}$
$\mathcal{Y}$
$\mathcal{Z}$

Capítulo 1



En este capítulo se presentan el álgebra y la geometría de los vectores en dos dimensiones. Los conceptos y las técnicas desarrolladas en este capítulo se emplearán en los siguientes para resolver problemas de geometría analítica.

Vectores en el Plano

Geometría de Pares Ordenados

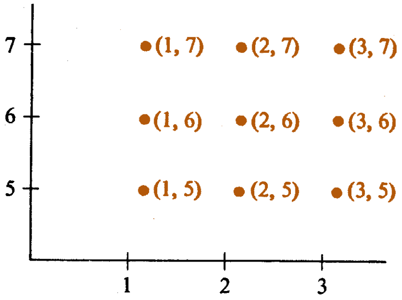
1 – 1 Coordenadas cartesianas

En estudios anteriores de matemáticas se menciona que el producto cartesiano $A \times B$ (léase "A cruz B") de los conjuntos A y B se define como el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) en los cuales la **primera componente** x, es elemento de A y la **segunda componente,** y, es elemento de B. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{5, 6, 7\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (3, 5), (3, 6), (3, 7)\}.$$

Un conjunto de pares ordenados tal como $A \times B$ se puede visualizar como una malla de puntos, como se ve en la Figura 1 – 1.

Figura 1—1



El producto cartesiano que aparecerá más frecuentemente en este libro es $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$, que denotaremos mediante $\mathcal{R}^2$, donde $\mathcal{R}$ es el conjunto de números reales. Por definición de producto cartesiano.

$$\mathcal{R}^2 = \{(x, y) \colon x \in \mathcal{R} \quad \text{y} \quad y \in \mathcal{R}\}.$$

Nótese que cada par ordenado en $\mathcal{R}^2$ se puede asociar en forma única con un punto **S** del plano mediante un sistema de coordenadas **cartesianas rectangulares**, al que se llama también simplemente **sistema de coordenadas cartesiano.**

Las rectas perpendiculares divididas en segmentos numerados que aparecen en la Figura 1—2 se llaman **ejes** del sistema de coordenadas, y su punto de intersección, **O**, se llama el **origen** del sistema de coordenadas. (Tradicionalmente se dirige el eje horizontal hacia la derecha y el eje vertical hacia arriba, tal como se ve en la figura; sin embargo, esto no es necesario, y en cada aplicación hay que orientar los ejes perpendiculares como sea más conveniente.) Las cuatro regiones en que los ejes de coordenadas dividen al plano se llaman **cuadrantes**, y se numeran I, II, III y IV como se muestra en la Figura 1—2.

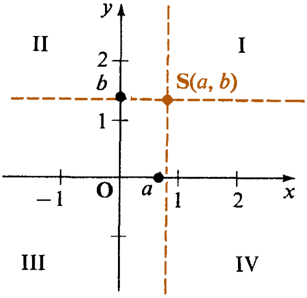


Figura 1—2

El asociar a cada par ordenado (a, b) un punto **S** se lleva a cabo como sigue:

1. Por el punto que corresponda al número a sobre el eje horizontal (el **eje x**) se traza una recta paralela al eje vertical.
2. Por el punto que corresponda al número b sobre el eje vertical (**eje y**) se traza una recta paralela al eje horizontal.
3. Al punto de intersección **S** de estas rectas se le asocian las **coordenadas** (a, b). **S** se llama "la **gráfica** de (a, b)" o a veces simplemente "el punto (a, b)".

La primera componente, a, de (a, b) se llama a veces la **abscisa** de S, y la segunda componente, b, se llama ordenada de **S**.

Obsérvese que si para cada punto **S** del plano se trazan rectas que pasen por **S** y sean paralelas a los ejes, entonces estas rectas se intersecan con los ejes, determinando dos puntos diferentes que son únicos. Los números a y b que corresponden a los puntos de intersección forman uno y sólo un par ordenado (a, b), de manera que la asociación de un punto dado **S** con un par ordenado (a, b) es también única. Es decir, existe una *correspondencia biunívoca* entre el conjunto de puntos del plano y los miembros de $\mathcal{R}^2$, y la gráfica de $\mathcal{R}^2$ es todo el *plano.*

Debido a que existe esta correspondencia biunívoca, si dos pares ordenados corresponden al mismo punto, los pares deben ser iguales. Tenemos entonces que:

■ Dos pares ordenados (a, b) y (c, d) de $\mathcal{R}^2$ corresponden al mismo punto si y sólo si son iguales, es decir, si y sólo si

$$a = c \quad \text{y} \quad b = d.$$

Ejemplo 1. ¿Para qué valores reales x y y se tiene que $(x + y, x - y) = (5, 3)$?

Solución: Puesto que los pares ordenados son iguales $x + y = 5$ y $x - y = 3$. Hay que resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 3 \end{aligned} \qquad (1)$$

Para encontrar los valores requeridos de x y y. Sumando miembro a miembro en el sistema anterior se obtiene

$$2x = 8,$$

es decir,

$$x = 4.$$

Sustituyendo a x por 4 en la ecuación $x + y = 5$ se obtiene

$$4 + y = 5,$$
$$y = 1.$$

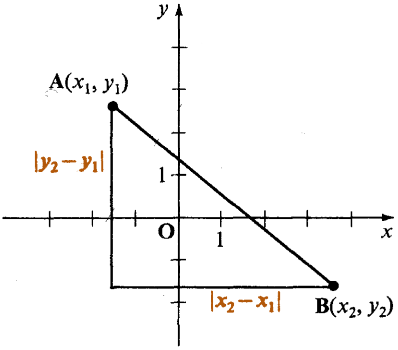
Se puede comprobar que los valores $x = 4$ y $y = 1$ satisfacen las Ecuaciones (1). Por lo tanto, los valores requeridos de x y y son 4 y 1 respectivamente.

Una propiedad importante que debe recordarse es que si se emplea la misma escala en ambos ejes, entonces la distancia que separa a dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano está dada por la **fórmula de distancia**

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Esto es una consecuencia inmediata del bien conocido teorema de Pitágoras

Figura 1—3



(Figura 1 — 3). Al aplicar la fórmula de distancia no importa cual de los puntos sea $A(x_1, y_1)$ y cual sea $B(x_2, y_2)$, puesto que

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo 2. Calcule cuál es la distancia que separa a los puntos $A(-4, 1)$ y $B(3, 2)$.

Solución: Tomando $(x_1, y_1) = (-4, 1)$ y $(x_2, y_2) = (3, 2)$, se obtiene

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (2 - 1)^2}$$
$$= \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Ejercicios 1—1

En los Ejercicios 1–8, determine para qué números reales la ecuación es válida. Si no existe solución, indíquelo.

1. $(x+3, 5) = (-1, 9+x)$	**5.** $(x-2y, 2x+y) = (-1, 3)$
2. $(x-4, 2) = (3, x-5)$	**6.** $(2x+3y, x+4y) = (3, -1)$
3. $(2x-7, x+2) = (-5, 3)$	**7.** $(x^2-2x, x^2-x) = (3, 6)$
4. $(3x+2, 2x-3) = (8, 1)$	**8.** $(x^2+2x, 2x^2+3x) = (-1, -1)$

En los ejercicios 9–14, calcule la distancia que separa a los puntos dados **S** y **T**. Escriba el resultado en la forma más simplificada posible.

9. $S(1, 3)$, $T(-2, 6)$	**12.** $S(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $T(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
10. $S(1, -6)$, $T(6, 6)$	**13.** $S(4, \sqrt{3})$, $T(2, -1)$
11. $S(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $T(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	**14.** $S(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$, $T(1, 2)$

15. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son los puntos $R(0, 1)$, $S(8, -7)$, y $T(1, -6)$ es un triángulo isósceles.

16. Demuestre que los puntos $R(-4, 4)$, $S(-2, -4)$, y $T(6, -2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.

17. Demuestre que el punto $Q(1, -2)$ es equidistante de los puntos $R(-11, 3)$, $S(6, 10)$, y $T(1, 11)$.

18. Demuestre que el punto $Q(2, -3)$ es equidistante de los puntos $R(6, 0)$, $S(-2, -6)$, y $T(-1, 1)$.

19. Los puntos $Q(1, 1)$, $R(2, 5)$, $S(6, 8)$, y $T(5, 4)$ son los vértices de un cuadrilátero. Demuestre que los lados opuestos del cuadrilátero tienen la misma longitud.

20. ¿Son de la misma longitud los lados opuestos del cuadrilátero cuyos vértices son $Q(-2, 3)$, $R(5, 2)$, $S(7, -4)$, y $T(0, -2)$?

21. Use la fórmula de distancia para demostrar que los puntos $R(-2, -5)$, $S(1, -1)$, y $T(4, 3)$ están sobre una recta.

22. Demuestre que los puntos $R(-3, 3)$, $S(2, 1)$, y $T(7, -1)$ están sobre una recta.

23. Demuestre que $R(1, 5)$ es el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $S(-2, 3)$ y $T(4, 7)$.

24. Demuestre que $M\left(\dfrac{a+c}{2}, \dfrac{b+d}{2}\right)$ es el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $S(a, b)$ y $T(c, d)$.

25. Calcule cuál es el punto medio del segmento cuyos extremos son $S(-2, 9)$ y $T(8, -1)$.

26. Calcule cuál es el punto medio del segmento cuyos extremos son $S(-3, 5)$ y $T(3, 2)$.

27. Demuestre que para los puntos $A(x_1, 0)$ y $B(x_2, 0)$, $d(A, B) = |x_2 - x_1|$.

28. Demuestre que para los puntos $C(0, y_1)$ y $D(0, y_2)$, $d(C, D) = |y_2 - y_1|$.

1–2 Puntos y vectores

Se ha visto que se puede asociar cada punto del plano con un par ordenado (x, y). Por ejemplo, se puede asociar con el punto **R** en la Figura 1–4 el par ordenado $(2, -1)$. También se puede asociar un **desplazamiento,** o una **traslación,** en el plano con el mismo par ordenado (x, y). Por ejemplo, considérese una partícula que se mueve de un punto **S** del plano a otro punto, **T**, en el plano, sobre una recta. Si la partícula se desplaza dos unidades hacia la derecha y una unidad hacia abajo, entonces este desplazamiento o traslación se puede describir mediante el par ordenado $(2, -1)$. En la Figura 1–5 se muestra esta traslación.

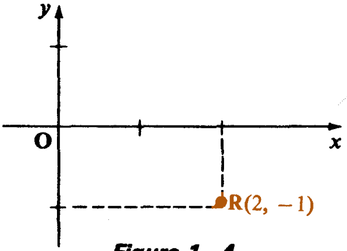


Figura 1–4

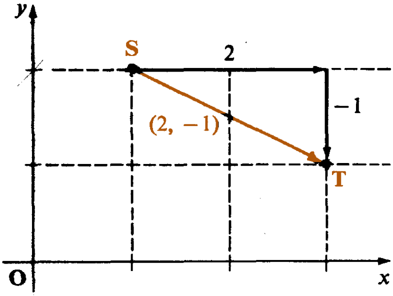


Figura 1–5

Puesto que un par ordenado de números reales (x, y) se puede emplear para determinar una traslación en el plano, a un par ordenado se le llama frecuentemente **vector** (de la palabra latina que significa *transportador*). La representación geométrica de un vector (x, y) es una **flecha**, o un **segmento de recta dirigido**, en el plano; la flecha se llama **vector geométrico.**

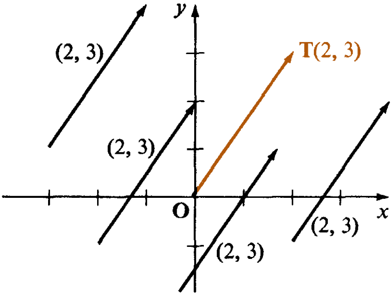


Figura 1–6

Puesto que se puede considerar que una traslación tiene su **punto inicial** en cualquier punto del plano **S** y que tiene un **punto final** en un punto **T** del plano, cada vector (x, y) tiene un número infinito de representaciones geométricas en el plano. La flecha asociada con (x, y) que tiene su *punto inicial en el origen* se llama **representación ordinaria** de (x, y), y se dice que la flecha tiene una **posición ordinaria**. Claramente la representación ordinaria del vector (x, y) tiene como punto final el punto **T** que está asociado con (x, y). En la Figura 1–6 se muestran varias representaciones geométricas de $(2, 3)$; la flecha de color es la representación ordinaria.

Si una flecha cuyo punto inicial es S(a, b) es una representación geométrica del vector (x, y), como se indica en la Figura 1 – 7, entonces el punto final del vector geométrico es el punto T(c, d) cuyas coordenadas satisfacen

$$(c, d) = (a + x, b + y).$$

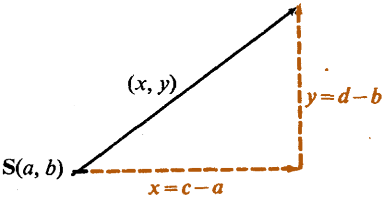


Figura 1–7

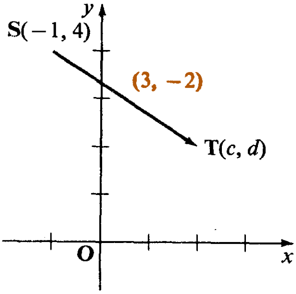
Recíprocamente, si una flecha cuyo punto inicial en S(a, b) tiene al punto T(c, d) como punto final, entonces la flecha es una representación geométrica del vector (x, y), donde

$$(x, y) = (c - a, d - b).$$

Ejemplo 1. ¿Cuáles son las coordenadas del punto final **T** del vector geométrico correspondiente a $(3, -2)$ si el vector tiene como punto inicial el punto S$(-1, 4)$?

Solución: Un dibujo como el que aparece a la derecha ayuda a visualizar la situación. Si (c, d) denota las coordenadas del punto terminal **T** de la flecha, entonces

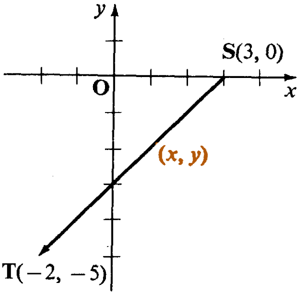
$$\begin{aligned}(c, d) &= (-1 + 3, 4 + (-2)) \\ &= (2, 2).\end{aligned}$$



Ejemplo 2. ¿Qué vector corresponde a la flecha cuyo punto inicial es S$(3, 0)$ y cuyo punto final es T$(-2, -5)$?

Solución: Nuevamente un dibujo resulta útil. Si (x, y) denota al vector con la representación geométrica dada, entonces

$$\begin{aligned}(x, y) &= (-2 - 3, -5 - 0) \\ &= (-5, -5).\end{aligned}$$



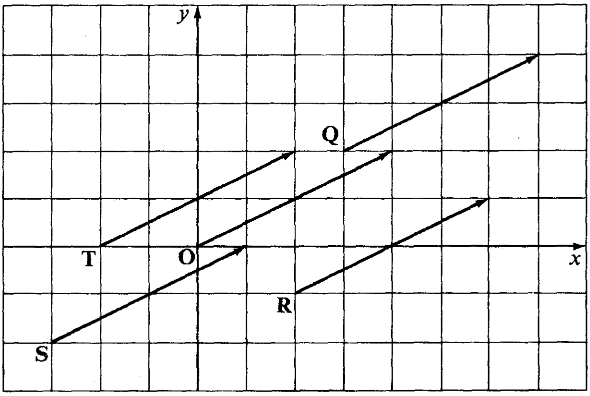
Obsérvese que normalmente se emplea la notación S(x, y) para indicar un punto y sus coordenadas, (x, y) para denotar a un vector o a su representación geométrica. Se emplearán letras en negro, tales como **v**, **u** y **t** para denotar vectores de $\mathcal{R}^2$ y letras cursivas como *u*, *v* y *t* para denotar números reales. En este libro se llamará frecuentemente **escalares** a los números reales. En manuscrito es a veces conveniente representar a un vector mediante una letra con una pequeña flecha encima, como $\vec{v}$, $\vec{t}$, y $\vec{s}$. Otra forma de denotar a un vector es subrayar la letra que lo represente, como $\underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{t}$, y $\underset{\sim}{s}$.

Ejercicios 1—2

En los Ejercicios 1—10, dibuje la flecha que representa al vector dado y que tiene como punto inicial (a) al origen, **O**(0, 0); (b) **Q**(3, 2); (c) **R**(2, −1); (d) **S**(−3, −2); y (e) **T**(−2, 0).

Ejemplo. (4, 2)

Solución:



1. (1, 1)
2. (3, 4)
3. (4, −1)
4. (2, −2)
5. (−2, 1)
6. (−3, 4)
7. (−6, −1)
8. (−2, −4)
9. (3, 0)
10. (0, −5)

En los Ejercicios 11—20, calcule las coordenadas del punto final de la representación geométrica del vector dado si su punto inicial es (a) **O**(0, 0); (b) **Q**(3, 2); (c) **R**(4, −1); (d) **S**(−3, 7); y (e) **T**(−6, −5).

11. (1, 6)
12. (2, 4)
13. (−3, 5)
14. (−4, 1)
15. (7, −8)
16. (3, −4)
17. (−3, −4)
18. (−5, −9)
19. (−2, 0)
20. (0, 4)

En los Ejercicios 21—28, se dan las coordenadas de dos puntos, **S** y **T**. **S** es el punto inicial de la representación geométrica de un vector (*x*, *y*), y **T** es su punto final. Diga cuál es el vector correspondiente en cada caso.

21. S(1, 2), T(5, 4)
22. S(3, 5), T(6, 8)
23. S(2, −1), T(−3, 2)
24. S(6, −4), T(−1, 5)
25. S(7, 12), T(−8, 3)
26. S(4, −2), T(−3, 6)
27. S(−6, −4), T(0, −4)
28. S(−5, −2), T(−5, 6)

29. Calcule cuál es el par ordenado (x, y) tal que la flecha que va desde S(x, y) a T(7, 3) representa al mismo vector que la flecha que va de **O**(0, 0) a **S**.

30. Calcule cuál es el par ordenado (x, y) tal que la flecha que va de $\mathbf{S}(x, y)$ a $\mathbf{T}(9, -3)$ representa al mismo vector que la flecha que va de $\mathbf{O}(0, 0)$ a $\mathbf{S}$.

31. La flecha que va de $\mathbf{R}(3, 5)$ a $\mathbf{S}(x, y)$ representa al mismo vector que la flecha que va de $\mathbf{S}(x, y)$ a $\mathbf{T}(8, 1)$. Calcule (x, y).

32. La flecha que va de $\mathbf{R}(-4, -7)$ a $\mathbf{S}(x, y)$ representa al mismo vector que la flecha que va de $\mathbf{S}(x, y)$ a $\mathbf{T}(4, 11)$. Calcule (x, y).

33. Calcule cuál es el par ordenado (x, y) tal que la flecha que va de $\mathbf{S}(x, y)$ a $\mathbf{T}(6, -2)$ representa al mismo vector que la flecha que va de $\mathbf{Q}(4, -7)$ a $\mathbf{R}(3, 1)$.

34. Calcule cuál es el par ordenado (x, y) tal que la flecha que va de $\mathbf{S}(-1, -2)$ a $\mathbf{T}(x, y)$ representa al mismo vector que la flecha que va de $\mathbf{Q}(2, 4)$ a $\mathbf{R}(8, -2)$.

Operaciones Vectoriales Fundamentales

1—3 Adición y sustracción de vectores

El que cualquier vector (x_1, y_1) se pueda visualizar como la representación de una traslación de x_1 unidades en dirección paralela al eje x seguida de una traslación de y_1 unidades en dirección paralela al eje y sugiere que (x_1, y_1) se puede considerar a (x_1, y_1) como la "suma" de los vectores $(x_1, 0)$ y $(0, y_1)$. (Véase la Figura 1—8.) En general (véase la Figura 1—9) una traslación a lo largo de cualquier flecha que represente al vector $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ seguida de una traslación del punto final de esta flecha a lo largo de la flecha que representa al vector $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$ produce como resultado una traslación total correspondiente al vector $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Esto nos permite definir la **adición** de dos vectores de la siguiente manera:

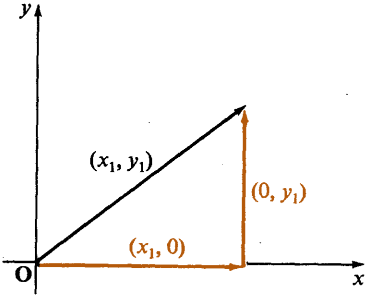


Figura 1—8

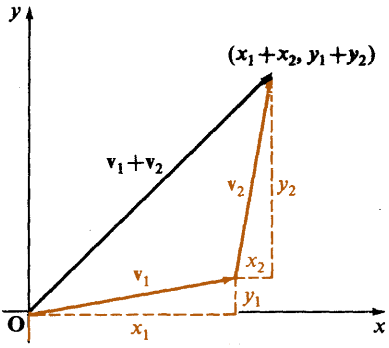


Figura 1—9

■ Si $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1) \in \Re^2$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2) \in \Re^2$, entonces

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Ejemplo 1. Calcular los valores de r y s tales que

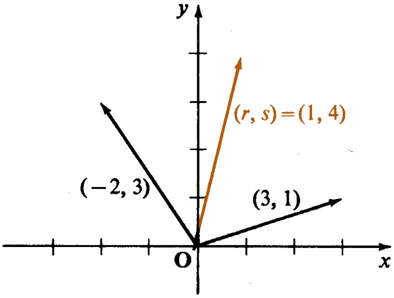
$$(r, s) = (3, 1) + (-2, 3),$$

y dar la representación ordinaria de cada uno de los vectores , (r, s), $(3, 1)$, and $(-2, 3)$.

Solución: Se tiene

$$(r, s) = (3, 1) + (-2, 3) = (3 + (-2), 1 + 3) = (1, 4).$$

La representación ordinaria de cada vector se muestra a la derecha.



Si se trazan líneas punteadas en la figura anterior completando un paralelogramo cuyos lados adyacentes sean las representaciones geométricas (ordinarias) de los vectores $(-2, 3)$ y $(3, 1)$, entonces la diagonal del paralelogramo es la representación geométrica (ordinaria) de la suma $(1, 4)$, como se muestra en la Figura 1 — 10. Debido a esto, se dice que la adición de vectores se efectúa de acuerdo con la **regla del paralelogramo.**

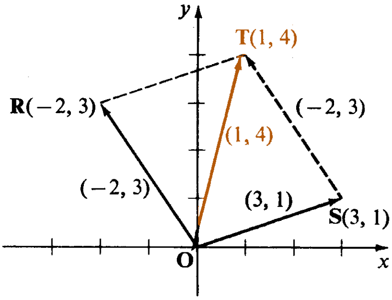


Figura 1 — 10

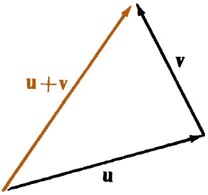


Figura 1 — 11

También, como se muestra en la Figura 1 — 10, existe una flecha que representa a $(-2, 3)$ cuyo punto inicial es $S(3, 1)$ y cuyo punto final es $T(1, 4)$. Esto ilustra la **regla del triángulo** para la adición de dos vectores: Si una flecha que representa al vector **v** se dibuja con su punto inicial en el punto final de una flecha que representa al vector **u**, entonces la flecha que une al punto inicial de **u** con el punto final de **v** representa a la suma vectorial **u** + **v** (Figura 1 — 11).

Puesto que para cualquier vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se tiene

$$(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y),$$

y

$$(0, 0) + (x, y) = (0 + x, 0 + y) = (x, y),$$

el vector $(0, 0)$, llamado el **vector cero**, es el elemento *idéntico de la suma* vectorial en $\mathbb{R}^2$. El vector cero se representa usualmente mediante el símbolo $\mathbf{0}$; su representación geométrica es simplemente un punto.

El símbolo $-\mathbf{v} = -(x, y)$ representa al vector cuyas componentes son los negativos de las componentes de $\mathbf{v} = (x, y)$. Es decir:

■ Si $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $-\mathbf{v} = -(x, y) = (-x, -y)$.

Por ejemplo, si $\mathbf{v} = (2, -4)$, entonces $-\mathbf{v} = (-2, -(-4)) = (-2, 4)$. Puesto que para cualquier vector $\mathbf{v} = (x, y)$, entonces tenemos que

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (x, y) + (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y)) = (0, 0) = \mathbf{0},$$

$-\mathbf{v}$ recibe el nombre de **inverso aditivo,** o **negativo** de $\mathbf{v}$. Esto lleva a una definición natural de **diferencia** de dos vectores:

■ Si $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2)\\ &= (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2)\\ &= (x_1 - x_2, y_1 - y_2).\end{aligned}$$

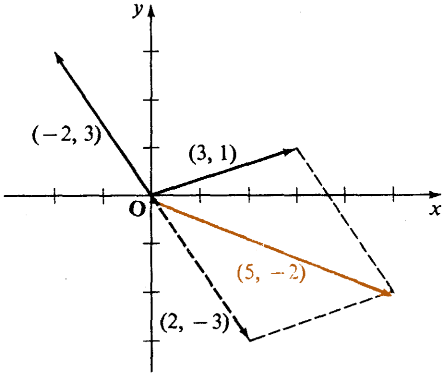
Ejemplo 2. Calcule los valores de r y s tales que $(r, s) = (3, 1) - (-2, 3)$, y dé la representación ordinaria de los tres vectores

$$(r, s), \quad (3, 1), \quad \text{y} \quad (-2, 3).$$

Solución: Se tiene

$$(r, s) = (3, 1) - (-2, 3) = (3, 1) + (2, -3) = (5, -2).$$

La representación ordinaria de cada uno de los vectores se muestra a continuación.



En el diagrama que aparece en el ejemplo 2, obsérvese que el inverso aditivo de (2, −3), es (−2, 3), que tiene una representación geométrica ordinaria que es colineal y de la misma magnitud que (−2, 3), pero de sentido opuesto. Nótese también que la representación geométrica ordinaria de la diferencia de (3, 1) y (−2, 3), es (5, −2), es decir, es la representación geométrica ordinaria de la *adición* de (3, 1) y (2, −3).

En general la representación geométrica ordinaria de $-\mathbf{v}$ es colineal y de la misma longitud que, **v**, pero de sentido opuesto. Se puede entonces obtener una representación geométrica de la diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ aplicando la regla del paralelogramo, o la regla del triángulo, a la suma $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, como se indica en la Figura 1 − 13 (a).

Hay otra forma de visualizar una sustracción de vectores. Si por ejemplo,el vector diferencia

$$(5, -2) = (3, 1) - (-2, 3)$$

del Ejemplo 2 se representa mediante una flecha con punto inicial S(−2, 3), entonces su punto final **T** tiene las coordenadas o bien

$$(-2, 3) + (5, -2), \quad \text{o} \quad (3, 1),$$

como se muestra en la Figura 1 − 12. Esto ilustra lo siguiente: Si **u** y **v** son dos vectores cualesquiera de $\mathcal{R}^2$, entonces la diferencia $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ satisface

$$\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u},$$

existen flechas que representan a **u**, **v**, y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ tales que forman un triángulo en el plano, con las flechas dirigidas como se muestra en la Figura 1 − 13(b). Esto a su vez explica por qué se dice a veces que $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es "el vector que va de **v** a **u**".

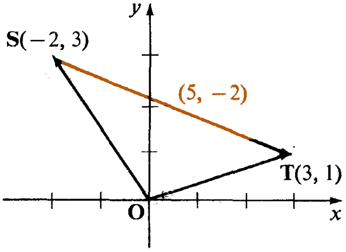


Figura 1—12

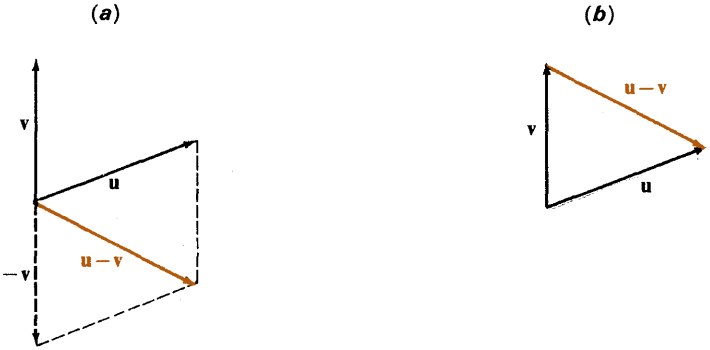


Figura 1—13

En la siguiente lista aparecen las propiedades fundamentales de la adición vectorial. La demostración de estas propiedades se considerará en los ejercicios (página 13).

Propiedades de la adición vectorial

Si **u**, **v** y **s** son vectores en $\mathcal{R}^2$, entonces

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{R}^2$	Cerradura
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	Conmutatividad
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{s} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{s})$	Asociatividad
4. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ y $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$	Idéntico aditivo
5. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ y $(-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$	Inverso aditivo

Nótese que estas propiedades tienen formalmente la misma apariencia que las propiedades de la adición de números reales (véase la página 392). Obsérvese que, en particular, tal como en el caso de la adición de números reales, la adición de vectores es básicamente una operación binaria; la suma de tres o más vectores se define mediante

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{s} = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{s},$$
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{s} + \mathbf{t} = (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{s}) + \mathbf{t},$$

y así sucesivamente. Claro está que, puesto que la adición de vectores es asociativa y conmutativa, se puede sumar vectores en grupos de dos, los que convengan, y obtener el mismo resultado.

Otra propiedad importante de los vectores y de los números reales es el **Principio de Sustitución**.

■ El cambiar el símbolo mediante el cual se representa a un objeto matemático dentro de una expresión matemática no altera el significado de la expresión.

En referencia a la adición vectorial, este principio se puede enunciar de otra manera:

$$\text{Si } \mathbf{u} = \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{s} = \mathbf{t}, \text{ entonces } \mathbf{u} + \mathbf{s} = \mathbf{v} + \mathbf{t}.$$

Ejercicios 1—3

En los ejercicios 1—12, calcular los valores de r y s tales que las afirmaciones sean verdaderas. Hacer un diagrama que muestre la representaciones geométricas ordinarias de todos los vectores que se mencionan.

1. $(r, s) = (4, 1) + (2, -3)$
2. $(r, s) = (3, 4) + (-1, -5)$
3. $(r, s) + (3, -1) = (2, 5)$
4. $(r, s) + (6, -2) = (7, 3)$
5. $(5, -3) + (0, 0) = (r, s)$
6. $(2, -3) + (4, 6) = (r, s)$
7. $(r, s) = (7, -2) - (3, -5)$
8. $(r, s) = (6, 5) - (2, 3)$
9. $(7, -3) - (r, s) = (5, 1)$
10. $(-2, 4) - (r, s) = (3, -2)$
11. $(r, s) - (1, 0) = (5, 1)$
12. $(r, s) - (3, -2) = (4, 5)$

En los ejercicios 13–18, **s** = (−1, 4), **t** = (3, 2), y **u** = (−4, −1). Encontrar un vector **v**, para el cual las ecuaciones dadas sean verdaderas

13. $\mathbf{s} - \mathbf{v} = \mathbf{t}$

14. $\mathbf{v} - \mathbf{s} = \mathbf{u}$

15. $\mathbf{t} + \mathbf{s} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$

16. $\mathbf{u} + \mathbf{t} = \mathbf{v} - \mathbf{s}$

17. $\mathbf{t} + \mathbf{s} = \mathbf{t} - \mathbf{v}$

18. $\mathbf{u} - \mathbf{s} = \mathbf{t} + \mathbf{v}$

En los Ejercicios 19—29, si **a**, **u**, **v**, **s**, y **t** son vectores en $\mathcal{R}^2$, demuestre la validez de cada afirmación.

Ejemplo. $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{R}^2$.

Solución: Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$. Entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Puesto que la adición es cerrada en $\mathcal{R}$, $x_1 + x_2 \in \mathcal{R}$ y $y_1 + y_2 \in \mathcal{R}$. Por lo tanto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathcal{R}^2$.

19. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

20. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{s} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{s})$

21. $\mathbf{v} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u}$

22. Si $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.

23. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

24. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

25. $\mathbf{s} + \mathbf{t} \in \mathcal{R}^2$

26. $-\mathbf{u} - \mathbf{v} = -(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

27. Si $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{t}$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{t} - \mathbf{v}$.

28. Si $\mathbf{a} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$, entonces $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (unicidad del idéntico aditivo)

29. Si $\mathbf{a} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{a} = -\mathbf{u}$ (unicidad del inverso aditivo)

1—4 Magnitud y dirección de un vector

Para cada vector $\mathbf{v} = (x, y)$ en $\mathcal{R}^2$, existe un escalar único llamado **norma** o **magnitud** de **v**. La magnitud de **v** se denota por $\|\mathbf{v}\|$ y se define como

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

De acuerdo con el uso tradicional del símbolo radical $\sqrt{\ }$, *la magnitud de cualquier vector es no negativa.*

Obsérvese, en particular, que si $\mathbf{v} = \mathbf{0} = (0, 0)$, entonces $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{0} = 0$. Recíprocamente si $\|\mathbf{v}\| = 0$, entonces $\mathbf{v} = (0, 0) = \mathbf{0}$, puesto que $\sqrt{x^2 + y^2}$ es 0 si y sólo si tanto x como y son 0. Es decir $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si **v** es el vector cero.

Geométricamente la magnitud de un vector se puede interpretar como la longitud de una de las flechas que lo representan. Por ejemplo, si una flecha que representa a $\mathbf{v} = (x, y)$ tiene su punto inicial en $\mathbf{A}(a, b)$, entonces $\mathbf{v}$ tiene su punto final en $\mathbf{B}(a + x, b + y)$, y usando la fórmula de distancia tenemos

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sqrt{[(a + x) - a]^2 + [(b + y) - b]^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\mathbf{v}\|.$$

Ejemplo 1. Calcular la magnitud de $(3, -2)$.

Solución: $\|(3, -2)\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

A cada vector no nulo $\mathbf{v}$ en $\mathcal{R}^2$ se puede asignar una **dirección** de la siguiente manera:

■ Si $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathcal{R}^2$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces la dirección de $\mathbf{v}$ es la medida del ángulo θ para el cual

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{x}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{1}$$

y $0 \leq m^\circ(\theta) < 360$ si θ se mide en grados o $0 \leq m^R(\theta) < 2\pi$ si θ se mide en radianes.

En el resto de este capítulo se medirán todos los ángulos de dirección en grados.

De las Ecuaciones (1) se sigue que

$$\mathbf{v} = (x, y) = (\|\mathbf{v}\| \cos \theta, \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta). \tag{2}$$

Por lo tanto, un vector queda determinado por su magnitud y su dirección.

Puesto que la dirección de un vector $\mathbf{v}$ se define como la medida de un ángulo θ, entonces al ángulo θ se le llama el **ángulo de dirección** de $\mathbf{v}$. Geométricamente θ se acota mediante una flecha que representa a $\mathbf{v}$ y el segmento que tiene el mismo punto inicial que $\mathbf{v}$, que es paralelo al eje x y está orientado en la dirección positiva del eje x (Figura 1 – 14). Se supone que el segmento paralelo al eje x es el lado inicial de θ. El segmento que contiene la flecha que representa a $\mathbf{v}$, y que tiene el mismo punto inicial que esta flecha es el lado terminal de θ.

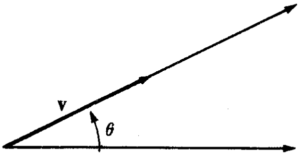


Figura 1 – 14

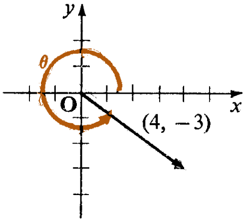
Ejemplo 2. Calcular la magnitud y dirección del vector $(4, -3)$.

Solución: Primero obsérvese que $\|(4, -3)\| = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Ahora, por definición, la dirección $m^\circ(\theta)$ de $(4, -3)$ se determina mediante

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{-3}{5} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{4}{5}.$$

(Nótese, del diagrama adjunto, o bien del hecho que sen $\theta < 0$ y cos $\theta > 0$, que el lado terminal de θ está en el cuadrante IV. Por lo tanto de la Tabla 2 de la Página 389 se obtiene $m°(\theta) \doteq 323° \, 10'$.



Si, para $x \neq 0$, se verifica cuidadosamente si $x > 0$ o si $x < 0$, y también se considera si $y \geq 0$ o bien si $y < 0$, entonces se puede emplear la identidad trigonométrica

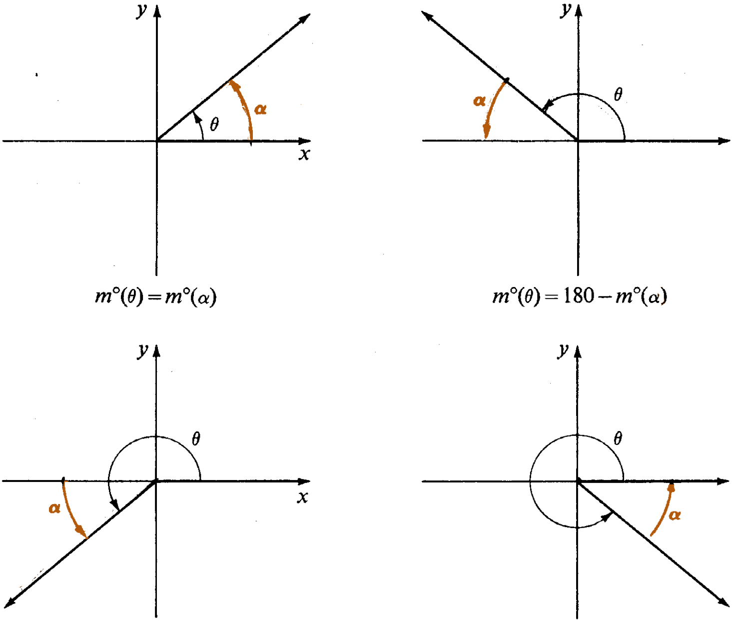
$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x} \tag{3}$$

para obtener la dirección $m°(\theta)$ de $\mathbf{v} = (x, y)$. Si $y = 0$, entonces $m°(\theta) = 0$ o bien $m°(\theta) = 180$ según si $x > 0$ o $x < 0$, respectivamente. Si $y \neq 0$, entonces podemos usar la Ecuación (3) con el objeto de calcular el **ángulo de referencia** α, con $0 < m°(\alpha) < 90$, para el cual

$$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| .$$

Entonces, tomando en cuenta los cuadrantes (véase Figura 1—15), tenemos

$$\begin{array}{lll}
m°(\theta) = m°(\alpha) & \text{Si } x > 0, y > 0 & \text{(cuadrante I)}, \\
m°(\theta) = 180 - m°(\alpha) & \text{Si } x < 0, y > 0 & \text{(cuadrante II)}, \\
m°(\theta) = 180 + m°(\alpha) & \text{Si } x < 0, y < 0 & \text{(cuadrante III)}, \\
m°(\theta) = 360 - m°(\alpha) & \text{si } x > 0, y < 0 & \text{(cuadrante IV)}.
\end{array}$$



$m°(\theta) = m°(\alpha)$ $m°(\theta) = 180 - m°(\alpha)$

$m°(\theta) = 180 + m°(\alpha)$ ***Figura 1—15*** $m°(\theta) = 360 - m°(\alpha)$

Desde luego si $x = 0$ pero $y \neq 0$, entonces $m°(\theta) = 90$ o $m°(\theta) = 270$ respectivamente para $y > 0$ o $y < 0$.

Aplicando este método al vector $(4, -3)$ que aparece en el Ejemplo 2, se tiene

$$\tan\theta = \frac{-3}{4} \quad \text{y} \quad \tan\alpha = \left|\frac{-3}{4}\right| = \frac{3}{4}.$$

Entonces, empleando la Tabla 2 de la página 389 se obtiene $m°(\alpha) \doteq 36° \, 50'$. Puesto que $x > 0$ y $y < 0$,

$$m°(\theta) = 360 - m°(\alpha) \doteq 323° \, 10'.$$

Nótese que para el vector cero **0**, la Ecuación (1) de la página 14 indicaría

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{0}{\|\mathbf{0}\|} = \frac{0}{0} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{0}{\|\mathbf{0}\|} = \frac{0}{0}.$$

Puesto que estas expresiones no tienen sentido, la dirección de **0** no está determinada. Sin embargo, en algunas situaciones es útil pensar que el vector cero tiene una dirección (véase el Ejemplo 3 que aparece a continuación). Por lo tanto, se conviene en que se puede asignar cualquier dirección al vector cero. Esto es razonable geométricamente cuando se considera que la representación ordinaria del vector cero (el origen) está sobre *todos* los segmentos que tienen al origen como punto inicial.

Si dos vectores tienen la misma dirección, sus representaciones ordinarias están sobre el mismo segmento, el cual tiene su punto inicial en el origen. En la Sección 1 – 3 se menciona que la representación ordinaria del vector $-\mathbf{v}$ es colineal, y de la misma longitud, que aquélla de $\mathbf{v}$, pero en sentido *opuesto*; esto se demostrará más formalmente en el Ejemplo 4. Se dice que los vectores que tienen la misma dirección y que tienen sentidos iguales u opuestos, es decir, aquellos vectores cuyas direcciones son iguales o difieren por ±180°, son **paralelos**. Se dice que los vectores cuyas representaciones ordinarias forman ángulos rectos, es decir, cuyas direcciones difieren por ±90° o por ±270°, son **vectores perpendiculares** u **ortogonales**.

Ejemplo 3. Demostrar que los vectores $\mathbf{v} = (a, b)$ y $\mathbf{u} = (-b, a)$ tienen magnitudes iguales y son perpendiculares.

Solución· Las magnitudes son iguales puesto que

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-b)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\mathbf{v}\|.$$

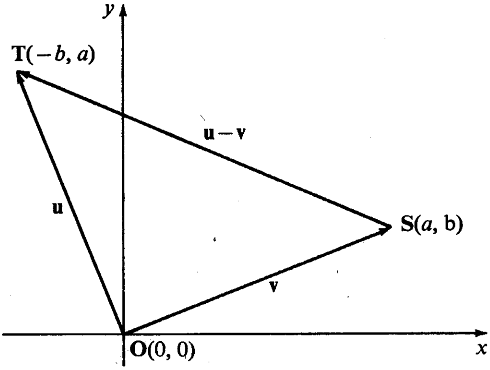
Para demostrar que los vectores son perpendiculares supóngase primero que $\mathbf{v}$ no es el vector cero. Se puede entonces establecer este resultado demostrando que los puntos $O(0, 0)$, S(a, b), y T($-b, a$) son los vértices de un triángulo con hipotenusa $\overline{\mathbf{ST}}$ (véase el siguiente diagrama). Se tiene

$$
\begin{aligned}
[d(\mathbf{S},\mathbf{T})]^2 &= (-b-a)^2 + (a-b)^2\\
&= (-b)^2 + 2ab + a^2 + a^2 - 2ab + b^2\\
&= [(-b)^2 + a^2] + [a^2 + b^2]\\
&= [d(\mathbf{O},\mathbf{T})]^2 + [d(\mathbf{O},\mathbf{S})]^2,
\end{aligned}
$$

es decir

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Por lo tanto, debido al inverso del Teorema de Pitágoras



$\angle$**TOS** es un ángulo recto, y **u** y **v** son vectores perpendiculares.

Si **v** es el vector cero entonces **u** y **v** son perpendiculares, pues se acordó que se puede asignar al vector cero cualquier dirección. Esto termina la demostración.

Si $\mathbf{v} = (a, b)$ y $\mathbf{u} = (-b, a)$, considerando los posibles signos de a y b cuidadosamente, se puede ver (Ejercicio 39 en la página 20) que si la representación ordinaria de **v** está en el Cuadrante I, II, III o IV, entonces la representación ordinaria de **u** está en el Cuadrante II, III, IV o I, respectivamente. Es decir, la representación ordinaria de **u** está adelantada un cuadrante respecto a la representación ordinaria de **v** (en contra del sentido de las manecillas de un reloj).

Ejemplo 4. Demuestre que los vectores $\mathbf{v} = (a, b)$ y $\mathbf{w} = (-a, -b)$ tienen magnitudes iguales y que son vectores paralelos de sentidos opuestos.

Solución: Obsérvese primero que

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\mathbf{v}\|.$$

(Continuación solución)

Si $\theta_{\mathbf{v}}$ y $\theta_{\mathbf{w}}$ son los ángulos de dirección de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ respectivamente, y si $a \neq 0$, entonces

$$\tan \theta_{\mathbf{v}} = \frac{b}{a} \quad \text{y} \quad \tan \theta_{\mathbf{w}} = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}.$$

Se puede emplear el método que aparece en la página 15 para determinar las direcciones de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Por ejemplo, supóngase que la representación geométrica ordinaria de $\mathbf{v}$ está en el Cuadrante II. Entonces $a < 0$ y $b > 0$. Es decir $-a > 0$ y $-b < 0$, y la representación geométrica ordinaria de $\mathbf{w}$ está en el Cuadrante IV. Puesto que $\tan \theta_{\mathbf{v}} = \tan \theta_{\mathbf{w}}$, entonces $\theta_{\mathbf{v}}$ y $\theta_{\mathbf{w}}$ tienen el mismo ángulo de referencia α. Se tiene pues que $m^\circ(\theta_{\mathbf{v}}) = 180 - m^\circ(\alpha)$ y $m^\circ(\theta_{\mathbf{w}}) = 360 - m^\circ(\alpha)$, de modo que $m^\circ(\theta_{\mathbf{w}}) - m^\circ(\theta_{\mathbf{v}}) = 180$. Por lo tanto, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores paralelos con sentidos opuestos.

Si la representación geométrica ordinaria de $\mathbf{v}$ está en los Cuadrantes I, III o IV, la demostración es similar y el lector debe llevarla a cabo. El estudio de los casos en los que $\mathbf{v}$ está sobre un eje, o $\mathbf{v}$ es el vector cero, deben llevarse a cabo también.

(Una demostración equivalente de que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tienen sentidos opuestos emplea el resultado del Ejemplo 3 y el hecho que los vectores

$$\mathbf{u} = (-b, a) \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = (-a, -b)$$

mantienen la misma relación entre sí que los vectores

$$\mathbf{v} = (a, b) \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = (-b, a),$$

si $-b$ y a reemplazan a a y b respectivamente. Por consiguiente, si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{u}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$ y está adelantado un cuadrante respecto a $\mathbf{v}$, y $\mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{u}$ y está adelantado un cuadrante respecto a $\mathbf{u}$).

Ejercicios 1—4

En los Ejercicios 1—16, calcular la magnitud y la dirección del vector dado. Hay que emplear la Tabla 2 de la Página 389 para calcular los ángulos de dirección con una precisión de diez minutos.

1. $(3, 3)$
2. $(-5, -5)$
3. $(\sqrt{3}, 1)$
4. $(-1, \sqrt{3})$
5. $(-3, 4)$
6. $(5, -12)$
7. $(-2, 0)$
8. $(0, -4)$
9. $(-6, -8)$
10. $(12, -5)$
11. $(3, 2) + (0, -6)$
12. $(-2, 4) + (-3, 8)$
13. $(6, 5) + (-2, -3)$
14. $(-3, 4) + (6, -1)$
15. $(5, 1) - (2, -2)$
16. $(7, -3) - (-5, 2)$

En los Ejercicios 17—24, calcule aproximadamente cada vector **v** $= (x, y) \in \mathbb{R}^2$ mediante la fórmula

$$\mathbf{v} = (x, y) = (\|\mathbf{v}\| \cos \theta, \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta).$$

Emplee la Tabla 2, página 389, para calcular los valores de $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$ con dos cifras decimales.

17. $\|\mathbf{v}\| = 5;\ m°(\theta) = 30$

18. $\|\mathbf{v}\| = 3;\ m°(\theta) = 45$

19. $\|\mathbf{v}\| = 6;\ m°(\theta) = 90$

20. $\|\mathbf{v}\| = 10;\ m°(\theta) = 120$

21. $\|\mathbf{v}\| = 2;\ m°(\theta) = 300$

22. $\|\mathbf{v}\| = 4;\ m°(\theta) = 285$

23. $\|\mathbf{v}\| = 7;\ m°(\theta) = 210$

24. $\|\mathbf{v}\| = 8;\ m°(\theta) = 180$

En los Ejercicios 25—30, calcule el valor de x o y tal que el primer vector sea (a) paralelo y (b) perpendicular al segundo.

Ejemplo. $(x, 3), (2, 5)$

Solución: **(a)** Sea α el ángulo de dirección de $(x, 3)$ y θ el ángulo de dirección de $(2, 5)$ entonces

$$\tan \alpha = \frac{3}{x} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{5}{2}\cdot$$

(b) Si las tangentes de los ángulos de dirección de dos vectores son iguales, entonces los vectores tienen la misma dirección, pero pueden tener sentidos opuestos y por lo tanto son paralelos. Es decir $(x, 3)$ y $(2, 5)$ son paralelos si

$$\frac{3}{x} = \frac{5}{2}, \quad \text{o} \quad x = \frac{6}{5}\cdot$$

Del Ejemplo 3, página 16, se sabe que $(-5, 2)$ es perpendicular a $(2, 5)$. Por lo tanto $(x, 3)$ y $(2, 5)$ son perpendiculares si $(x, 3)$ y $(-5, 2)$ son paralelos, es decir, si

$$\frac{3}{x} = \frac{2}{-5}, \quad \text{o} \quad x = -\frac{15}{2}\cdot$$

25. $(x, 4), (6, 8)$

26. $(x, 5), (2, 9)$

27. $(3, y), (-2, 3)$

28. $(5, y), (7, -1)$

29. $(x, -2), (-3, 5)$

30. $(-3, y), (4, -1)$

En los Ejercicios 31—36, calcule los vectores que se requieren, expresando las respuestas en forma radical. (*Sugerencia*: Emplee las Ecuaciones (1) y (2) de la página 14.)

31. Un vector (x, y) cuya magnitud es 5 y tiene la misma dirección que $(3, 7)$.

32. Un vector (x, y) cuya magnitud es 2 y tiene la misma dirección que $(2, -3)$.

33. Un vector (x, y) cuya magnitud es 3 y que es perpendicular a $(5, 2)$.

34. Un vector (x, y) cuya magnitud es 6 y es perpendicular a $(-3, 4)$.

35. Un vector (x, y) cuya magnitud es igual a la de $(4, -3)$ y cuya dirección es la misma que la de $(1, \sqrt{3})$.

36. Un vector (x, y) cuya magnitud es igual a la de $(-5, 12)$ y cuya dirección es igual a la de $(-2, 2)$.

* **37.** Demuestre que para todos los vectores **u** y **v** $\in \mathcal{R}^2$, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

* **38.** Demuestre que para todos los vectores **u** y **v** $\in \mathcal{R}^2$, $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

* **39.** Demuestre que si x y y son ambos distintos de cero y (x, y) está en el Cuadrante I, II, III ó IV, entonces $(-y, x)$ está en el Cuadrante II, III, IV ó I respectivamente.

* **40.** Demuestre que si x y y son ambos distintos de cero y está en el cuadrante I, II, III ó IV, entonces $(y, -x)$ está en el cuadrante IV, I, II ó III, respectivamente.

1—5 Multiplicación de un escalar por un vector

Si $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathcal{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v} &= (\mathbf{v} + \mathbf{v}) + \mathbf{v} \\ &= (x + x, y + y) + (x, y) \\ &= (x + x + x, y + y + y) \\ &= (3x, 3y).\end{aligned}$$

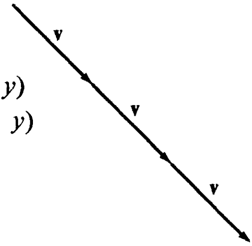


Figura 1—16

Por analogía con los números reales, este resultado sugiere que se pueda definir 3**v** como

$$3\mathbf{v} = 3(x, y) = (3x, 3y).$$

En la Figura 1—16 se muestra una representación geométrica del vector $\mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v} = 3\mathbf{v}$. En general, se dice que:

■ Si $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathcal{R}^2$ y si $r \in \mathcal{R}$, entonces

$$r\mathbf{v} = r(x, y) = (rx, ry).$$

El vector $r\mathbf{v}$ se llama **múltiplo escalar** de **v**. Nótese que *la multiplicación de un escalar por un vector es un vector.*

Si $\mathbf{v} = (x, y)$, entonces la magnitud del vector $r\mathbf{v}$ es

$$\|r(x, y)\| = \|(rx, ry)\| = \sqrt{r^2x^2 + r^2y^2} = \sqrt{r^2(x^2 + y^2)} = |r|\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por lo tanto,

■ $$\|r\mathbf{v}\| = |r|\,\|\mathbf{v}\|.$$

La dirección del vector $r\mathbf{v}$ es la misma que la de **v**, pero su sentido puede ser opuesto. Es decir,

los vectores **v** y $r\mathbf{v}$ son paralelos.

Esto se puede demostrar como sigue: Supóngase que θ es el ángulo de dirección de $\mathbf{v} = (x, y)$ y que α es el ángulo de dirección de $r\mathbf{v} = (rx, ry)$. Entonces si $r \neq 0$ y $x \neq 0$, se tiene

$$\tan \theta = \frac{y}{x},$$

y

$$\tan \alpha = \frac{ry}{rx} = \frac{y}{x}.$$

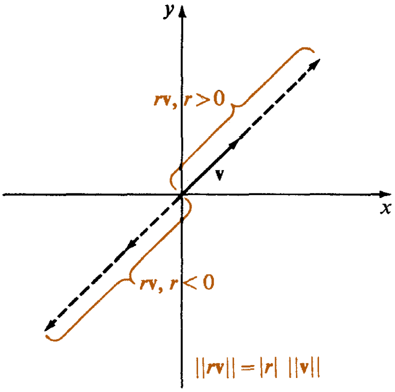
Puesto que $\tan \theta = \tan \alpha$, entonces $\mathbf{v}$ y $r\mathbf{v}$ son paralelos.

Si $r \neq 0$ y $y \neq 0$, pero $x = 0$, entonces $rx = 0$ y $ry \neq 0$. Por lo tanto, $m°(\theta) = 90$ ó 270, y $m°(\alpha) = 90$ ó 270. Nuevamente $\mathbf{v}$ y $r\mathbf{v}$ son paralelos.

Finalmente, si $r = 0$ ó $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $r\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Puesto que se ha acordado asignar al vector cero cualquier dirección que convenga, se puede considerar que $r\mathbf{v}$ es paralelo a $\mathbf{v}$ en cualquiera de estos casos.

En realidad, estudiando cuidadosamente los signos, se puede demostrar que si $r > 0$, entonces $r\mathbf{v}$ tiene la misma dirección y sentido que $\mathbf{v}$, y si $r < 0$, entonces $r\mathbf{v}$ tiene la misma dirección pero sentido opuesto. Estos resultados se muestran en la Figura 1—17.

Figura 1—17



Se ha visto que para cualquier $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^2$ y cualquier $r \in \mathcal{R}$, los vectores $\mathbf{v}$ y $r\mathbf{v}$ son paralelos. Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces sucede también lo contrario, tal como se muestra en el Ejemplo 1 a continuación. Por lo tanto:

■ Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^2$ con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores paralelos si y sólo si existe un escalar r tal que $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$.

Ejemplo 1. Demuestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores paralelos y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces existe un escalar r para el cual se tiene $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$.

Solución: Si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u} = 0\mathbf{v}$ y $r = 0$. Por otra parte, sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, y sean $\theta_{\mathbf{u}}$ y $\theta_{\mathbf{v}}$ los ángulos de dirección de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ respectivamente.

(*Continúa solución*)

Entonces se tiene

$$\operatorname{sen}\theta_{\mathbf{u}} = \frac{y_1}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \cos\theta_{\mathbf{u}} = \frac{x_1}{\|\mathbf{u}\|},$$

y

$$\operatorname{sen}\theta_{\mathbf{v}} = \frac{y_2}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \cos\theta_{\mathbf{v}} = \frac{x_2}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Puesto que por hipótesis **u** y **v** son paralelos entonces

$$m°(\theta_{\mathbf{u}}) = m°(\theta_{\mathbf{v}}) \text{ o bien } m°(\theta_{\mathbf{u}}) = m°(\theta_{\mathbf{v}}) \pm 180.$$

Si $m°(\theta_{\mathbf{u}}) = m°(\theta_{\mathbf{v}}) \pm 180$, por ejemplo, entonces se sigue que

$$\frac{y_1}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{-y_2}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{y} \quad \frac{x_1}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{-x_2}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Estas ecuaciones indican respectivamente que

$$y_1 = -\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}y_2 \quad \text{y} \quad x_1 = -\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}x_2.$$

Por hipótesis $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, de tal manera que $-\dfrac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}$ es un número real r.

entonces $$y_1 = ry_2 \quad \text{y} \quad x_1 = rx_2,$$

y

$(x_1, y_1) = r(x_2, y_2)$, o sea $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$, como se quería demostrar.

Se encomienda al lector la demostración para el caso $m°(\theta_{\mathbf{u}}) = m°(\theta_{\mathbf{v}})$. Esta demostración es similar a la que se ha presentado en este ejercicio.

Empleando las propiedades de los números reales (página 394) junto con las definiciones que aparecen en este capítulo, se puede demostrar que los productos de vectores por escalares obedecen las siguientes leyes:

Propiedades de la multiplicación de un vector por un escalar:

Si **u** y **v** son vectores en $\mathcal{R}^2$ y r y s son escalares, entonces

1. $r\mathbf{u} \in \mathcal{R}^2$	Cerradura
2. $(rs)\mathbf{u} = r(s\mathbf{u})$	Asociatividad
3. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	Idéntico multiplicativo
4. $r\mathbf{u} = \mathbf{0}$ si y sólo si $r = 0$ $\quad \mathbf{u} = \mathbf{0}$.	Cero multiplicativo
5. $-1\mathbf{u} = -\mathbf{u}$	Inverso aditivo
6. $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$ y $(r + s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u}$	Propiedad distributiva
7. $\|r\mathbf{v}\| = |r|\,\|\mathbf{v}\|$	Propiedad de la magnitud respecto a múltiplos escalares

La primera parte de la propiedad 6 se demuestra en el Ejemplo 2 a continuación. La propiedad 7 se demostró en las páginas 20-21. La demostración de las demás propiedades se considerará en los ejercicios (Ejercicios 35-41, páginas 25-26).

Ejemplo 2. Demuestre que si $r \in \mathcal{R}$, $\mathbf{v} = (x_1, y_1) \in \mathcal{R}^2$, y $\mathbf{t} = (x_2, y_2) \in \mathcal{R}^2$, entonces

$$r(\mathbf{v} + \mathbf{t}) = r\mathbf{v} + r\mathbf{t}.$$

Solución: Se tiene

$$r(\mathbf{v} + \mathbf{t}) = r[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = r(x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Por definición de múltiplo escalar,

$$r(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \big(r(x_1 + x_2), r(y_1 + y_2)\big).$$

Debido a la ley distributiva de los números reales,

$$\big(r(x_1 + x_2), r(y_1 + y_2)\big) = (rx_1 + rx_2, ry_1 + ry_2).$$

De la definición de adición de dos vectores,

$$(rx_1 + rx_2, ry_1 + ry_2) = (rx_1, ry_1) + (rx_2, ry_2).$$

Empleando la definición del producto de un escalar por un vector nuevamente se tiene

$$(rx_1, ry_1) + (rx_2, ry_2) = r(x_1, y_1) + r(x_2, y_2) = r\mathbf{v} + r\mathbf{t},$$

quedando terminada la demostración.

Un vector cuya magnitud es 1 recibe el nombre de **vector unidad**. Por ejemplo $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ es un vector unidad, pues

$$\|(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5})\| = \sqrt{(\tfrac{3}{5})^2 + (\tfrac{4}{5})^2} = \sqrt{\tfrac{9}{25} + \tfrac{16}{25}} = \sqrt{\tfrac{25}{25}} = 1.$$

Se puede representar a *cualquier* vector (x, y) en términos del producto de un escalar y de un vector unidad que tenga la misma dirección que (x, y). Para el vector cero esto es trivial, puesto que para cualquier vector unidad $\mathbf{u}$, $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Para un vector no nulo (x, y), nótese primero que

$$\sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = (x, y). \tag{1}$$

La magnitud de $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ está dada por

$$\left\|\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\right\| = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = 1.$$

Puesto que (x, y) es un múltiplo escalar de $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, y $\sqrt{x^2+y^2}$ es positivo, (x, y) tiene el mismo sentido que $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Por lo tanto,

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

es el vector unidad que tiene la misma dirección que (x, y), y el producto deseado aparece en el miembro izquierdo de la Ecuación (1) en la página 23. Se puede abreviar esta ecuación escribiendo

$$\|\mathbf{v}\|\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) = \mathbf{v}. \tag{2}$$

Ejemplo 3. Calcule cuál es el vector unidad que tiene la misma dirección que $(-4, 1)$.

Solución: Se tiene

$$\|(-4, 1)\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}.$$

Por lo tanto , el vector unidad que tiene la misma dirección que $(-4, 1)$ es

$$\left(\frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

Puesto que las componentes de $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ son sencillamente $\cos\theta$, y $\operatorname{sen}\theta$ respectivamente, donde θ es el ángulo de dirección de (x, y), la Ecuación (1), página 23, se puede escribir también en la forma

$$\|\mathbf{v}\|(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \mathbf{v}. \tag{3}$$

Esta es la forma factorizada de la Ecuación (2), página 14, que permite calcular $\mathbf{v}$ en términos de su magnitud y de su ángulo de dirección.

Ejemplo 4. Exprese al vector $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ en términos de su magnitud y de su ángulo de dirección θ.

Solución: Se tiene

$$\|(\sqrt{2}, \sqrt{2})\| = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2.$$

Ahora,

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

de donde $m°(\theta) = 45$. Por lo tanto, de la Ecuación (3)

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2(\cos 45°, \operatorname{sen} 45°).$$

Ejercicios 1—5

En los Ejercicios 1—8, sea $r = 3$, $s = -2$, $\mathbf{u} = (1, 3)$, $\mathbf{v} = (-2, 5)$, $\mathbf{m} = (-1, -3)$, y $\mathbf{n} = (0, -1)$. Exprese cada una de las siguientes cantidades en forma de un par ordenado o de un escalar según sea el caso.

1. $r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$
2. $r(\mathbf{u} + \mathbf{v})$
3. $(r + s)\mathbf{m}$
4. $(r + s)(\mathbf{u} + \mathbf{v})$
5. $\|r\mathbf{m} - s\mathbf{v}\|$
6. $\|r\mathbf{m}\| - \|s\mathbf{v}\|$
7. $\|s^2\mathbf{v}\| - \|s^2\mathbf{n}\|$
8. $\|rs\mathbf{u}\| + \|rs\mathbf{v}\|$

En los Ejercicios 9—14, calcule cuál es el vector unidad que tiene la misma dirección que el vector dado.

9. $(-1, 2)$
10. $(2, 5)$
11. $(3, 6)$
12. $(4, -1)$
13. $(-4, -2)$
14. $(-3, 5)$

En los Ejercicios 15—20, determine si los dos vectores dados son paralelos o no.

15. $(3, 4), (15, 20)$
16. $(-9, 6), (3, -2)$
17. $(2, -3), (18, -24)$
18. $(9, 7), (-81, -56)$
19. $(4, -1), (-12, 3)$
20. $(5, 3), (-1, -0.6)$

En los Ejercicios 21—26, exprese cada vector en términos de su magnitud y de su ángulo de dirección de acuerdo con la Ecuación (3), página 24. Emplee la Tabla 2, página 389, cuando sea necesario para determinar $m°(\theta)$ con una precisión de 10 minutos.

21. $(\sqrt{3}, 1)$
22. $(1, -2\sqrt{2})$
23. $(3, -5)$
24. $(\sqrt{7}, 3)$
25. $(-2, -7)$
26. $(\sqrt{10}, -\sqrt{15})$

En los Ejercicios 27—34, encuentre un vector unidad perpendicular al vector dado.

Ejemplo. $(3, -2)$

Solución: Del Ejemplo 3, página 16, un vector perpendicular a $(3, -2)$ es $(2, 3)$. El vector unidad en la dirección de $(2, 3)$ es

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}}, \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}}\right), \quad \text{o} \quad \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

27. $(2, 2)$
28. $(-3, 3)$
29. $(3, 7)$
30. $(2, -2\sqrt{3})$
31. $(3, 0)$
32. $(0, -4)$
33. (a, b)
34. $(a, 2a)$

Para r y $s \in \mathcal{R}$, $\mathbf{u} = (x_1, y_1) \in \mathcal{R}^2$, y $\mathbf{v} = (x_2, y_2) \in \mathcal{R}^2$, demuestre que cada afirmación que aparece en los Ejercicios 35—41 es válida.

35. $r\mathbf{u} \in \mathcal{R}^2$
36. $(rs)\mathbf{v} = r(s\mathbf{v})$
37. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
38. $-1\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

39. $(r + s)\mathbf{v} = r\mathbf{v} + s\mathbf{v}$

40. $r\mathbf{u} = \mathbf{0}$ si y sólo si $r = 0$ ó $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

41. $(r + s)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v} + s\mathbf{u} + s\mathbf{v}$

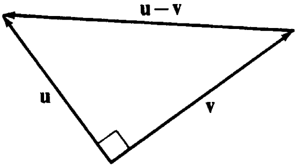
* **42.** Demuestre que si $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$,. entonces **u** y **v** tienen la misma dirección.

* **43.** Demuestre que si **u** y **v** tienen la misma dirección entonces $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

1—6 Producto interno de vectores

Si **u** y **v** son vectores no nulos y **u** es perpendicular a **v**, entonces **u**, **v**, y **u** − **v** (el vector que va de **v** a **u**) tienen representaciones geométricas que forman un triángulo rectángulo. (Figura 1—18). Aplicando el Teorema de Pitágoras a este triángulo, se tiene

Figura 1—18



$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2. \tag{1}$$

Ahora, con $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, la Ecuación (1) es equivalente a

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2). \tag{2}$$

Si el primer miembro de la Ecuación (2) se desarrolla, se encuentra que

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2),$$

o bien, ordenando los términos del primer miembro,

$$(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2) = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2). \tag{3}$$

Sumando $-(x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)$ a cada miembro de la Ecuación (3) se obtiene

$$-2(x_1x_2 + y_1y_2) = 0,$$

de donde,

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0. \tag{4}$$

Cada paso de este proceso es reversible, así que la Ecuación (4) implica la Ecuación (1); por el inverso del Teorema de Pitágoras la Ecuación (1) implica que **u** es perpendicular a **v**. Además, si **u**, o bien, **v**, es el vector cero, entonces **u** y **v** se puede considerar como perpendiculares, y claramente se satisface la Ecuación (4). Se concluye entonces que

$\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ son vectores perpendiculares si y sólo si $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$. (5)

La expresión $x_1x_2 + y_1y_2$ ocurre con tanta frecuencia cuando se trabaja con vectores (no solamente con vectores perpendiculares) que se le da un nombre, y se le asigna un símbolo especial. Se llama **producto interno, producto punto** o a veces **producto escalar** de los vectores (x_1, y_1) y (x_2, y_2), y se representa a este producto mediante el símbolo $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)$. Es decir, se tiene la siguiente definición.

■ Si $\mathbf{u} = (x_1, y_1) \in \mathcal{R}^2$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2) \in \mathcal{R}^2$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Nótese que el *producto interno de dos vectores es un escalar*, a saber el número $x_1x_2 + y_1y_2$. Por ejemplo,

$$(1, 3) \cdot (-1, 2) = (1)(-1) + (3)(2) = -1 + 6 = 5,$$

$$(2, 3) \cdot (7, -5) = (2)(7) + (3)(-5) = 14 + (-15) = -1,$$

y

$$(0, 0) \cdot (1, 3) = (0)(1) + (0)(3) = 0 + 0 = 0.$$

La afirmación (5) que aparece en la página 26 se puede escribir de la siguiente manera en términos del producto interno de **u** y **v**:

■ Si $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^2$ y $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^2$, entonces **u** y **v** son vectores perpendiculares si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Ejemplo 1. Demuestre que $(3, 6)$ y $(-2, 1)$ son vectores perpendiculares.

Solución: Se tiene

$$(3, 6) \cdot (-2, 1) = (3)(-2) + (6)(1) = -6 + 6 = 0.$$

Por lo tanto $(3, 6)$ y $(-2, 1)$ son vectores perpendiculares.

Se vio en el Ejemplo 3, página 16, que los vectores de la forma (x, y) y $(-y, x)$ son perpendiculares. Se puede ahora confirmar esta afirmación fácilmente notando que

$$(x, y) \cdot (-y, x) = (x)(-y) + (y)(x) = -xy + xy = 0.$$

Puesto que $(-y, x)$ se emplea muy frecuentemente al trabajar con vectores se le asigna un símbolo, Se define pues al vector $\mathbf{v_p}$ como sigue:

■ Si $\mathbf{v} = (x, y)$, entonces $\mathbf{v_p} = (-y, x)$.

Claramente se tiene que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v_p} = (x, y) \cdot (-y, x) = 0$.

Ejemplo 2. Encuentre un vector unidad perpendicular al vector $(-2, 4)$.

Solución: Si $\mathbf{v} = (-2, 4)$, entonces $\mathbf{v_p} = (-4, -2)$ es perpendicular a $\mathbf{v}$. Por lo tanto un vector unidad perpendicular a $\mathbf{v}$ es

$$\frac{\mathbf{v_p}}{\|\mathbf{v_p}\|} = \frac{(-4, -2)}{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{(-4, -2)}{\sqrt{16 + 4}} = \frac{(-4, -2)}{\sqrt{20}} = \frac{(-4, -2)}{2\sqrt{5}}$$

$$= \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

Es fácil verificar que el producto interno de vectores tiene las siguientes propiedades:

Propiedades del producto interno de vectores

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, son vectores de $\mathbb{R}^2$ y r es un escalar, entonces

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	Conmutatividad
2. $r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (r\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$	Asociatividad escalar
3. $\mathbf{s} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}$, y $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}$	Distributividad
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$	Propiedad de la magnitud respecto al producto interno.

La propiedad 4 se demuestra en el Ejemplo 3 a continuación. La demostración de las demás propiedades se encomienda al lector (Ejercicios 31—34, página 29).

Ejemplo 3. Demuestre que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$.

Solución: Sea $\mathbf{v} = (x, y)$. Entonces

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (x, y) \cdot (x, y) = x^2 + y^2 = \|\mathbf{v}\|^2.$$

Ejemplo 4. Demuestre que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Solución: Empleando las propiedades del producto interno se tiene

$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$	Propiedad de la magnitud
$= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v})$	Distributividad
$= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$	Distributividad
$= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	Conmutatividad y asociatividad
$= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	Propiedad de la magnitud

Observando que $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, que $\mathbf{u} \cdot (-\mathbf{v}) = -(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, y que $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$, se puede emplear el resultado del Ejemplo 4 para demostrar que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

De esta ecuación se sigue que

$$2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2. \tag{6}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2}{2}.$$

Es decir, el producto interno de los vectores **u** y **v** se puede expresar en términos de sus magnitudes y de la magnitud del vector que va de **v** a **u**.

Ejercicios 1—6

En los Ejercicios 1—8, calcule el producto interno de los vectores dados.

1. $(-1, 2), (3, 1)$
2. $(2, 4), (-4, 2)$
3. $(0, 4), (-2, 0)$
4. $(2, 0), (-3, 0)$
5. $(\sqrt{2}, 3), (-1, 5)$
6. $(4, \sqrt{3}), (-3, 2\sqrt{3})$
7. $(\sqrt{3}, 2), (2\sqrt{3}, 5)$
8. $(-\sqrt{3}, \sqrt{5}), (\sqrt{2}, \sqrt{6})$

En los Ejercicios 9—16, encuentre un vector unidad perpendicular al vector dado.

9. $(3, 4)$
10. $(2, -\sqrt{5})$
11. $(-3, \sqrt{7})$
12. $(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
13. $(3, -1)$
14. $(-5, -4)$
15. $(-3, 0)$
16. $(0, 5)$

En los Ejercicios 17—24, encuentre un valor de x, o de y, tal que el primer vector sea perpendicular al segundo.

17. $(x, 5), (3, 1)$
18. $(x, -2), (3, -4)$
19. $(-4; y), (3, 2)$
20. $(3, y), (0, 2)$
21. $(-x, 2), (2, 3)$
22. $(-x, -2), (-1, -5)$
23. $(-4, -y), (-3, -8)$
24. $(7, -y), (3, -21)$

En los Ejercicios 25—30, calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, si θ_1 es el ángulo de dirección de **u** y θ_2 el ángulo de dirección de **v**. Use los valores exactos de $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$.

25. $\|\mathbf{u}\| = 2, m°(\theta_1) = 30; \|\mathbf{v}\| = 4, m°(\theta_2) = 60$
26. $\|\mathbf{u}\| = 3, m°(\theta_1) = 45; \|\mathbf{v}\| = 5, m°(\theta_2) = 30$
27. $\|\mathbf{u}\| = 4, m°(\theta_1) = 60; \|\mathbf{v}\| = 4, m°(\theta_2) = 150$
28. $\|\mathbf{u}\| = 7, m°(\theta_1) = 120; \|\mathbf{v}\| = 2, m°(\theta_2) = 135$
29. $\|\mathbf{u}\| = 3, m°(\theta_1) = 0; \|\mathbf{v}\| = 4, m°(\theta_2) = 330$
30. $\|\mathbf{u}\| = 6, m°(\theta_1) = 180; \|\mathbf{v}\| = 6, m°(\theta_2) = 270$

En los Ejercicios 31—34, para $r \in \mathcal{R}$, $\mathbf{u} = (x_1, y_1) \in \mathcal{R}^2$, $\mathbf{v} = (x_2, y_2) \in \mathcal{R}^2$, y $\mathbf{s} = (x_3, y_3) \in \mathcal{R}^2$, demuestre que la afirmación dada es correcta.

31. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
32. $r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (r\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$
33. $\mathbf{s} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{v}$
34. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{s}$

35. Demuestre que si $\mathbf{u}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$, entonces $-\mathbf{u}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$.

36. Demuestre que si $\mathbf{u}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$, entonces $r\mathbf{u}$ es perpendicular a $\mathbf{v}$.

37. Demuestre que $\|\mathbf{u}_\mathbf{p}\| = \|\mathbf{u}\|$.

38. Demuestre que $(\mathbf{u}_\mathbf{p})_\mathbf{p} = -\mathbf{u}$.

39. Demuestre mediante un contraejemplo, que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{y}$ no implica ni que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ni que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

40. Demuestre mediante un contraejemplo, que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ no implica ni que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ni que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

* **41.** Demuestre que si $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son perpendiculares.

* **42.** Demuestre que $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$.

Relaciones entre vectores

1—7 Angulo formado por dos vectores

En la Sección 1—5 se vio que se puede emplear el concepto de *múltiplo escalar* para determinar si dos vectores son paralelos o no. Existe otro método para determinar si dos vectores son paralelos o no, que es sencillo, y se aplica a cualquier vector incluyendo al vector cero. Este método emplea el producto interno.

Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$. Obsérvese que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = (x_1, y_1) \cdot (-y_2, x_2) = -x_1 y_2 + y_1 x_2,$$

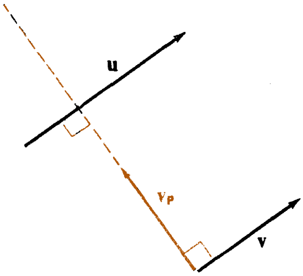
y (Ejercicios 23, página 33) que $-x_1 y_2 + y_1 x_2 = 0$ si y sólo si $\mathbf{u}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}$, es decir, si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos. Por lo tanto:

■ Si $\mathbf{u} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = 0$, es decir, si y sólo si

$$(x_1, y_1) \cdot (-y_2, x_2) = 0.$$

En la Figura 1—19 se ilustra la interpretación geométrica de este resultado para el caso en el que tanto $\mathbf{u}$ como $\mathbf{v}$ sean distintos de cero.

Figura 1—19



Ejemplo 1. Demuestre que los vectores $(-1, 4)$ y $(3, -12)$ son paralelos.

Solución: Sean $\mathbf{u} = (-1, 4)$ y $\mathbf{v} = (3, -12)$. Entonces $\mathbf{v}_p = (12, 3)$, y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_p = (-1, 4) \cdot (12, 3) = (-1)(12) + (4)(3) = -12 + 12 = 0$. Por lo tanto, **u** y **v** son paralelos.

Recuérdese de la trigonometría que la Ley de los Cosenos afirma que en un triángulo **ABC** donde a, b y c son las longitudes de los lados opuestos a los ángulos A, B y C respectivamente,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \tag{1}$$

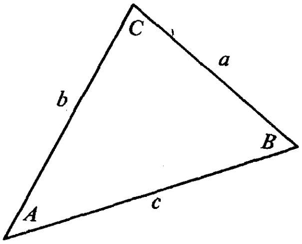


Figura 1—20

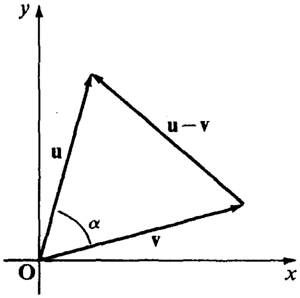


Figura 1—21

Sean ahora **u** y **v** dos vectores no nulos y no paralelos, y compárese al triángulo △ **ABC** de la Figura 1—20 con el triángulo formado por la representación geométrica de los vectores **u**, **v** y **u** − **v** en la Figura 1–21. En esta figura es el ángulo que forman las representaciones geométricas ordinarias de **u** y **v**, α recibe el nombre de **ángulo entre** los vectores **u** y **v**. Puesto que α es un ángulo de un triángulo, $m°(\alpha)$ está entre 0 y 180. Si, en la Ecuación (1) se sustituye a a por $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$, a b por $\|\mathbf{u}\|$, a c por $\|\mathbf{v}\|$, y a A por α, se tiene

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos \alpha, \tag{2}$$

que se puede escribir en la forma

$$2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos \alpha = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2. \tag{3}$$

Entonces, debido a la Ecuación (6) de la página 29 se puede reemplazar al segundo miembro de la Ecuación (3) por $2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ para obtener

$$2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos \alpha = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \tag{4}$$

de donde,

■

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}. \tag{5}$$

La Ecuación (5) es también válida (Ejercicios 21 y 22, página 33) si los vectores no nulos **u** y **v** son paralelos. Entonces, dados dos vectores no nulos **u** y **v** siempre se puede emplear la Ecuación (5) para identificar la medida del ángulo α, con $0 \leq m^\circ(\alpha) \leq 180$, que separa a sus representaciones geométricas ordinarias. (Si **u** o **v**, o ambos son cero, entonces un ángulo α de cualquier medida se puede considerar como el ángulo entre **u** y **v**; sin embargo, para abreviar, es posible referirse *al* ángulo α, entre **u** y **v** aún en este caso, queriendo decir "el ángulo asignado" α.)

Ejemplo 2. Encuentre el valor aproximado del ángulo entre los vectores (2, 3) y (−1, 4).

Solución: Sean $\mathbf{u} = (2, 3)$ y $\mathbf{v} = (-1, 4)$, Entonces

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \quad \text{y} \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17},$$

de manera que, usando la Ecuación (5),

$$\cos \alpha = \frac{(2, 3) \cdot (-1, 4)}{\sqrt{13}\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{221}}.$$

De la Tabla 1, en la página 388 $\sqrt{221} \doteq 15$. Entonces,

$$\cos \alpha \doteq \tfrac{10}{15} \doteq 0.67.$$

De la Tabla 2, en la página 389 se obtiene

$$m^\circ(\alpha) \doteq 48.$$

Si $m^\circ(\alpha) = 90$, entonces la Ecuación (5) de la página 31 se puede escribir como

$$\cos 90^\circ = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|},$$

o bien puesto que $90^\circ = 0$,

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = 0. \tag{6}$$

Puesto que $\|\mathbf{u}\| \neq 0$ y $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, la Ecuación (6) es equivalente a

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Este resultado es consistente con el criterio (página 27) para determinar si los vectores **u** y **v** son perpendiculares.

También se puede emplear la Ecuación (5) de la página 31 para determinar si dos vectores no nulos **u** y **v** son paralelos. Se ha visto que las medidas de los ángulos de dirección de dos vectores paralelos son; o bien iguales, o difieren por ±180°. Entonces la medida del ángulo entre dos vectores paralelos es 0° o bien 180°. Por lo tanto, como $\cos 0^\circ = 1$ y $\cos 180^\circ = -1$, los vectores **u** y **v** son paralelos si y sólo si

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = 1 \quad \text{o bien} \quad -1. \tag{7}$$

Ejercicios 1—7

En los Ejercicios 1—12, determine si los pares de vectores dados son paralelos, perpendiculares o bien oblicuos. Si son oblicuos, calcule cuál es la medida del ángulo entre ellos con una precisión de un grado.

1. $(-1, 2), (2, 1)$
2. $(2, 3), (6, -4)$
3. $(-3, 7), (6, -14)$
4. $(1, 5), (-2, -10)$
5. $(-4, 3), (1, 0)$
6. $(0, 1), (12, 5)$
7. $(\sqrt{3}, 1), (1, \sqrt{3})$
8. $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 5)$
9. $(4, -1), (-1, -4)$
10. $(\sqrt{2}, \sqrt{3}), (-\sqrt{15}, -\sqrt{10})$
11. $(\sqrt{3}, 3), (2, \sqrt{2})$
12. $(-2, \sqrt{5}), (\sqrt{2}, -5)$

En los Ejercicios 13—16, calcule con una precisión de un grado, la medida de los ángulos del triángulo que tiene a los puntos dados **A, B** y **C** como vértices.

13. $\mathbf{A}(0, 0), \mathbf{B}(6, 0), \mathbf{C}(3, -3\sqrt{3})$
14. $\mathbf{A}(0, 0), \mathbf{B}(-3, 4), \mathbf{C}(4, 0)$
15. $\mathbf{A}(1, 1), \mathbf{B}(1, 4), \mathbf{C}(5, 1)$
16. $\mathbf{A}(-1, 2), \mathbf{B}(3, 2), \mathbf{C}(1, 5)$

En los Ejercicios 17—22, para los vectores no nulos **u, v,** y **t** en $\mathcal{R}^2$, demuestre que las afirmaciones hechas son válidas:

17. Si $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \parallel \mathbf{t}$, entonces $\mathbf{u} \parallel \mathbf{t}$.
18. Si $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \perp \mathbf{t}$, entonces $\mathbf{u} \parallel \mathbf{t}$.
19. Si $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$, entonces $\mathbf{u} \perp -\mathbf{v}$.
20. Si $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$, entonces el ángulo entre **u** y **v** es igual o bien al ángulo entre **v** y **t** o bien al suplemento de ese ángulo.

21. Si $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$, $r > 0$, entonces

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} = 1.$$

*__22.__ Si $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$, $r < 0$, entonces

$$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} = -1.$$

*__23.__ Demuestre que si $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, entonces $-x_1y_2 + y_1x_2 = 0$ si y sólo si **u** es múltiplo escalar de **v**. (*Sugerencia:* Para la parte "sólo si" de la demostración, considérense los siguientes casos:

(1) $x_2 \neq 0$,

(2) $x_2 = 0$ pero $y_2 \neq 0$,

(3) $(x_2, y_2) = (0, 0)$.

1–8 Descomposición de vectores

La suma **s** + **t** = **v** de dos vectores **s** y **t** es a veces llamada la **resultante** de **s** y **t**, a **s** y **t** se llaman las **componentes vectoriales** de **v**. En muchas ocasiones resulta útil expresar a un vector dado como la suma de dos componentes vectoriales no paralelas con direcciones dadas. El expresar a un vector **v** como la suma de componentes vectoriales que son múltiplos escalares de dos vectores no paralelos dados **s** y **t** recibe el nombre de **descomposición** del vector **v** en sus componentes paralelas a **s** y **t**, o bien a **v** se le puede expresar como una **combinación lineal** de **s** y **t** (Figura 1—22).

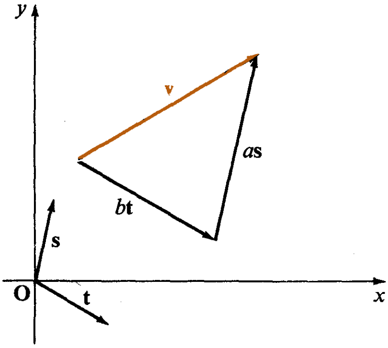


Figura 1—22

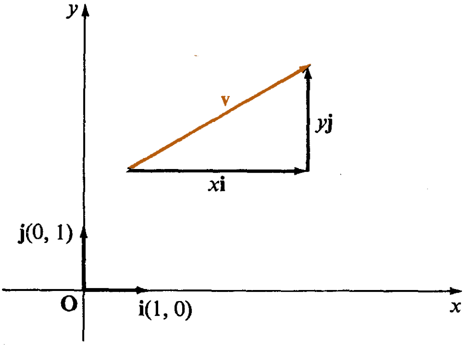


Figura 1—23

Es siempre posible descomponer a un vector dado de $\mathcal{R}^2$ en componentes vectoriales que son múltiplos escalares de *cualesquiera* dos vectores no nulos y no paralelos **s** y **t**; de hecho, esto siempre se puede hacer simplemente resolviendo un par de ecuaciones lineales simultáneas. Los vectores **s** y **t** se llaman entonces la **base** del conjunto, o **espacio**, de vectores en $\mathcal{R}^2$.

En esta sección se considerará solamente el caso en que los vectores de la base sean perpendiculares (ortogonales). Un par particularmente importante de vectores *unitarios* ortogonales es el formado por **i, j** donde

$$\mathbf{i} = (1, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = (0, 1).$$

En la Figura 1—23 se muestra la representación geométrica ordinaria de **i** y **j**.

Es fácil expresar al vector **v** = (x, y) como la suma de múltiplos escalares de **i** y **j**. Puesto que

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y),$$

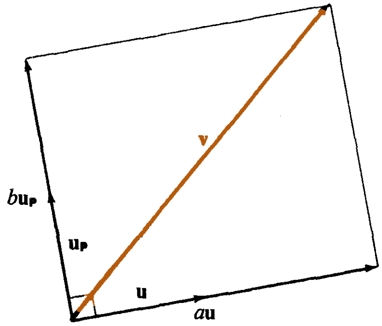
y como $$(x, 0) = x(1, 0) \quad \text{y} \quad (0, y) = y(0, 1),$$

tenemos $$(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}. \tag{1}$$

En esta expresión de (x, y) dado como una combinación lineal de **i** y **j**, los escalares x y y se llaman las **componentes escalares** de (x, y) paralelas a **i** y **j**, y los vectores $x\mathbf{i}$ y $y\mathbf{j}$ son las componentes vectoriales de (x, y) paralelas a **i** y **j** (véase la Figura 1—23).

Cualquier vector $\mathbf{v}$ de $\mathcal{R}^2$ se puede escribir en una y sólo una combinación lineal de un par dado de vectores unitarios ortogonales $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{u_p} = (-u_2, u_1)$. Es decir, (véase la Figura 1—24) hay una y sólo una pareja de escalares a y b tales que

Figura 1—24



$$\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u_p}. \tag{2}$$

Para determinar los valores de a y b, tómese primero el producto escalar de cada miembro de la Ecuación (2) con **u**. Se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{u_p}) \\ &= a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + b(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u_p}). \end{aligned} \tag{3}$$

Puesto que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2 = 1$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u_p} = 0$, la Ecuación (3) es equivalente a

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a. \tag{4}$$

Ahora, tómese el producto escalar de cada miembro de la Ecuación (2) con $\mathbf{u_p}$. Se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u_p} \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{u_p}) \\ &= a(\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{u}) + b(\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{u_p}) \\ &= a(0) + b(1), \end{aligned}$$

o sea

$$\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v} = b. \tag{5}$$

Por lo tanto, los únicos números reales que satisfacen las condiciones impuestas a a y b son $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v}$.

Es posible comprobar que los valores $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a$ y $\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v} = b$ satisfacen la Ecuación (2) desarrollando la expresión $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u_p}$ (véase el Ejercicio 30, página 40). Por lo tanto, la ecuación

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u_p} \tag{6}$$

proporciona la descomposición única de cualquier vector $\mathbf{v}$ en $\mathcal{R}^2$ en componentes que son múltiplos escalares de los vectores unitarios ortogonales $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u_p}$.

Se emplearán los símbolos $\textbf{Comp}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$ y $\textbf{Comp}_{\mathbf{u}_p}\,\mathbf{v}$, para denotar a las componentes vectoriales de **v** paralelas a **u** y $\mathbf{u}_p$ respectivamente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \textbf{Comp}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} + \textbf{Comp}_{\mathbf{u}_p}\,\mathbf{v} \\ &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{u}_p\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}_p.\end{aligned}$$

Ejemplo 1. Calcule $\textbf{Comp}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$ y $\textbf{Comp}_{\mathbf{u}_p}\,\mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\mathbf{v} = (2, 1)$.

Solución: Obsérvese primero que **u** es un vector unidad:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Puesto que $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, se tiene $\mathbf{u}_p = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ahora, usando la Ecuación (6), página 35, se expresa a **v** como la suma de componentes paralelas a **u** y $\mathbf{u}_p$. Se tiene pues

$$\begin{aligned}(2, 1) &= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(2, 1)\right]\mathbf{u} + \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(2, 1)\right]\mathbf{u}_p \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{u} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_p.\end{aligned}$$

Entonces

$$\textbf{Comp}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

y

$$\textbf{Comp}_{\mathbf{u}_p}\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Comprobación: $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (2, 1)$.

Se puede expresar a un vector **v** como la suma de múltiplos escalares de vectores ortogonales (no nulos) que *no* sean unitarios modificando la Ecuación (6) página 35. Supóngase, por ejemplo, que se desea expresar a un vector **v** como la suma de un múltiplo escalar de un vector no nulo **t** y de un múltiplo escalar de $\mathbf{t}_p$. Recuérdese (página 24) que $\dfrac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|}$ es el vector en la dirección de **t**. Entonces nótese que (Ejercicios 27, y 28, página 39) $\left(\dfrac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|}\right)_p = \dfrac{\mathbf{t}_p}{\|\mathbf{t}\|}$ y que $\dfrac{\mathbf{t}_p}{\|\mathbf{t}\|}$ es el vector unidad en la dirección de $\mathbf{t_p}$. Es decir, se puede sustituir a **u** por $\frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|}$ y a $\frac{\mathbf{t_p}}{\|\mathbf{t}\|}$ por $\mathbf{u_p}$ en la Ecuación (6), página 35, para obtener

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} \cdot \mathbf{v}\right) \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} + \left(\frac{\mathbf{t_p}}{\|\mathbf{t}\|} \cdot \mathbf{v}\right) \frac{\mathbf{t_p}}{\|\mathbf{t}\|}, \tag{7}$$

o bien

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|^2}\right) \mathbf{t} + \left(\frac{\mathbf{t_p} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|^2}\right) \mathbf{t_p}, \tag{8}$$

que es la suma requerida.

Los coeficientes escalares $\frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|}$ y $\frac{\mathbf{t_p} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|}$ de los vectores unitarios $\frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|}$ y $\frac{\mathbf{t_p}}{\|\mathbf{t}\|}$ en la Ecuación (7) son las componentes escalares de **v** paralelas a **t** y $\mathbf{t_p}$, respectivamente. Se escribirá $\text{Comp}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{v} = \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|}$ y $\text{Comp}_{\mathbf{t_p}}\, \mathbf{v} = \frac{\mathbf{t_p} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|}$. (Obsérvese que la notación que indica componentes *vectoriales* es **"Comp"** en negrita, mientras que la notación para componentes *escalares* es "Comp" en tipo ordinario).

Ejemplo 2. Calcule las componentes escalares de $\mathbf{v} = (-2, 3)$ que son paralelas a $\mathbf{t} = (1, 1)$ y $\mathbf{t_p}$.

Solución: Nótese primero que $\|\mathbf{t}\| = \sqrt{2}$ y que $\mathbf{t_p} = (-1, 1)$. Ahora, usando la Ecuación (7) anterior, se tiene

$$\mathbf{v} = \left(\frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} \cdot (-2, 3)\right) \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} + \left(\frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} \cdot (-2, 3)\right) \frac{\mathbf{t_p}}{\|\mathbf{t}\|}$$

$$= \left(\frac{-2 + 3}{\sqrt{2}}\right) \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} + \left(\frac{2 + 3}{\sqrt{2}}\right) \frac{\mathbf{t_p}}{\|\mathbf{t}\|},$$

o bien

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|} + \frac{5}{\sqrt{2}} \frac{\mathbf{t_p}}{\|\mathbf{t}\|}.$$

Por lo tanto,

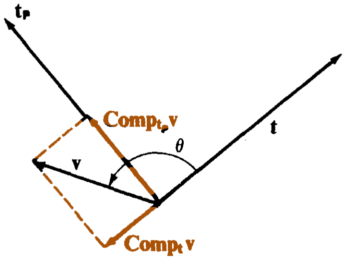
$$\text{Comp}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{and} \quad \text{Comp}_{\mathbf{t_p}}\, \mathbf{v} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

En la Figura 1—25 se ilustra el hecho de que

$$\mathbf{Comp_t\, v} = \left(\frac{\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|^2}\right)\mathbf{t} \quad \text{y} \quad \mathbf{Comp_{t_p}\, v} = \left(\frac{\mathbf{t_p}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|^2}\right)\mathbf{t_p}$$

son *vectores* paralelos a (pero no necesariamente en el mismo sentido) **t** y $\mathbf{t_p}$,

Figura 1—25



respectivamente, y que la suma de estos vectores es **v**. El *escalar*

$$\begin{aligned} \mathrm{Comp}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|} \\ &= \frac{\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{t}\|\;\|\mathbf{v}\|}\,\|\mathbf{v}\| \\ &= \|\mathbf{v}\|\cos\alpha \quad \text{(Ecuación 5, página 31)} \end{aligned}$$

es o bien la magnitud, o su negativo, de $\mathbf{Comp_t\, v}$,

$$\mathrm{Comp}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{v} = \pm\|\mathbf{Comp_t\, v}\|,$$

de acuerdo con que **t** y $\mathbf{Comp_t\, v}$ tengan o no el mismo sentido. (Ejercicio 29, página 39). Análogamente,

$$\mathrm{Comp}_{\mathbf{t_p}}\, \mathbf{v} = \pm\|\mathbf{Comp_{t_p}\, v}\|.$$

Para los vectores que aparecen en la Figura 1—25 se tiene $\mathrm{Comp}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{v} = -\|\mathbf{Comp_t\, v}\|$ y $\mathrm{Comp}_{\mathbf{t_p}}\, \mathbf{v} = \|\mathbf{Comp_{t_p}\, v}\|$.

Obsérvese en la Figura 1—25 que la representación geométrica del vector $\mathbf{Comp_t\, v}$ es la *proyección perpendicular* de la representación geométrica de **v** sobre la recta que contiene la representación geométrica de **t**. Por este motivo, $\mathbf{Comp_t\, v}$ se llama a veces la **proyección vectorial** de **v** sobre **t**, y $\mathrm{Comp}_{\mathbf{t}}\, \mathbf{v}$ se llama a veces la **proyección escalar** de **v** sobre **t**.

Ejercicios 1—8

En los Ejercicios 1—8, exprese cada vector como una combinación lineal de (a) **i** y **j**; (b) **u** y $\mathbf{u}_p$, donde $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (c) **t** y $\mathbf{t}_p$, donde $\mathbf{t} = (3, 4)$.

1. $(1, 2)$
2. $(3, 5)$
3. $(-1, 0)$
4. $(-2, 3)$
5. $(-3, -4)$
6. $(-5, -12)$
7. $(5, -6)$
8. $(4, -3)$

En los Ejercicios 9—12, calcule la medida del ángulo entre los vectores dados con una precisión de un grado. Use la Tabla 2 de la página 389 cuando sea necesario.

9. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
10. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
11. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
12. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

En los Ejercicios 13—16, encuentre la proyección vectorial y la proyección escalar de **v** sobre **u**.

13. $\mathbf{u} = (3, 2)$, $\mathbf{v} = (1, -2)$
14. $\mathbf{u} = (-4, 3)$, $\mathbf{v} = (2, -1)$
15. $\mathbf{u} = (4, -2)$, $\mathbf{v} = (-3, -4)$
16. $\mathbf{u} = (-2, -7)$, $\mathbf{v} = (-5, -12)$

17. Encuentre la proyección escalar de **v** sobre **u**, si **u** y **v** son perpendiculares.

18. Encuentre la proyección escalar de **v** sobre **u** si **u** y **v** (**a**) tienen el mismo sentido y (**b**) tienen sentidos opuestos.

En los Ejercicios 19—22, calcule cuál es el vector unitario **u** para el cual las afirmaciones hechas son válidas.

19. $(-5, 10) = 5\mathbf{u} + 10\mathbf{u}_p$
20. $(-\sqrt{2}, 5\sqrt{2}) = 4\mathbf{u} + 6\mathbf{u}_p$
21. $(0, 2\sqrt{5}) = 4\mathbf{u} + 2\mathbf{u}_p$
22. $(-31, 27) = 13\mathbf{u} + 39\mathbf{u}_p$

En los Ejercicios 23—26, demuestre que las afirmaciones hechas son válidas.

23. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$
24. $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$
25. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$
26. $(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}) \cdot (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}) = x_1x_2 + y_1y_2$

* **27.** Demuestre que para cualquier vector no nulo $\mathbf{t} \in \mathcal{R}^2$,

$$\left(\frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|}\right)_p = \frac{\mathbf{t}_p}{\|\mathbf{t}\|}.$$

* **28.** Demuestre que $\frac{\mathbf{t}_p}{\|\mathbf{t}\|}$ es el vector unidad en la dirección de $\mathbf{t}_p$.

* **29.** Demuestre que para cualquier vector **v** y cualquier vector no nulo $\mathbf{t} \in \mathcal{R}^2$,

$$\mathbf{Comp}_{\mathbf{t}}\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|}\,\mathrm{Comp}_{\mathbf{t}}\,\mathbf{v},$$

y, que por lo tanto, $\mathrm{Comp}_{\mathbf{t}}\,\mathbf{v} = \pm\|\mathbf{Comp}_{\mathbf{t}}\,\mathbf{v}\|$ según **t** y $\mathbf{Comp}_{\mathbf{t}}\,\mathbf{v}$ tengan el mismo sentido o sentidos opuestos.

* **30.** Demuestre que para cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ y cualquier vector unidad $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u_p}.$$

[*Sugerencia*: Considere que $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y que $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.]

* **31.** Demuestre que para cualesquiera dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$,

$$\|\mathbf{t}\|^2 \mathbf{v} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v})\mathbf{t} + (\mathbf{t_p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{t_p}.$$

* **32.** Demuestre que para cualesquiera dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$,

$$\|\mathbf{t}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{t_p} \cdot \mathbf{v})^2.$$

* **33.** Emplee el resultado del Ejercicio 32 para demostrar que $\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \geq (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$.

Resumen del capítulo

1. Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de puntos del plano y el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o $\mathbb{R}^2$, de pares ordenados de números reales.
2. Como consecuencia de esta correspondencia biunívoca dos pares ordenados (a, b) y (c, d) representan al mismo punto del plano si y sólo si los dos pares son iguales, es decir, si y sólo si $a = c$ y $b = d$.
3. La distancia que separa a dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano, si se emplea la misma escala en ambos ejes, está dada por la **fórmula de distancia**

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

4. Se puede interpretar a un **vector** en $\mathbb{R}^2$ como una traslación o desplazamiento, descrita por un par ordenado de números reales. La primera componente indica un desplazamiento paralelo al eje x; la segunda componente indica un desplazamiento paralelo al eje y.
5. La representación geométrica de un vector $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^2$, llamada **vector geométrico**, es una flecha, o segmento dirigido en el plano. Cada vector tiene un número infinito de representaciones geométricas, una de las cuales empieza en cada punto del plano. La representación geométrica de $\mathbf{v}$ cuyo punto inicial es el origen recibe el nombre de **representación ordinaria** de v y se dice que está es **posición ordinaria**.
6. Si (a, b) y (c, d) son puntos inicial y final respectivamente de un vector geométrico que representa a (x, y), entonces

$$(c, d) = (a + x, b + y) \qquad \text{y} \qquad (x, y) = (c - a, d - b).$$

7. Si $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$, entonces $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
8. Se pueden emplear tanto la **regla del paralelogramo** como la **regla del triángulo** para encontrar la flecha que representa una suma vectorial.

9. El vector (0, 0), que se denota mediante el símbolo **0**, recibe el nombre de **vector cero**; su representación geométrica es un punto.

10. Si $\mathbf{v} = (x, y)$, el vector $-\mathbf{v} = (-x, -y)$ recibe el nombre de **inverso aditivo**, o **negativo** de **v**. La **diferencia** de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ esta dada por

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2).$$

La representación geométrica ordinaria de $-\mathbf{v}$ es colineal con la de **v**, pero tiene sentido opuesto. Existen representaciones geométricas de los vectores **u**, **v** y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ que forman un triángulo. La representación geométrica de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ en este triángulo se puede describir como "el vector que va de **v** a **u**"; este vector se calcula aplicando una forma de la regla del triángulo.

11. La magnitud $\|\mathbf{v}\|$ de un vector $\mathbf{v} = (x, y)$ es un escalar único definido por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La magnitud de cualquier vector es no negativa y se puede interpretar como la longitud de la correspondiente representación geométrica.

12. La **dirección** de un vector no nulo $\mathbf{v} = (x, y)$ es la medida del ángulo θ para el cual

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{x}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Se tiene $0 \leq m^\circ(\theta) < 360$ si θ se mide en grados, o $0 \leq m^R(\theta) < 2\pi$ si se mide a θ en radianes. Geométricamente θ se determina mediante dos segmentos, el primero, R_2 que contiene la representación geométrica de **v** y que tiene el mismo punto inicial **S** que **v**, y el segundo, R_1, cuyo punto inicial es también **S** y que tiene la misma dirección que la parte positiva del eje x. Si se toman en cuenta los signos de x y y, y $x \neq 0$, entonces la medida de θ se puede calcular mediante la fórmula $\tan \theta = \dfrac{y}{x}$.

13. Se conviene, en que se puede asignar cualquier dirección al vector **0**.

14. Dos vectores son **paralelos** si y sólo si tienen la misma dirección y el mismo sentido ó sentidos opuestos. Dos vectores no nulos son **perpendiculares (ortogonales)** si y sólo si sus representaciones geométricas ordinarias forman un ángulo recto.

15. Los vectores (x, y) y $(-y, x)$ son perpendiculares.

16. Si r es un escalar y $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces

$$r\mathbf{v} = (rx, ry).$$

Al vector $r\mathbf{v}$ se le llama **múltiplo escalar** de **v**. Si $r > 0$, $r\mathbf{v}$ y **v** tienen el mismo sentido; si $r < 0$, tienen sentidos opuestos. Los vectores **u** y **v**, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, son paralelos si y sólo si **u** es múltiplo escalar de **v**.

17. Se dice que un vector cuya magnitud es 1, se llama **vector unidad**.

18. Cualquier vector se puede representar como el producto de un escalar por un vector unidad que tenga la misma dirección que el vector dado.
19. Cualquier vector se puede representar en términos de su magnitud y de su ángulo de dirección. (Para el vector cero la representación no es única.)
20. Si $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, el escalar $x_1x_2 + y_1y_2$ recibe el nombre de **producto interno, producto punto** o **producto escalar** de **u** y **v**. Este producto se denota mediante el símbolo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
21. Los vectores **u** y **v** son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
22. Si α es el ángulo entre dos vectores no nulos **u** y **v** entonces

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}.$$

23. Un vector se puede expresar como la suma de dos componentes vectoriales que son múltiples escalares de dos vectores cualesquiera no nulos y no paralelos. En este capítulo se considera que los vectores dados son perpendiculares. Se emplean frecuentemente los vectores $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$. Si $\mathbf{v} = (x, y)$, tenemos $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es un vector unidad entonces $\mathbf{u_p} = (-u_2, u_1)$ es un vector unidad perpendicular a **u**, y

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u_p},$$

donde a y b son escalares determinados por $a = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $b = \mathbf{u_p} \cdot \mathbf{v}$.
24. La **proyección escalar** del vector **v** sobre el vector **u** es

$$\text{Comp}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|} = \|\mathbf{v}\| \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo entre los vectores.

Ejercicios de repaso del capítulo

1. Calcule los valores de x y y tales que $(x + y, 2x - y) = (6, 3)$.
2. Calcule cuál es la distancia que separa a los puntos $A(7, -5)$ y $B(3, -2)$.
3. ¿Cuáles son las coordenadas del punto final T de la representación geométrica del vector $(2, -4)$ cuyo punto inicial es $S(0, 5)$?.
4. Si $\mathbf{u} = (1, 2)$ y $\mathbf{v} = (5, 4)$, calcule **(a)** $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y **(b)** $2\mathbf{v} - 3\mathbf{u}$.
5. Calcule la magnitud y la tangente del ángulo de dirección del vector $(\sqrt{3}, 3) + (0, -2)$.
6. Diga cuál es el vector unidad cuya dirección es la misma que la de $(-1, \sqrt{3})$.
7. Calcule para qué valor de a son perpendiculares los vectores $(3, 4)$ y $(8, a)$.
8. Calcule el coseno del ángulo comprendido entre los vectores $(3, -4)$ y $(12, 5)$.
9. Exprese $\mathbf{v} = (2, 5)$ en la forma $a\mathbf{u} + b\mathbf{u_p}$, donde **u** es el vector unidad en la dirección de $(3, 4)$.
10. Calcule la proyección escalar de **v** sobre **u**, donde $\mathbf{v} = (2, 3)$ y $\mathbf{u} = (3, -1)$.

Nota Histórica

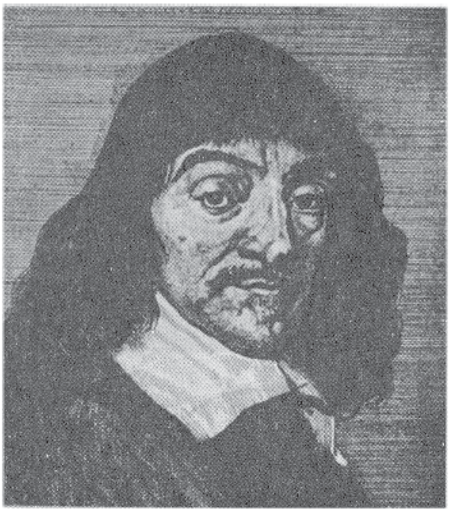
Los pasos decisivos en el inicio de la geometría analítica moderna fueron dados por dos matemáticos franceses, Pierre de Fermat (1601—1655) en 1629 y René Descartes (1596—1650) en 1637.

Descartes fuè un filósofo y matemático muy respetado, y sus obras fueron leídas ampliamente y discutidas. Publicó su "*La Géométrie*" (*Geometría*) en tres libros, así como en un apéndice de otra obra. Fue en el segundo de estos libros, titulado "*De la Nature des Lignes Courbes*" (*Sobre la Naturaleza de las Líneas Curvas*) en donde trató los métodos de la geometría analítica. Estos métodos emplean sistemáticamente a los números para representar puntos y reducen el estudio de las propiedades de las curvas planas a un análisis de las ecuaciones que las representan. Recíprocamente, estos métodos abren el camino para la interpretación geométrica del análisis matemático de las ecuaciones.

Descartes estaba conciente de la importancia de su trabajo. En ese mismo año, 1637, escribió: "Lo que ha presentado en el segundo libro sobre la naturaleza y propiedades de las líneas curvas, está tán lejos del tratamiento ordinario de la geometría como la retórica de Cicerón del vocabulario de los niños", Esta evaluación, poco modesta incidentalmente, fuè sostenida más adelante por el gran matemático francés Jacques Hadamard (1865—1963).

Al contrario que Descartes, Fermat no tenía ningún interés en publicar sus resultados. Era abogado y matemático aficionado, y como tal, realizó su trabajo científico sólo por el placer que le producía el llevarlo a cabo. Afortunadamente escribió con frecuencia cartas explicando lo que hacía. Su trabajo más importante se refiere a la teoría de números, aunque comparte con Blas Pascal (1623—1662) la creación de la teoría de la probabilidad, con

René Descartes



Pierre de Fermat

Sir Isaac Newton (1642—1727) y Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646—1716) la creación del cálculo diferencial y con Descartes la creación de la geometría analítica.

El trabajo de Fermat es más sistemático que el de Descartes, pero no se hizo público sino hasta 1636, y no influyó sobre la investigación geométrica de Descartes. En 1629 Fermat había encontrado la ecuación general lineal que describe una recta, así como las ecuaciones que describen circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas.

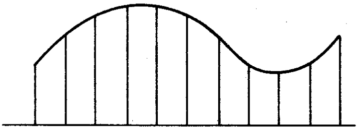
Además, Fermat había desarrollado un metodo analítico para determinar la ecuación de la tangente a una curva dada y que pasa por un punto dado de esa curva. En 1638 escribió a Descartes explicándole su método, puesto que éste era muy superior al que había publicado Descartes en 1637. Aunque Descartes no aceptó la superioridad del método de Fermat, Newton, que todavía no había nacido en esa época aceptó posteriormente que había sido influenciado en su desarrollo del cálculo diferencial por "el método de trazar tangentes de Fermat".

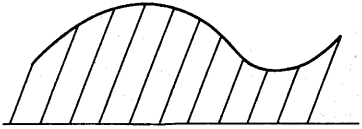
Fermat y Descartes no fueron los primeros en usar sistemas de coordenadas. Por ejemplo, los astrónomos habían usado la longitud y la latitud como coordenadas desde hacía siglos, al menos desde la época de Hiparco (siglo II A. C.) y probablemente desde mucho antes.

Tampoco fueron los primeros en emplear métodos analíticos para analizar curvas. El lugar geométrico del punto que se mueve a velocidad constante sobre un segmento, mientras que el segmento gira con velocidad angular constante sobre uno de sus extremos, se llama ahora espiral de Arquímedes. Arquímedes (287—212 A.C.), el más grande matemático y científico del mundo antiguo, había encontrado un método para trazar la tangente a esta curva, que pasa por cualquier punto de ella, usando el equivalente geométrico de sus ecuaciones en un sistema de coordenadas. Arquímedes también desarrolló un método para calcular el área acotada por una curva, como por ejemplo por una circunferencia. Puesto que, entre otras cosas, el cálculo diferencial se ocupa de las tangentes a curvas, y el cálculo integral del cálculo de áreas, se puede afirmar que Arquímedes se anticipó aproximadamente 2000 años al desarrollo del cálculo integral y diferencial.

El término *Coordenada Cartesiana* se deriva de la forma latina, Cartesius, del nombre de Descartes. Es interesante darse cuenta de que Descartes *no usaba un segundo eje* al estudiar las propiedades de las curvas planas. En lugar de ello, pensaba que si se levanta un segmento de longitud apropiada ya fuera perpendicular u oblicuamente, sobre cada punto de un solo eje (Descartes tenía un concepto muy moderno de lo que es una función).

Por otra parte, Descartes sólo consideró coordenadas positivas. Empleando la terminología moderna, trabajó *sólo en el primer cuadrante*. Aparentemente, fue Newton el que por vez primera empleó coordenadas negativas, y fue Leibnitz el que introdujo el término "coordenada" en la geometría analítica.





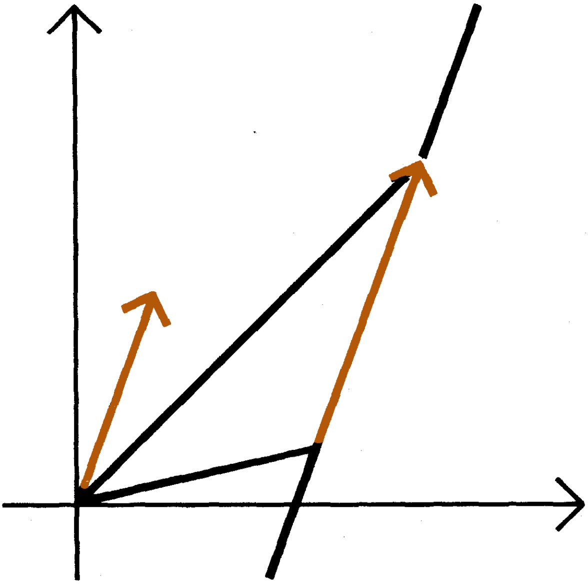
Empleando coordenadas cartesianas, Newton y Leibnitz desarrollaron el cálculo diferencial e integral, y muchos matemáticos, tales como Carl Friedrich Gauss (alemán: 1777—1866), Georg Friedrich Bernhard Riemann (alemán: 1826—1866), y Hermann Minkowski (ruso: 1864—1909) desarrollaron la geometría en varias direcciones, obteniendo un conocimiento mucho más profundo de lo que es el espacio, y proporcionando las bases para todas las ciencias físicas. La teoría de la relatividad de Albert Einstein (1879—1955) tiene sus orígenes directos en estos primeros pasos, aunque hay que admitir que su desarrollo fue propiciado por actos de genio a lo largo del camino.

El análisis vectorial se desarrolló más lentamente. La teoría de los cuaterniones de Sir William Rowan Hamilton (inglés: 1805—1865) y el análisis algebraico de Herman Grassman (alemán: 1809—1877), qe se desarrollaron en la primera mitad del siglo XIX, fueron moldeados, en un marco creado por la geometría analítica, hasta dar origen al análisis vectorial moderno, varias décadas después, por Josiah Willard Gibbs (americano: 1839—1903) y Oliver Heaviside (inglés: 1850—1925). En particular Gibbs [que según Max Plank (alemán: 1858—1947) fue "de los mejores físicos teóricos de todos los tiempos"] en un famoso tratado fechado en 1881 introdujo los símbolos que denotan actualmente a los productos escalares y vectoriales.

Fermat y Descartes se consideran hoy en día como los primeros matemáticos modernos. Al inventar la geometría analítica dieron origen a la ola de creatividad matemática que continúa propagándose en la actualidad.

Josiah Willard Gibbs

Capítulo 2



Las rectas y segmentos en el plano se pueden definir por medio de ecuaciones cartesianas y a través de ecuaciones vectoriales. En este capítulo se presentarán algunas de las formas más útiles de estas ecuaciones y se discutirán las relaciones que existen entre ellas.

Rectas en el Plano

Ecuaciones Vectoriales de la recta

2—1 Rectas y segmentos de recta en el plano

En estudios anteriores de geometría plana se menciona que una recta es un conjunto de puntos del plano. En el estudio del álgebra se menciona que un conjunto tal de puntos es la gráfica del conjunto de soluciones en $\mathcal{R}^2$ de una *ecuación lineal* en dos variables cuya **forma cartesiana ordinaria** es

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A o B es diferente de 0. (La condición de que A o B es diferente de 0 se expresa equivalentemente en la forma "$A^2 + B^2 \neq 0$.") Más adelante se discutirán en detalle ecuaciones de esta forma, pero ahora se empleará la relación que se vio, en el Capítulo 1, que existe entre los puntos del plano y los vectores, para demostrar que una recta queda definida también mediante una *ecuación vectorial.*

Al estudiar a los puntos del plano y su relación con los vectores resulta útil denotar al vector que va del origen a un punto **S** del plano mediante la letra minúscula **s**.

Es bien conocido que dos puntos definen una recta. Se verá ahora cómo se puede emplear este hecho para obtener la ecuación vectorial de una recta. Considérese la Figura 2–1, en la cual se muestran los puntos S(4, 2) y T(5, 4) así como a la recta $\mathcal{L}$ que contiene a estos puntos. Si las representaciones geométricas ordinarias de los vectores **s** = (4, 2) y **t** = (5, 4) se agregan a esta figura,

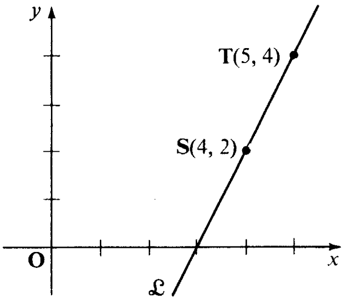


Figura 2—1

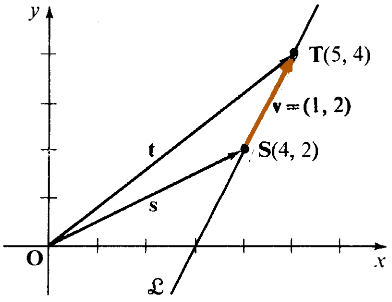


Figura 2—2

se obtiene la Figura 2-2. Obsérvese que en la Figura 2-2 el vector $\mathbf{v} = \mathbf{t} - \mathbf{s} = (5, 4) - (4, 2) = (1, 2)$ tiene una representación geométrica que está sobre $\mathcal{L}$.

En la Figura 2 - 3 se muestra la misma configuración, excepto que se ha añadido el punto $\mathbf{U}(x, y)$ sobre la recta $\mathcal{L}$ y se ha trazado el vector correspondiente **u**, (habiéndose omitido el vector **t** para simplificar la figura). En esta figura se apresia que el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{s}$ tiene una representación geométrica que está también sobre $\mathcal{L}$ y que por lo tanto (véase el Ejercicio 27, página 52) **w** es paralela a **v**.

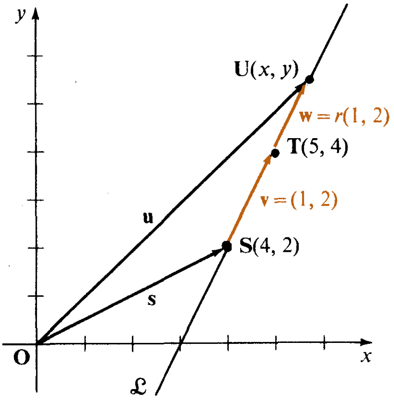


Figura 2—3

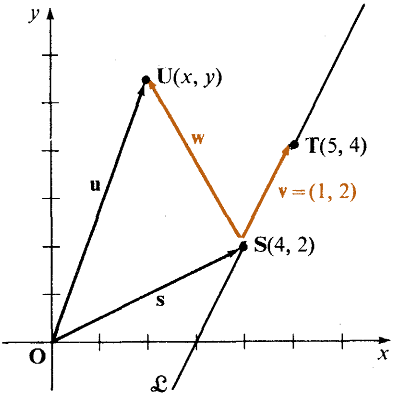


Figura 2—4

En la Figura 2 - 4 se muestra la misma situación que en la Figura 2-3 excepto que ahora el punto $\mathbf{U}(x, y)$ *no* está sobre $\mathcal{L}$. En este caso se ve que la representación geométrica de $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{s}$ *no* está sobre $\mathcal{L}$ y por lo tanto (véase el Ejercicio 28, página 52) **w** no es paralelo a **v**.

Es decir, $\mathbf{U}(x, y)$ está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si **w** es paralelo a **v** o bien si y sólo si $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ es paralelo a $\mathbf{t} - \mathbf{s}$. En la Sección 1 – 5 se vió que **w** es paralela a **v** si y sólo si $\mathbf{w} = r\mathbf{v}$,onde r es un escalar. Entonces **U** está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si

$$\mathbf{w} = r\mathbf{v},$$

o bien

$$\mathbf{u} - \mathbf{s} = r(\mathbf{t} - \mathbf{s}).$$

Puesto que $\mathbf{u} = (x, y)$, $\mathbf{s} = (4, 2)$, y $\mathbf{t} = (5, 4)$, $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{s} = (x - 4, y - 2)$ y como se vio anteriormente $\mathbf{v} = \mathbf{t} - \mathbf{s} = (1, 2)$. Esto quiere decir que esta última ecuación es equivalente a

$$(x - 4, y - 2) = r(1, 2),$$

$$(x, y) - (4, 2) = r(1, 2),$$

o sea

$$(x, y) = (4, 2) + r(1, 2).$$

En general, empleando un razonamiento análogo se puede concluir que si $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano (Figura 2–5), entonces el punto $\mathbf{U}(x, y)$ está sobre la recta que pasa por **S** y **T** si y sólo si

$$\mathbf{u} - \mathbf{s} = r(\mathbf{t} - \mathbf{s}),$$

o bien

■
$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{t} - \mathbf{s}), \qquad r \in \mathcal{R}. \tag{1}$$

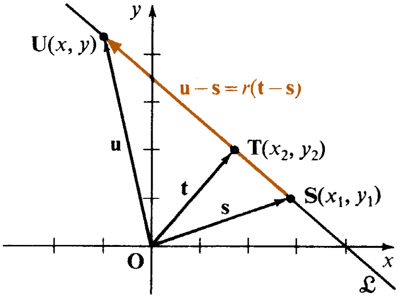


Figura 2–5

El conjunto de puntos que están sobre $\mathcal{L}$ se puede especificar mediante

$$\{\mathbf{U}\colon \mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{t} - \mathbf{s}), \quad r \in \mathcal{R}\},$$

donde $\mathbf{t} \neq \mathbf{s}$ puesto que $\mathbf{T} \neq \mathbf{S}$.
Como **U** está sobre $\mathcal{L}$ *si y sólo si* se satisface la Ecuación (1), se dice que la Ecuación (1) es *la ecuación de* $\mathcal{L}$ y que $\mathcal{L}$ es *la gráfica de* la Ecuación (1). En la ecuación (1) se dice que la variable escalar *r* es llamado, **parámetro,** y se dice también que la Ecuación (1) es la **ecuación parámetrica vectorial ordinaria de la recta que pasa por S y T.**

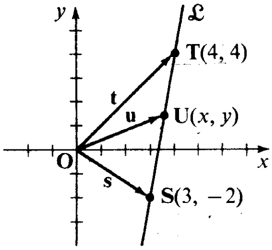
Ejemplo 1. Obtenga la ecuación paramétrica vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por $\mathbf{S}(3, -2)$ y $\mathbf{T}(4, 4)$.

Solución: Trácese un diagrama. Se tiene $\mathbf{s} = (3, -2)$ y $\mathbf{t} = (4, 4)$. Entonces

$$\mathbf{t} - \mathbf{s} = (4, 4) - (3, -2)$$
$$= (1, 6).$$

Ahora, usando la Ecuación (1) se tiene que la ecuación paramétrica vectorial de $\mathcal{L}$ es

$$\mathbf{u} = (3, -2) + r(1, 6).$$



Si el conjunto de valores permitidos de r se restringe a un intervalo cerrado, $\{r: a \leq r \leq b\}$, entonces la gráfica de la Ecuación (1) es un *segmento de recta.* Obsérvese en particular que si $r = 0$ en la Ecuación (1), entonces $\mathbf{u} = \mathbf{s}$ y $U(x, y) = S(x_1, y_1)$. También si $r = 1$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{t}$ y $U(x, y) = T(x_2, y_2)$. Por consiguiente, como se suguiere en la Figura 2–6, a medida que r recorre el intervalo $\{r: 0 \leq r \leq 1\}$, el punto $U(x, y)$ recorre el segmento de recta desde $S(x_1, y_1)$ hasta $T(x_2, y_2)$. Los demás puntos de la recta corresponden a valores de r tales que $r < 0$ y $r > 1$.

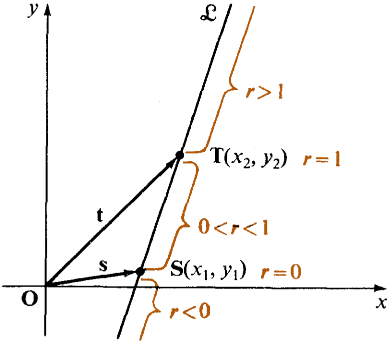


Figura 2–6

Se puede emplear la Ecuación (1) de la página 49 para calcular las coordenadas de un punto que esté sobre el segmento $\overline{ST}$ y que esté a una distancia dada de S sobre medida el segmento. Por ejemplo, para calcular las coordenadas del punto medio del segmento se tomaría $r = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 2. Calcule las coordenadas de los puntos que trisecan al segmento de recta cuyos extremos son $S(3, -4)$ y $T(6, 2)$.

Solución: Se tiene $\mathbf{s} = (3, -4)$ y $\mathbf{t} = (6, 2)$. Por lo tanto, el vector que va de S a T es

$$\mathbf{t} - \mathbf{s} = (6, 2) - (3, -4) = (3, 6).$$

Entonces, los puntos del segmento $\overline{ST}$ están dados por

$$\mathbf{u} = (3, -4) + r(3, 6), \qquad 0 \leq r \leq 1.$$

Las coordenadas del punto que está a una tercera parte de la distancia que separa a S de T son

$$(3, -4) + \tfrac{1}{3}(3, 6) = (3, -4) + (1, 2) = (4, -2),$$

y aquéllas del punto que está a dos terceras partes de la distancia que separa a S de T son

$$(3, -4) + \tfrac{2}{3}(3, 6) = (3, -4) + (2, 4) = (5, 0).$$

Es decir, las coordenadas de los puntos que trisecan al segmento son $(4, -2)$ y $(5, 0)$.

Si se escribe la Ecuación (1) en términos del parámetro r y de las coordenadas de **S, T** y **U** se tiene

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= (x_1, y_1) + r[(x_2, y_2) - (x_1, y_1)] \\
&= (x_1, y_1) + r(x_2 - x_1, y_2 - y_1),
\end{aligned}
$$

o bien

$$(x, y) = \big(x_1 + r(x_2 - x_1), y_1 + r(y_2 - y_1)\big).$$

Esta ecuación vectorial es equivalente a las ecuaciones

■ $$x = x_1 + r(x_2 - x_1) \quad \text{y} \quad y = y_1 + r(y_2 - y_1), \qquad r \in \mathcal{R}. \tag{2}$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de sistema de **ecuaciones paramétricas cartesianas** de la recta que pasa por **S** y **T**. En la Sección 2—5 se verá que este sistema está relacionado con la forma cartesiana ordinaria de la ecuación de una recta.

Ejemplo 3. Obtenga el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que pasa por los puntos **S**(2, −1) y **T**(5, 3).

Solución: Si se sustituye a $x_1, y_1, x_2,$ y y_2 por 2, −1, 5, en la Ecuación (2) obteniéndose

$$x = 2 + r(5 - 2) \quad \text{y} \quad y = -1 + r[3 - (-1)],$$

o bien

$$x = 2 + 3r \quad \text{y} \quad y = -1 + 4r.$$

Ejercicios 2—1

En los Ejercicios 1—10, obtenga la ecuación paramétrica vectorial y el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que contiene a los puntos dados **S** y **T**.

1. **S**(2, 1), **T**(0, 0)
2. **S**(3, 2), **T**(1, 1)
3. **S**(4, −2), **T**(4, 3)
4. **S**(5, −6), **T**(2, −6)
5. **S**(−7, 2), **T**(−3, −1)
6. **S**(−3, 1), **T**(4, −2)
7. **S**(−6, −3), **T**(−4, −2)
8. **S**(−1, −7), **T**(−7, −1)
9. **S**(a, b), **T**(b, a)
10. **S**($2a$, b), **T**($3a$, $2b$)

En los Ejercicios 11—18, calcule las coordenadas de; (a) el punto medio y (b) los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos dados **S** y **T**.

11. **S**(5, −1), **T**(−4, 2)
12. **S**(6, −2), **T**(1, 7)
13. **S**(−3, −5), **T**(3, 10)
14. **S**(4, 7), **T**(−5, 3)
15. **S**(2, 5), **T**(−10, −1)
16. **S**(−5, 3), **T**(7, 21)
17. **S**(−3, 7), **T**(4, 1)
18. **S**(5, −2), **T**(12, −5)

En los Ejercicios 19—22, obtenga la ecuación paramétrica vectorial del segmento que une a:

19. **R**(2, 5) con el punto medio cuyos extremos son **S**(5, 1) y **T**(7, −3).
20. **R**(−2, 6) y el punto medio del segmento cuyos extremos son **S**(0, 3) y **T**(4, 0).
21. El punto medio del segmento cuyos extremos son **Q**(−5, 2) y **R**(1, 6) con el punto que está a una tercera parte de la distancia que separa a **S**(−2, 6) de **T**(1, 9).
22. El punto que está a dos terceras partes de la distancia que separa a los puntos **Q**(8, −2) y **R**(2, 7) con el punto que está a una cuarta parte de la distancia que separa a los puntos **S**(1, 6) y **T**(9, 10).

* **23.** Demuestre que las coordenadas (x_0, y_0) es punto medio del segmento cuyos extremos son $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ están dadas por

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

* **24.** Demuestre que las coordenadas (x', y') y (x'', y'') de los puntos que trisecan al segmento cuyos extremos son $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ están dadas por

$$x' = \frac{2x_1 + x_2}{3}, \quad y' = \frac{2y_1 + y_2}{3}.$$

y

$$x'' = \frac{x_1 + 2x_2}{3}, \quad y'' = \frac{y_1 + 2y_2}{3}.$$

* **25.** Demuestre que las medianas del triángulo cuyos vértices son **R**(6, 1), **S**(−2, 3), y **T**(2, −7) se cortan en un punto que está a dos tercios de la distancia que separa a cada vértice de su lado opuesto. (*Sugerencia*: Determine las coordenadas del punto que está a dos tercios de la distancia que separa a cada vértice de su lado opuesto).

* **26.** Repita el Ejercicio 25 para el triángulo cuyos vértices son **O**(0, 0), $\mathbf{S}(x_1, y_1)$, y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$.

* **27.** Demuestre que si la recta $\mathcal{L}$ es la gráfica de la ecuación cartesiana lineal $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, entonces los vectores cuyas representaciones geométricas con puntos iniciales y finales sobre $\mathcal{L}$ son paralelos. [*Sugerencia*: Sean $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera de $\mathcal{L}$. Demuestre primero que $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$, y recuerde que (Sección 1—6) $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ es perpendicular al vector (A, B).]

* **28.** Demuestre que si la recta $\mathcal{L}$ es la gráfica de la ecuación cartesiana lineal $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, y **v** es un vector cuya representación geométrica tiene uno de sus extremos en $\mathcal{L}$ y el otro fuera de $\mathcal{L}$, entonces, **v** es no paralelo a cualquier vector no nulo cuya representación geométrica tenga ambos extremos sobre $\mathcal{L}$. [*Sugerencia*: Sea $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ cualquier punto de $\mathcal{L}$ y sea $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ cualquier punto fuera de $\mathcal{L}$. Demuestre que $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) \neq 0$ y recuerde que el vector $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ es no perpendicular al vector (A, B).]

2—2 Puntos que están sobre una recta

En la Sección 2—1 se emplearon los siguientes hechos, que intuitivamente parecen obvios, para obtener la ecuación paramétrica vectorial de una recta: Si un vector **v** tiene una representación geométrica cuyos extremos están sobre una recta dada $\mathcal{L}$, entonces **v** es paralelo a cualquier otro vector que tenga una representación geométrica similar; pero al menos que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, **v** es no paralelo a cualquier vector que tenga una representación geométrica con un extremo sobre $\mathcal{L}$ y el otro fuera de $\mathcal{L}$. (En los Ejercicios 27 y 28, página 52, se presentó un esbozo de esta demostración). Se dice que la recta $\mathcal{L}$ es paralela a cualquier vector **v** cuya representación geométrica tenga sus extremos sobre $\mathcal{L}$, y que todo vector tal, es paralelo a $\mathcal{L}$. Cualquier vector *no nulo* **v** que sea paralelo a $\mathcal{L}$ se llamará **vector de dirección** de $\mathcal{L}$.

En la Sección 2—1 se vio que la ecuación paramétrica vectorial, o que el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas, de una recta $\mathcal{L}$ queda determinada si se conocen las coordenadas de dos puntos de $\mathcal{L}$. Estas ecuaciones también se pueden determinar si se conocen las coordenadas de un punto de $\mathcal{L}$ y un vector de dirección de $\mathcal{L}$. Consideremos la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $S(x_1, y_1)$

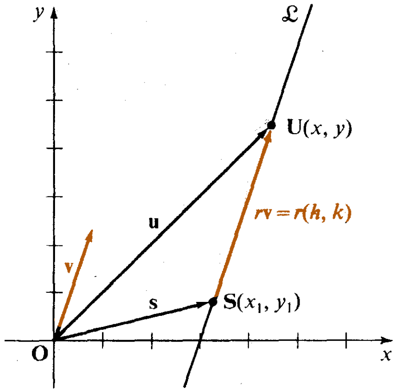


Figura 2—7

y que es paralela al vector no nulo $\mathbf{v} = (h, k)$. (Véase la Figura 2 - 7). De los comentarios hechos anteriormente se puede afirmar que un punto $U(x, y)$ está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si

$$\mathbf{u} - \mathbf{s} = r\mathbf{v},$$

o bien

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r\mathbf{v}, \qquad (1)$$

donde r es un escalar. La Ecuación (1) recibe el nombre de **ecuación paramétrica vectorial ordinaria de la recta que pasa por S y es paralela a v.** Puesto que la Ecuación (1) se puede escribir en forma

$$(x, y) = (x_1, y_1) + r(h, k),$$

el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas correspondiente para $\mathcal{L}$ es

$$x = x_1 + rh, \qquad y = y_1 + rk, \qquad r \in \mathcal{R}. \qquad (2)$$

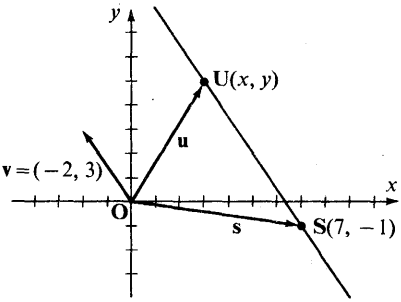
Ejemplo 1. Obtenga la ecuación paramétrica vectorial y el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que pasa por el punto S(7, −1) y que es paralela al vector $\mathbf{v} = (-2, 3)$.

Solución: Trácese un diagrama. Directamente de la Ecuación (1) se tiene

$$\mathbf{u} = (7, -1) + r(-2, 3).$$

Análogamente, de la Ecuación (2) se tiene

$$x = 7 - 2r, \; y = -1 + 3r.$$



Claro está que una recta tiene un número infinito de vectores de dirección, puesto que existe un número infinito de vectores no nulos paralelos a la recta dada, y cada uno de ellos es un vector de dirección de la recta. En particular $\mathcal{L}$ **P** y **Q** son dos puntos cualesquiera sobre la recta $\mathcal{L}$, entonces, tanto $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ como $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ son vectores de dirección de la recta.

Para determinar si un punto $S(x_1, y_1)$ está sobre la recta $\mathcal{L}$ cuya ecuación cartesiana es $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, hay que sustituir las coordenadas x_1 y y_1 en la ecuación y notar que se obtiene una igualdad. Para el caso de una ecuación paramétrica vectorial, o para un sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas, el problema es diferente. Por ejemplo, para determinar si **T**(3, 6) está o no sobre la recta cuya ecuación paramétrica vectorial es

$$(x, y) = (1, 3) + r(1, 1),$$

se pueden sustituir las coordenadas de **T** en lugar de x y y en la ecuación dada y entonces determinar si existe un escalar r para el cual

$$(3, 6) = (1, 3) + r(1, 1); \tag{3}$$

es decir,

$$(3, 6) = (1 + r, 3 + r),$$

o bien

$$3 = 1 + r \quad \text{y} \quad 6 = 3 + r,$$

de donde,

$$r = 2 \quad \text{y} \quad r = 3.$$

Puesto que $2 \neq 3$, no existe un número real r para el cual se cumpla la Ecuación (3), y se puede concluir que **T**(3, 6) no está sobre $\mathcal{L}$.

Hay una manera más sencilla de llegar a esta conclusión. Obsérvese primero que el resultado expresado por la Ecuación (1) de la página 53 se puede expresar como sigue:

■ Si **v** es un vector de dirección de una recta $\mathcal{L}$ que contiene al punto **S**, entonces un punto **U** está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ es paralelo a **v**.

Ahora recuérdese (página 30) que dos vectores $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = 0$, donde $\mathbf{v}_\mathbf{p} = (-y_2, x_2)$. Estos dos resultados se pueden combinar para obtener el sencillo criterio que se enuncia a continuación para determinar si un punto **U** está sobre una recta $\mathcal{L}$:

■ Si $\mathbf{v}$ es un vector de dirección de la recta $\mathcal{L}$ que contiene al punto **S**, entonces un punto **U** está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si

$$(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = 0. \tag{4}$$

En particular, si se sabe que $\mathcal{L}$ contiene a dos puntos **S** y **T**, entonces un punto **U** está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si

$$(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{t} - \mathbf{s})_\mathbf{p} = 0. \tag{5}$$

Obsérvese que aunque las Ecuaciones (4) y (5) contienen vectores, dichas ecuaciones son ecuaciones escalares de $\mathcal{L}$ puesto que contienen sólo productos escalares. En la Sección 2—4 se regresará a esta observación.

Ejemplo 2. Demuestre que si $\mathcal{L}$ es una recta cuya ecuación paramétrica vectorial es

$$\mathbf{u} = (3, 2) + r(-1, 2),$$

entonces **(a)** el punto cuyas coordenadas son $(6, 1)$ no está sobre $\mathcal{L}$, y **(b)** el punto de coordenadas $(5, -2)$ está sobre $\mathcal{L}$.

Solución: Por inspección de la ecuación dada de $\mathcal{L}$, se ve que $\mathcal{L}$ pasa por el punto $S(3, 2)$ y que $\mathbf{v} = (-1, 2)$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}$. Se tiene pues que $\mathbf{v}_\mathbf{p} = (-2, -1)$.

(a) Para $\mathbf{u} = (6, 1)$ se tiene

$$\mathbf{u} - \mathbf{s} = (6, 1) - (3, 2) = (3, -1),$$

y

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} &= (3, -1) \cdot (-2, -1) \\ &= -6 + 1 = -5 \neq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ es no paralela a $\mathbf{v}$, y entonces el punto de coordenadas $(6, 1)$ no está sobre $\mathcal{L}$.

(b) Para $\mathbf{u} = (5, -2)$, se tiene

$$\mathbf{u} - \mathbf{s} = (5, -2) - (3, 2) = (2, -4),$$

y

$$(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = (2, -4) \cdot (-2, -1) = -4 + 4 = 0.$$

Entonces, $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y el punto de coordenadas $(5, -2)$ está sobre $\mathcal{L}$.

Si el vector de dirección **v** en la ecuación

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r\mathbf{v}$$

es un vector unidad, entonces para cualquier punto **U** sobre la gráfica de la ecuación, $|r|$ es la distancia que separa a **S** de **U** (Figura 2–8). Esto se sigue del hecho que

$$\begin{aligned} d(\mathrm{S}, \mathrm{U}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{s}\| &= \|r\mathbf{v}\| \\ &= |r|\ \|\mathbf{v}\| \\ &= |r|(1) \\ &= |r|. \end{aligned}$$

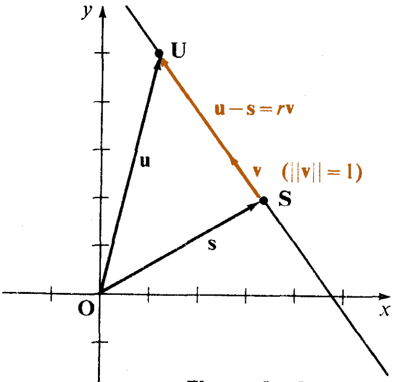


Figura 2–8

Ejemplo 3. Si $\mathcal{L}$ es la recta cuya ecuación es $\mathbf{u} = (1, 6) + r(3, 4)$, obtenga las coordenadas de los puntos de $\mathcal{L}$ que están a 10 unidades de distancia del punto S(1, 6).

Solución: Primero calcúlese cuál es el vector unidad en la dirección de (3, 4). Este vector (véase la página 24) es

$$\left(\frac{3}{\sqrt{9 + 16}}, \frac{4}{\sqrt{9 + 16}}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

Otra ecuacion de $\mathcal{L}$ es

$$\mathbf{u} = (1, 6) + r(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}).$$

Se desea calcular las coordenadas de los puntos $\mathbf{U}(x, y)$ tales que $|r| = 10$, es decir, para los cuales $r = 10$ ó $r = -10$. Se tiene pues

$r = 10$	$r = -10$
$(x_1, y_1) = (1, 6) + 10(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5})$	$(x_2, y_2) = (1, 6) - 10(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5})$
$= (1, 6) + (6, 8)$	$= (1, 6) - (6, 8)$
$= (7, 14)$	$= (-5, -2)$

Por lo tanto, $\mathbf{U}_1(7, 14)$ y $\mathbf{U}_2(-5, -2)$ son los puntos requeridos.

Ejercicios 2–2

En los Ejercicios 1–8, obtenga la ecuación paramétrica vectorial y el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto dado **S** y es paralela al vector dado **v**.

1. S(3, 2); **v** = (1, 1)
2. S(5, 7); **v** = (2, 3)
3. S(4, −3); **v** = (−1, 2)
4. S(1, −5); **v** = (3, −1)
5. S(−2, 4); **v** = (−1, −2)
6. S(−5, 2); **v** = (−3, 1)
7. S(−6, −4); **v** = (−3, −2)
8. S(−3, −7); **v** = (4, −2)

En los Ejercicios 9—16, diga si el punto dado **S** está o no sobre la recta cuya ecuación paramétrica vectorial se da:

9. $S(2, -1)$; $\mathbf{u} = (1, 2) + r(-1, 3)$
10. $S(-8, 6)$; $\mathbf{u} = (-2, 3) + r(2, -1)$
11. $S(3, 2)$; $\mathbf{u} = (1, 1) + r(2, -3)$
12. $S(-1, 2)$; $\mathbf{u} = (4, 7) + r(3, 3)$
13. $S(-1, 1)$; $\mathbf{u} = (-2, -3) + r(1, 4)$
14. $S(2, -7)$; $\mathbf{u} = (-3, 2) + r(2, 1)$
15. $S(0, -1)$; $\mathbf{u} = (3, -4) + r(-6, 2)$
16. $S(-4, 0)$; $\mathbf{u} = (-1, -2) + r(3, -2)$

En los ejercicios 17—24, obtenga una ecuación paramétrica vectorial de la recta que contiene al punto dado **S** y que tiene al vector dado **v** como vector de dirección.

17. $S(2, 3)$; $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
18. $S(4, 1)$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
19. $S(3, -1)$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
20. $S(1, -5)$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
21. $S(-6, 2)$; $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$
22. $S(-5, 3)$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
23. $S(-1, -1)$; $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
24. $S(-3, -5)$; $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

En los Ejercicios 25—30, determinar si las dos ecuaciones paramétricas vectoriales dadas corresponden a la misma recta o no.

25. $\mathbf{u} = (2, 1) + r(3, -1)$; $\mathbf{u} = (2, 1) + r(-3, 1)$
26. $\mathbf{u} = (3, 4) + r(2, -2)$; $\mathbf{u} = (3, 4) + r(-2, 2)$
27. $\mathbf{u} = (2, 3) + r(-1, 2)$; $\mathbf{u} = (1, 5) + r(2, -4)$
28. $\mathbf{u} = (-3, 1) + r(1, -3)$; $\mathbf{u} = (3, -1) + r(-1, 3)$
29. $\mathbf{u} = (-1, -2) + r(-2, 4)$; $\mathbf{u} = (1, 0) + r(1, -2)$
30. $\mathbf{u} = (0, 3) + r(-1, 5)$; $\mathbf{u} = (-1, -2) + r(2, -10)$

En los Ejercicios 31—34, calcule las coordenadas de los puntos $\mathbf{U}_1$ y $\mathbf{U}_2$ que están sobre la recta cuya ecuación paramétrica vectorial se da y que están a la distancia dada del punto **S** dado.

31. Sobre $\mathbf{u} = (4, -2) + r(1, 1)$; $3\sqrt{2}$ unidades de $S(4, -2)$
32. Sobre $\mathbf{u} = (-3, -1) + r(6, 8)$; 5 unidades de $S(-3, -1)$
33. Sobre $\mathbf{u} = (0, 4) + r(5, 12)$; 26 unidades de $S(5, 16)$
34. Sobre $\mathbf{u} = (-1, 6) + r(1, 4)$; $2\sqrt{17}$ unidades de $S(1, 14)$

* **35.** Dada la recta $\mathcal{L}$ cuya ecuación paramétrica vectorial es $\mathbf{u} = \mathbf{s} + r\mathbf{v}$, contiene al punto **T**, demuestre que para cualquier punto **U** sobre $\mathcal{L}$ existe un escalar k tal que $\mathbf{u} - \mathbf{t} = k\mathbf{v}$.

* **36.** Emplee el resultado del Ejercicio 35 para demostrar que $(\mathbf{u} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}_p = 0$. ¿Qué implica esto sobre la recta que pasa por **T** y cuyo vector de dirección es **v**?

2–3 Pendiente de una recta; rectas paralelas y perpendiculares

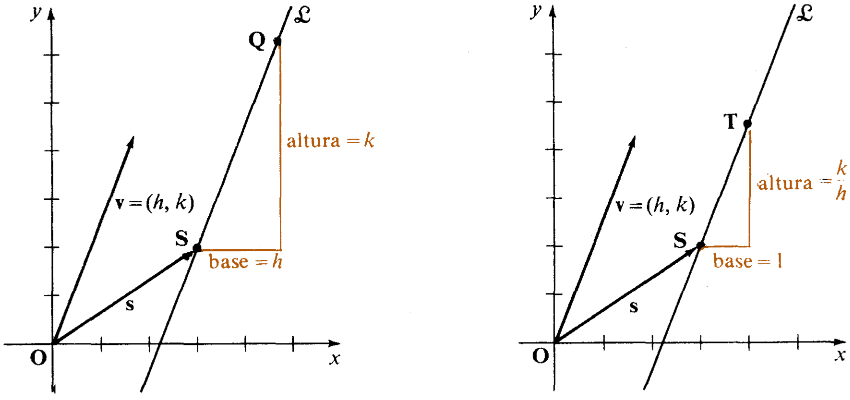
Recuérdese de estudios anteriores de matemáticas que el cociente de la altura de un segmento y la base del segmento recibe el nombre de *pendiente del segmento*, y que a la pendiente de un segmento se le designa mediante la letra *m*. Se tiene pues

$$m = \frac{\text{altura}}{\text{base}}.$$

Si $\mathbf{v} = (h, k)$ es el vector de dirección de una recta $\mathcal{L}$ que contiene al punto **S**, entonces $\mathcal{L}$ tiene una ecuación paramétrica vectorial de la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(h, k), \qquad r \in \mathcal{R}. \tag{1}$$

Si se asigna el valor 1 a r se ve que las coordenadas de otro punto **Q** que este sobre $\mathcal{L}$, se puede calcular sumando h a la primera coordenada y k a la segunda coordenada del punto dado **S**. Por lo tanto, h y k son la altura y la base respectivamente del segmento $\overline{\mathbf{SQ}}$, y si $h \neq 0$, entonces $\frac{k}{h}$ es la pendiente de $\overline{\mathbf{SQ}}$ [Figura 2–9 (a)].



(*a*) **Figura 2–9** (*b*)

Nuevamente, para $h \neq 0$, si se asigna el valor $\frac{1}{h}$ a r, se ve de la Ecuación (1) que las coordenadas de un segundo punto **T** que esté sobre $\mathcal{L}$ se puede calcular sumando $\frac{1}{h}(h, k) = \left(1, \frac{k}{h}\right)$ a **s**, es decir, sumando 1 a la primera coordenada de **S** y $\frac{k}{h}$ a la segunda coordenada de **S**. Puesto que 1 se suma a la primera coordenada de **S** y $\frac{k}{h}$ se suma a la segunda coordenada, se puede pensar que $\frac{k}{h}$ es el cambio, a lo largo de $\mathcal{L}$, en la dirección vertical por unidad de cambio en la dirección horizontal, como se muestra en la Figura 2 – 9 (b).

Obsérvese que el número $\frac{k}{h}$ no depende de la elección del punto **S** sobre $\mathcal{L}$; depende sólo del vector de dirección (h, k). Tampoco $\frac{k}{h}$ depende del vector de dirección (h, k) específico de $\mathcal{L}$ que se haya escogido, puesto que cualquier vector de dirección de $\mathcal{L}$ es de la forma $c(h, k)$, o bien de la forma (ch, ck), donde $c \neq 0$, y que $\frac{ck}{ch} = \frac{k}{h}$. Por lo tanto, se define la *pendiente de una recta* como sigue:

■ Si $\mathcal{L}$ es una recta tal que uno de sus vectores de dirección es (h, k) con $h \neq 0$, entonces la pendiente m de $\mathcal{L}$ está dada por

$$m = \frac{k}{h}.$$

De esta definición se sigue que m es la pendiente de una recta $\mathcal{L}$ si y sólo si $(1, m)$, o bien $\left(1, \frac{k}{h}\right)$, es un vector de dirección de $\mathcal{L}$. Esto indica que la Ecuación (1) de la anterior se puede escribir en la forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(1, m), \qquad r \in \mathcal{R}.$$

Ejemplo 1. Calcule la pendiente de la recta que pasa por los puntos **S**(5, 1) y **T**(3, −2), y obtenga la ecuación paramétrica vectorial de la forma $\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(1, m)$ que describa esta recta.

Solución: Un vector de dirección de esta recta es

$$\mathbf{t} - \mathbf{s} = (3, -2) - (5, 1) = (-2, -3).$$

Entonces, por definición, $m = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$. Puesto que **S**(5, 1) esta sobre la recta, una ecuación paramétrica vectorial de esta recta es $\mathbf{u} = (5, 1) + r(1, \frac{3}{2})$

El método empleado para desarrollar el Ejemplo 1 sugiere que resultaría útil conocer una expresión de la pendiente de la recta que pasa por dos puntos en términos de las coordenadas de dichos puntos. Puesto que un vector de dirección de la recta que pasa por los puntos $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ es

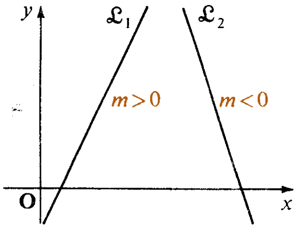
$$\mathbf{v} = \mathbf{t} - \mathbf{s} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

se sigue de la definición de pendiente que si $x_2 \neq x_1$, entonces la pendiente de $\mathcal{L}$ está dada por

■
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2}$$

Una recta cuya pendiente es *positiva* se "eleva" de izquierda a derecha, mientras que una recta cuya pendiente es *negativa* "cae" de izquierda a derecha. En la Figura 2 – 10 se muestra que la recta $\mathcal{L}_1$ tiene una pendiente positiva, mientras que $\mathcal{L}_2$ tiene una pendiente negativa.

Figura 2—10



Se dice que una recta con un vector de dirección de la forma $(h, 0)$, $h \neq 0$, es una **recta horizontal**, y su pendiente es $\frac{0}{h} = 0$. Puesto que el vector $(h, 0)$ tiene una representación geométrica que está sobre el eje x (véase la siguiente definición). Si una recta tiene un vector de dirección de la forma $(0, k)$, $k \neq 0$, se dice que la **recta es vertical**. La pendiente de una recta vertical no está definida (pues $\frac{k}{0}$ no está definido) y dichas rectas son paralelas al eje y.

Al estudiar geometría euclidiana se adquiere la costumbre de pensar que dos rectas son paralelas si son coplanares y no tienen ningún punto común. Recuérdese sin embargo que (página 16) dos vectores son paralelos si y sólo si ambos tienen la misma dirección o direcciones opuestas. También (véase página 53) una recta $\mathcal{L}$ y un vector no nulo **v** son paralelos si y sólo si **v** tiene una representación geométrica que esté sobre $\mathcal{L}$, es decir, si y sólo si **v** es un vector de dirección de $\mathcal{L}$. Conviene ahora dar una nueva definición de rectas paralelas en términos de sus vectores de dirección. Esta nueva definición es equivalente (Ejercicios 45 y 46, página 63) a la definición geométrica conocida, dos rectas son paralelas si no se intersecan en el mismo plano, excepto que, como se verá, se considerará que cada recta en el plano es paralela a sí misma.

■ Se dice que las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ en el plano son **paralelas** si y sólo si un vector de dirección de $\mathcal{L}_1$ es paralelo a un vector de dirección de $\mathcal{L}_2$.

Claro está, que como todos los vectores de dirección de una recta dada son paralelos, (página 53), si cualquier vector de dirección de $\mathcal{L}_1$, es paralelo a cualquier vector de dirección de $\mathcal{L}_2$, entonces *todos* los vectores de dirección de $\mathcal{L}_1$ son paralelos a *todos* los vectores de dirección de $\mathcal{L}_2$. Así mismo, puesto que cualquier vector no nulo paralelo al vector de dirección de una recta es un vector de dirección de la recta (página 53), cualquier vector de dirección de $\mathcal{L}_1$ es también un vector de dirección de $\mathcal{L}_2$. Por lo tanto, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas si y sólo si tienen un vector de dirección (h, k) en común. Recuérdese ahora que una recta con un vector de dirección (h, k) es o bien vertical (si $h = 0$) o tiene una pendiente $\frac{k}{h}$ (si $h \neq 0$). Entonces las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas si y sólo si son (i) ambas verticales o (ii) si tienen la misma pendiente $\frac{k}{h}$.

Ejemplo 2. Si $\mathcal{L}_1$ contiene a $\mathbf{S}(3, -1)$, $\mathcal{L}_2$ contiene a $\mathbf{T}(2, 5)$ y $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tiene ambas al vector $\mathbf{v} = (1, 2)$ como vector de dirección. ¿Coinciden ambas rectas?

Solución: Por definición las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas. Coincidirán si y sólo si **S** y **T** están sobre ambas. Por consiguiente, (véase las páginas 54 y 55) coinciden si y sólo si $\mathbf{t} - \mathbf{s}$ es paralelo a ambas, es decir, si y sólo si $(\mathbf{t} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v_p} = 0$. Se tiene que $(\mathbf{t} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v_p} = [(2, 5) - (3, -1)] \cdot (-2, 1) = (-1, 6) \cdot (-2, 1) = 8 \neq 0$. Por lo tanto $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no coinciden.

Se puede definir el paralelismo de dos rectas en términos de sus vectores de dirección. Recordando (véase la página 16) que los vectores cuyas direcciones difieren por : ±90° o por ±270° son perpendiculares u ortogonales, se tiene que:

■ Las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ en un plano son **perpendiculares** u **ortogonales,** si y sólo si un vector de dirección de $\mathcal{L}_1$ es perpendicular a un vector de dirección $\mathcal{L}_2$.

Esta definición es equivalente a la definición euclidiana que afirma que dos rectas coplanares son perpendiculares cuando se intersecan formando un ángulo recto.

Claro está que si un vector de dirección de $\mathcal{L}_1$ es perpendicular a un vector de dirección de $\mathcal{L}_2$, entonces *todos* los vectores de dirección de $\mathcal{L}_1$ son perpendiculares a *todos* los vectores de dirección de $\mathcal{L}_2$. Dado que dos vectores son perpendiculares si y sólo si su producto escalar es cero, entonces si $\mathbf{v}_1$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}_2$, las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$.

Ejemplo 3. Demuestre que la recta $\mathcal{L}_1$ con ecuación paramétrica vectorial $\mathbf{u} = (3, -1) + r(2, 3)$, es perpendicular a la recta $\mathcal{L}_2$ cuya ecuación paramétrica vectorial es $\mathbf{u} = (2, -1) + r(6, -4)$.

Solución: De las ecuaciones dadas se ve que $(2, 3)$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}_1$, y que $(6, -4)$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}_2$. Puesto que $(2, 3) \cdot (6, -4) = 12 - 12 = 0$, $\mathcal{L}_1$, y $\mathcal{L}_2$ son perpendiculares. En forma análoga podemos definir perpendicularidad de dos rectas en términos de sus vectores de dirección.

En la página 59 se vio que cada recta no vertical tiene un vector de dirección de la forma $(1, m)$, donde m es la pendiente de la recta. Por consiguiente, si $\mathcal{L}_1$ es una recta no vertical cuya pendiente es m_1, y $\mathcal{L}_2$ es una recta no vertical cuya pendiente es m_2, entonces. $(1, m_1)$ y $(1, m_2)$ son vectores de dirección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, respectivamente. Como $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son perpendiculares si y sólo si $(1, m_1)$ y $(1, m_2)$ son perpendiculares, es decir, si y sólo si

$$\begin{aligned}(1, m_1)\cdot(1, m_2) &= 0,\\ 1 + m_1m_2 &= 0,\\ m_1m_2 &= -1,\end{aligned}$$

o bien

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Se tiene:

■ Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si la pendiente de una es el *negativo del recíproco* de la pendiente de la otra.

Las rectas verticales son perpendiculares a las rectas horizontales. Como se vio anteriormente no se puede definir la pendiente de las rectas verticales mientras que la pendiente de las rectas horizontales es cero. Para estos tipos de rectas el criterio anterior no es aplicable.

Ejercicios 2—3

En los Ejercicios 1—8, calcule la pendiente de la recta que contiene a los puntos dados **S** y **T**, y obtenga la ecuación paramétrica vectorial de estas rectas en la forma $\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(1, m)$.

1. $\mathbf{S}(5, 1)$ y $\mathbf{T}(-4, 2)$
2. $\mathbf{S}(0, 7)$ y $\mathbf{T}(5, 0)$
3. $\mathbf{S}(3, -4)$ y $\mathbf{T}(-2, 1)$
4. $\mathbf{S}(2, 1)$ y $\mathbf{T}(1, -2)$
5. $\mathbf{S}(2, -3)$ y $\mathbf{T}(-4, -3)$
6. $\mathbf{S}(-1, -5)$ y $\mathbf{T}(4, -5)$
7. $\mathbf{S}(-2, -3)$ y $\mathbf{T}(-1, -7)$
8. $\mathbf{S}(-5, -4)$ y $\mathbf{T}(2, 5)$

En los Ejercicios 9—16, obtenga una ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por el punto dado **S** y cuya pendiente es m.

9. $\mathbf{S}(3, -4)$; $m = 2$
10. $\mathbf{S}(-2, 1)$; $m = -3$
11. $\mathbf{S}(0, -5)$; $m = 0$
12. $\mathbf{S}(2, -3)$; no está definida la pendiente
13. $\mathbf{S}(-2, -3)$; $m = \frac{2}{3}$
14. $\mathbf{S}(1, -5)$; $m = -\frac{3}{4}$
15. $\mathbf{S}(1, 0)$; no está definida la pendiente
16. $\mathbf{S}(-3, 4)$; $m = 0$

En los Ejercicios 17—21, determine las rectas cuyas ecuaciones paramétricas vectoriales se mencionan (a) paralelas, (b) perpendiculares o bien (c) oblicuas.

17. $\mathcal{L}_1$: $\mathbf{u} = (2, -1) + r(3, 2)$, $\mathcal{L}_2$: $\mathbf{u} = (-3, 1) + r(6, 4)$
18. $\mathcal{L}_1$: $\mathbf{u} = (4, 7) + r(-1, 3)$, $\mathcal{L}_2$: $\mathbf{u} = (-2, 5) + r(6, 2)$

19. $\mathcal{L}_1$: $\mathbf{u} = (3, -5) + r(2, -3)$, $\mathcal{L}_2$: $\mathbf{u} = (-1, 1) + r(-6, 9)$

20. $\mathcal{L}_1$: $\mathbf{u} = (1, -2) + r(-2, -3)$, $\mathcal{L}_2$: $\mathbf{u} = (4, 2) + r(4, -3)$

21. $\mathcal{L}_1$: $\mathbf{u} = (6, 1) + r(-3, 6)$, $\mathcal{L}_2$: $\mathbf{u} = (-2, 1) + r(4, 2)$

22. Determine cuáles de las rectas paralelas mencionadas en los Ejercicios 17—21 coinciden.

En los Ejercicios 23—28, determine si los tres puntos dados **R**, **S** y **T** son colineales.

23. $\mathbf{R}(2, 1), \mathbf{S}(-1, 3), \mathbf{T}(5, -1)$

24. $\mathbf{R}(1, -2), \mathbf{S}(7, 1), \mathbf{T}(-3, -4)$

25. $\mathbf{R}(8, -3), \mathbf{S}(-4, 5), \mathbf{T}(2, 4)$

26. $\mathbf{R}(3, -1), \mathbf{S}(-2, -3), \mathbf{T}(-1, -3)$

27. $\mathbf{R}(1, 0), \mathbf{S}(0, -3), \mathbf{T}(3, 3)$

28. $\mathbf{R}(2, 0), \mathbf{S}(0, -5), \mathbf{T}(4, 5)$

En los Ejercicios 29—36, obtenga una ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por el punto dado **S** y que (a) es paralela o bien (b) es perpendicular a la recta cuya ecuación paramétrica se menciona.

29. $\mathbf{S}(-2, 1)$; $\mathbf{u} = (3, 0) + r(2, -1)$

30. $\mathbf{S}(1, 2)$; $\mathbf{u} = (-3, -2) + r(3, 4)$

31. $\mathbf{S}(3, 4)$; $\mathbf{u} = (1, 5) + r(5, -2)$

32. $\mathbf{S}(2, 1)$; $\mathbf{u} = (-1, 7) + r(1, 3)$

33. $\mathbf{S}(0, 4)$; $\mathbf{u} = (2, 2) + r(-3, 3)$

34. $\mathbf{S}(0, 0)$; $\mathbf{u} = (1, -1) + r(4, 3)$

35. $\mathbf{S}(-2, -3)$; $\mathbf{u} = (3, 3) + r(5, 6)$

36. $\mathbf{S}(4, -2)$; $\mathbf{u} = (1, 2) + r(3, -4)$

En los Ejercicios 37—42, determine si la recta $\mathcal{L}_1$ que contiene a los puntos dados **Q** y **R** es (a) paralela, (b) perpendicular, o (c) oblicua a la recta $\mathcal{L}_2$ que contiene a los puntos dados **S** y **T**.

37. $\mathcal{L}_1$: $\mathbf{Q}(3, 1)$ y $\mathbf{R}(4, 3)$; $\mathcal{L}_2$: $\mathbf{S}(2, 4)$ y $\mathbf{T}(4, 8)$

38. $\mathcal{L}_1$: $\mathbf{Q}(2, -5)$ y $\mathbf{R}(1, 2)$; $\mathcal{L}_2$: $\mathbf{S}(6, 5)$ y $\mathbf{T}(-1, 4)$

39. $\mathcal{L}_1$: $\mathbf{Q}(-1, -2)$ y $\mathbf{R}(2, 2)$; $\mathcal{L}_2$: $\mathbf{S}(-5, 7)$ y $\mathbf{T}(3, 1)$

40. $\mathcal{L}_1$: $\mathbf{Q}(4, -5)$ y $\mathbf{R}(2, -1)$; $\mathcal{L}_2$: $\mathbf{S}(6, -2)$ y $\mathbf{T}(-2, 3)$

41. $\mathcal{L}_1$: $\mathbf{Q}(1, -1)$ y $\mathbf{R}(3, 0)$; $\mathcal{L}_2$: $\mathbf{S}(0, 3)$ y $\mathbf{T}(1, 5)$

42. $\mathcal{L}_1$: $\mathbf{Q}(2, 0)$ y $\mathbf{R}(0, -2)$; $\mathcal{L}_2$: $\mathbf{S}(-1, 3)$ y $\mathbf{T}(2, -4)$

43. Si $\mathcal{L}$ es la gráfica de la ecuación paramétrica vectorial $\mathbf{u} = (a, b) + r(c, d)$, obtenga una ecuación paramétrica vectorial de la recta $\mathcal{M}$ que es paralela a $\mathcal{L}$ y contiene al punto medio del segmento cuyos extremos son $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$.

44. En el Ejercicio 43, obtenga una ecuación paramétrica vectorial de la recta $\mathcal{N}$ que es perpendicular a $\mathcal{L}$ y contiene al punto medio del segmento dado.

* **45.** Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos rectas paralelas no coincidentes y que tienen un vector de dirección **v**, y sea **S** un punto sobre $\mathcal{L}_1$ pero que no está sobre $\mathcal{L}_2$, y sea **T** un punto sobre $\mathcal{L}_2$ pero que no está sobre $\mathcal{L}_1$.
Demuestre que si existiera un punto **R** común a ambas rectas entonces se tendría $(\mathbf{r} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = 0$ y $(\mathbf{r} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = 0$. Demuestre entonces, que si $(\mathbf{t} - \mathbf{s}) = (\mathbf{r} - \mathbf{s}) - (\mathbf{r} - \mathbf{t})$, se tendría $(\mathbf{t} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = 0$ y entonces **T** estaría sobre $\mathcal{L}_1$. ¿Qué quiere decir esto?

* **46.** Demuestre que si **A, B** y **C** son puntos colineales, entonces $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a})_\mathbf{p} = 0$.

Ecuaciones Cartesianas en la recta

2—4 Forma cartesiana ordinaria de la ecuación de una recta

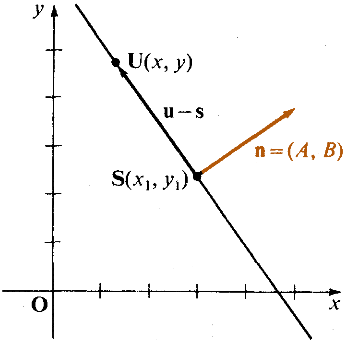
La forma cartesiana ordinaria (página 47) de la ecuación de una recta en el plano,

$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0,$$

se puede obtener de varias maneras. Una de éstas se esboza en los Ejercicios 35 y 36 de la página 68. En esta sección se verá cómo se obtiene la forma cartesiana ordinaria a partir de una ecuación vectorial de $\mathcal{L}$.

Cualquier vector no nulo que sea perpendicular al vector de dirección de una recta $\mathcal{L}$ es un **vector normal** a $\mathcal{L}$. En la Figura 2 – 11 se muestra a una recta $\mathcal{L}$, que contiene al punto $S(x_1, y_1)$, así como al vector $\mathbf{n} = (A, B)$ normal a $\mathcal{L}$, donde A y B representan números reales, uno de los cuales es diferente de cero. Si $U(x, y)$ es cualquier punto del plano, entonces U está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ es paralelo a $\mathcal{L}$, es decir, si y sólo si $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$. Entonces (página 55) una ecuación de $\mathcal{L}$ es

Figura 2—11



$$(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

o bien

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}.$$

Puesto que $\mathbf{u} = (x, y)$, $\mathbf{s} = (x_1, y_1)$, y $\mathbf{n} = (A, B)$, esta última ecuación se puede escribir en la forma

$$(x, y) \cdot (A, B) = (x_1, y_1) \cdot (A, B),$$

o bien

$$Ax + By = Ax_1 + By_1.$$

Ahora, debido a que $x_1, y_1, A,$ y B son constantes, el número $Ax_1 + By_1$ es también constante, y se denotará mediante el símbolo $-C$. Se tiene finalmente que

■
$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0. \tag{1}$$

es una ecuación de $\mathcal{L}$. La ecuación cartesiana (1) es una **ecuación escalar** de $\mathcal{L}$ pues no contiene vectores.

Ejemplo 1. Obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta que contiene al punto $\mathbf{S}(1, 4)$ y que tiene a $\mathbf{v} = (3, -2)$ como vector de dirección.

Solución (1): Puesto que un vector de dirección de $\mathcal{L}$ es $(3, -2)$, el vector normal a $\mathcal{L}$ es $\mathbf{n} = (2, 3)$. Ahora, como $\mathbf{S}(1, 4)$ está sobre $\mathcal{L}$, si $\mathbf{U}(x, y)$ es cualquier punto de $\mathcal{L}$ se tiene

$$(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Puesto que $\mathbf{u} = (x, y)$, $\mathbf{s} = (1, 4)$, y $\mathbf{n} = (2, 3)$, esta ecuación es equivalente a

$$[(x, y) - (1, 4)] \cdot (2, 3) = 0,$$
$$(x, y) \cdot (2, 3) - (1, 4) \cdot (2, 3) = 0,$$

o bien

$$2x + 3y - 14 = 0,$$

que es la ecuación cartesiana requerida.

Solución (2): Puesto que $(3, -2)$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}$, un vector normal a $\mathcal{L}$, es $\mathbf{n} = (A, B) = (2, 3)$. Entonces, por la Ecuación (1) anterior se tiene que $A = 2$ y $B = 3$, es decir,

$$2x + 3y + C = 0.$$

Como $\mathbf{S}(1, 4)$ está sobre $\mathcal{L}$, se puede sustituir a x por 1 y a y por 4 en esta ecuación obteniendo

$$2(1) + 3(4) + C = 0,$$

ó

$$C = -14.$$

Por lo tanto, una ecuación cartesiana ordinaria de $\mathcal{L}$ es

$$2x + 3y - 14 = 0.$$

Puesto que los vectores (A, B) y $(-B, A)$ son perpendiculares, si son respectivamente normales a las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ en el plano, entonces $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ deben ser perpendiculares (véase la Figura 2 – 12). Se tiene que las ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ -Bx + Ay + C' &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $A^2 + B^2 \neq 0$, son las ecuaciones cartesianas ordinarias de dos rectas que son perpendiculares.

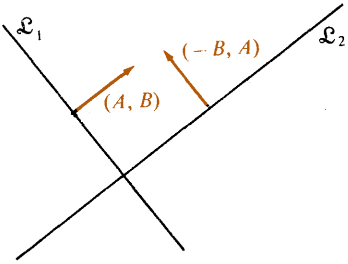


Figura 2—12

Ejemplo 2. Obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta que contiene a S(5, – 1) y que es perependicular a la recta cuya ecuación cartesiana es

$$3x - 4y + 6 = 0.$$

Solución: De las Ecuaciones (2) la ecuación requerida tiene la forma

$$4x + 3y + C' = 0.$$

Puesto que S(5, – 1) está sobre la recta se sustituye a x por 5 y a y por —1 para obtener

$$4(5) + 3(-1) + C' = 0,$$

o bien

$$C' = -17.$$

Por lo tanto, la ecuación cartesiana ordinaria de esta recta es

$$4x + 3y - 17 = 0.$$

Si (A, B) es un vector normal a una recta $\mathcal{L}$, entonces es también normal a cualquier recta paralela a $\mathcal{L}$. Esto indica que las ecuaciones

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ Ax + By + C' &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

donde $A^2 + B^2 \neq 0$, son las ecuaciones cartesianas dos rectas paralelas.

Ejemplo 3. Obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta que contiene al punto S(3, –2) y que es paralela a la recta cuya ecuación cartesiana es $2x - 5y - 4 = 0$.

Solución: De las Ecuaciones (3), la ecuación requerida es de la forma

$$2x - 5y + C' = 0.$$

Puesto que S(3, −2) está sobre la recta se puede sustituir a x por 3 y a y por —2 obteniendo

$$2(3) - 5(-2) + C' = 0,$$

ó

$$C' = -16.$$

Por lo tanto, la ecuación cartesiana ordinaria de la recta es

$$2x - 5y - 16 = 0.$$

Nótese que cuando la ecuación de una recta $\mathcal{L}$ está dada en su forma cartesiana ordinaria

$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0,$$

entonces un vector normal a $\mathcal{L}$ es $\mathbf{n} = (A, B)$, y un vector de dirección de $\mathcal{L}$ es $\mathbf{v} = (-B, A)$. Por consiguiente, la pendiente de $\mathcal{L}$ está dada por

$$m = -\frac{A}{B}, \quad \text{si } B \neq 0.$$

Ejercicios 2—4

En los Ejercicios 1—8, obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta que contiene al punto dado **S** y para la cual el vector dado es normal a ella.

1. S(4, 2); $\mathbf{n} = (3, 5)$
2. S(3, 7); $\mathbf{n} = (2, 4)$
3. S(2, −1); $\mathbf{n} = (1, -7)$
4. S(5, −3); $\mathbf{n} = (-6, 1)$
5. S(−7, 3); $\mathbf{n} = (-1, -2)$
6. S(−6, 1); $\mathbf{n} = (-3, 3)$
7. S(−2, −2); $\mathbf{n} = (1, 1)$
8. S(−8, −3); $\mathbf{n} = (-4, 2)$

En los Ejercicios 9—14, obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta que contiene al punto dado **S** y uno de cuyos vectores de dirección es el vector dado **v**.

9. S(3, 7); $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
10. S(2, −1); $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
11. S(−4, 5); $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
12. S(6, 3); $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
13. S(7, −5); $\mathbf{v} = 6\mathbf{i}$
14. S(0, 5); $\mathbf{v} = -3\mathbf{j}$

En los Ejercicios 15—20, ¿diga cúales de los pares de rectas, cuyas ecuaciones cartesianas se dan, son perpendiculares, y cúales pares de rectas son paralelas?

15. $2x - 3y + 7 = 0,\ 4x - 6y - 15 = 0$
16. $5x - 7y + 13 = 0,\ -15x + 21y + 25 = 0$
17. $4x + 5y - 9 = 0,\ 10x - 8y + 17 = 0$
18. $6x - 8y + 19 = 0,\ 4x + 3y + 5 = 0$
19. $3x - 6y + 8 = 0,\ -2x + 4y - 7 = 0$
20. $8x + 20y - 7 = 0,\ 15x - 6y - 4 = 0$

En los Ejercicios 21–28, obtenga una ecuación cartesiana ordinaria de la recta que contiene al punto dado **S** y que (a) es perpendicular, o (b) es paralela a la recta cuya ecuación cartesiana se menciona.

21. $S(1, 3)$; $2x - 5y + 7 = 0$
22. $S(5, 2)$; $3x + 4y - 8 = 0$
23. $S(3, -2)$; $5x - 7y + 10 = 0$
24. $S(2, -4)$; $3x - 4y + 12 = 0$
25. $S(-6, 2)$; $5x + 6y - 9 = 0$
26. $S(-3, 5)$; $6x - 3y + 18 = 0$
27. $S(-1, -1)$; $x - 2y - 7 = 0$
28. $S(-8, -3)$; $4x + 7y - 11 = 0$

En los Ejercicios 29–34, obtenga una ecuación cartesiana de la recta que contiene a los puntos dados **S** y **T**.

29. $S(3, 5)$ y $T(2, 6)$
30. $S(2, 7)$ y $T(5, 1)$
31. $S(4, -5)$ y $T(-2, 3)$
32. $S(-4, 2)$ y $T(3, -7)$
33. $S(-1, -1)$ y $T(0, -1)$
34. $S(3, -5)$ y $T(3, 2)$

En los Ejercicios 35 y 36, hay que usar el concepto de mediatriz.

* **35.** Demuestre que toda recta en el plano cartesiano es la gráfica de alguna ecuación cartesiana lineal $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. [*Sugerencia*: Sea $\mathcal{L}$ una recta del plano y tómese los puntos $S(x_1, y_1)$ y $T(x_2, y_2)$ de tal manera que $\mathcal{L}$ sea la mediatriz de $\overline{ST}$. Demuestre ahora que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$$U(x, y) \text{ está sobre } \mathcal{L}$$

$$d(U, S) = d(U, T) \qquad (1)$$

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$$

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2) = 0 \qquad (2)$$

¿Es esta última ecuación, lineal en las variables x y y? o sea ¿es de la forma $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$?]

* **36.** Demuestre que la gráfica de toda ecuación cartesiana lineal en dos variables es una recta. [*Sugerencia*: Sea $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$, una ecuación lineal en las variables x y y. La Ecuación (2) del Ejercicio 35 sugiere que se elijan los números x_1, x_2, y_1, y y_2, como coordenadas de los puntos **S** y **T**, tales que

$$2(x_2 - x_1) = A,\ 2(y_2 - y_1) = B,\ x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = C. \qquad (3)$$

Demuestre que esta elección se puede efectuar resolviendo las dos primeras ecuaciones en (3), es decir, calculando así x_2 y y_2, y entonces eliminando a x_2 y y_2 de la última ecuación de (3). La ecuación dada $Ax + By + C = 0$ es ahora *igual* a (2). Use el hecho de que las Ecuaciones (2) y (1) son equivalentes para demostrar que la gráfica de de $Ax + By + C = 0$ es $\{U\colon d(U, S) = d(U, T)\}$.]

* **37.** Sea $\mathcal{L}$ la recta cuya ecuación cartesiana es $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$. Escriba una ecuación cartesiana de la recta $\mathcal{M}$ que es paralela a $\mathcal{L}$ y que contiene al punto $S(a, b)$.

* **38.** Escriba la ecuación cartesiana de la recta $\mathcal{N}$ que es perpendicular a la recta $\mathcal{L}$ que se menciona en el Ejercicio 37 y que contiene al punto $S(a, b)$.

* **39.** Demuestre que si el punto $S(h, k)$ está sobre una recta paralela a la recta cuya ecuación cartesiana es $Ax + By + C = 0$, con $B \neq 0$, entonces $\mathcal{L}$ interseca al eje y en $Q\left(0, \frac{A}{B} h + k\right)$.

* **40.** Demuestre que si el punto $S(h, k)$ está sobre una recta paralela a la recta cuya ecuación cartesiana es $Ax + By + C = 0$, con $A \neq 0$, entonces $\mathcal{L}$ interseca al eje x en $R\left(h + \frac{B}{A} k, 0\right)$.

2–5 Ecuación punto y pendiente, y ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados.

La forma cartesiana ordinaria de la ecuación de una recta

$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0,$$

se puede escribir de muchas maneras equivalentes. Algunas de estas formas son especialmente interesantes, pues permiten obtener la ecuación de una recta directamente a partir de algunas propiedades geométricas de la recta, o bien permiten identificar ciertas propiedades geométricas de una recta, por inspección de su ecuación. En esta sección se discutirán dos de estas formas útiles.

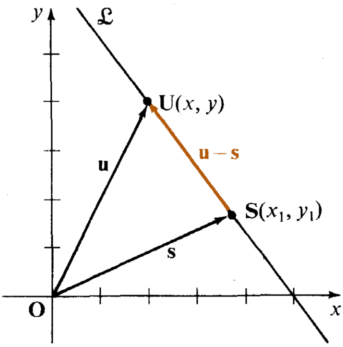


Figura 2–13

En la figura 2–13 se muestra a la recta $\mathcal{L}$ que pasa por un punto dado $S(x_1, y_1)$. Si $U(x, y)$ es cualquier otro punto de $\mathcal{L}$ entonces un vector de dirección de $\mathcal{L}$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{u} - \mathbf{s} &= (x, y) - (x_1, y_1) \\ &= (x - x_1, y - y_1). \end{aligned}$$

Se vio en la página 59 que si $x \neq x_1$, entonces la pendiente m de $\mathcal{L}$ está dada por

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m, \tag{1}$$

de donde se tiene

■
$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{2}$$

Se dice que esta ecuación cartesiana de $\mathcal{L}$ es la ecuación **punto y pendiente** de la recta. Aunque la Ecuación (1) carece de significado cuando $x = x_1$, la Ecuación (2) queda satisfecha por las coordenadas de *todos* los puntos (x, y) de $\mathcal{L}$, puesto que cuando $(x, y) = (x_1, y_1)$ se tiene

$$y_1 - y_1 = m(x_1 - x_1),$$

o bien

$$0 = 0.$$

Si se especifica la pendiente de una recta y un punto sobre la recta se puede escribir una ecuación de la forma (2) directamente, y después transformarla en una ecuación cartesiana ordinaria que sea equivalente, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta que pasa por el punto $\mathbf{S}(7, -1)$ y cuya pendiente es 3.

Solución: Si se hace $x_1 = 7$, $y_1 = -1$ y $m = 3$ en la Ecuación (2) se obtiene

$$y - (-1) = 3(x - 7).$$

Entonces

$$y + 1 = 3x - 21,$$

o bien

$$3x - y - 22 = 0.$$

Si una recta $\mathcal{L}$ contiene a los puntos $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$, con $x_2 \neq x_1$, entonces se ha visto que la pendiente m de $\mathcal{L}$ está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si se sustituye esta expresión de m en la Ecuación (2) se obtiene la ecuación equivalente

■
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{3}$$

Esta es la ecuación cartesiana de $\mathcal{L}$ que pasa **por dos puntos dados.**

Ejemplo 2. Obtenga la ecuación cartesiana en forma ordinaria de la recta que pasa por los puntos **S**(2, 3) y **T**(4, −7).

Solución: Si en la Ecuación (3) de la página 70 se sustituye a x_1 y y_1 por las coordenadas del punto **S**(2, 3), y a x_2 y y_2 por las coordenadas del punto **T**(4, −7), se obtiene

$$y - 3 = \frac{-7 - 3}{4 - 2}(x - 2),$$

$$y - 3 = -5(x - 2),$$

$$y - 3 = -5x + 10,$$

o bien

$$5x + y - 13 = 0.$$

Si las coordenadas x de dos puntos dados son iguales, entonces la recta que pasa por ellos es vertical (Figura 2−14), y su pendiente no está definida. Sin embargo, puesto que todos los puntos de una recta tal deben tener la misma coordenada x, digamos x_1, la recta queda completamente determinada si se especifica esta coordenada, y por consiguiente la ecuación de la recta es

$$x = x_1.$$

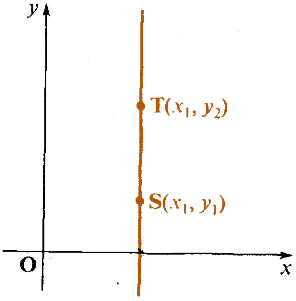


Figura 2—14

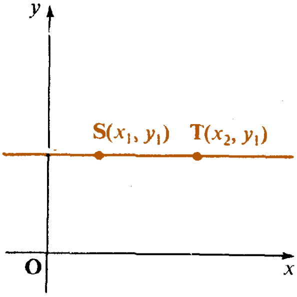


Figura 2—15

Por otra parte, si la coordenada y de dos puntos dados es la misma, la recta que pasa por esos puntos es horizontal (Figura 2−15), y esa recta tiene pendiente cero. De la Ecuación (2) de la página 70 se sigue inmediatamente que,

$$y - y_1 = 0,$$

y por lo tanto que

$$y = y_1$$

es la ecuación cartesiana de esta recta.

En las Secciones 2—1 y 2—2 se han obtenido dos formas de un sistema de ecuaciones paramétricas de una recta:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + r(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + r(y_2 - y_1) \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} x &= x_1 + rh \\ y &= y_1 + rk \end{aligned}$$

Ahora se verá como se relacionan dichos sistemas con las ecuaciones que se han discutido en esta sección. En cada caso despéjese a r en la primera ecuación:

$$r = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad\qquad r = \frac{x - x_1}{h}$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación de cada caso se tiene

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1) \qquad y = y_1 + \frac{x - x_1}{h}(k),$$

o bien $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad y - y_1 = \frac{k}{h}(x - x_1). \tag{4}$$

Puesto que $\frac{k}{h}$ es la pendiente de la recta si $h \neq 0$, se ve que las Ecuaciones (4) corresponden a las ecuaciones desarrolladas en esta sección.

Ejercicios 2—5

En los Ejercicios 1—10, obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta que pasa por el punto dado **S** y cuya pendiente es *m*.

1. S(2, 5); $m = 2$
2. S(6, 1); $m = 4$
3. S(3, −4); $m = -1$
4. S(7, −2); $m = 5$
5. S(−1, 5); $m = -3$
6. S(−4, 6); $m = -2$
7. S(−1, −1); $m = \frac{1}{2}$
8. S(−3, −5); $m = -\frac{2}{3}$
9. S(2, −6); $m = -\frac{3}{5}$
10. S(−4, −1); $m = 0$

En los Ejercicios 11—22, obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta que pasa por los puntos dados **S** y **T**.

11. S(1, 5) y T(3, 2)
12. S(4, 1) y T(2, 6)
13. S(2, −4) y T(−1, 2)
14. S(3, −7) y T(1, −4)
15. S(−6, 2) y T(7, −2)
16. S(−4, 3) y T(−2, 1)
17. S(−3, 4) y T(−1, −1)
18. S(−2, −3) y T(−5, −4)
19. S(4, −3) y T(7, −3)
20. S(−3, 2) y T(6, 2)
21. S(3, 5) y T(3, −2)
22. S(−4, 6) y T(−4, −3)

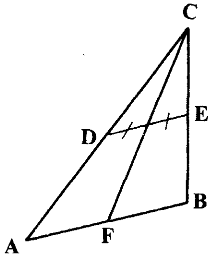
En los Ejercicios 23—26, se dan las coordenadas de los vértices de un triángulo. En cada ejercicio, obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de las rectas que contienen los lados del triángulo.

23. A(0, 0), B(4, 2), C(−2, 6)
24. A(0, 0), B(−6, 2), C(2, 4)
25. A(−1, 3), B(3, 7), C(7, 3)
26. A(−3, −3), B(−3, 3), C(5, 0)

27–30. Repita los Ejercicios 23—26 determinando ahora las rectas que contienen las medianas del triángulo dado.

31–34. Repita los Ejercicios 23—26 determinando ahora las rectas que contienen las alturas del triángulo dado.

En los Ejercicios 35 y 36, recuerde que el segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado del triángulo, y que su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado. Además, una mediana del triángulo biseca a este segmento.



$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

$\overline{CF}$ biseca a $\overline{DE}$

35. Obtenga las ecuaciones cartesianas ordinarias de las rectas que contienen a las medianas del triángulo cuyos lados tienen los puntos medios $S(2, 6)$, $T(5, 2)$, y $O(0, 0)$.

36. Repita el Ejercicio 35 para el triángulo cuyos lados tienen los puntos medios $R(0, 5)$, $S(2, 3)$, y $T(-3, -3)$.

* **37.** Emplee el método expuesto en el Ejemplo 3 de la página 56 para calcular las coordenadas de los vértices del triángulo mencionado en el Ejercicio 35.

* **38.** Emplee el método expuesto en el Ejemplo 3 de la página 56 para determinar los vértices del triángulo mencionado en el Ejercicio 36.

* **39.** Emplee el resultado del Ejercicio 37 para determinar las ecuaciones cartesianas de las rectas que contienen las alturas del triángulo mencionado en el Ejercicio 35.

* **40.** Emplee el resultado del Ejercicio 38 para obtener las ecuaciones cartesianas ordinarias de las rectas que contienen a las alturas del triángulo mencionado en el Ejercicio 36.

2–6 Ecuación de la recta punto y pendiente en términos de las intersecciones con los ejes

$$Ax + By + C = 0,$$

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

o bien

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

(donde $A^2 + B^2 \neq 0$ y $x_2 \neq x_1$) de la ecuación cartesiana de una recta. En esta sección se estudiarán otras dos formas que también resultan útiles.

Como se muestra en la Figura 2–16, si una recta $\mathcal{L}$ no es paralela al eje y, entonces debe intersecar al eje y en algún punto **T** (véase el Ejercicio 39, página 69). Puesto que la coordenada x de cualquier punto del eje y es 0, las coordenadas de **T** deben ser de la forma $(0, b)$, $b \in \mathcal{R}$. El número b se llama la **ordenada al origen** de $\mathcal{L}$. Si se sustituye a x_1 por 0 y a y_1 por b en la Ecuación (2) de la página 70 se obtiene

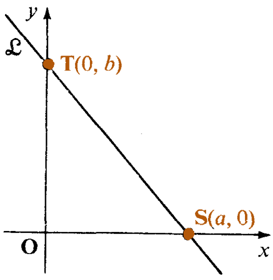


Figura 2–16

$$y - b = m(x - 0),$$

o bien

■
$$y = mx + b. \tag{1}$$

Esta ecuación de $\mathcal{L}$ se llama la **ecuación punto y pendiente** con ordenada al origen, puesto que m es la pendiente de $\mathcal{L}$ y b es la ordenada al origen de $\mathcal{L}$.

Si en la ecuación cartesiana ordinaria de una recta no vertical se despeja a y en función de x, se tiene

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \quad (B \neq 0), \\ By &= -Ax - C, \\ y &= -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \end{aligned}$$

Comparando esta ecuación con la Ecuación (1) anterior se ve que

$$m = -\frac{A}{B} \quad \text{y} \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Esta expresión de m está de acuerdo con la dada en la Sección 2—4.

Ejemplo 1. Calcule la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación cartesiana es $3x - 4y = 12$.

Solución: Escríbase esta ecuación en la forma (1), obteniéndose que

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 12, \\ -4y &= -3x + 12, \\ y &= \tfrac{3}{4}x - 3. \end{aligned}$$

Por inspección, la pendiente es $\frac{3}{4}$ y la ordenada al origen es -3.

Si una recta $\mathcal{L}$ no es paralela al eje x, entonces debe intersecar al eje x en algún punto. Este punto tiene coordenadas de la forma $(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$, puesto que la coordenada y de todos los puntos del eje x es 0. (Véase la Figura 2–16.) El número a recibe el nombre de **abscisa al origen** de $\mathcal{L}$.

Si la abscisa al origen de una recta $\mathcal{L}$ es a y su ordenada al origen es b, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$, se pueden emplear las coordenadas de los puntos de intersección de la recta $\mathcal{L}$ con los ejes $(a, 0)$ y $(0, b)$, y por ecuación cartesiana de $\mathcal{L}$ que por dos puntos dados (Véase la Ecuación (3), página 70) se obtiene

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a),$$

$$-ay = bx - ab,$$

$$bx + ay = ab,$$

o multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{ab}$,

■ $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (2)$$

Esta es la ecuación **punto y pendiente de ordenada** y abscisa al origen de la recta $\mathcal{L}$.

Ejemplo 2. Obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta $\mathcal{L}$ cuya ordenada al origen es x y cuya abscisa al origen es -5.

Solución: Empleando la Ecuación (2) inmediatamente anterior y tomando $a = 3$ y $b = -5$, se tiene

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1,$$

de donde

$$-5x + 3y = -15,$$

o bien

$$5x - 3y - 15 = 0.$$

Esta, es la ecuación cartesiana requerida de la recta $\mathcal{L}$.

Cuando se da la ecuación de una recta $\mathcal{L}$ en la forma $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son todos no nulos, se pueden determinar a y b, la ordenada y abscisa al origen de $\mathcal{L}$, simplemente sustituyendo a y y x por 0 respectivamente. Así se obtiene que

$$a = -\frac{C}{A} \quad \text{y} \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Ejercicios 2–6

En los Ejercicios 1–8, obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta cuya abscisa al origen y pendiente se dan.

1. $m = 2;\ b = 5$
2. $m = -3;\ b = 2$
3. $m = 4;\ b = -4$
4. $m = -2;\ b = -1$
5. $m = \frac{2}{3};\ b = 0$
6. $m = -\frac{1}{2};\ b = 0$
7. $m = -\frac{4}{5};\ b = 4$
8. $m = 0;\ b = -5$

En los Ejercicios 9–16, calcule la pendiente y la abscisa al origen de la recta cuya ecuación cartesiana se menciona.

9. $3x - 4y + 8 = 0$
10. $2x - 5y + 10 = 0$
11. $5x + 4y - 16 = 0$
12. $x + 3y + 9 = 0$
13. $7x - 2y - 4 = 0$
14. $3x + 4y + 5 = 0$
15. $3y + 6 = 0$
16. $5y - 4 = 0$

En los Ejercicios 17–24, obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta cuya abscisa y ordenada al origen, *b* y *a* respectivamente, se dan.

17. $a = 2,\ b = 3$
18. $a = 5,\ b = 1$
19. $a = -3,\ b = 2$
20. $a = -4,\ b = 4$
21. $a = 7,\ b = -2$
22. $a = 5,\ b = -3$
23. $a = -1,\ b = -2$
24. $a = -5,\ b = -4$

En los Ejercicios 25–32, calcule la ordenada al origen *a* y la abscisa al origen *b* de la recta cuya ecuación cartesiana se menciona.

25. $3x + 4y - 12 = 0$
26. $2x + 3y - 18 = 0$
27. $5x - 3y + 15 = 0$
28. $x - 7y - 14 = 0$
29. $5x - 2y + 10 = 0$
30. $8x + 3y - 12 = 0$
31. $3x - 5y + 8 = 0$
32. $4x + 6y + 7 = 0$

En los Ejercicios 33–40, obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de las rectas cuyas características están dadas:

33. La recta que contiene al origen y es perpendicular a la recta cuya ordenada y abscisa al origen son respectivamente 5 y $-\frac{2}{3}$,

34. La recta que contiene al punto $S(3, -2)$, y es perpendicular a la recta que pasa por $T(1, 1)$ y cuya pendiente es $\frac{3}{2}$.

35. La recta cuya abscisa y ordenada al origen suman 7, y cuya pendiente es $-\frac{11}{3}$. (*Sugerencia*: Sea $\dfrac{b}{a} = -m$.)

36. La recta cuya ordenada y abscisa al origen suman 2, y cuya pendiente es $\frac{9}{5}$.

37. La recta cuya ordenada y abscisa al origen suman 0, y que contiene al punto $S(2, 4)$.

38. La recta cuya ordenada y abscisa al origen suman -1, y que pasa por el punto S(2, 2). (Dos soluciones.)

* **39.** La recta para la cual el producto de la ordenada al origen y la abscisa al origen es 12, y que contiene al punto S(3, 1).

* **40.** La recta para la cual el producto de la ordenada al origen y la abscisa al origen es 6,y que pasa por el punto S($\frac{3}{2}$, -3).
(Dos soluciones.)

* **41.** ¿Para qué valor de a son perpendiculares las rectas?

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-2} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x}{-4} + \frac{y}{-2} = 1$$

* **42.** ¿Para qué valor de b son perpendiculares las rectas?

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$$

2–7 Forma simétrica de la ecuación de la recta

Las componenetes h, k de un vector de dirección (h, k) de una recta reciben el nombre de **números directores** de $\mathcal{L}$. Estos números son importantes en la determinación de otra forma útil de la ecuación de una recta que no sea paralela a ninguno de los ejes coordenados.

Considérese una recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $S(x_1, y_1)$ y que tiene al vector $\mathbf{v} = (h, k)$ como un vector de dirección. Una ecuación paramétrica de esta recta $\mathcal{L}$ es

$$(x, y) = (x_1, y_1) + r(h, k), \qquad r \in \mathcal{R},$$

de la cual se obtienen las ecuaciones paramétricas cartesianas

$$x = x_1 + rh \quad \text{y} \quad y = y_1 + rk. \tag{1}$$

(si $h \neq 0$ y $k \neq 0$, podemos despejar a r en cada una de las ecuaciones anteriores,

$$\frac{x - x_1}{h} = r = \frac{y - y_1}{k},$$

de donde,

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{y - y_1}{k}. \tag{2}$$

La Ecuación (2) recibe el nombre de **forma simétrica** de la ecuación de la recta.

Si h ó k son 0, entonces $\mathcal{L}$ es paralela a un eje de coordenadas, es decir, $\mathcal{L}$ es o bien vertical u horizontal. En estos casos la forma simétrica no es aplicable. Sin embargo, de la Ecuación (1) se obtiene que $x = x_1$ o bien $y = y_1$, respectivamente, es la ecuación de una recta.

Se puede determinar un par de números directores de $\mathcal{L}$, al identificar a dos puntos $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ que estén sobre $\mathcal{L}$, de la Ecuación (1) se tiene

$$x_2 = x_1 + ch, \qquad y_2 = y_1 + ck,$$

donde c es una constante. De donde

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = c(h, k),$$

y por lo tanto, $x_2 - x_1$ y $y_2 - y_1$ son un par de números directores de $\mathcal{L}$.

Ejemplo 1. Obtenga la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ en su forma simétrica que pasa por los puntos $\mathbf{S}(3, -3)$ y $\mathbf{T}(6, 1)$.

Solución: Un par de números directores resultan ser

$$h = x_2 - x_1 = 6 - 3 = 3$$

y

$$k = y_2 - y_1 = 1 - (-3) = 4.$$

Sustituyendo a x_1 y y_1 en la Ecuación (2), página 77, por las respectivas coordenadas de $\mathbf{S}(3, -3)$, o de $\mathbf{T}(6, 1)$, se obtiene

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+3}{4} \quad \text{ó} \quad \frac{x-6}{3} = \frac{y-1}{4}.$$

Se puede verificar que cada una de estas ecuaciones representa a la misma recta, reduciéndolas a la forma cartesiana ordinaria.

Dada una ecuación cartesiana ordinaria $Ax + By + C = 0$ para una recta $\mathcal{L}$, si A y $B \neq 0$, se puede escribir una ecuación equivalente en forma simétrica simplemente identificando un punto $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ que esté sobre la gráfica de $Ax + By + C = 0$, y notando que el vector $\mathbf{v} = (-B, A)$ es un vector de dirección de la gráfica. Por lo tanto, se tiene que la ecuación de $\mathcal{L}$ en forma simétrica es

$$\frac{x - x_1}{-B} = \frac{y - y_1}{A}.$$

Ejemplo 2. Obtenga la forma simétrica de la ecuación cartesiana para la gráfica de

$$3x - 4y + 7 = 0.$$

Solución: Calcúlese primero una solución de $3x - 4y + 7 = 0$ asignando un valor, por ejemplo 1, a x y despejando a y. Se obtiene así

$$\begin{aligned} 3(1) - 4y + 7 &= 0, \\ -4y &= -10, \\ y &= \tfrac{5}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{S}(1, \frac{5}{2})$ es un punto de la gráfica de la ecuación dada. Puesto que $A = 3$ y $B = -4$, el vector $\mathbf{v} = (4, 3)$ es un vector de dirección de la gráfica. Esto indica que la ecuación en forma simétrica es

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - \frac{5}{2}}{3}.$$

Se puede emplear a un vector de dirección de una recta para determinar el *ángulo de dirección* de la recta. Recuérdese que el ángulo de dirección de un vector $\mathbf{v} = (h, k)$ satisface las condiciones $0 \leq m^\circ(\theta) < 360$. Si $\mathbf{v}$ es el vector de dirección de una recta $\mathcal{L}$, cada múltiplo escalar no nulo de $\mathbf{v}$ es también un vector de dirección de $\mathcal{L}$. En particular, $-\mathbf{v}$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}$, y $-\mathbf{v}$ tiene sentido opuesto al de $\mathbf{v}$. Esto indica que ya sea el ángulo de dirección de $\mathbf{v}$ o bien el de $-\mathbf{v}$ satisface la condición $0 \leq m^\circ(\theta) < 180$, y se dice que el ángulo que satisfaga esta condición es el **ángulo de dirección** θ de la recta $\mathcal{L}$. (Véase la Figura 2–17.)

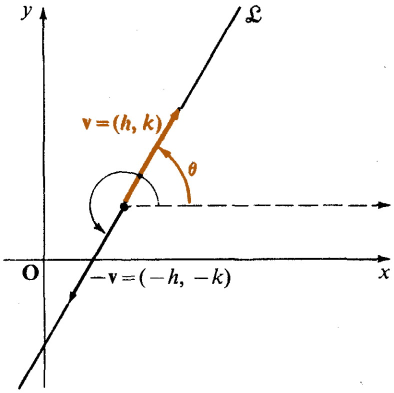


Figura 2—17

Si $h = 0$, entonces $m^\circ(\theta) = 90$. De lo contrario, puesto que se puede determinar $\frac{-k}{-h} = \frac{k}{h}$, θ a través de la ecuación

$$\tan \theta = \frac{k}{h}, \qquad 0 \leq m^\circ(\theta) < 180.$$

Obsérvese que θ es simplemente la pendiente de $\mathcal{L}$.

El vector $(-B, A)$ es un vector de dirección de la recta $\mathcal{L}$, cuya ecuación es $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. Entonces si $B \neq 0$, el ángulo de dirección θ de $\mathcal{L}$ está dado por

$$\tan \theta = -\frac{A}{B}, \qquad 0 \leq m^\circ(\theta) < 180.$$

Ejercicios 2—7

En los Ejercicios 1—12, obtenga la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ en su forma simétrica que pasa por los puntos dados **S** y **T**, y calcule el ángulo de dirección de $\mathcal{L}$ con una precisión de un grado.

1. $S(5, 2)$ y $T(3, 6)$
2. $S(6, 4)$ y $T(2, 3)$
3. $S(5, 9)$ y $T(3, -2)$
4. $S(-1, 3)$ y $T(4, -3)$
5. $S(-3, 4)$ y $T(-1, -3)$
6. $S(2, -4)$ y $T(-3, -2)$
7. $S(4, -5)$ y $T(2, -1)$
8. $S(3, -8)$ y $T(-3, -7)$
9. $S(-1, -3)$ y $T(2, 3)$
10. $S(-6, -4)$ y $T(4, -1)$
11. $S(-2, -3)$ y $T(-3, -5)$
12. $S(-1, -7)$ y $T(7, -1)$

En los Ejercicios 13—20, obtenga la ecuación en su forma simétrica que sea equivalente a la ecuación dada.

13. $2x - y + 4 = 0$
14. $x + 3y - 6 = 0$
15. $2x + 5y - 10 = 0$
16. $3x + 4y - 24 = 0$
17. $2x + 3y - 7 = 0$
18. $7x + 3y - 5 = 0$
19. $2x - 7y + 3 = 0$
20. $5x - 9y + 45 = 0$

En los Ejercicios 21—24, obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta $\mathcal{L}$ que posea las características que se mencionan.

21. Que pase por $S(-5, 3)$, y cuyo ángulo de dirección sea 60°.
22. Que pase por $S(2, 6)$, y cuyo ángulo de dirección sea 45°.
23. Que pase por $S(3, -2)$, y que sea perpendicular a una recta cuyo ángulo de dirección es 30°.
24. Que pase por $S(-4, -3)$, y que sea perpendicular a una recta cuyo ángulo de dirección es 135°.

* **25.** Demuestre que las rectas cuyas ecuaciones simétricas son

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{y - y_1}{k} \quad \text{y} \quad \frac{x - x_1}{k} = -\frac{y - y_1}{h}$$

son perpendiculares.

* **26.** Demuestre que si las rectas cuyas ecuaciones simétricas son

$$\frac{x - x_1}{h_1} = \frac{y - y_1}{k_1} \quad \text{y} \quad \frac{x - x_2}{h_2} = \frac{y - y_2}{k_2}$$

son paralelas, entonces $h_1k_2 = h_2k_1$.

* **27.** Demuestre que la ordenada y la abscisa al origen de la gráfica de la ecuación simétrica

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{y - y_1}{k}$$

son

$$\frac{kx_1 - hy_1}{k} \quad \text{y} \quad \frac{hy_1 - kx_1}{h},$$

respectivamente.

Resumen del capítulo

1. Las rectas en el plano se pueden representar mediante las ecuaciones tanto **vectoriales** como **cartesianas**. La ecuación paramétrica vectorial

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{t} - \mathbf{s}), \qquad r \in \mathcal{R},$$

define la recta en el plano que pasa por los puntos **S** y **T**, supuestos distintos. La variable r que aparece en esta ecuación es un **parámetro**. Si el conjunto de valores de r es un intervalo cerrado, entonces la gráfica de la ecuación es un segmento. Un sistema de **ecuaciones paramétricas cartesianas** de la recta que pasa por $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ es

$$x = x_1 + r(x_2 - x_1) \quad \text{y} \quad y = y_1 + r(y_2 - y_1).$$

2. Un punto **U** está sobre la recta $\mathcal{L}$, y pasa por $\mathbf{S}(x_1, y_1)$, con vector de dirección $\mathbf{v} = (h, k)$ si y sólo si $\mathbf{u} - \mathbf{s}$ es paralelo a $\mathbf{v}$. Una ecuación paramétrica de $\mathcal{L}$ es $\mathbf{u} = \mathbf{s} + r\mathbf{v}$, y un sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de $\mathcal{L}$ son $x = x_1 + rh$, $y = y_1 + rk$. El punto $\mathbf{U}(x, y)$ está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si $(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = 0$.
3. Si el vector (h, k), con $h \neq 0$, es un vector de dirección de la recta $\mathcal{L}$, entonces la pendiente m de $\mathcal{L}$ es $\dfrac{k}{h}$. Este número es el cociente de la altura y la base de cualquier segmento que esté sobre $\mathcal{L}$. Para la recta $\mathcal{L}$ que pasa por los puntos $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$, con $x_2 \neq x_1$, se tiene

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

4. Las rectas paralelas no verticales tienen la misma pendiente. El producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares, ninguna de las cuales es vertical, es —1.
5. Un vector no nulo perpendicular al vector de dirección **v** de una recta $\mathcal{L}$ es un **vector normal** a $\mathcal{L}$. Si (A, B), donde $A^2 + B^2 \neq 0$, es un vector normal a $\mathcal{L}$, entonces la **ecuación cartesiana ordinaria** de $\mathcal{L}$ es

$$Ax + By + C = 0,$$

donde C es una constante adecuada. Una recta cuya ecuación sea $Ax + By + C' = 0$ es paralela a $\mathcal{L}$, y una recta cuya ecuación sea $-Bx + Ay + C' = 0$ es perpendicular a $\mathcal{L}$. La pendiente de $\mathcal{L}$ es $-\dfrac{A}{B}$ si $B \neq 0$.
6. La **ecuación de punto y pendiente** de la ecuación de una recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y cuya pendiente es m está dada por

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

La ecuación de la recta que pasa por dos puntos dados $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ es

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

7. La **ecuación punto y pendiente** con ordenadas al origen de la ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que tiene pendiente m y cuya ordenada al origen es b está dada por

$$y = mx + b.$$

La ecuación punto y pendiente con ordenada al origen y abscisa al origen de la recta $\mathcal{L}$ cuya abscisa al origen es a y cuya ordenada al origen es b donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$, está dada por

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

8. Si $\mathbf{v} = (h, k)$ es un vector de dirección de una recta $\mathcal{L}$, entonces h y k se llaman **números directores** de $\mathcal{L}$. El ángulo de dirección θ de $\mathcal{L}$ satisface las condiciones $0 \leq m°(\theta) < 180$; si $h \neq 0$, entonces $m°(\theta)$ se determina mediante la ecuación

$$\tan\theta = \frac{k}{h} = m, \qquad 0 \leq m°(\theta) < 180,$$

donde m es la pendiente de $\mathcal{L}$. Si $h \neq 0$ y $k \neq 0$, y $\mathcal{L}$ pasa por el punto $S(x_1, y_1)$, entonces la **forma simétrica** de la ecuación de $\mathcal{L}$ está dada por

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{y - y_1}{k}.$$

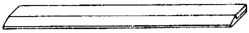
Ejercicios de repaso del capítulo

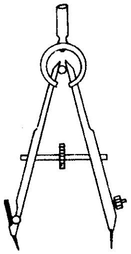
1. Obtenga la ecuación paramétrica vectorial y el sistema de ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que pasa por los puntos $S(3, -2)$ y $T(-1, 5)$.
2. Calcule las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son $S(1, 7)$ y $T(3, -9)$.
3. Obtenga la ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por el punto $S(5, -1)$ y para la cual $\mathbf{v} = (3, 1)$ es un vector de dirección.
4. Determine si el punto $T(1, -8)$ está sobre la recta cuya ecuación paramétrica vectorial es $\mathbf{u} = (3, 2) + r(1, 5)$, $r \in \mathbb{R}$.
5. Escriba la ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por $S(2, -5)$ y cuya pendiente es $-\frac{2}{3}$.
6. Obtenga la ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por $S(-5, 7)$ y que es perpendicular a la recta cuya ecuación paramétrica vectorial es $\mathbf{u} = (1, 4) + r(-2, 3)$, $r \in \mathbb{R}$.
7. Obtenga la ecuación cartesiana ordinaria de la recta que pasa por el punto $S(4, -1)$ y que tiene al vector $\mathbf{v} = (1, 3)$ como vector de dirección.
8. Obtenga la ecuación cartesiana de la recta que pasa por los puntos $S(-5, 7)$ y $T(0, 3)$.
9. ¿Diga cuál es la pendiente y cuál es la ordenada al origen de la gráfica de $4x - 2y + 7 = 0$?
10. Obtenga la forma simétrica de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $S(7, 1)$ y $T(-1, 9)$.

Construcciones con regla y compás

Los antiguos griegos investigaron a fondo el problema de cómo construir figuras geométricas sencillas usando sólo regla y compás.

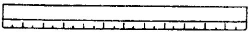
Debe entenderse, antes que nada, la naturaleza de este problema. Una regla es un instrumento mediante el cual se define una recta, o sea, el segmento de longitud indefinida que pasa por dos puntos dados del plano, y no es nada más que eso. Análogamente, un compás es un instrumento mediante el cual se puede trazar una circunferencia, o arco de circunferencia, que tiene su centro en un punto dado y cuyo radio es la distancia que separa a dos puntos dados del plano, y no es nada más que eso. La recta y la circunferencia de las que hablamos no son las marcas que se hacen sobre un papel, sino que son conjuntos tridimensionales de moléculas que contienen electrones en constante movimiento; por ello, la recta y la circunferencia son conceptos que se estudian en geometría.

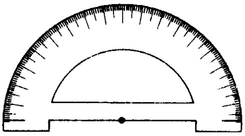




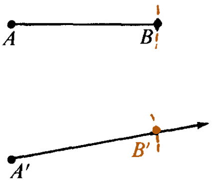
La construcción de una figura empieza con una *configuración inicial* formada por un número finito de puntos, rectas y circunferencias. Debe poderse terminar en un *número finito de pasos* y debe ser *matemáticamente exacta*.

De estos criterios pudiera parecer que el problema de una construcción con regla y compás no tiene implicaciones prácticas. Mediante una regla que tenga una escala, y mediante un transportador, o usando instrumentos más sofisticados, podemos medir la longitud de cualquier segmento y medir ángulos que sean necesarios con mucha precisión. El problema es sin embargo históricamente importante puesto que obligó a los matemáticos a enfocar su atención sobre problemas básicos. El conocimiento de los principios básicos de las matemáticas y de la ciencia es fundamental para un progreso científico sano.

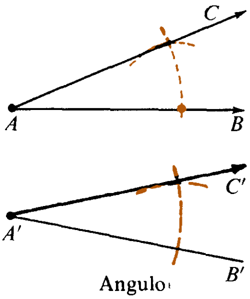




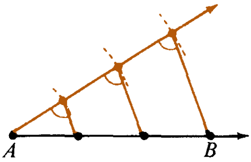
A continuación se ilustran unas cuantas de las construcciones con regla y compás que son sencillas y nos son más familiares.



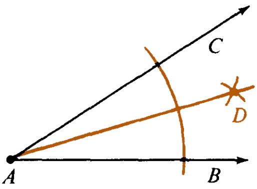
Segmento congruente



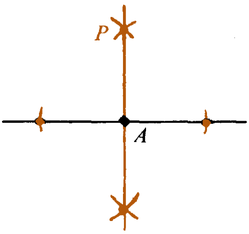
Angulo congruente



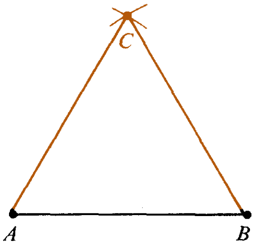
trisección de un segmento



Bisección de un ángulo



Perpendicular a una recta en un punto

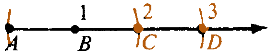


Triángulo equilátero

Las configuraciones iniciales de las que nos ocuparemos en esta sección del libro y en el comentario al final del Capítulo 3, en particular, la circunferencia y el ángulo de 60°, se pueden construir ellas mismas mediante la regla y el compás a partir de una configuración inicial que consta de sólo dos puntos. Es decir, la circunferencia se puede trazar cuando se especifica su centro y uno de sus puntos, y un ángulo de 60° se obtiene construyendo un triángulo equilátero como se muestra en la figura anterior. Por lo tanto, cualquier construcción que se pueda llevar a cabo a partir de una de estas configuraciones iniciales, también se puede realizar con una configuración inicial que conste sólo de dos puntos. Diremos que una configuración *es constructible* si se puede construir usando la regla y el compás empezando con sólo dos puntos dados.

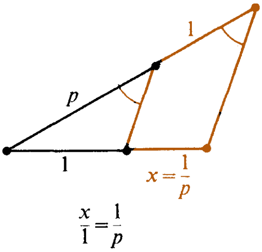
Supóngase pues, que empezando con una configuración que conste sólo de dos puntos A y B y empleando $d\ (A, B)$ como la unidad de distancia, se logra dar una construcción con regla y compás de un segmento de longitud p. Entonces decimos que *el número p es constructible* mediante la regla y el compás.

Cualquier número mensurable se puede construir como se indica en la figura (*a*). Si se puede construir el número positivo p, también se puede construir a $\frac{1}{p}$ y a $\sqrt{p}$, como se muestra en las figuras (*b*) y (*c*) respectivamente.

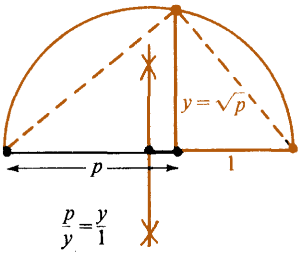


$d(A, B) = 1$
$d(A, C) = 2$
$d(A, D) = 3$

(*a*)

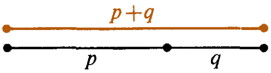


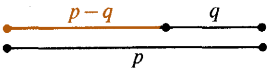
(*b*)

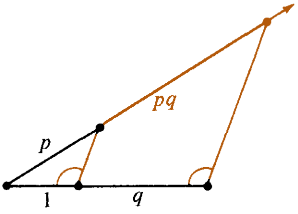


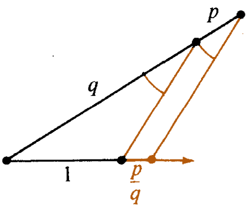
(*c*)

Si se puede construir a los números p y q, entonces también se puede construir a $p + q$, $p - q$ (si $p > q$), pq, y $\frac{p}{q}$:









De esto se sigue que números tales como

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad y = \sqrt{\sqrt{\tfrac{1}{7}} + 2}, \qquad \text{y} \qquad z = \sqrt{3 + \sqrt{9 - \sqrt{6}}}$$

tambien se pueden construir.

Nótese, por ejemplo, que el segundo de los números que se menciona anteriormente satisface las relaciones

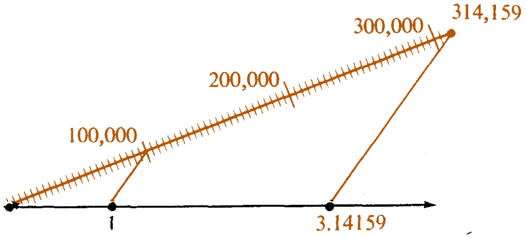
$$\begin{aligned} y^2 &= \sqrt{\tfrac{1}{7}} + 2, \\ y^2 - 2 &= \sqrt{\tfrac{1}{7}}, \\ y^4 - 4y^2 + 4 &= \tfrac{1}{7}, \\ 7y^4 - 28y^2 + 27 &= 0. \end{aligned}$$

Si el número k es una raíz de un polinomio con coeficientes enteros se dice que k es un *número algebraico.* Por ejemplo, el número racional $\frac{2}{3}$ y el número irracional $\sqrt{3}$ son algebraicos, puesto que son raices de las ecuaciones $3x - 2 = 0$ y $x^2 - 3 = 0$, respectivamente. Si n es el menor grado de los polinomios con coeficientes enteros de los cuales k es raíz, se dice que k es un número algebraico de grado n. Entonces $\sqrt{3}$ es de grado 2 aunque $\sqrt{3}$ es también raíz de la ecuación cuártica $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$.

Los ejemplos anteriores de números que se pueden construir sugiere el siguiente resultado, que es válido, pero que no se demostrará en este libro:

> Si se puede construir el número positivo k, entonces k es un número algebraico de grado 2^n, donde n es un número entero.

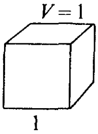
El número π es un número *trascendente*, o no algebraico; es decir, no existe un polinomio con coeficientes enteros cuya raíz sea π. Este notable resultado fue establecido en 1882 por el matemático alemán Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852—1939). Se sigue que no se puede construir el número π. En el siguiente diagrama se esboza una cosntrucción válida (pero no muy práctica) para obtener una aproximación al número π, pero no se llega a obtener π exactamente.

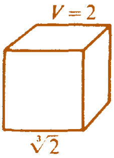


Este resultado obtenido por Lindemann resolvió uno de los tres famosos problemas de construcción con regla y compás que se habían planteado los antiguos griegos, el de la "cuadratura del círculo,"

o sea el de construir un cuadrado que acote una región que tenga la misma área que la de un círculo dado. Si se toma al radio del círculo dado como unidad de longitud, entonces el área del círculo es π, y el cuadrado requerido debe tener lados de longitud $\sqrt{\pi}$. Si $\sqrt{\pi}$ fuera constructible, entonces π también sería constructible. Pero ya hemos visto que esto no es así. Por lo tanto, no se puede encontrar la cuadratura del círculo con regla y compás.

Otro de los tres famosos problemas que se plantearon los griegos antiguos es el de "duplicar el cubo", o sea construir un cubo cuyo volumen

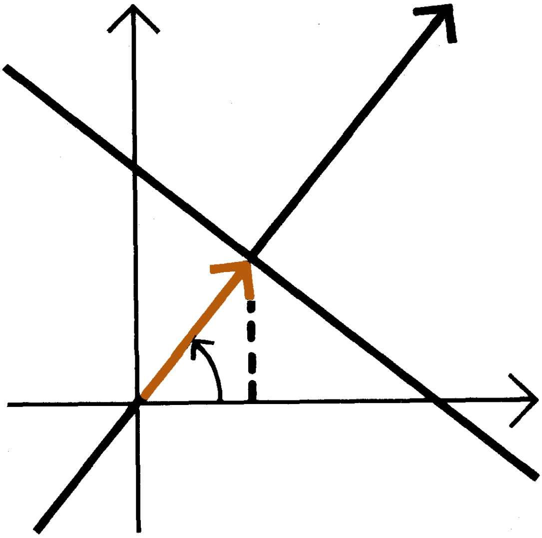




sea exactamente el doble del volumen de un cubo dado. Si se toma al lado del cubo dado como unidad de longitud, entonces el cubo requerido debe tener lados de longitud $\sqrt[3]{2}$. Puesto que $\sqrt[3]{2}$ es raíz de la ecuación $x^3 - 2 = 0$, entonces $\sqrt[3]{2}$ es un número algebraico, y además $\sqrt[3]{2}$ es a lo sumo de grado 3. Se puede demostrar fácilmente que $\sqrt[3]{2}$ no es raíz de una ecuación lineal, y que tampoco es raíz de una ecuación cuadrática, siendo estas ecuaciones de coeficientes enteros, es decir, se puede demostrar que $\sqrt[3]{2}$ no es ni de grado 1 ni de grado 2. Por consiguiente, $\sqrt[3]{2}$ es de grado 3. Puesto que 3 no es de la forma 2^n, con n entero, entonces no se puede construir a $\sqrt[3]{2}$. Por lo tanto, no se puede duplicar el cubo con regla y compás.

El tercer problema plantado en la antigüedad es el de trisecar un ángulo dado. Se discutirá este problema en el Capítulo 3.

Capítulo 3



En este capítulo se emplearán los métodos que se han desarrollado en capítulos anteriores para resolver varios tipos de problemas. Se obtendrán la forma normal y la forma de determinante de la ecuación de la recta y se demostrarán analíticamente varios teoremas geométricos.

Aplicaciones de la Recta

Relaciones entre rectas

3—1 Distancia de un punto a una recta dada

Al estudiar geometría plana se ve que la distancia de un punto **S** a una recta dada $\mathcal{L}$ y que se denota mediante el símbolo $d(\mathrm{S}, \mathcal{L})$, definiéndose como la longitud de un segmento que es perpendicular a x, que empieza en $\mathcal{L}$ y termina en **S**. (Figura 3 — 1).

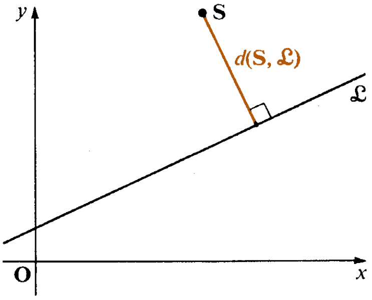


Figura 3—1

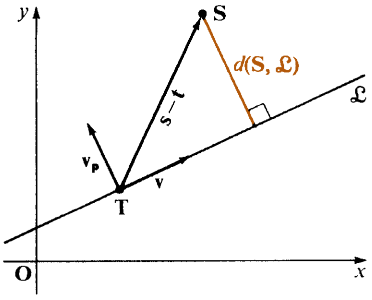


Figura 3—2

Se puede calcular $d(\mathrm{S}, \mathcal{L})$ empleando métodos vectoriales si se conocen las coordenadas de **S**, las coordenadas de algún punto **T** sobre la recta $\mathcal{L}$, y se conoce un vector de dirección **v** de $\mathcal{L}$. Para calcular esta distancia, nótese en la Figura 3 — 2 que lo que hay que calcular es el valor absoluto de la componente escalar de **s** — **t** en la dirección de $\mathbf{v}_p$. Es decir

$$d(\mathrm{S}, \mathcal{L}) = |\mathrm{Comp}_{\mathbf{v}_p} (\mathbf{s} - \mathbf{t})|,$$

o bien (recuérdese el Ejercicio 37 de la página 30 y lo mencionado en la página 37),

$$d(\mathrm{S}, \mathcal{L}) = \frac{|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}_p|}{\|\mathbf{v}_p\|}. \qquad (1)$$

La distancia que separa a **S** de $\mathcal{L}$ no depende de la elección de un punto particular **T** sobre $\mathcal{L}$. Para concluir que esto es cierto tómense dos puntos $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ sobre $\mathcal{L}$. En la Figura 3—3 se ve que

$$\mathbf{s} - \mathbf{t}_1 = (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1) + (\mathbf{s} - \mathbf{t}_2).$$

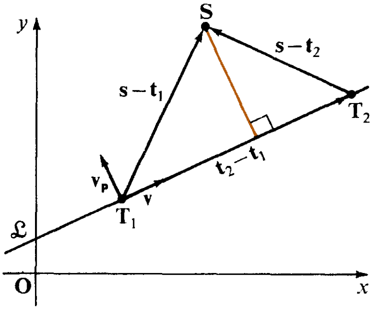


Figura 3—3

Entonces tomando el producto escalar de cada miembro de esta ecuación con $\mathbf{v}_\mathbf{p}$, se obtiene

$$(\mathbf{s} - \mathbf{t}_1) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} + (\mathbf{s} - \mathbf{t}_2) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = 0 + (\mathbf{s} - \mathbf{t}_2) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p}.$$

Por lo tanto

$$\frac{|(\mathbf{s} - \mathbf{t}_1) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p}|}{\|\mathbf{v}_\mathbf{p}\|} = \frac{|(\mathbf{s} - \mathbf{t}_2) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p}|}{\|\mathbf{v}_\mathbf{p}\|}.$$

Ejemplo 1. Calcule la distancia que separa a S(6, 2) de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por T(4, 2) y cuya pendiente es $\frac{1}{5}$.

Solución: Puesto que la pendiente de $\mathcal{L}$ es $\frac{1}{5}$, el vector $\mathbf{v} = 5(1, \frac{1}{5}) = (5, 1)$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}$. Entonces $\mathbf{v}_\mathbf{p} = (-1, 5)$, y $\mathbf{s} - \mathbf{t}$, el vector que va de **T** a **S**, es igual a $(6, 2) - (4, 2) = (2, 0)$. Por consiguiente

$$d(\mathrm{S}, \mathcal{L}) = \frac{|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p}|}{\|\mathbf{v}_\mathbf{p}\|}$$

$$= \frac{|(2, 0) \cdot (-1, 5)|}{\sqrt{(-1)^2 + 5^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{26}} = \frac{2}{\sqrt{26}}.$$

Para calcular $d(\mathrm{S}, \mathcal{L})$, cuando la ecuación de $\mathcal{L}$ está dada en la forma cartesiana ordinaria,

$$Ax + By + C = 0, \tag{2}$$

se empieza por transformar esta ecuación a una forma especial que fue empleada sistemáticamente por el geómetra alemán Ludwing Otto Hesse (1811—1874) y que él llamó *forma normal.* Para obtener la forma normal se empleará el concepto de *recta dirigida*: si **v** es cualquier vector de dirección de una recta $\mathcal{M}$ del plano, entonces se puede pensar que $\mathcal{M}$ tiene una de dos direcciones: aquella de **v** o bien la de $-\mathbf{v}$. Cuando se asigna una dirección a una recta se dice que la recta es una **recta dirigida**. Si **S** y **T** son dos puntos cualesquiera sobre una recta dirigida $\mathcal{M}$, entonces $l(\mathbf{S}, \mathbf{T})$, la **distancia dirigida** de **S** a **T**, es igual a la distancia $d(\mathbf{S}, \mathbf{T})$, o bien a $-d(\mathbf{S}, \mathbf{T})$, según si $\mathcal{M}$ y el vector que va de **S** a **T** tienen o no la misma dirección. Por lo tanto la distancia dirigida de **S** a **T** es la componente escalar del vector $\mathbf{t} - \mathbf{s}$ paralela a la recta $\mathcal{M}$.

Ahora para una recta dada $\mathcal{L}$, sea $\mathcal{M}$ una recta ***dirigida*** que pasa por el origen **0** y que sea perpendicular a $\mathcal{L}$; sea α el ángulo que forma la parte positiva del eje x con la dirección positiva de $\mathcal{M}$, $0 \leq m°(\alpha) < 360$; sea **P** el punto de intersección de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$; y sea p la ***distancia dirigida*** de **0** a **P**, como se muestra en la Figura 3—4.

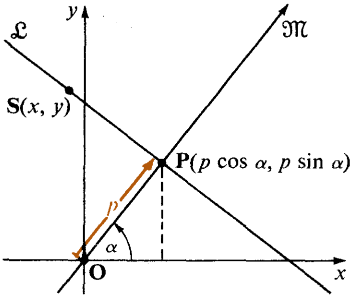


Figura 3—4

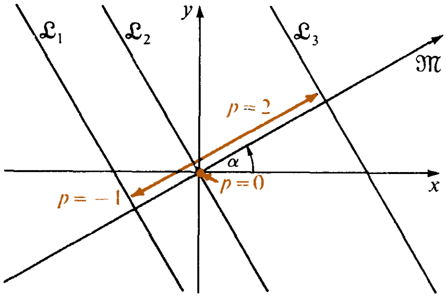


Figura 3—5

(Obsérvese que si $\mathcal{M}$ y el vector que va de **0** a **P** tienen la misma dirección, entonces la distancia dirigida de **0** a **P** es positiva y la distancia dirigida de **P** a **0** es negativa.) En la Figura 3—4 se ve que $\mathcal{L}$ queda determinada por α y p.

En la Figura 3—5 se muestra a las rectas $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, y $\mathcal{L}_3$, con $m°(\alpha) = 30$ y $p = -1, 0,$ y 2 respectivamente. Para estas rectas se podría escoger, con igual validez, $m°(\alpha) = 210$ y $p = 1, 0$ y -2, respectivamente.

Por definición de α y $\operatorname{sen}\alpha$, las coordenadas de **P** en la Figura 3—4 son $(p\cos\alpha, p\operatorname{sen}\alpha)$. Puesto que el punto **0** está también sobre $\mathcal{M}$, el vector que va de **0** a **P**, $(p\cos\alpha, p\operatorname{sen}\alpha)$, es paralelo a $\mathcal{M}$; por lo tanto el vector $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ es también paralelo a $\mathcal{M}$ y es por consiguiente un vector de dirección de $\mathcal{M}$. Cualquier punto $S(x, y)$ del plano está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si el vector

$$\mathbf{s} - \mathbf{p} = (x - p\cos\alpha, y - p\operatorname{sen}\alpha)$$

es perpendicular a $\mathcal{M}$; es decir si y sólo si

$$\begin{aligned}(x - p\cos\alpha, y - p\operatorname{sen}\alpha)\cdot(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) &= 0,\\ (x\cos\alpha - p\cos^2\alpha) + (y\operatorname{sen}\alpha - p\operatorname{sen}^2\alpha) &= 0,\\ x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) &= 0,\end{aligned}$$

o bien

■ $$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p = 0. \tag{3}$$

La Ecuación (3) es la **forma normal** de la ecuación de $\mathcal{L}$.

Si las ecuaciones (2) y (3) representan la misma recta $\mathcal{L}$, entonces los coeficientes de las dos ecuaciones deben ser proporcionales:

$$A = k\cos\alpha, \qquad B = k\operatorname{sen}\alpha, \qquad C = -kp, \tag{4}$$

en donde k es una constante. Para calcular k nótese que

$$A^2 + B^2 = k^2\cos^2\alpha + k^2\operatorname{sen}^2\alpha = k^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha) = k^2,$$

de modo que

$$k = \pm\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Por lo tanto debido a las Ecuaciones (4)

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \ \operatorname{sen}\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \ p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{4'}$$

Se puede reducir la Ecuación (2) a su forma normal dividiendo a ambos miembros por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$. Esto es, se puede escribir la forma normal de la Ecuación (2) de $\mathcal{L}$ ya sea como

■

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \tag{5}$$

o bien como

$$\frac{A}{-\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{-\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{-\sqrt{A^2+B^2}} = 0. \tag{5'}$$

Ejemplo 2. Obtenga una ecuación en forma normal de la recta cuya ecuación cartesiana es $\mathcal{L}$

$$2x + 2y + 3 = 0,$$

y determine el valor de α, $0 \leq m^\circ(\alpha) < 360$ y p primero **(a)** si $p > 0$ y después **(b)** si $p < 0$. Trace un esquema que ilustre cada caso.

Solución: Puesto que $A = 2$ y $B = 2$, se tiene $k = \pm\sqrt{2^2 + 2^2} = \pm 2\sqrt{2}$.

(a) Como $C = 3$, que es positivo y $C = -kp$, para obtener $p > 0$ se debe elegir $k = -2\sqrt{2}$. Entonces la forma normal es

$$\frac{2}{-2\sqrt{2}}x + \frac{2}{-2\sqrt{2}}y + \frac{3}{-2\sqrt{2}} = 0,$$

o bien

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{3}{2\sqrt{2}} = 0.$$

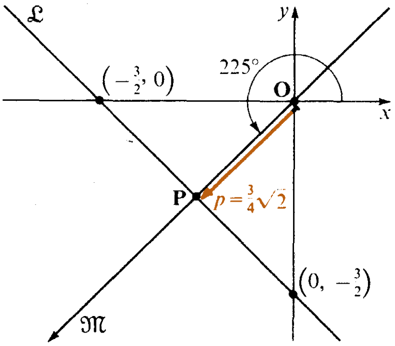
Puesto que $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, y $-p = -\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$,

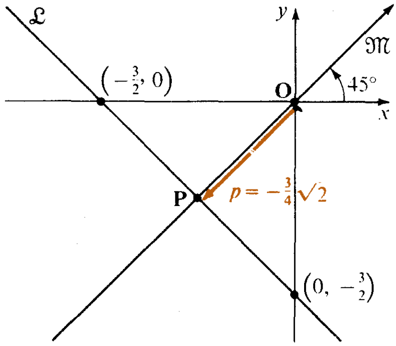
se obtiene $m^\circ(\alpha) = 225$ y $p = \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2} \doteq 1.06$.

(b) Para obtener $p < 0$, se debe elegir $k = 2\sqrt{2}$ obteniéndose la forma normal

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{3}{2\sqrt{2}} = 0.$$

Como $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, y $-p = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$, se tiene $m°(\alpha) = 45$ y $p = -\dfrac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3}{4}\sqrt{2} \doteq -1.06$.





Para calcular la distancia que separa el punto $S(x_1, y_1)$ de la recta ℒ mediante la ecuación normal

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p = 0,$$

nótese primero que la recta ℒ' que es paralela a ℒ y que pasa por **S** tiene una ecuación en forma normal del tipo

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p' = 0,$$

donde p' es la distancia dirigida de **0** a ℒ' (Figura 3—6). Puesto que $S(x_1, y_1)$ está sobre ℒ' se tiene

$$x_1\cos\alpha + y_1\operatorname{sen}\alpha - p' = 0,$$

y por lo tanto

$$p' = x_1\cos\alpha + y_1\operatorname{sen}\alpha.$$

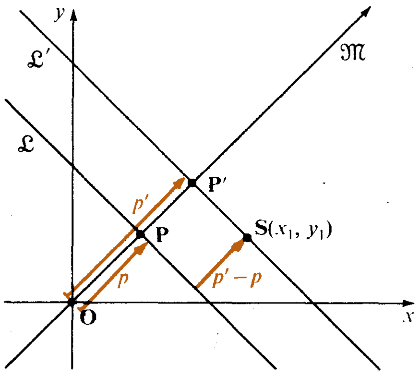


Figura 3—6

La distancia dirigida de $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}'$ es $p' - p$, y esta es también la distancia dirigida de $\mathcal{L}$ a **S**. Esto indica que

$$d(\mathbf{S}, \mathcal{L}) = |p' - p| = |x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p|. \tag{6}$$

Por lo tanto la distancia que separa a **S** de $\mathcal{L}$ queda determinada al tomarse el valor absoluto de la expresión que se obtiene al sustituir las coordenadas de **S** en el primer miembro de la ecuación en forma normal de $\mathcal{L}$.

Se sigue de las Ecuaciones (4′) y (6) que la distancia que separa al punto $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ de la recta $\mathcal{L}$ cuya ecuación cartesiana es

$$Ax + By + C = 0, \qquad A^2 + B^2 \neq 0,$$

está dada por

$$d(\mathbf{S}, \mathcal{L}) = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Ejemplo 3. Dados los puntos $\mathbf{S}(1, 1)$ y $\mathbf{T}(1, 2)$, y la recta $\mathcal{L}$ cuya ecuación cartesiana es $3x + 4y - 8 = 0$, obtener una ecuación en forma normal para $\mathcal{L}$, $p' - p$. Determine también para **S** y para **T** así como $d(\mathbf{S}, \mathcal{L})$ y $d(\mathbf{T}, \mathcal{L})$.

Solución: Puesto que $A = 3$ y $B = 4$ se tiene $k = \pm\sqrt{3^2 + 4^2} = \pm 5$. Supóngase que se elige $k = 5$. La forma normal de la ecuación de $\mathcal{L}$ es

$$\tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y - \tfrac{8}{5} = 0.$$

Para **S** se tiene

$$p' - p = \tfrac{3}{5}(1) + \tfrac{4}{5}(1) - \tfrac{8}{5} = -\tfrac{1}{5},$$

y

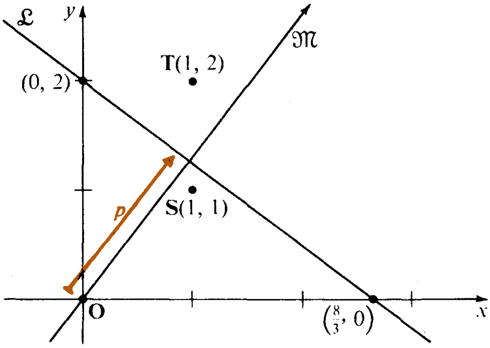
$$d(\mathbf{S}, \mathcal{L}) = |-\tfrac{1}{5}| = \tfrac{1}{5}.$$

Para **T** se tiene

$$p' - p = \tfrac{3}{5}(1) + \tfrac{4}{5}(2) - \tfrac{8}{5} = \tfrac{3}{5},$$

y

$$d(\mathbf{T}, \mathcal{L}) = |\tfrac{3}{5}| = \tfrac{3}{5}.$$



Nótese que en la solución anterior $p' - p < 0$ para **S** y $p' - p > 0$ para **T**. Esto indica que **S** y **T** están en lados opuestos de $\mathcal{L}$, y el hecho que $p > 0$, indica que **S** y **O** están del mismo lado con respecto a $\mathcal{L}$.

Ejercicios 3—1

En los Ejercicios 1—12 calcule la distancia que separa al punto dado **S** de la recta cuyo vector de dirección es **v**, o cuya pendiente es **m**, y que pasa por el punto dado **T**.

1. $\mathbf{S}(3, 4)$; $\mathbf{v} = (2, 1)$, $\mathbf{T}(4, 7)$
2. $\mathbf{S}(2, 5)$; $\mathbf{v} = (3, -1)$, $\mathbf{T}(1, 3)$
3. $\mathbf{S}(-1, 3)$; $\mathbf{v} = (2, 2)$, $\mathbf{T}(4, -2)$
4. $\mathbf{S}(4, -7)$; $\mathbf{v} = (-5, -6)$, $\mathbf{T}(1, 0)$
5. $\mathbf{S}(-5, 1)$; $\mathbf{v} = (4, -6)$, $\mathbf{T}(0, -1)$
6. $\mathbf{S}(-6, -2)$; $\mathbf{v} = (1, 5)$, $\mathbf{T}(0, 0)$
7. $\mathbf{S}(1, 6)$; $m = 2$, $\mathbf{T}(3, 3)$
8. $\mathbf{S}(5, 1)$; $m = -3$, $\mathbf{T}(2, -1)$
9. $\mathbf{S}(4, -2)$; $m = \frac{1}{2}$, $\mathbf{T}(5, -3)$
10. $\mathbf{S}(-3, 7)$; $m = -\frac{2}{3}$, $\mathbf{T}(-4, 6)$
11. $\mathbf{S}(-3, -4)$; $m = -\frac{1}{7}$, $\mathbf{T}(2, 3)$
12. $\mathbf{S}(-4, 0)$; $m = -4$, $\mathbf{T}(0, 4)$

En los Ejercicios 13—20 calcule la distancia que separa al punto **S** de la recta $\mathcal{L}$ cuya ecuación se da.

13. $\mathbf{S}(5, 7)$; $3x + 4y + 12 = 0$
14. $\mathbf{S}(3, 6)$; $2x - 3y + 6 = 0$
15. $\mathbf{S}(-2, 4)$; $5x - 4y - 10 = 0$
16. $\mathbf{S}(-3, 7)$; $6x - 5y - 15 = 0$
17. $\mathbf{S}(4, -3)$; $x - 8y + 5 = 0$
18. $\mathbf{S}(5, -8)$; $4x + y - 3 = 0$
19. $\mathbf{S}(-1, -5)$; $5x - 12y + 7 = 0$
20. $\mathbf{S}(-3, -6)$; $4x - 3y + 6 = 0$

En los Ejercicios 21—24 calcule las longitudes de las alturas del triángulo cuyos vértices **R, S** y **T** se dan

21. $\mathbf{R}(0, 4)$, $\mathbf{S}(4, -3)$, $\mathbf{T}(-3, 1)$
22. $\mathbf{R}(1, 0)$, $\mathbf{S}(2, 5)$, $\mathbf{T}(-2, 2)$
23. $\mathbf{R}(7, 0)$, $\mathbf{S}(-1, 0)$, $\mathbf{T}(1, -1)$
24. $\mathbf{R}(4, -1)$, $\mathbf{S}(1, 7)$, $\mathbf{T}(-3, 3)$

25–28. Calcule el área de los triángulos cuyos vértices se dan en los Ejercicios 21—24.

En los Ejercicios 29 y 30 calcule la distancia que separa a las paralelas cuyas ecuaciones se dan.

29. $3x - y - 8 = 0$ y $3x - y - 15 = 0$
30. $x - 3y + 12 = 0$ y $x - 3y - 18 = 0$

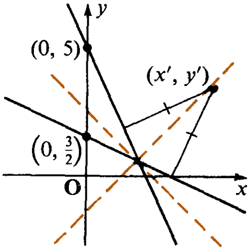
31. Calcule el valor de k tal que el punto $(2, k)$ sea equidistante de las rectas cuyas ecuaciones son $x + y - 2 = 0$ y $x - 7y + 2 = 0$.

32. Calcule el valor de k tal que el punto $(k, 4)$ sea equidistante de las rectas cuyas ecuaciones son $13x - 9y - 10 = 0$ y $x + 3y - 6 = 0$.

En los Ejercicios 33—36 obtenga las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos cuyos lados están sobre las rectas cuyas ecuaciones se dan.

Ejemplo. $x + 2y - 3 = 0$ y $2x + y - 5 = 0$

Solución: Recuérdese que cada punto de la bisectriz de un ángulo es equidistante de los lados del ángulo. Sean las coordenadas de un punto equidistante de las rectas dadas, entonces



$$\frac{|x' + 2y' - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x' + y' - 5|}{\sqrt{5}}.$$

De la definición de valor absoluto esto es equivalente a

$$\frac{x' + 2y' - 3}{\sqrt{5}} = \frac{2x' + y' - 5}{\sqrt{5}} \quad \text{o bien} \quad \frac{x' + 2y' - 3}{\sqrt{5}} = -\frac{2x' + y' - 5}{\sqrt{5}},$$

$$x' + 2y' - 3 = 2x' + y' - 5 \quad \text{o bien} \quad x' + 2y' - 3 = -2x' - y' + 5,$$

$$x' - y' - 2 = 0 \quad \text{o bien} \quad 3x' + 3y' - 8 = 0.$$

Por consiguiente las ecuaciones de las bisectrices son

$$x - y - 2 = 0 \quad \text{y} \quad 3x + 3y - 8 = 0.$$

33. $3x + 4y - 2 = 0$ y $4x + 3y + 2 = 0$

34. $3x - 4y + 1 = 0$ y $5x + 12y - 2 = 0$

35. $x + 3y - 2 = 0$ y $2x - 6y + 5 = 0$

36. $x + y - 6 = 0$ y $3x - 3y + 5 = 0$

* **37.** Obtenga las bisectrices del triángulo cuyos vértices son **R**(6, 2), **S**(−2, −4), y **T**($-\frac{42}{5}$, 8). (*Sugerencia*: trace un diagrama que ayude a seleccionar las ecuaciones requeridas.)

* **38.** Obtenga las ecuaciones de las bisectrices del triángulo cuyos lados están sobre las rectas cuyas ecuaciones son $x + 2y - 4 = 0$, $x - 2y + 2 = 0$, y $2x - y - 8 = 0$.

* **39.** Obtenga las ecuaciones de las rectas que son paralelas a la recta $\mathcal{L}$ cuya ecuación es $3x - 4y + 10 = 0$ y que están a cinco unidades de distancia de $\mathcal{L}$.

* **40.** Obtenga las ecuaciones de las rectas que son paralelas a la recta $\mathcal{L}$ de ecuación $15x + 8y - 34 = 0$ y que están localizadas a 4 unidades de ésta.

* **41.** Calcule la distancia que separa al punto S(b, a) de la recta cuya abscisa y ordenada al origen son respectivamente a y b.

* **42.** Calcule la distancia que separa al punto S$(b, -a)$ de la recta cuya abscisa y ordenada al origen son respectivamente a y b.

* **43.** Demuestre que área de un triángulo cuyos vértices son $\mathbf{R}(x_1, y_1)$, $\mathbf{S}(x_2, y_2)$, y $\mathbf{T}(x_3, y_3)$ está dada por

$$\tfrac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

3–2 Intersección de rectas

En cursos anteriores se menciona que la intersección de los conjuntos A y B (que se denota mediante $A \cap B$) se define como el conjunto de todos los elementos comunes a A y B. Una propiedad especial de los conjuntos de puntos que se llaman *rectas* es que, en el plano, la intersección de dos rectas *distintas* es o bien el conjunto vacío (si las rectas son paralelas) o bien tienen sólo un elemento (un sólo punto si las rectas no son paralelas). Si "$\mathcal{L}_1$" y "$\mathcal{L}_2$" son la misma recta entonces $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas y claramente su intersección es toda la recta.

Se puede determinar si dos rectas son paralelas o no, simplemente comparando vectores de dirección, o lo que es equivalente, comparando vectores normales a las rectas. Si las rectas *son* en efecto paralelas entonces coinciden si y sólo si tienen un punto común (véase el Ejercicio 45, página 63).

Ejemplo 1. Si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son las rectas determinadas por

$$\mathcal{L}_1 = \{(x, y)\colon\ 3x - 4y = 5\}$$

y

$$\mathcal{L}_2 = \{(x, y)\colon\ -6x + 8y + 9 = 0\},$$

diga cual es el conjunto $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

Solución: Por inspección de las ecuaciones dadas se ve que $(3, -4)$ es un vector normal a $\mathcal{L}_1$ y que $(-6, 8) = -2(3, -4)$ es un vector normal a $\mathcal{L}_2$. Por lo tanto $(4, 3)$ es un vector de dirección tanto de $\mathcal{L}_1$ como de $\mathcal{L}_2$, y por consiguiente $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas.

Para calcular las coordenadas (x, y) de un punto **S** sobre $\mathcal{L}_1$ basta asignar un valor arbitrario a x y despejar a y en la ecuación de $\mathcal{L}_1$ Por ejemplo si $x = 3$ entonces

$$y = -\tfrac{1}{4}(5 - 9) = 1,$$

y S(3, 1) es un punto $\mathcal{L}_1$. Sustituyendo las coordenadas de **S** en la ecuación de $\mathcal{L}_2$, se tiene $-6(3) + 8(1) + 9 = -18 + 8 + 9 \neq 0$. Por lo tanto **S** no está sobre $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$.

Al estudiar algebra se ve que se puede emplear métodos cartesianos para demostrar que rectas no paralelas se intersectan en un solo punto. Se pueden emplear también métodos vectoriales para demostrar que este resultado es válido. Considérese la Figura 3 – 7 en la que se muestran la recta $\mathcal{L}_1$ que pasa por los puntos **Q**$(-3, -2)$ y **R**$(0, 2)$ y la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por los puntos **S**$(5, 0)$ y **T**$(6, -3)$; en esta figura se ve que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se intersecan en un solo punto. Para demostrar que esto es así, hay que demostrar analíticamente (1) que hay sólo un punto que puede estar en ambas rectas y (2) que este punto de hecho está sobre ambas rectas.

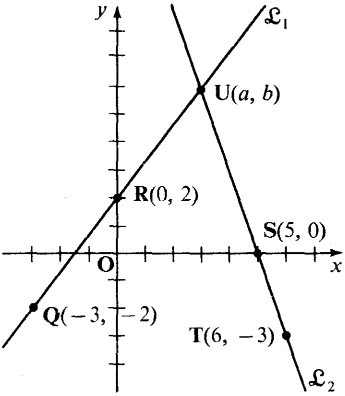


Figura 3—7

De la información dada se tiene que una ecuación paramétrica vectorial de $\mathcal{L}_1$ es

$$(x, y) = (-3, -2) + r_1[(0, 2) - (-3, -2)], \qquad r_1 \in \mathcal{R},$$

o bien

$$(x, y) = (-3, -2) + r_1(3, 4);$$

y que una ecuación paramétrica vectorial de $\mathcal{L}_2$ es

$$(x, y) = (5, 0) + r_2[(6, -3) - (5, 0)], \qquad r_2 \in \mathcal{R},$$

o bien

$$(x, y) = (5, 0) + r_2(1, -3).$$

Supóngase que **U**(a, b) es un punto que está sobre ambas rectas. Debe demostrarse que

$$(a, b) = (-3, -2) + r_1(3, 4) \quad \text{y} \quad (a, b) = (5, 0) + r_2(1, -3),$$

de modo que

$$(-3, -2) + r_1(3, 4) = (5, 0) + r_2(1, -3). \tag{1}$$

De esta ecuación (1) se puede despejar a r_1 y r_2 como sigue: puesto que para cualquier vector **v**, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\mathbf{p} = 0$ elimínese r_1 tomando el producto escalar de cada miembro de la Ecuación (1) (recuérdese la Propiedad Distributiva mencionada en la Sección 1—6) con el vector $(3, 4)_\mathbf{p} = (-4, 3)$ para obtener

$$\begin{aligned}(-3, -2) \cdot (-4, 3) + r_1(3, 4) \cdot (-4, 3) &= (5, 0) \cdot (-4, 3) + r_2(1, -3) \cdot (-4, 3)\\ 6 + r_1(0) &= -20 + r_2(-13),\\ 26 &= -13r_2,\\ r_2 &= -2.\end{aligned}$$

Análogamente elimínese a r_2 tomando el producto escalar de cada miembro de la Ecuación (1) con $(1, -3)_\mathbf{p} = (3, 1)$. Se obtiene

$$\begin{aligned}(-3,-2)\cdot(3,1)+r_1(3,4)\cdot(3,1) &= (5,0)\cdot(3,1)+r_2(1,-3)\cdot(3,1),\\ -11+r_1(13) &= 15+r_2(0),\\ 13r_1 &= 26,\\ r_1 &= 2.\end{aligned}$$

Luego se existe un punto U(a, b) que esté sobre ambas rectas entonces para ese punto se debe tener $r_1 = 2$ y $r_2 = -2$. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se obtiene respectivamente

$$(a, b) = (-3, -2) + 2(3, 4) = (-3, -2) + (6, 8) = (3, 6)$$

y

$$(a, b) = (5, 0) - 2(1, -3) = (5, 0) + (-2, 6) = (3, 6).$$

Por lo tanto $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se intersectan en el punto U(3, 6) únicamente. Puesto que este método se puede emplear para *cualquier* par de rectas no paralelas dadas, se concluye que dos rectas no paralelas en el plano se intersectan en un punto exactamente.

Si se definen dos rectas en el plano mediante un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, entonces su punto de intersección se puede calcular resolviendo las dos ecuaciones simultaneamente. En cursos de álgebra se menciona que dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se pueden resolver por sustitución o por eliminación de una incógnita, método que a veces se llama "método de combinación lineal". Ambas técnicas, así como el método vectorial que es semejante al de eliminación, se ilustran en las soluciones del siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Resuelva el sistema

$$3x - 5y = 1 \qquad (1)$$
$$4x + 3y = 11 \qquad (2)$$

Solución por sustitución:

Despéjese a y de la Ecuación (1) en términos de x

$$y = \tfrac{3}{5}x - \tfrac{1}{5}. \qquad (3)$$

Sustitúyase este valor de y en la Ecuación (2) y despéjese a x en la ecuación resultante

$$\begin{aligned}4x + 3(\tfrac{3}{5}x - \tfrac{1}{5}) &= 11,\\ x &= 2.\end{aligned}$$

Sustitúyase este valor de x en la Ecuación (3) y despéjese a y de la ecuación resultante

$$y = \tfrac{3}{5}(2) - \tfrac{1}{5} = 1.$$

Por lo tanto, la única solución del sistema es (2, 1). Para comprobar que (2, 1) es en efecto solución del sistema, se sustituye a x por 2 y a y por 1 en las ecuaciones originales

$$\begin{aligned}3(2) - 5(1) &= 1,\\ 1 &= 1.\end{aligned} \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned}4(2) + 3(1) &= 11,\\ 11 &= 11.\end{aligned}$$

Por lo tanto es la única solución del sistema.

Solución por eliminación:

Multiplíquense ambos miembros de la Ecuación (1) por 3 y ambos miembros de la Ecuación (2) por 5 para obtener

$$\begin{aligned} 9x - 15y &= 3 \\ 20x + 15y &= 55 \end{aligned}$$

Sumen los miembros correspondientes de estas ecuaciones y se obtiene

$$\begin{aligned} 29x &= 58, \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Ahora sustitúyase a x por 2 en una de las ecuaciones originales y despéjese el valor de y, tal como se hizo en la solución por sustitución; o bien regresando a las ecuaciones originales elimínese a x de la siguiente manera: multiplíquense ambos miembros de la Ecuación (1) por -4 y ambos miembros de la Ecuación (2) por 3 para obtener el sistema equivalente

$$\begin{aligned} -12x + 20y &= -4 \\ 12x + 9y &= 33 \end{aligned}$$

Súmense estas ecuaciones miembro a miembro para obtener

$$\begin{aligned} 29y &= 29, \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Como antes, la única solución posible del sistema es $(2, 1)$, y se puede comprobar que $(2, 1)$ es en efecto solución, sustituyendo estos valores en las ecuaciones originales.

Solución vectorial:

El sistema de ecuaciones dado, es decir, la afirmación compuesta.

$$3x - 5y = 1 \qquad y \qquad 4x + 3y = 11,$$

es equivalente a la ecuación vectorial

$$(3x - 5y, 4x + 3y) = (1, 11),$$

que a su vez es equivalente a

$$x(3, 4) - y(5, -3) = (1, 11). \tag{4}$$

Esta ecuación se puede resolver empleando el método descrito en la página 98. Es decir, se elimina a y multiplicando ambos miembros de la Ecuación (4) por $(5, -3)_p = (3, 5)$. Se obtiene

$$\begin{aligned} x(3, 4) \cdot (3, 5) - y(5, -3) \cdot (3, 5) &= (1, 11) \cdot (3, 5), \\ 29x - 0y &= 58. \\ &\ 2. \end{aligned}$$

Se puede eliminar a x tomando el producto escalar de ambos miembros con $(3, 4)_p = (-4, 3)$. Se obtiene

$$\begin{aligned} x(3, 4) \cdot (-4, 3) - y(5, -3) \cdot (-4, 3) &= (1, 11) \cdot (-4, 3), \\ 0x + 29y &= 29, \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto la única solución del sistema es $(2, 1)$, y como en los casos anteriores se puede comprobar que $(2, 1)$ es solución del sistema sustituiyendo estos valores en las Ecuaciones (1) y (2).

Si se compara a la solución por eliminación con la solución vectorial se ve inmediatamente que son equivalentes. La ecuación vectorial (4) es equivalente a las ecuaciones cartesianas (1) y (2). Para eliminar a y multiplíquense ambos miembros de la Ecuación (1) por 3 y ambos miembros de (2) por 5, súmense las ecuaciones resultantes, o lo que es lo mismo tómense el producto escalar de ambos miembros de (4) con $(3, 5)$. Análogamente para eliminar x multiplíquense ambos miembros de (1) y (2) por -4 y 3 respectivamente, y súmense; o lo que es equivalente, tómese el producto escalar de ambos miembros de (4) por $(-4, 3)$.

Ejercicios 3—2

En los Ejercicios 1–6, diga cual es $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son las rectas cuyas ecuaciones se dan. (Los parámetros r_1, r_2, t_1, t_2 son números reales.)

1. $\mathcal{L}_1$: $(x, y) = (3, 4) + r_1(1, 1)$; $\mathcal{L}_2$: $(x, y) = (1, 2) + r_2(1, -3)$

2. $\mathcal{L}_1$: $(x, y) = (2, -3) + r_1(4, -2)$; $\mathcal{L}_2$: $(x, y) = (-2, 1) + r_2(-1, -2)$

3. $\mathcal{L}_1$: $x - 2y = 3$; $\mathcal{L}_2$: $2x + y = 1$

4. $\mathcal{L}_1$: $3x - y = 4$; $\mathcal{L}_2$: $x + 3y = 8$

5. $\mathcal{L}_1$: $(x, y) = (3 - 2t_1, 1 - t_1)$; $\mathcal{L}_2$: $(x, y) = (4 + 5t_2, 2 + 3t_2)$

6. $\mathcal{L}_1$: $(x, y) = (6 + 3t_1, 3 - 2t_1)$; $\mathcal{L}_2$: $(x, y) = (3 - 3t_2, 5 + 2t_2)$

En los Ejercicios 7–10, resuelva el sistema dado por sustitución.

7. $\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ 2x + y &= -1 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 3x - 2y &= 19 \\ 2x + 5y &= 0 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ -2x + 4y &= -14 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 4x - 3y &= -2 \\ 3x + 2y &= 7 \end{aligned}$

En los Ejercicios 11–16, resuelva el sistema dado por eliminación.

11. $\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} x - 3y &= -8 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} 2x - 5y &= 3 \\ 3x + y &= 13 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 \\ 2x - 7y &= 11 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ 6x - 4y &= 3 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 5x + y &= -9 \\ x - 3y &= -5 \end{aligned}$

17—26. Resuelva los sistemas dados en los Ejercicios 7—16 por el método vectorial.

En los Ejercicios 27—30, diga cuales son los véctores de los vértices del triángulo cuyos lados están sobre las rectas dadas.

27. $2x + y = 4,$
$x - 3y = -5,$
$4x - 5y = 8.$

28. $x - y = -1,$
$x + 3y = 7,$
$x + y = -1.$

29. $(x, y) = (3, 1) + r_1(1, -2),$
$(x, y) = (5, 7) + r_2(3, 4),$
$(x, y) = (-3, -7) + r_3(1, 3).$

30. $(x, y) = (2, 4) + r_1(0, 1),$
$(x, y) = (5, 4) + r_2(2, 1),$
$(x, y) = (3, 3) + r_3(-1, 1).$

En los Ejercicios 31—36, diga cual es la ecuación cartesiana en forma ordinaria de la recta cuyas características se mencionan:

31. Pasa por el punto S$(4, \frac{8}{3})$ y por el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $3x - 4y - 2 = 0$ y $12x - 15y - 8 = 0$.

32. Pasa por el punto S$(1, 1)$ y por el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $2x - 5y + 9 = 0$ y $4x + y + 7 = 0$.

33. Pasa por el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $3x + y - 16 = 0$ y $2x - 7y - 3 = 0$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $x - 3y + 2 = 0$.

34. Pasa por el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $2x + y = 13$ y $7x - y = 2$, y es paralela a la recta cuya ecuación es $x - y = 2$.

35. Pasa por el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $x + 2y = 12$ y $3x - 4y = 26$, y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $x + y = 1$.

36. Pasa por el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son $3x + 4y + 10 = 0$ y $5x - 12y - 12 = 0$, y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $x - 2y + 6 = 0$.

37. Obtenga las ecuaciones de las rectas que contienen a las diagonales del cuadrilátero cuyos lados son las rectas dadas por las ecuaciones $x - 3y + 13 = 0$, $7x - y + 31 = 0$, $x - 3y - 7 = 0$ y $x + y - 11 = 0$.

38. Las rectas cuyas ecuaciones son $3x - 8y - 2 = 0$ y $3x - 8y - 44 = 0$ contienen a lados opuestos de un paralelogramo, y una de las diagonales de ese paralelogramo está sobre la recta cuya ecuación es $x + 2y + 4 = 0$. Si la otra diagonal del paralelogramo pasa por el punto $(4, \frac{1}{5})$, Calcule los vértices del paralelogramo.

39. Demuestre que si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

tiene una solución única dada por

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

40. Emplee el resultado del Ejercicio 39 para resolver el sistema.

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 5 \\ 2x + 5y &= 35 \end{aligned}$$

Métodos analíticos

3–3 Determinantes

Los determinantes son útiles en la solución de sistemas de ecuaciones lineales y tienen además muchas otras aplicaciones en la geometría analítica.

Recuérdese que un arreglo de números como la que muestra en color en la figura, representa a una **matriz,** tal como un dígito representa a un número. Obsérvese que el arreglo de números está encerrado entre corchetes. Se emplean mayúsculas, tales como M y N, para denotar matrices.

$$\begin{array}{cc} & \text{columna} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{renglón} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cada número de ese arreglo representa un **elemento** de la matriz. El número de renglones (horizontales) y el número de columnas (verticales) formados por los elementos de una matriz determinan sus **dimensiones.** Por ejemplo la matriz que se indica anteriormente tiene dos renglones y tres columnas y se dice que es una matriz de 2×3 (léase "matriz de dos por tres"). Obsérvese que se da *primero* el número de renglones y *después* el número de columnas. Se identifica a un elemento de la matriz especificando a que renglón y a que columna pertenece. En la matriz mencionada el elemento que está en el primer renglón y en la tercera columna es 5.

Si una matriz tiene el mismo número n de renglones y de columnas se dice que es una **matriz cuadrada de orden** n. Se puede asociar a cada matriz cuadrada M, cuyos elementos son números reales, un número particular, llamado el *determinante* de M y que se denota mediante "det M" (leáse "determinante de M").

A veces se representa a los determinantes en la misma forma que a las matrices, excepto que se emplean un par de barras verticales en lugar de los corchetes. Por ejemplo

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Los elementos de la matriz, sus renglones y sus columnas, se llaman también **elementos**, renglones y columnas del determinante, y se dice que el orden de la matriz es también el orden del determinante.

El determinante de la matriz $[a_1]$ de 1 × 1 es precisamente el número a_1 mismo. Por ejemplo

$$\det[-7] = -7.$$

(Nótese que en este caso no se usarán barras verticales en un determinante de primer orden, pues se podría confundir con las barras verticales que sirven para indicar valor absoluto.)
El determinante de una matriz de 2 × 2 se define como:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{1}$$

Por ejemplo $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 28 - (-4) = 32.$

El determinante de una matriz de 3 × 3 se define como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1. \tag{2}$$

Las sumas de productos que se indican en (1) y (2) reciben el nombre de *desarrollo* de un determinante.

El determinante de una matriz cuadrada de orden superior se define en términos de determinantes de matrices de órdenes inferiores empleando *menores*. El **menor** de un elemento de un determinante se define como el determinante que se obtiene borrando el renglón y la columna a las que pertenece el elemento. Por ejemplo

$$\text{el menor de 4 en } \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{1} & 0 & -7 \\ \cancel{-6} & 5 & 3 \end{vmatrix} \text{ es } \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

En forma análoga el menor de 0 es $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$, y el menor de −7 es $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$.

En el segundo miembro de la ecuación (2) se puede factorizar por pares los términos de varias formas. Unas de estas formas es

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2).$$

Se sigue que si A_1, B_1, y C_1 representa los menores de a_1, b_1, y c_1, respectivamente se puede escribir

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1.$$

El segundo miembro de esta última ecuación recibe el nombre de **desarrollo** del determinante por menores respecto al primer renglón.

Reordenando adecuadamente los términos del segundo miembro de la Ecuación (2) se puede demostrar que cualquier determinante de tercer orden se puede desarrollar por menores con respecto a cualquier renglón o cualquier columna como sigue:

■ 1. Elíjase un renglón o una columna, y calcúlese el producto de cada elemento del renglón o columna por su menor.
2. Tómese este producto o su negativo según sea par o impar respectivamente la suma del número de renglón y el número de columna que ocupa el elemento.
3. La suma de estos números es el valor del determinante.

Se emplea el mismo procedimiento para obtener el desarrollo de determinantes de cuarto orden (o de orden superior a cuatro). Por ejemplo se tiene

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = -b_1B_1 + b_2B_2 - b_3B_3 + b_4B_4,$$

donde $B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$, $B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$, y así sucesivamente

Ejemplo 1. Desarrolle $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ por menores del segundo renglón.

Solución: Los elementos del segundo renglón son 2, 0 y -3. El elemento 2 está en el segundo renglón y la primera columna; puesto que $2 + 1 = 3$ (impar) tomamos el negativo del producto de este elemento por su menor. Análogamente tomamos el producto 0 por su menor y el negativo del producto de -3 por su menor. Entonces

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= -2(13) + 0(9) + 3(-7) = -47.$$

En el Ejercicio 39, página 103 se indica que si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \tag{3}$$

tiene una solución única dada por

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Esta solución se puede escribir mediante determinantes como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Sea ahora M la matriz $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ formada por los coeficientes de x y y, y sea $D = \det M$ y obsérvese que los determinantes que aparecen en los numeradores, que llamaremos D_x y D_y, respectivamente, son los determinantes de las matrices que se obtienen de M reemplazando a los coeficientes de las variables x y y respectivamente en la Ecuación (3), por los términos constantes c_1 y c_2. Por lo tanto si $D \neq 0$, entonces el sistema (3) de ecuaciones tiene una solución única que está dada por

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}.$$

Para cualquier entero n, se puede extender este patrón para expresar la única solución de cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, para el cual el determinante D de la matriz M formada por los coeficientes de las variables sea no nulo, Esta forma de expresar la solución mediante determinantes recibe el nombre de **Regla de Cramer.**

En particular para el sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

se tiene

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

y si $D \neq 0$, entonces la solución es única y está dada por

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \qquad z = \frac{D_z}{D}.$$

La siguiente propiedad de los determinantes resulta útil en las aplicaciones de estos a la geometría analítica (veàse los Ejercicios 12 y 13, página 107).

■ Si dos renglones (o dos columnas) de un determinante tienen elementos correspondientes iguales, entonces el valor del determinante es cero.

Ejemplo 2. Demuestre que para dos puntos $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ distintos en plano

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

es una ecuación de la recta que pasa por ambos.

Solución: Si se sustituye a x por x_1 y a y por y_1 en la Ecuación (4) se obtiene

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

igualdad que es válida puesto que los dos primeros renglones tienen elementos correspondientes iguales. Por lo tanto $\mathbf{S}$ está sobre la gráfica de la ecuación. Análogamente sustituyendo a x por x_2 y a y por y_2, se ve que $\mathbf{T}$ está sobre la gráfica de la ecuación. Un desarrollo del determinante que aparece en la Ecuación (4) está dado por

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + (x_1y_2 - x_2y_1).$$

puesto que $\mathbf{S} \neq \mathbf{T}$, los coeficientes de x y y no son ambos 0. Por lo tanto la Ecuación (4) es una ecuación lineal en x y y, y como su gráfica contiene a $\mathbf{S}$ y a $\mathbf{T}$, su gráfica es la recta que pasa por $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$.

Ejercicios 3–3

En los Ejercicios 1–16, si *M* es la matriz dada, calcule "det *M*"

1. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} a & 1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ s & p & q \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 17 y 18, calcule el valor del determinante desarrollandolo por menores respecto a la segunda columna,

17. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

19–20. Repita los Ejercicios 17 y 18 desarrollando los determinantes por menores respecto al tercer renglón.

En los Ejercicios 21–24, diga cual es la solución de los sistemas de ecuaciones dados, obténgala empleando la Regla de Cramer.

21. $\begin{aligned} 4x - 3y &= 5 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x + y &= -1 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ x + z &= 1 \\ 3y - 2z &= -3 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 1 \\ 6x - 6y - z &= 0 \\ 4x + 6y - 2z &= 2 \end{aligned}$

En los Ejercicios 25 y 26, emplee un determinante de tercer orden para escribir la ecuación de la recta que contiene a los puntos **S** y **T** dados.

25. S(2, −1), T(3, 0)

26. S(−3, 4), T(5, 2)

* **27.** Demuestre que los puntos R(x_1, y_1), S(x_2, y_2), y T(x_3, y_3) (que no son necesariamente distintos) son colineales si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

* **28.** Obtenga una ecuación en forma de determinante de la recta que pasa por el punto S(x_1, y_1) dado y cuya ordenada al origen es b.

* **29.** Obtenga una ecuación en forma de determinante de la recta con abscisa al origen a y ordenada al origen b.

* **30.** Demuestre que

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación de la recta que pasa por el punto S(x_1, y_1) y cuya pendiente es m.

* **31.** Demuestre que la forma de pendiente y ordenada al origen de la ecuación de una recta se puede escribir en forma determinante como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

* **32.** Demuestre que la recta que pasa por el origen y que contiene al punto S(x_1, y_1) tiene una ecuación de la forma

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

* **33.** Demuestre que los puntos S(x_1, y_1) y T(x_2, y_2) son colineales con el origen si y sólo si.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

* **34.** Demuestre que el área del triángulo cuyos vértices son R(x_1, y_1), S(x_2, y_2), y T(x_3, y_3) es

$$\pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

[*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 43, página 97.]

* **35.** Demuestre que los vectores **s** $= (x_1, y_1)$ y **t** $= (x_2, y_2)$ son paralelos si y sólo si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

* **36.** Demuestre que si los vectores **s** $= (x_1, y_1)$ y **t** $= (x_2, y_2)$ no son paralelos entonces cualquier vector **v** $= (x, y)$ se puede expresar como una combinación lineal de **s** y **t**.

$$\mathbf{v} = a\mathbf{s} + b\mathbf{t},$$

donde a y b están dados por

$$a = \frac{\begin{vmatrix} x & x_2 \\ y & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x \\ y_1 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}}.$$

[*Sugerencia*: La ecuación vectorial $(x, y) = a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2)$ es equivalente a un sistema de ecuaciones cartesianas con incógnitas a y b].

3–4 Demostraciones analíticas

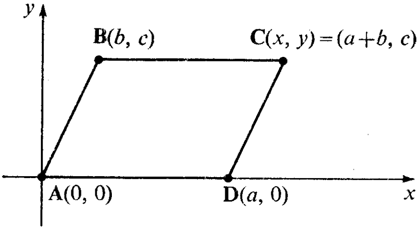
Los métodos analíticos se pueden emplear en forma muy efectiva para demostrar teoremas de geometría euclidiana plana. Las demostraciones se pueden llevar a cabo empleando las coordenadas cartesianas de algunos puntos o bien mediante vectores.

Cuando se emplean coordenadas para demostrar un teorema, puede facilitarse a veces la demostración si los ejes coordenados se orientan de alguna manera particular con respecto a la figura de que se trate; no se pierde generalidad haciendo esto, puesto que la orientación y colocación de los ejes en el plano es arbitraria. Sin embargo, cuando se emplean métodos vectoriales, en general, la colocación de la figura respecto a los ejes de coordenadas no tiene importancia alguna; de hecho normalmente no se menciona la colocación de la figura.

Teorema. Las longitudes de los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.

Demostración empleando coordenadas:

Para un paralelogramo **ABCD** (véase el siguiente diagrama) los ejes coordenados se pueden elegir con el origen sobre **A** y tomando la



parte positiva del eje x a lo largo de $\overline{\mathbf{AD}}$. Entonces las coordenadas de **A** son (0, 0) y las coordenadas de **D** son de la forma (a, 0), con $a > 0$. Sean **B** de coordenadas (b, c), con $c \neq 0$, como se muestra. Se pueden calcular las coordenadas (x, y), de **C** como sigue:

Puesto que $\overline{\mathbf{BC}} \parallel \overline{\mathbf{AD}}$, y la pendiente de $\overline{\mathbf{AD}}$ es 0 se sigue que la pendiente de $\overline{\mathbf{BC}}$ es 0. Por lo tanto se tiene $\dfrac{y-c}{x-b} = 0$, de modo que

$$y = c.$$

Puesto que $\overline{\mathbf{CD}} \parallel \overline{\mathbf{AB}}$, pendiente $\overline{\mathbf{CD}}$ = pendiente $\overline{\mathbf{AB}}$. Entonces si $x \neq a$,

$$\frac{y-0}{x-a} = \frac{c-0}{b-0}.$$

Sin embargo ya que $y = c$, tal como se había demostrado, se tiene

$$\frac{c-0}{x-a} = \frac{c-0}{b-0},$$

o bien

$$x = a + b.$$

si $x = a$, de modo que $\overline{\mathbf{CD}}$ sea vertical, entonces $\overline{\mathbf{AB}}$ debe ser también vertical y por lo tanto $b = 0$; en este caso también se tiene que $x = a + b$.

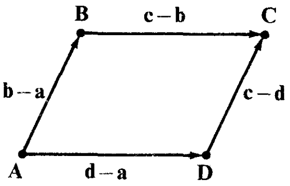
Ahora que ya se conocen las coordenadas $(a + b, c)$ de **C** se puede emplear la fórmula de distancia para calcular las longitudes de los lados:

$$\begin{aligned}
d(\overline{\mathbf{AB}}) &= \sqrt{(b-0)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2} \\
d(\overline{\mathbf{CD}}) &= \sqrt{(a+b-a)^2 + (c-0)^2} = \sqrt{b^2 + c^2} \\
d(\overline{\mathbf{BC}}) &= \sqrt{(a+b-b)^2 + (c-c)^2} = \sqrt{a^2} = a \\
d(\overline{\mathbf{AD}}) &= \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{a^2} = a
\end{aligned}$$

Por consiguiente las longitudes de los lados opuestos son iguales.

Demostración vectorial:

Sea **ABCD** un paralelogramo y considérese que las minúsculas en negrita se refieren a los vectores que van del origen a los puntos respectivos.



Puesto que $\overline{\mathbf{CD}} \parallel \overline{\mathbf{AB}}$ y $\overline{\mathbf{BC}} \parallel \overline{\mathbf{AD}}$, se tiene

$$\mathbf{c} - \mathbf{d} = k_1(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad \text{y} \quad \mathbf{c} - \mathbf{b} = k_2(\mathbf{d} - \mathbf{a}), k_1, k_2 \in \mathcal{R}. \quad (1)$$

como

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = (\mathbf{c} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

y

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = (\mathbf{c} - \mathbf{d}) + (\mathbf{d} - \mathbf{a}),$$

se tiene

$$(\mathbf{c} - \mathbf{b}) + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (\mathbf{c} - \mathbf{d}) + (\mathbf{d} - \mathbf{a}).$$

Por lo tanto de la Ecuación (1)

$$k_2(\mathbf{d} - \mathbf{a}) + (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = k_1(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{d} - \mathbf{a}),$$

o bien

$$(k_2 - 1)(\mathbf{d} - \mathbf{a}) = (k_1 - 1)(\mathbf{b} - \mathbf{a}). \quad (2)$$

Por hipótesis ni $\mathbf{d} - \mathbf{a}$ o $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ son el vector cero. Entonces si $k_2 - 1 \neq 0$ y $k_1 - 1 \neq 0$, entonces la Ecuación (2) implica que $\mathbf{d} - \mathbf{a}$ y $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ son múltiplos escalares no nulos el uno del otro, y por lo tanto que son paralelos (véase página 21.). Pero esto es imposible puesto que lados adyacentes de un paralelogramo *no* son paralelos. Se puede pues concluir que $k_2 - 1 = 0$ y $k_1 - 1 = 0$, esto es que $k_2 = 1$ y $k_1 = 1$. Entonces de la Ecuación (1) se tiene

$$\mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} - \mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{a}. \quad (3)$$

Entonces

$$\|\mathbf{c} - \mathbf{d}\| = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

y

$$\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{d} - \mathbf{a}\|,$$

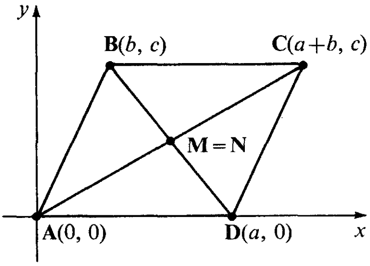
completandose así la demostración.

Para ilustrar nuevamente los dos métodos considérese otro ejemplo:

Teorema: Las diagonales de un paralelogramo se bisectan mutuamente.

Demostración empleando coordenadas:

En la demostración que aparece en la página 110 se vió que los vértices del paralelogramo **ABCD** tienen las coordenadas que se muestran en la figura, si se eligen los ejes coordenados apropiadamente. Del Ejercicio 23, página 52 se sabe que las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos cuyas coordenadas son (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están dadas por $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. Según esto el punto medio M de $\overline{\mathbf{AC}}$ tiene como coordenadas a $\left(\frac{a + b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ y el punto medio **N** de $\overline{\mathbf{BD}}$ tiene también las coordenadas $\left(\frac{a + b}{2}, \frac{c}{2}\right)$. Por lo tanto **M** = **N**. Puesto que el punto medio de cada diagonal esta sobre la otra diagonal, las diagonales se bisecan mutuamente.



Demostración vectorial:

Sea **ABCD** un paralelogramo y con **M** y **N** los puntos medios de las diagonales $\overline{\mathbf{AC}}$ y $\overline{\mathbf{BD}}$, respectivamente, como se muestra en la figura. Entonces

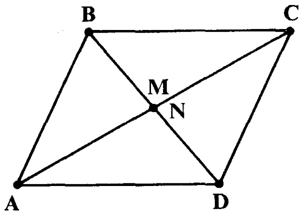
$$\mathbf{m} - \mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a}),$$

de modo que

$$\mathbf{m} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a}).$$

Análogamente se tiene

$$\mathbf{n} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}).$$



De la Ecuación (3) de la página 111 se tiene

$$\mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Entonces

$$\mathbf{c} - \mathbf{d} + (\mathbf{d} + \mathbf{a}) = \mathbf{b} - \mathbf{a} + (\mathbf{d} + \mathbf{a}),$$

$$\mathbf{c} + \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{d},$$

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{d}).$$

Así que **m** = **n**, es decir **M** = **N**, y se ha demostrado el Teorema.

Ejercicios 3—4

En los Ejercicios 1–10, demuestre el teorema que se menciona empleando coordenadas cartesianas.

1. Las diagonales de un rectángulo son de la misma longitud.
2. Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.
3. Las diagonales de un rombo son perpendiculares.
4. El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante de los tres vértices del triángulo.
5. Las bisectrices de los ángulos de un triángulo se cortan en un mismo punto.
6. La suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales.
7. Las diagonales de un trapezoide isósceles son de la misma longitud.
8. Las diagonales de un trapezoide y la recta que une los puntos medios de lados paralelos, se cortan en un mismo punto.
9. El segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapezoide es paralelo a las bases, y su longitud es igual a la mitad de la suma de las longitudes de las bases.
10. El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado, y su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

En los Ejercicios 11—16, demuestre los teoremas que se mencionan por métodos vectoriales.

* **11.** Las medianas de los lados iguales de un triángulo isósceles son de la misma longitud.
* **12.** La mediatriz de la base de un triángulo isósceles pasa por el vértice del triángulo.
* **13.** Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo.
* **14.** En un triángulo equilátero cada mediana es también una altura.
* **15.** Las medianas de un triángulo se cortan en un punto cuya distancia a cada vértice es dos tercios de la distancia que separa a la mediana de dicho vértice.
* **16.** Las mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un mismo punto.
* **17–21.** Demuestre por métodos vectoriales los teoremas que se mencionan en los Ejercicios 2, 3, 6, 9 y 10.
* **22–25.** Demuestre, empleando coordenadas cartesianas, los teoremas que se mencionan en los Ejercicios 12, 13 15, y 16.
** **26.** Demuestre que si las rectas que contienen a dos lados opuestos de un cuadrilátero se intersectan en un punto **S**, y las rectas que contienen a los otros dos lados del cuadrilátero se intersectan en un punto **T**, entonces el punto medio del segmento $\overline{\mathbf{ST}}$ es colineal con los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero. [*Sugerencia*: Coloque el origen en uno de los vértices del cuadrilátero.]

Resumen del capítulo

1. La distancia de un punto $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ a una recta dada $\mathcal{L}$ cuyo vector de dirección es $\mathbf{v}$ y que pasa por el punto $\mathbf{T}$ está dada por

$$d(\mathbf{S}, \mathcal{L}) = \frac{|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v_p}|}{\|\mathbf{v_p}\|}.$$

Si la ecuación de $\mathcal{L}$ es $Ax + By + C = 0$, entonces

$$d(\mathbf{S}, \mathcal{L}) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2. La **intersección** de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es o bien un solo punto, si las rectas no son paralelas, o bien una recta si las rectas coinciden, o bien finalmente el conjunto vacío si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son paralelas y distintas.

3. $\det [a_1] = a_1$; $\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$. Los determinantes de orden superior se pueden desarrollar por menores. Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1,$$

donde $A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, y $C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

4. Se pueden resolver sistemas lineales de ecuaciones por sustitución o por eliminación. También se pueden resolver por el método vectorial o empleando la Regla de Cramer.
5. Para un sistema de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

en el cual $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, la Regla de Cramer indica que la única solución esta dada por

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D},$$

donde

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

6. Se puede escribir la ecuación de una recta en forma determinante. La forma de dos puntos es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Se puede demostrar teoremas geométricos por métodos analíticos, ya sea en términos de coordenadas cartesianas de puntos o bien por métodos vectoriales.

Ejercicios de repaso del capítulo

1. Calcule la distancia que separa al punto S(4, −1) de la recta $\mathcal{L}$ cuya ecuación es

$$5x + 12y - 2 = 0.$$

2. Calcule la distancia que separa a las rectas paralelas cuyas ecuaciones son

$$3x - 4y - 15 = 0 \quad \text{y} \quad 3x - 4y + 10 = 0.$$

3. Diga cuál es la intersección de las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\mathcal{L}_1\colon (x, y) = (-2, -2) + r_1(2, 3),\ \mathcal{L}_2\colon (x, y) = (4, 2) + r_2(1, -1).$$

4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales por eliminación.

$$\begin{aligned} x - 3y &= 4 \\ 2x + 5y &= -3 \end{aligned}$$

5. Resuelva el siguiente sistema de ecuación lineal usando vectores.

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 3 \\ 3x + 5y &= 6 \end{aligned}$$

6. Resuelva el sistema dado de ecuación lineal por la Regla de Cramer.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 3x - 2z &= 1 \\ y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

7. Encuentre el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

desarrollando por menores con respecto al segundo renglón.

8. Usando un determinante de orden tres escriba una ecuación para la recta que interseca los ejes en $x = 7$ y y −3.

9. Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son O(0, 0), S(3, 5), y T(6, 4).

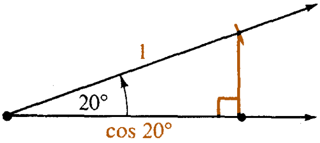
10. Demuestre que los ángulos opuestos a los lados de longitud igual, en un triángulo isósceles son iguales.

Construcción de ángulos

Existen muchos ángulos que pueden ser trisecados por medio de regla y compás. Por ejemplo un ángulo recto puede ser trisecado por éste método, como se vió en la página 84, un triángulo equilátero puede ser construido empezando con una configuración de dos puntos, y de la bisección de cualquier ángulo de 60°.

Sin embargo, no es posible trisecar un ángulo de 60° con regla y compás, es decir, no se puede construir un ángulo de 20° de esa manera. Para comprender el porqué de esto, partamos de observar que si se pudiera construir un ángulo de 20°, entonces también podría construirse cos 20°. Recuérdese ahora la identidad trigonométrica

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$



Puesto que $\cos 60° = \frac{1}{2}$, se sigue que cos 20° satisface la ecuación

$$\tfrac{1}{2} = 4x^3 - 3x,$$

o bien

$$8x^3 - 6x - 1 = 0. \tag{1}$$

Por tanto, cos 20° es un número algebraico de grado máximo 3. Se puede demostrar que ninguna solución de la Ecuación (1) es también solución de una ecuación de primer o segundo grado con coeficientes enteros. Por consiguiente cos 20° es un número algebraico de grado 3; por tanto, no se puede construir. Esto indica que no se puede intersectar con regla y compás un ángulo de 60°.

Se han propuesto muchas construcciones para trisecar un ángulo arbitrario, pero claro está que, por la discusión anterior, vemos que tales construcciones, o bien no satisfacen las condiciones que define una construcción con regla y compás, o bien no son construcciones exactas para todos los ángulos.

Una construcción bien conocida para trisecar *aproximadamente* un ángulo es la siguiente: Puesto que se puede bisecar a cualquier ángulo y se puede nuevamente bisecar a uno de los ángulos así obtenidos, para cualquier ángulo θ se pueden construir ángulos de medidas

$$\tfrac{1}{4}m°(\theta),\ (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16})m°(\theta),\ (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{64})m°(\theta),$$

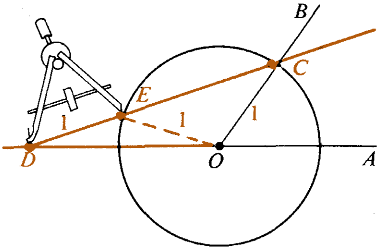
y así sucesivamente. Puesto que la serie geométrica

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

converge a $\frac{1}{3}$, continuando este proceso se puede, en un número finito de pasos, construir un ángulo cuya medida sea arbitrariamente parecida a $\frac{1}{3}m°(\theta)$. Al terminar el *ené*simo paso el error que se comete es precisamente $\dfrac{1}{3 \cdot 4^n}m°(\theta)$.

Otras "trisecciones" usualmente ocultan sagazmente algún pequeño error de la construcción ofrecida. Hay que recordar dos cosas: (*a*) en cualquier trisección la persona que pretende haber encontrado la solución está obligada a demostrar que es válida y (*b*) *no* es posible que exista una construcción válida hecha con regla y compás.

Arquímides propuso una construcción, aunque no se hace sólo con regla y compás, que efectivamente es la trisección de un ángulo *AOB*. La configuración es la siguente:



Dado el ángulo *AOB*, trácese el círculo con centro en *0* y radio unitario, y considérese que este círculo intersecta al segmento *OB* en el punto *C*. Extiéndase ahora el segmento *OA* en dirección contraria. Colocando firmemente un extremo del compás sobre el borde de la regla en el punto *D*, coloque este punto sobre la extensión de *E* y colóquese la regla de modo que toque el punto *C*. Póngase ahora el otro extremo del compás sobre el punto *E*, que está sobre la regla a una unidad de distancia de *D* en la dirección hacia *C*, ajustando la regla en forma tal que *E* esté sobre el círculo, como se muestra en la figura. (En forma alternativa se podría mantener al punto *E* sobre el círculo, permitir que la regla pase también por el punto *C* y ajustar la regla en forma tal que el punto *D* esté sobre la extensión de *OA*.) Puesto que los triángulos *OCE* y *ODE* son isósceles se tiene

$$m°(\angle EDO) = m°(\angle EOD),$$

y

$$m°(\angle CEO) = m°(\angle OCE). \qquad (2)$$

Ahora como la medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores opuestos

$$m°(\angle CEO) = 2m°(\angle EDO), \qquad (3)$$

y

$$m°(\angle AOB) = m°(\angle EDO) + m°(\angle OCE). \qquad (4)$$

Por lo tanto de las Ecuaciones (2) y (3) se infiere que

$$2m°(\angle EDO) = m°(\angle OCE).$$

Sustituyendo este resultado en la Ecuación (4) se tiene

$$m°(\angle AOB) = 3m°(\angle EDO). \qquad (5)$$

Del diagrama anterior se ve que los puntos *A*, *O* y *D*, así como los puntos *C*, *E*, y *D* son colineales, de modo que

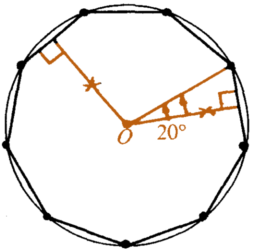
$$m°(\angle EDO) = m°(\angle ADC),$$

y por lo tanto la Ecuación (5) es equivalente a

$$m°(\angle ADC) = \tfrac{1}{3}m°(\angle AOB).$$

Debe notarse que aunque visualmente parezca que la consfiguración de Arquímides se ha trazado con precisión, el ajuste exacto de la regla no puede hacerse de acuerdo con las normas que definen una construcción con regla y compás.

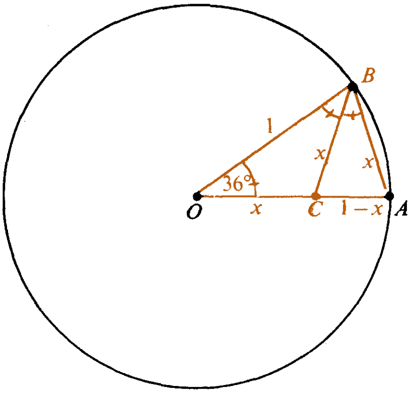
Puesto que ya se ha visto que no se puede construir un ángulo de medida 20°, tampoco se puede construir un nonágono regular, o sea un polígono de nueve lados, como el que se muestra en la siguiente figura. Por el mismo motivo no se puede construir un heptágono regular (7 lados) ni, por consiguiente, polígonos regulares de 14, 28, 56 lados y así sucesivamente.



Por otra parte se pueden construir triángulos equiláteros, y cuadrados, y por lo tanto se pueden construir exágonos regulares, y así sucesivamente.

En 1796 cuando tenía sólo diez y ocho años, el gran matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777—1865) demostró sorpresivamente que se puede construir un polígono regular de 17 lados.

De la teoría de números algebraicos sabemos hoy en día que se puede construir un polígono regular de k lados si y sólo si k es un número primo de Fermat (es decir un número primo de la forma $2^{2^n} + 1$) o bien si k es una potencia de 2, o bien finalmente si k es un producto de dos números de este tipo. Sólo se conocen algunos números primos de Fermat. Los primeros son 3, 5, 17 y 257. Entre los polígonos regulares que se pueden construir están el pentágono y el decágono, como mostraremos en seguida.



(Después de haberse construido un decágono regular se pueden unir vértices alternos como segmentos para obtener un pentágono regular)

Empezando con un círculo unidad se puede construir un decágono regular inscrito si se logra construir un segmento de recta cuya longitud sea igual a la longitud x del lado del decágono.

En la figura que aparece en la página 118 los triángulos *OAB* y *BAC* son semejantes. Por lo tanto se tiene

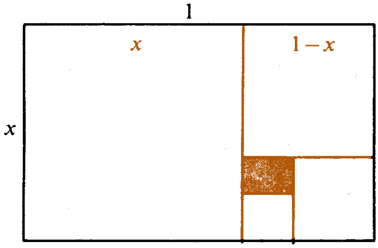
$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}, \tag{6}$$

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

$$x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Como x es un número algebraico de grado 2, se puede construir a x, que era lo deseado.

Por la Ecuación (6), el punto que está sobre un segmento unitario que dista x, o $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, unidades de longitud de un extremo del segmento, divide al segmento en una proporción "media y extrema". El cociente $\frac{1}{x}$ recibe el nombre de *cociente de oro**1. Un rectángulo cuyos lados formen este cociente recibía el nombre, en la Grecia antigua, de *rectángulo de oro**2, debido a su agradable forma. Si quitamos un cuadro de un extremo de un rectángulo de oro*2, entonces el rectángulo que queda es tambien un rectángulo de oro*2. Es interesante y divertido notar que este proceso de quitar cuadros y obtener rectángulos de oro se puede continua indefinidamente.

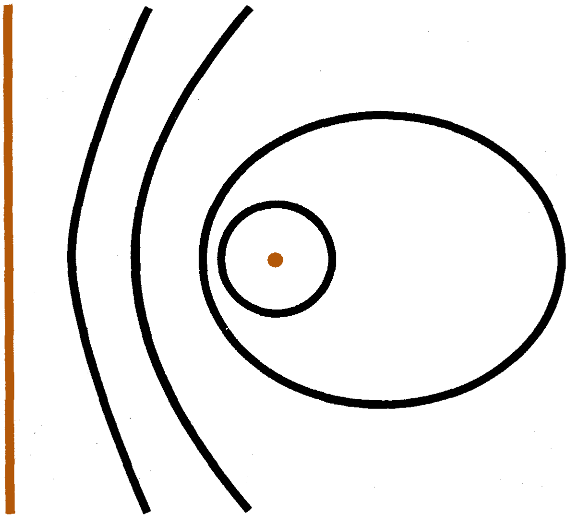


Nota de T:

*1 También se le llama "razón aúrea" y a la sección, "sección aúrea".

*2 "Rectángulo dorado" o "rectángulo aúreo"

Capítulo 4



En este capítulo se definen las secciones cónicas, se obtienen sus ecuaciones, así como se analizan sus propiedades. El capítulo concluye con una discusión de la propiedad del foco y la directriz que se ilustra en el siguiente diagrama

Secciones Cónicas

Los conjuntos como lugares geométricos

4—1 La ecuación de un lugar geométrico

Se puede decir que cualquier conjunto de puntos, tal como una recta, es un **lugar geométrico.** El término lugar geométrico se aplica normalmente al conjunto de todos los puntos que tienen alguna característica geométrica común. Por ejemplo (véase los Ejercicios 35 y 36, página 68) el lugar geométrico de todos los puntos **U** del plano que son equidistantes a dos puntos fijos **S** y **T** es una recta, a saber la recta $\mathcal{L}$ que es perpendicular al segmento $\overline{\mathbf{ST}}$ en su punto medio. (Figura 4–1).

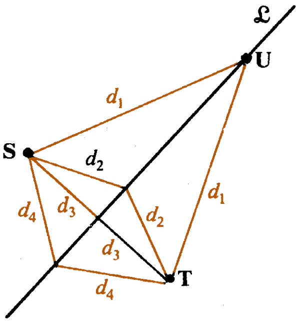


Figura 4—1

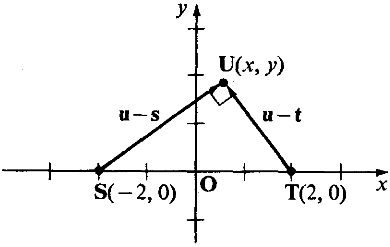
En el Capítulo 2 se estudió la solución del problema de obtener la ecuación cartesiana o vectorial de una recta dada. Este problema es un caso particular de un problema matemático más amplio: el obtener la ecuación del lugar geométrico $\mathcal{S}$ cuando se dan un conjunto de condiciones que definen a $\mathcal{S}$. Se dice que una ecuación **es ecuación de** $\mathcal{S}$ y que $\mathcal{S}$ es **la gráfica de** la ecuación si y sólo si la ecuación queda satisfecha por las coordenadas de cada punto en $\mathcal{S}$, *y* cada punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación está en $\mathcal{S}$. Normalmente al determinar la ecuación de un lugar geométrico se intenta encontrar una ecuación que sea sencilla o que esté en alguna forma ordinaria.

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación cartesiana del lugar geométrico $\mathcal{C}$ de todos los puntos tales que el segmento que va de cualquier punto de $\mathcal{C}$ a S(−2, 0) es perpendicular al segmento que va del punto a T(2, 0).

Solución 1 (vectorial):

Sea $\mathbf{U}(x, y)$ cualquier punto del lugar geométrico indicado. Puesto que $\overline{\mathbf{US}} \perp \overline{\mathbf{UT}}$.

$$(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{t}) = 0,$$
$$(x + 2, y) \cdot (x - 2, y) = 0,$$
$$x^2 - 4 + y^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 = 4. \quad (1)$$



Por consiguiente las coordenadas de cualquier punto del lugar geométrico satisfacen la Ecuación (1).

Recíprocamente puesto que los pasos algebraicos expuestos son reversibles, y puesto que dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0, cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan la Ecuación (1) está sobre el lugar geométrico indicado. Por lo tanto la Ecuación (1) es la ecuación de ese lugar geométrico.

Solución 2(método no vectorial):

Si $\overline{\mathbf{US}} \perp \overline{\mathbf{UT}}$, entonces el triángulo **STU** es rectángulo. Empleando el Teorema de Pitágoras se tiene pues para todos los puntos del lugar geométrico

$$[d(\mathbf{S}, \mathbf{U})]^2 + [d(\mathbf{T}, \mathbf{U})]^2 = [d(\mathbf{S}, \mathbf{T})]^2.$$

Empleando la fórmula de distancia se tiene

$$[(x + 2)^2 + y^2] + [(x - 2)^2 + y^2] = 16,$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 16,$$
$$2x^2 + 2y^2 + 8 = 16,$$

es decir
$$x^2 + y^2 = 4.$$

Nuevamente los pasos algebraicos son reversibles; y **STU** es un triángulo rectángulo por el recíproco del Teorema de Pitágoras. Es decir la Ecuación (1) es la ecuación del lugar geométrico indicado.

Los pasos que hay que seguir para obtener una ecuación simple, u ordinaria, de un lugar geométrico se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Sea $\mathbf{U}(x, y)$ cualquier punto del lugar geométrico, y escríbase una ecuación que quede satisfecha por $\mathbf{u}$ o por x y y.
2. Efectúense las transformaciones necesarias para simplificar esta ecuación.
3. Verifíquese que cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan la ecuación final esté en el lugar geométrico. (Es a veces conveniente hacer esto último observando que las transformaciones efectuadas en el paso 2 son reversibles).

Al obtener la ecuación de un lugar geométrico es a veces más sencillo emplear métodos vectoriales, pero otras veces es más sencillo emplear métodos cartesianos.

Ejemplo 2. Obtenga una ecuación cartesiana del lugar geométrico $\mathcal{H}$ de todos los puntos tales que la pendiente del segmento que conecta a cada punto de $\mathcal{H}$ con $\mathbf{S}(1, 2)$ es la mitad de la pendiente del segmento que los conecta con $\mathbf{T}(2, 5)$.

Solución: Sea $\mathbf{U}(x, y)$ cualquier punto del lugar geométrico en cuestión. Entonces por la fórmula que permite calcular la pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, la pendiente de $\overline{\mathbf{US}}$ es $\dfrac{y-2}{x-1}$ y la pendiente de $\overline{\mathbf{UT}}$ es $\dfrac{y-5}{x-2}$. Por lo tanto de las condiciones dadas se tiene

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{y-5}{x-2}\right), \tag{2}$$

donde, para $x \neq 1$ y $x \neq 2$, se obtiene

$$2(y-2)(x-2) = (x-1)(y-5),$$

$$2xy - 4x - 4y + 8 = xy - y - 5x + 5,$$

$$xy + x - 3y + 3 = 0.$$

El primer miembro de la Ecuación (2) no está definido para $x = 1$, y el segundo miembro no está definido para $x = 2$; por lo tanto el lugar geométrico no incluye puntos que tengan estos valores de sus coordenadas x.

Puesto que los pasos algebraicos son reversibles se concluye que

$$xy + x - 3y + 3 = 0, \quad x \neq 1, x \neq 2,$$

es una ecuación de $\mathcal{H}$.

Ejercicios 4—1

En los Ejercicios 1—18, obtenga una ecuación del lugar geométrico $\mathcal{C}$ de los puntos del plano que satisfacen las condiciones dadas.

1. Cada punto de $\mathcal{C}$ es equidistante de los puntos $\mathbf{S}(1, 4)$ y $\mathbf{T}(3, 7)$.

2. Cada punto de $\mathcal{C}$ es equidistante de los puntos $\mathbf{S}(-3, 2)$ y $\mathbf{T}(2, -5)$.

3. Cada punto de $\mathcal{C}$ está a 6 unidades del punto S(2, 4).

4. Cada punto de $\mathcal{C}$ está a $\sqrt{7}$ unidades del punto S(−1, −3).

5. El segmento de recta que conecta a cada punto de $\mathcal{C}$ con S(−3, 0) es perpendicular al segmento que conecta al punto con T(3, 0).

6. Repita el Ejercicio 5 para S(1, 2) y T(5, −2).

7. La pendiente del segmento que conecta a cada punto de $\mathcal{C}$ con S(1, 6) es el doble de la pendiente del segmento que lo conecta con T(3, 2).

8. La pendiente del segmento de recta que conecta a cada punto de $\mathcal{C}$ con S(2, −3) es dos tercios de la pendiente del segmento de recta que conecta al punto con T(−1, 4).

9. La pendiente del segmento de recta que conecta a cada punto de $\mathcal{C}$ con S(2, 5) es dos unidades mayor que la pendiente del segmento de recta que conecta al punto con T(−1, −2).

10. La pendiente del segmento de recta que conecta a cada punto de $\mathcal{C}$ con S(1, −2) es 3 unidades menor que la pendiente del segmento de recta que conecta al punto con T(−1, 2).

11. Cada punto de $\mathcal{C}$ es equidistante de S(6, 0) y del eje y.

12. Cada punto de $\mathcal{C}$ es equidistante de S(0, 2) y de la recta cuya ecuación es $y + 2 = 0$.

13. Cada punto de $\mathcal{C}$ es equidistante de S(1, 2) y de la recta cuya ecuación es $x - y - 5 = 0$.

14. Cada punto de $\mathcal{C}$ es equidistante de S(3, −2) y de la recta cuya ecuación es $x - y = 0$.

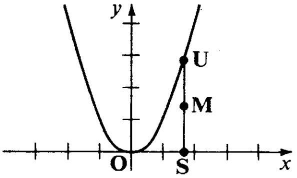
15. La distancia que separa a cada punto de $\mathcal{C}$ de S(4, 0) es la mitad de la distancia que separa al punto de la recta cuya ecuación es $x + 8 = 0$.

16. La distancia que separa a cada punto de $\mathcal{C}$ de S(4, 0) es el doble de la distancia que lo separa de la recta cuya ecuación es $x + 8 = 0$.

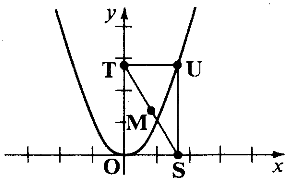
*** 17.** La suma de las distancias que separan a cada punto de $\mathcal{C}$ a S(−3, 0) y T(3, 0) es 10.

*** 18.** El valor absoluto de la diferencia de las distancias que separan a cada punto de $\mathcal{C}$, a S(−5, 0) y T(5, 0) es 8.

*** 19.** Sea **U** cualquier punto de la gráfica de $y = x^2$, y sea **S** la proyección (perpendicular) de **U** sobre el eje x. Obtenga una ecuación del lugar geométrico formado por los puntos medios **M** de $\overline{\mathbf{US}}$.



Ex. 19



Ex. 20

*** 20.** Sea **U** cualquier punto de la gráfica de $y = x^2$, y sean **S** y **T** las proyecciones (perpendiculares) de **U** sobre los ejes x y y respectivamente. Encuentre una ecuación del lugar geométrico formado por los puntos medios **M** de $\overline{\mathbf{ST}}$.

* **21.** Sea **U** cualquier punto sobre la gráfica de $y = 3x^2$, y sean **S** y **T** las proyecciones (perpendiculares) de **U** sobre los ejes x y y respectivamente. Obtenga una ecuación del lugar geométrico formado por los puntos **Q** sobre $\overline{\mathbf{ST}}$ tales que están a la tercera parte de la distancia de **S** y **T**. (*Sugerencia*: trace un diagrama similar al que se empleó para resolver el Ejercicio 20).

Propiedades de las secciones cónicas

4–2 Circunferencia

En lo que resta de este Capítulo, así como en el Capítulo 5, se estudiarán las propiedades de una clase importante de lugares geométricos llamados *secciones cónicas*. Las circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas son ejemplos de secciones cónicas y se discutirán en el Capítulo 5.

Al estudiar geometría plana se ve que una circunferencia es el lugar geométrico (conjunto) de todos los puntos del plano que están a una distancia dada (radio) de un punto dado (centro). Al segmento cuyos extremos son el centro del círculo y a un punto de la circunferencia se llama **segmento radial** de la circunferencia. Por lo tanto, el radio de una circunferencia es la longitud de un segmento radial de la misma.

Como se muestra en la Figura 4–2, un punto $\mathbf{U}(x, y)$ del plano está sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ de radio 4 con centro en $\mathbf{S}(2, -1)$ si y sólo si

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{s}\| = 4. \tag{1}$$

Obsérvese que, sin embargo,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{s}\| &= \|(x, y) - (2, -1)\| \\ &= \|(x - 2, y + 1)\| \\ &= \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto de la Ecuación (1) se tiene

$$\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} = 4.$$

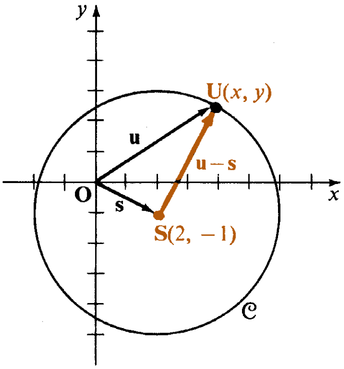


Figura 4–2

Puesto que ambos miembros de esta ecuación son números positivos al tomar el cuadrado de ambos se obtiene una ecuación equivalente:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16. \tag{2}$$

Puesto que los pasos algebraicos son reversibles la Ecuación (2) es una ecuación de $\mathcal{C}$, y $\mathcal{C}$ es la gráfica, o lugar geométrico de la Ecuación (2).

Empleando el mismo procedimiento se puede demostrar que, en general, si una circunferencia $\mathcal{C}$ tiene radio r y centro en $\mathbf{S}(h, k)$ entonces una ecuación cartesiana de $\mathcal{C}$ es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2. \tag{3}$$

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación cartesiana de la circunferencia de radio 6 con centro en S(4, −7).

Solución: Haciendo $h = 4$, $k = -7$ y $r = 6$, de la Ecuación (3) se obtiene $(x - 4)^2 + [y - (-7)]^2 = 6^2$, o sea

$$(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 36.$$

Si se desarrolla el primer miembro de la Ecuación (3), página 125 se obtiene

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2,$$

o bien
$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0.$$

Esta ecuación es a su vez de la forma general

■
$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{4}$$

donde D, E y F son constantes.

Se puede escribir a una ecuación que esté en la forma (4) en forma equivalente escribiendo

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = c \tag{5}$$

simplemente completando cuadrados de x y y.

Ejemplo 2. Determine el lugar geométrico en $\mathcal{R}^2$ de la ecuación

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0.$$

Solución: Se puede reescribir esta ecuación y completar los cuadrados de x y y como sigue:

$$x^2 - 6x + (-3)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 = -4 + (-3)^2 + (2)^2,$$
$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9,$$
$$(x - 3)^2 + [y - (-2)]^2 = 3^2.$$

Por lo tanto el lugar geométrico es una circunferencia de radio 3 con centro en el punto S(3, −2).

Puesto que el cuadrado del radio de una circunferencia debe ser un número positivo, una ecuación de la forma (4) no representa necesariamente un lugar geométrico que sea una circunferencia. Si, después de haber completado a cuadrados en x y y, y después de haberse escrito la ecuación en la forma (5), el segundo miembro, c, es cero, entonces el lugar geométrico consta de un solo punto. Si c es negativo el lugar geométrico es el conjunto vacío $\emptyset$.

Se puede emplear la Ecuación (4) anterior para determinar la ecuación de una circunferencia $\mathcal{C}$ cuando se conocen tres puntos que estén sobre $\mathcal{C}$.

Ejemplo 3. Obtenga una ecuación cartesiana de la circunferencia que pasa por los puntos Q(3, −2), S(−1, −4) y T(2, −5).

Solución: Las constantes D, E y F deben ser tales que las coordenadas de cada punto satisfagan

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 3^2 + (-2)^2 + 3D - 2E + F &= 0 \\ (-1)^2 + (-4)^2 - D - 4E + F &= 0 \\ (2)^2 + (-5)^2 + 2D - 5E + F &= 0, \quad \text{o bien} \\ 3D - 2E + F &= -13 \\ -D - 4E + F &= -17 \\ 2D - 5E + F &= -29 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, es decir, despejando a D, E y F se ve que

$$D = -2, E = 6, \text{ y } \quad F = 5.$$

Por lo tanto, una ecuación cartesiana de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0.$$

Dada una recta $\mathcal{L}$ tangente a una circunferencia es perpendicular al segmento radial que contiene al punto de contacto **T** (figura 4–3) se sabe que si **v** es un vector de dirección de la recta que contiene al segmento radial $\overline{\mathbf{TS}}$ entonces $\mathbf{v_p}$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}$. Se emplea esta información para encontrar una ecuación $\mathcal{L}$ si se conocen las coordenadas de **T** y la ecuación de $\mathcal{C}$.

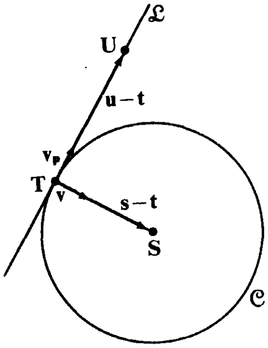


Figura 4—3

Ejemplo 4. Obtenga una ecuación cartesiana de la recta $\mathcal{L}$ que es tangente en el punto **T**(6, −4) a la circunferencia $\mathcal{C}$ cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0.$$

Solución: Obsérvese primero que **T** está sobre $\mathcal{C}$ puesto que

$$6^2 + (-4)^2 - 4(6) + 2(-4) - 20 = 36 + 16 - 24 \\ - 8 - 20 = 0.$$

Completando cuadrados en x y y en la ecuación de $\mathcal{C}$,, se obtiene

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) &= 20 + 4 + 1, \\ (x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 25. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{C}$ tiene su centro en **S**(2, −1) y un vector de dirección de la recta que contiene al segmento radial $\overline{\mathbf{TS}}$ es

$$\mathbf{s} - \mathbf{t} = (2, -1) - (6, -4) = (-4, 3).$$

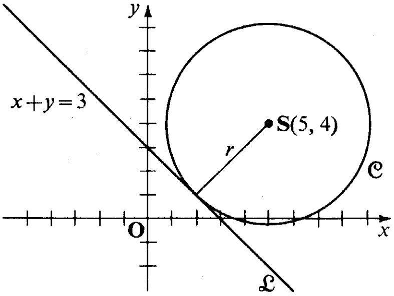
Por consiguiente, un punto $\mathbf{U}(x, y)$ está sobre $\mathcal{L}$ si y sólo si

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} - \mathbf{t}) \cdot (\mathbf{s} - \mathbf{t}) &= 0,\\ [(x, y) - (6, -4)] \cdot (-4, 3) &= 0,\\ (x - 6, y + 4) \cdot (-4, 3) &= 0,\\ -4x + 24 + 3y + 12 &= 0,\\ 4x - 3y - 36 &= 0.\end{aligned}$$

Como se sugiere en la Figura 4–3, el radio r y de una circunferencia $\mathcal{C}$ es igual a la distancia (perpendicular) que separa al centro $\mathbf{S}$ de $\mathcal{C}$ de cualquier recta $\mathcal{L}$ que sea tangente a $\mathcal{C}$. Se puede emplear este hecho para obtener la ecuación de una circunferencia dadas las coordenadas (x_1, y_1) de su centro y una ecuación $Ax + By + C = 0$ de una recta tangente.

Ejemplo 5. Obtenga una ecuación cartesiana de la circunferencia cuyo centro es $\mathbf{S}(5, 4)$ si la recta cuya ecuación es $x + y = 3$ es tangente a $\mathcal{C}$.

Solución: Trácese un diagrama. En la ecuación $Ax + By + C = 0$ para $\mathcal{L}$, se tiene $A = 1$, $B = 1$ y $C = -3$. También se tiene $(x_1, y_1) = (5, 4)$.



Por lo tanto (véase página 94) el radio r de $\mathcal{C}$ está dado por

$$\begin{aligned} r &= d(\mathbf{S}, \mathcal{L})\\ &= \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{5 + 4 - 3}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = \frac{6}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Sustituyendo a $(5, 4)$ por (h, k) y a $\frac{6}{\sqrt{2}}$ por r en la Ecuación (3) de la página 125 se obtiene

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 18$$

que es una ecuación de $\mathcal{C}$.

Ejercicios 4—2

En los Ejercicios 1—6, obtenga una ecuación en la forma (3) de la página 125 de la circunferencia con el radio r y centro $\mathbf{S}$ dados.

1. $r = 2$, $\mathbf{S}(3, 4)$

2. $r = 4$, $\mathbf{S}(1, 5)$

3. $r = 7$, $\mathbf{S}(2, -3)$

4. $r = 5$, $\mathbf{S}(-3, 4)$

5. $r = 3$, $\mathbf{S}(-2, -4)$

6. $r = 6$, $\mathbf{S}(-8, -1)$

En los Ejercicios 7—14, obtenga una ecuación de la forma (3), página 125, de la circunferencia $\mathcal{C}$ cuya ecuación se da.

7. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$
8. $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
9. $x^2 + y^2 + 10x - 6y - 15 = 0$
10. $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 29 = 0$
11. $x^2 + y^2 + 14x + 16y + 13 = 0$
12. $x^2 + y^2 + 12x + 10y - 3 = 0$
13. $4x^2 + 4y^2 + 12x - 20y - 66 = 0$
14. $2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$

En los Ejercicios 15—18, obtenga una ecuación de la forma (4), página 126, de la circunferencia que pasa por los puntos dados **Q**, **S** y **T**.

15. $\mathbf{Q}(5, 4)$, $\mathbf{S}(4, -3)$, $\mathbf{T}(-2, 5)$
16. $\mathbf{Q}(5, 7)$, $\mathbf{S}(6, 0)$, $\mathbf{T}(-1, -1)$
17. $\mathbf{Q}(1, 9)$, $\mathbf{S}(8, 2)$, $\mathbf{T}(-9, 9)$
18. $\mathbf{Q}(3, -10)$, $\mathbf{S}(10, 7)$, $\mathbf{T}(-7, -10)$

En los Ejercicios 19—24, obtenga una ecuación cartesiana de la recta $\mathcal{L}$ que es tangente en el punto **T** a la circunferencia cuya ecuación se da.

19. $\mathbf{T}(0, 0)$; $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$
20. $\mathbf{T}(0, 0)$; $x^2 + y^2 - 10x - 4y = 0$
21. $\mathbf{T}(2, 1)$; $x^2 + y^2 - 12x + 14y + 5 = 0$
22. $\mathbf{T}(3, 2)$; $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 7 = 0$
23. $\mathbf{T}(-3, 1)$; $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 16 = 0$
24. $\mathbf{T}(2, -1)$; $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$

En los Ejercicios 25—30, obtenga una ecuación cartesiana de la circunferencia $\mathcal{C}$ cuyo centro **S** que es tangente y ecuación de la tangente son dados.

25. $\mathbf{S}(3, 4)$, $x = 8$
26. $\mathbf{S}(5, 2)$, $y = 5$
27. $\mathbf{S}(1, -5)$, $x + y = 5$
28. $\mathbf{S}(-2, 3)$, $x - y = 7$
29. $\mathbf{S}(-2, -4)$, $2x - y = 4$
30. $\mathbf{S}(-3, -5)$, $2x + 3y = 5$

En los Ejercicios 31—38, obtenga una ecuación cartesiana de la circunferencia que satisface las condiciones dadas.

31. Pasa por los puntos $\mathbf{S}(-1, -3)$ y $\mathbf{T}(-5, 3)$ con centro sobre la recta cuya ecuación es $x - 2y + 2 = 0$.
32. Pasa por los puntos $\mathbf{S}(0, 0)$ y $\mathbf{T}(6, 2)$ con centro sobre la recta cuya ecuación es $2x - y = 0$.
33. Es tangente al eje x en el punto $\mathbf{S}(4, 0)$ y pasa por el punto $\mathbf{T}(7, 1)$.
34. Es tangente a la recta cuya ecuación es $4x - 3y - 2 = 0$ en el punto $\mathbf{S}(6, -1)$, y pasa por el punto $\mathbf{T}(6, 1)$.
35. Tiene su centro en $\mathbf{S}(-1, 4)$ y es tangente a la recta cuya ecuación es $5x + 12y + 9 = 0$.
36. Tiene su centro en $\mathbf{S}(2, 4)$ y es tangente a la recta cuya ecuación es $x + y - 4 = 0$.
37. Es tangente a la recta cuya ecuación es $2x - y + 6 = 0$ en el punto $\mathbf{S}(-1, 4)$, y tiene radio $3\sqrt{5}$. (Dos soluciones).
38. Es tangente a la recta cuya ecuación es $x - 2y - 3 = 0$ en el punto $\mathbf{S}(-1, -2)$, y tiene radio $\sqrt{5}$. (Dos soluciones).

* **39.** Demuestre que para tres puntos no colineales **R**(x_1, y_1), **S**(x_2, y_2), **T**(x_3, y_3)

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación cartesiana de la circunferencia que pasa por **R**, **S** y **T**.

* **40.** Trace la gráfica de la ecuación que aparece en el Ejercicio 39 en el caso que **R**, **S** y **T** sean puntos colineales distintos.

4–3 Parábola

El conjunto $\mathcal{P}$ de puntos del plano tales que están a la misma distancia de una recta dada $\mathcal{D}$ y de un punto dado **F** que no esté sobre $\mathcal{D}$ recibe el nombre de **parábola** (véase la Figura 4–4).

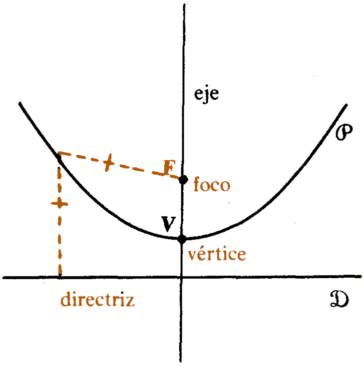


Figura 4–4

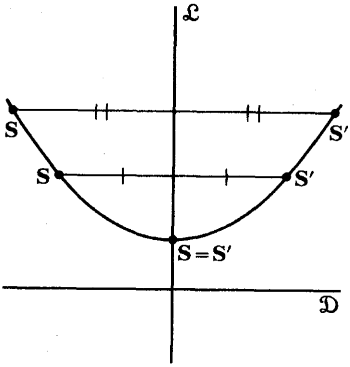


Figura 4–5

El punto **F** es el **foco** de la parábola y la recta $\mathcal{D}$ es la **directriz** de la parábola. La recta que contiene al foco de la parábola y que es perpendicular a la directriz es el **eje** (o **eje de simetría**) de la parábola. El punto **V** de intersección de una parábola con su eje recibe el nombre de **vértice** de la parábola.

Se dice que dos puntos **S** y **S′** son *simétricos con respecto a una recta* $\mathcal{L}$ si $\mathcal{L}$ es la bisectriz perpendicular del segmento $\overline{SS'}$. Se dice que un *conjunto* de puntos es *simétrico con respecto a la recta* $\mathcal{L}$. si para cada punto **S** del conjunto existe otro punto del conjunto **S′** tal que **S** y **S′** sean simétricos con respecto a $\mathcal{L}$. (Figura 4–5). Se sigue directamente de la definición de *parábola* que una parábola es simétrica con respecto a su eje.

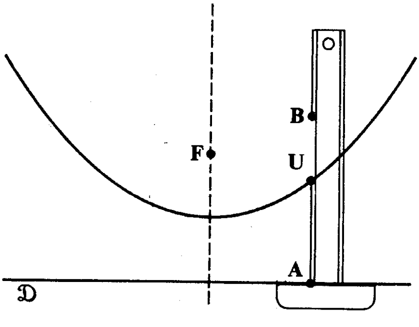
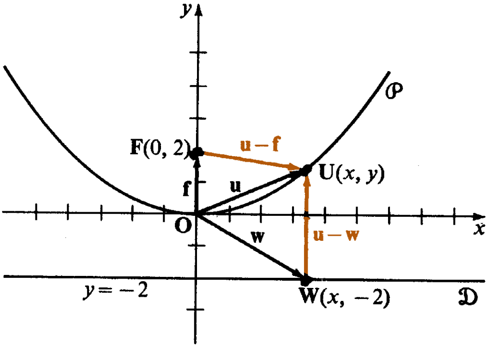


Figura 4–6

En la Figura 4–6 se ilustra una construcción mecánica simple de un arco de la parábola con foco en **F** y cuya directriz es 𝔇. Colóquese una regla T (o cualquier otra regla) formando un ángulo recto con 𝔇 en el punto **A** y elíjase un punto **B** sobre la regla. Sujétese a los puntos **F** y **B** los extremos de un hilo de longitud $d(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. En estas circunstancias la punta de un lápiz que mantenga en tensión al hilo y éste en contacto con el borde de la regla (en el punto **U** de la Figura 4–6) describirá el arco de parábola al deslizarse el punto **A** sobre 𝔇, manteniéndose la regla perpendicular a 𝔇.
Para obtener una ecuación de la parábola que tiene su foco en el punto **F**(0, 2) y cuya directriz 𝔇 es la recta cuya ecuación es $y = -2$ (Figura 4–7),

Figura 4–7



obsérvese que $\mathbf{U}(x, y)$ es un punto del lugar geométrico si y sólo si

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{f}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|,$$

donde **W** es la proyección (perpendicular) de **U** sobre 𝔇. Entonces como **U** tiene las coordenadas (x, y), **F** tiene como coordenadas a $(0, 2)$, y **W** tiene como coordenadas a $(x, -2)$, se tiene

$$\begin{aligned} \|(x, y) - (0, 2)\| &= \|(x, y) - (x, -2)\|, \\ \|(x - 0, y - 2)\| &= \|(x - x, y + 2)\|, \\ \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} &= \sqrt{0^2 + (y + 2)^2}, \\ x^2 + (y - 2)^2 &= (y + 2)^2, \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 &= y^2 + 4y + 4, \end{aligned}$$

o bien

$$x^2 = 8y.$$

Puesto que las raíces cuadradas involucradas en este cálculo son no negativas, los pasos de este proceso son reversibles y la gráfica de $x^2 = 8y$ es la parábola requerida.

Mediante un razonamiento similar se puede demostrar que una ecuación de la parábola cuyo foco es F(0, p) y cuya directriz es la recta $\mathfrak{D}$ está dada por $y = -p$ es

$$x^2 = 4py, \tag{1}$$

Las ecuaciones (1) y (2) reciben el nombre se **formas ordinarias** de la ecuación de una parábola con vértice en el origen y foco sobre un eje de coordenadas. Si $p > 0$, entonces la parábola se abre hacia arriba o hacia la derecha; si $p < 0$, entonces la parábola se abre hacia abajo o hacia la izquierda. Las diferentes posibilidades se muestran en la Figura 4–8.

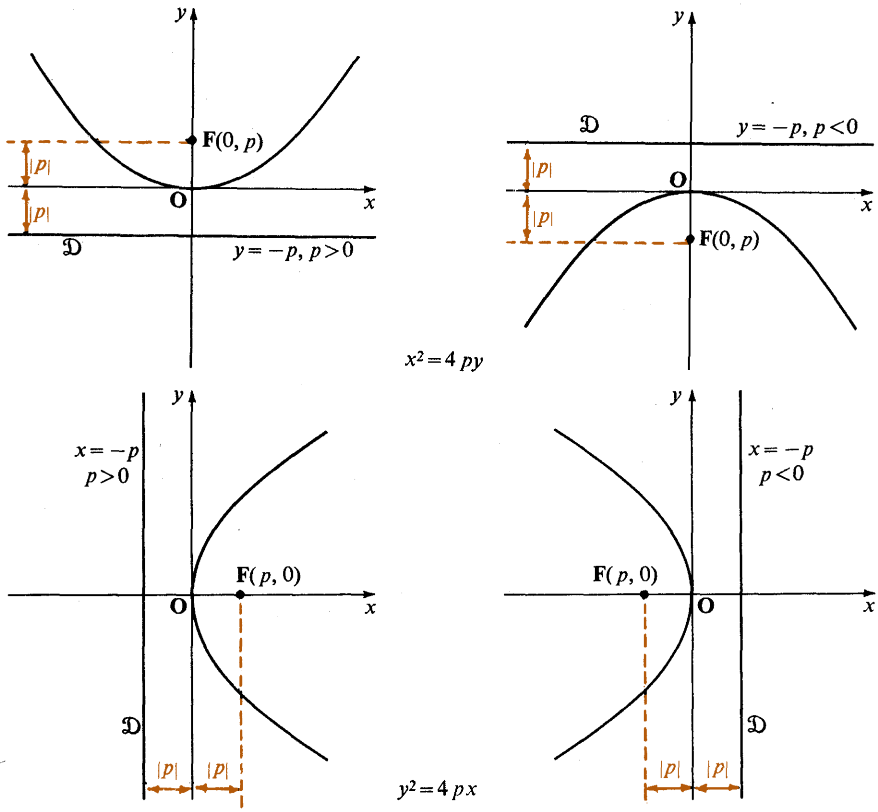
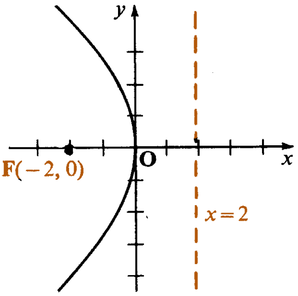


Figura 4—8

Obsérvese que en cada caso el vértice está a $|p|$ unidades de distancia tanto del foco como de la directriz.

Ejemplo. Calcule las coordenadas del foco **F** y una ecuación de la directriz de la parábola cuya ecuación es $y^2 = -8x$. Trace un esquema de esta curva.

Solución: Comparando $y^2 = -8x$ con la Ecuación (2), página 131, se ve que $p = -2$. Por lo tanto las coordenadas de **F** son $(-2, 0)$ y $\mathfrak{D}$ tiene como ecuación $x = 2$. Puesto que y^2 es siempre no negativo y $y^2 = -8x$, x debe ser no positivo para todos los puntos que estén sobre la parábola, y la gráfica tiene la apariencia que se muestra.



Ejercicios 4—3

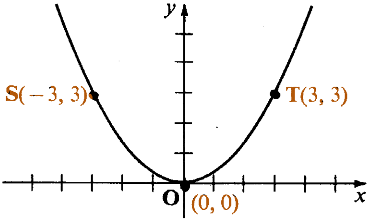
En los Ejercicios 1—8, obtenga una ecuación cartesiana de la parábola con vértice en el origen y con foco en el punto dado **F**. Obtenga también una ecuación cartesiana de la directriz.

1. **F**(0, 3)
2. **F**(0, 5)
3. **F**(2, 0)
4. **F**(4, 0)
5. **F**(−1, 0)
6. **F**(0, −4)
7. **F**(0, −5)
8. **F**(−3, 0)

En los Ejercicios 9—12, calcule las coordenadas del foco, y obtenga una ecuación cartesiana de la directriz, de la parábola con vértice en el origen y que pasa por los puntos dados **S** y **T**.

Ejemplo 1. **S**(−3, 3) y **T**(3, 3)

Solución: Trácese un esquema. Por inspección se ve que **S**(−3, 3) y **T**(3, 3) son simétricos con respecto al eje y. Entonces como el vértice está en el origen, el eje y es el eje de la parábola, y según esto la parábola tiene una ecuación de la forma $x^2 = 4py$. Sustituyendo las coordenadas ya sea de **S** o de **T** en esta ecuación se obtiene:



$$9 = 12p,$$

o

$$p = \tfrac{3}{4}.$$

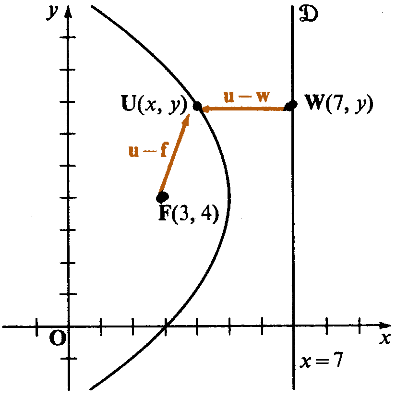
Por lo tanto las coordenadas del foco son $(0, \frac{3}{4})$, y una ecuación de la directriz es $y = -\frac{3}{4}$.

9. $S(-4, 2)$ y $T(4, 2)$
10. $S(-5, 5)$ y $T(-5, -5)$
11. $S(2, 4)$ y $T(2, -4)$
12. $S(-6, -8)$ y $T(6, -8)$

En los Ejercicios 13—16 obtenga una ecuación cartesiana de la parábola que satisface las condiciones dadas.

13. Vértice en el origen, eje sobre el eje x, pasa por el punto $S(8, 8)$.
14. Vértice en el origen, eje sobre el eje x, pasa por el punto $S(9, 6)$.
15. Vértice en el origen, eje sobre el eje y, pasa por el punto $S(-2, 4)$.
16. Vértice en el origen, eje sobre el eje y, pasa por el punto $S(-4, 48)$.

En los Ejercicios 17—22 emplee la definición de parábola para obtener una ecuación cartesiana de la parábola con el foco dado **F** y con la directriz dada.



Ejemplo 2. $F(3, 4)$; Ecuación de la directriz: $x = 7$.

Solución: El esquema de la curva se muestra en la figura. Un punto $U(x, y)$ está sobre la parábola si y sólo si

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{f}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|.$$

Entonces, puesto que las coordenadas de **U**, **F** y **W** son, (x, y), $(3, 4)$, y $(7, y)$, respectivamente se tiene

$$\|(x, y) - (3, 4)\| = \|(x, y) - (7, y)\|,$$

o bien

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(x - 7)^2 + 0^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y simplificando se tiene

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (x - 7)^2,$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 14x + 49,$$
$$y^2 - 8y + 8x - 24 = 0.$$

Puesto que los pasos algebraicos son reversibles esta es una ecuación de la parábola.

17. $F(5, 2)$; ecuación de la directriz: $x = 1$.
18. $F(-3, 2)$; ecuación de la directriz: $x = -7$.

19. F(4, -5); ecuación de la directriz: $y = 1$.
20. F(-2, -5); ecuación de la directriz: $y = -4$.
21. F(8, 0); ecuación de la directriz: $x = 1$.
22. F(0, -3); ecuación de la directriz: $y = 10$.

La forma general de la ecuación cartesiana de una parábola con eje paralelo al eje y es

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

Esta parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ o bien hacia abajo si $a < 0$. En los Ejercicios 23—28, obtenga una ecuación de esta forma de la parábola $\mathcal{P}$ que pasa por los puntos dados **Q, S y T**.

Ejemplo 3. Q(0, 1), S(-1, 4), T(2, 1)

Solución: Puesto que cada punto está sobre la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, las coordenadas de estos puntos deben satisfacer esta ecuación. Se tiene pues

$$\begin{aligned} 1 &= a(0)^2 + b(0) + c \\ 4 &= a(-1)^2 + b(-1) + c \\ 1 &= a(2)^2 + b(2) + c \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ a - b + c &= 4 \\ 4a + 2b + c &= 1. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, es decir despejando a, b y c, se ve que $a = 1, b = -2$, y $c = 1$. Por lo tanto una ecuación de $\mathcal{P}$ es

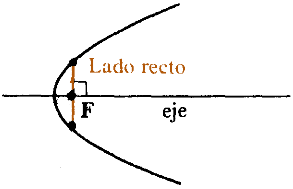
$$y = x^2 - 2x + 1.$$

23. Q(0, 1), S(1, 6), T(-1, 0)
24. Q(0, 2), S(1, -2), T(-1, 13)
25. Q(0, 3), S(1, 3), T(2, 1)
26. Q(0, 2), S(1, -1), T(-1, 1)
27. Q(0, -5), S(1, -2), T(-2, 7)
28. Q(0, 6), S(1, 1), T(-2, -14)

* **29.** Demuestre que una ecuación cartesiana de la parábola $\mathcal{P}$ con foco en F(0, p) y cuya directriz $\mathcal{D}$ tiene la ecuación $y = -p$ es $x^2 = 4py$.

* **30.** Demuestre que una ecuación cartesiana de la parábola $\mathcal{P}$ con foco en F(p, 0) y cuya directriz $\mathcal{D}$ tiene la ecuación $x = -p$ es $y^2 = 4px$.

El segmento que es perpendicular al eje focal de la parábola, cuyo punto medio es el foco y cuyos extremos están sobre la parábola es el *lado recto*, y la longitud del lado recto se llama *ancho focal* de la parábola.



* **31.** Demuestre que el ancho focal de la parábola cuya ecuación es $x^2 = 4py$ está dado por $|4p|$.

* **32.** Demuestre que el ancho focal de la parábola cuya ecuación es $y^2 = 4px$ está dada por $|4p|$.

* **33.** Obtenga una ecuación cartesiana de la circunferencia que pasa por el vértice y por los extremos del lado recto de la parábola cuya ecuación es $x^2 = 4py$.

* **34.** Demuestre que la circunferencia $\mathcal{C}$ para la cual uno de cuyos diámetros es el lado recto de la parábola $\mathcal{P}$ cuya ecuación es $x^2 = 4py$, es tangente a la directriz de $\mathcal{P}$.

* **35.** Demuestre que para cualesquiera tres puntos no colineales $\mathbf{R}(x_1, y_1)$, $\mathbf{S}(x_2, y_2)$ y $\mathbf{T}(x_3, y_3)$, donde x_1, x_2, y x_3 son todos distintos.

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación cartesiana de la parábola con eje vertical que pasa por los puntos **R, S** y **T**.

* **36.** Trace la gráfica de la ecuación que aparece en el Ejercicio 35 en el caso que **R, S** y **T** sean colineales.

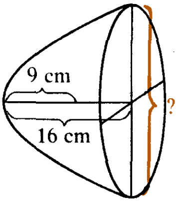
Problemas de aplicación 4—3

1. Un arco parabólico de acero, tiene diez metros de altura, con el eje vertical y cuyos puntos de apoyo están separados por 20 m. ¿Está el foco de la parábola sobre el suelo o debajo de él, y a qué distancia de la superficie está?

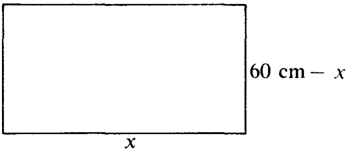
2. Se planea hacer un arco parabólico, con eje vertical y cuyos puntos de apoyo están separados por una distancia de 30 m. Si el foco de la parábola debe estar a 8 m. de altura ¿cuál es la altura que debe tener el arco?

3. Se tiene un reflector parabólico cuya forma se obtiene haciendo girar un arco de parábola que empieza en el vértice, alrededor del eje de la parábola. Si el foco está a 9 cm del vértice y el arco parabólico tiene 16 cm de profundidad. ¿Cuál es la abertura del reflector?

Ex. 3

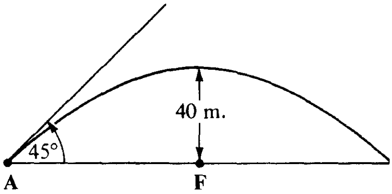


Ex. 4



4. Hay que encerrar a un campo rectangular mediante una cerca de 120 m de longitud. Demuestre que si y es el área cuando uno de los lados tiene longitud x, entonces $y = 60x - x^2$. Trace la gráfica de esta ecuación para $0 \leq x \leq 60$. ¿Para qué valor de x el área es máxima?

5. Cuando se arroja una piedra desde un punto **A** la piedra viaja aproximadamente a lo largo de un arco parabólico con eje vertical. Si se arroja la



piedra en una dirección que forma un ángulo de 45° con la horizontal, entonces el foco de la parábola está sobre una recta horizontal que pasa por **A**. Supongamos que una piedra que se lanza con este ángulo de elevación llega a una altura máxima de 40 m. ¿Qué distancia recorre la piedra horizontalmente hasta el momento de alcanzar una altura igual a la del punto **A**?

4–4 Elipse

Dados dos puntos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ del plano, el conjunto $\mathcal{E}$ de puntos $\mathbf{U}(x, y)$ del plano tales que la suma de las distancias de **U** a $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ es una constante dada mayor que $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, recibe el nombre de **elipse** (véase la Figura 4–9). Los puntos $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ se llaman **focos** de la elipse, y la recta que contiene a los focos recibe el nombre de **eje principal** de la elipse. El punto **C** que bisecta al segmento $\overline{\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2}$ recibe el nombre de **centro** de la elipse. Los puntos de intersección de la elipse con su eje principal, $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ en la Figura 4–9, son los **vértices** de la elipse, y el segmento cuyos extremos son los vértices recibe el nombre de **eje mayor** de la elipse. El segmento que es perpendicular al eje mayor, que pasa por el centro y cuyos extremos están sobre la elipse es el **eje menor** de la elipse.

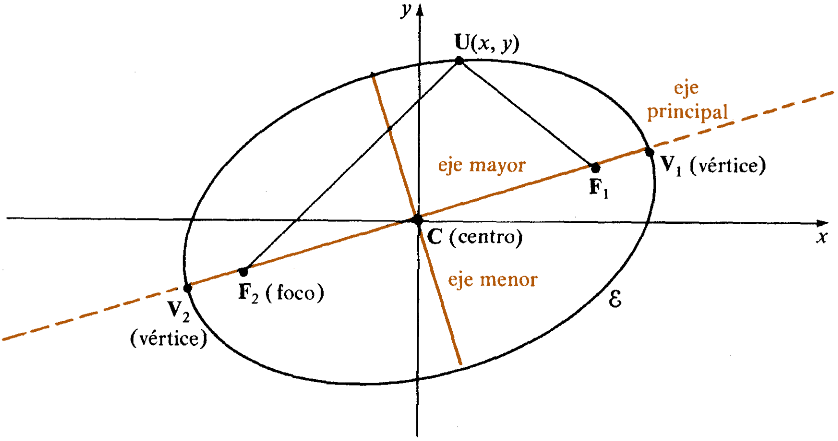


Figura 4–9

Se puede visualizar la construcción de una elipse mediante el método del jardinero. Se empieza colocando dos estacas en el suelo y rodeándolas con un lazo que no esté tirante. Si ahora se mantiene el lazo tirante mediante otra estaca y se mueve esta alrededor de las otras dos, manteniendo siempre tirante la cuerda, la tercera estaca recorrerá una trayectoria elíptica, como se indica en la Figura 4–10.

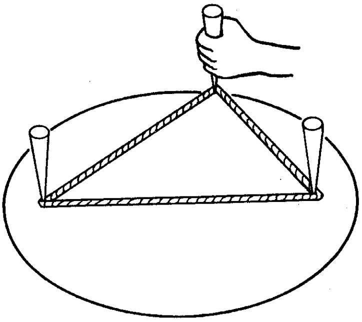
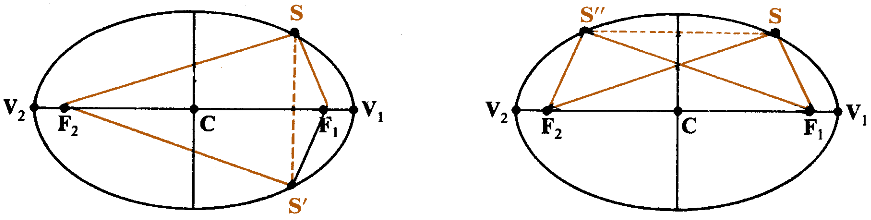


Figura 4—10

Algunas propiedades de las elipses son aparentes de la misma definición. Si se analiza la Figura 4–11(a), por ejemplo, se ve que una elipse es simétrica (véase la página 130) con respecto a su eje principal; y analizando la Figura 4–11(b) se ve que es también simétrica con respecto a la recta que contiene a su eje menor.



(a) (b)

Figura 4—11

Como se muestra en la Figura 4–12, sea c la distancia que separa a cada foco del centro de una elipse $\mathcal{E}$ de modo que $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = 2c$. Sea ahora $2a$ la suma de las distancias que separan a cada punto $\mathbf{U}$ de $\mathbf{F}_1$ de $\mathcal{E}$ y $\mathbf{F}_2$:

$$d(\mathbf{F}_1, \mathbf{U}) + d(\mathbf{F}_2, \mathbf{U}) = 2a.$$

Puesto que esta suma debe ser mayor que $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, tenemos $2a > 2c$, o bien $a > c$.

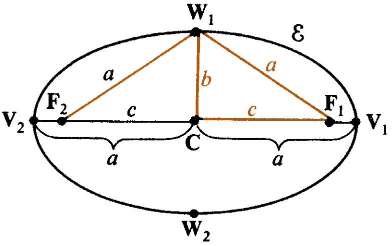


Figura 4—12

Puesto que el vértice $\mathbf{V}_1$, en particular, es un punto de $\mathcal{E}$, se tiene

$$d(\mathbf{F}_1, \mathbf{V}_1) + d(\mathbf{F}_2, \mathbf{V}_1) = 2a. \tag{1}$$

Ahora por simetría

$$d(\mathbf{F}_1, \mathbf{V}_1) = d(\mathbf{V}_2, \mathbf{F}_2). \tag{2}$$

Sustituyendo la Ecuación (2) en la Ecuación (1) se tiene

$$d(\mathbf{V}_2, \mathbf{F}_2) + d(\mathbf{F}_2, \mathbf{V}_1) = 2a,$$

o bien

$$d(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_1) = 2a.$$

Por consiguiente, la longitud del eje mayor es $2a$ y la longitud $d(\mathbf{C}, \mathbf{V}_1)$ de un semieje mayor es a

Puesto que un extremo $\mathbf{W}_1$ del eje menor está sobre $\mathcal{E}$, se tiene

$$d(\mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1) + d(\mathbf{F}_2, \mathbf{W}_1) = 2a,$$

o por simetría

$$2d(\mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1) = 2a,$$
$$d(\mathbf{F}_1, \mathbf{W}_1) = a.$$

Por lo tanto, si b es la longitud $d(\mathbf{C}, \mathbf{W}_1)$ de un semieje menor de $\mathcal{E}$, entonces por el Teorema de Pitágoras se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{3}$$

Es posible obtener la ecuación de una elipse con centro en el origen y focos sobre el eje x de la siguiente manera; supóngase que la elipse $\mathcal{E}$ (figura 4–13) tiene los focos $\mathbf{F}_1(c, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-c, 0)$, y que para cada punto $\mathbf{U}(x, y)$ de $\mathcal{E}$ la suma de las distancias que separan a $\mathbf{U}$ de $\mathbf{F}_1$ y de $\mathbf{F}_2$ es la constante $2a$, donde $2a > 2c$, o sea $a > c$. Entonces una ecuación vectorial de $\mathcal{E}$ es

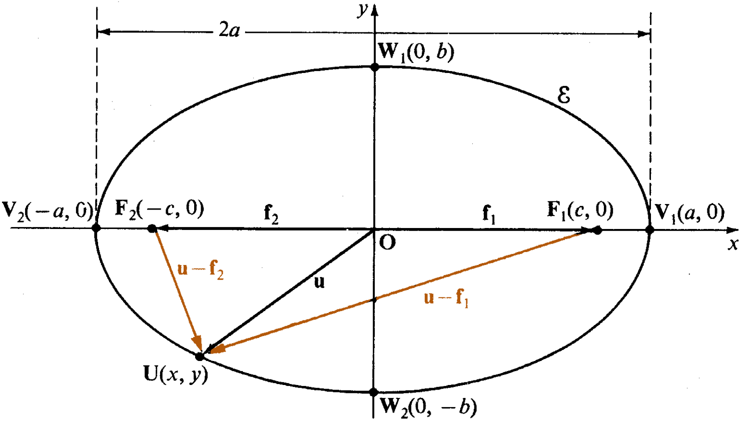


Figura 4—13

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{f}_2\| + \|\mathbf{u} - \mathbf{f}_1\| = 2a.$$

Puesto que $\mathbf{u} = (x, y)$, $\mathbf{f}_1 = (c, 0)$, y $\mathbf{f}_2 = (-c, 0)$, se tiene

$$\|(x, y) - (-c, 0)\| + \|(x, y) - (c, 0)\| = 2a,$$
$$\|(x + c, y)\| + \|(x - c, y)\| = 2a,$$
$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Si ahora se suma $-\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ a ambos miembros de esta ecuación, y se eleva al cuadrado a ambos miembros de la ecuación resultante, que es equivalente a la anterior, se obtiene

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2.$$

Desarrollando los binomios y simplificando se obtiene

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx. \qquad (4)$$

Si ahora se eleva al cuadrado ambos miembros se tiene que

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2.$$

Simplificando y factorizando se obtiene

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Puesto que $0 < c < a$, se sigue que $c^2 < a^2$ y $a^2 - c^2 > 0$. Si se hace $b^2 = a^2 - c^2$, $b > 0$, entonces esta ecuación se reduce a

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

o bien dividiendo por a^2b^2, a

■

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (5)$$

Los pasos que se efectuaron para obtener la Ecuación (5) son reversibles, aunque hay que tener cuidado al considerar las raíces cuadradas que aparecen; no discutiremos en este libro los detalles. Se sigue que un punto **U**(x, y) está sobre la elipse $\mathcal{E}$ si y sólo si sus coordenadas satisfacen la Ecuación (5); por lo tanto (5) es una ecuación cartesiana de la elipse.

De la Ecuación (5) se ve que una elipse es simétrica con respecto a su eje principal (en este caso el eje x) y que es también simétrica con respecto a la recta que contiene a su eje menor (en este caso el eje y). Es decir si el punto **S**(r, t) está sobre la gráfica de la Ecuación (5) los puntos **S**$'(r, -t)$ y **S**$''(-r, t)$ también lo están. De la Ecuación (5) se ve también que los extremos del eje mayor tienen como coordenadas a $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ y que los extremos del eje menor tienen como coordenadas a $(0, b)$ y $(0, -b)$, como se indica en la Figura 4–13.

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación cartesiana de la elipse cuyos focos son **F**$_1(3, 0)$ y **F**$_2(-3, 0)$ y cuyos vértices son **V**$_1(5, 0)$ y **V**$_2(-5, 0)$. Además trace un esquema de la gráfica de la ecuación.

Solución: De los datos dados se tiene $a = 5$ y $c = 3$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - c^2 \\ &= 25 - 9 = 16, \end{aligned}$$

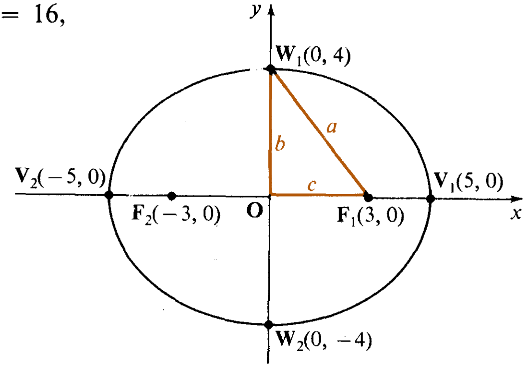
y

$$b = 4.$$

Por consiguiente una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Se muestra un esquema de la elipse en la figura.



Empleando el método que se mencionó anteriormente se puede demostrar que una ecuación de la elipse con focos en **F**$_1(0, c)$ y **F**$_2(0, -c)$, sobre el eje y, y cuya suma de distancias es igual a $2a$ es de la forma

■
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \tag{6}$$

donde $a > b > 0$ y $a^2 = b^2 + c^2$. Como se muestra en la Figura 4–14 el eje mayor de esta elipse está sobre el eje y y el eje menor está sobre el eje x. Las intersecciones de la elipse con los ejes x y y son $\pm b$ y $\pm a$, respectivamente: por consiguiente los extremos del eje mayor tienen como coordenadas $(0, a)$ y $(0, -a)$ y los extremos del eje menor tienen coordenadas $(b, 0)$ y $(-b, 0)$.

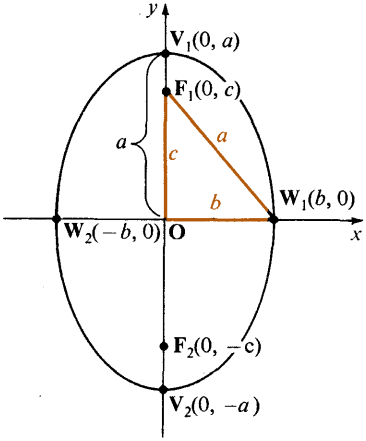


Figura 4—14

Ejercicios 4—4

En los Ejercicios 1—8, obtenga una ecuación de la forma (5) o (6) de la elipse cuyos focos y vértices se dan. Diga cuales son las longitudes de los ejes.

1. **F**$_1(4, 0)$, **F**$_2(-4, 0)$; **V**$_1(5, 0)$, **V**$_2(-5, 0)$
2. **F**$_1(12, 0)$, **F**$_2(-12, 0)$; **V**$_1(13, 0)$, **V**$_2(-13, 0)$
3. **F**$_1(\sqrt{5}, 0)$, **F**$_2(-\sqrt{5}, 0)$; **V**$_1(3, 0)$, **V**$_2(-3, 0)$
4. **F**$_1(\sqrt{21}, 0)$, **F**$_2(-\sqrt{21}, 0)$; **V**$_1(5, 0)$, **V**$_2(-5, 0)$
5. **F**$_1(0, 4)$, **F**$_2(0, -4)$; **V**$_1(0, 5)$, **V**$_2(0, -5)$
6. **F**$_1(0, 3)$, **F**$_2(0, -3)$; **V**$_1(0, 5)$, **V**$_2(0, -5)$
7. **F**$_1(0, \sqrt{3})$, **F**$_2(0, -\sqrt{3})$; **V**$_1(0, \sqrt{7})$, **V**$_2(0, -\sqrt{7})$
8. **F**$_1(0, 2)$, **F**$_2(0, -2)$; **V**$_1(0, \sqrt{13})$, **V**$_2(0, -\sqrt{13})$

En los Ejercicios 9—12, obtenga una ecuación de la forma (5) o (6) de la elipse cuyo centro es el origen y cuyas longitudes de los ejes son dadas. Diga cuales son las coordenadas de los focos.

9. $a = 5, b = 3$; el eje principal es el eje x
10. $a = 13, b = 12$; el eje principal es el eje x.
11. $a = \sqrt{13}, b = 3$; el eje principal es el eje y.
12. $a = \sqrt{7}, b = \sqrt{3}$; el eje principal es el eje y.

En los Ejercicios 13—20, calcule las coordenadas de los vértices V_1 y V_2 los focos F_1 y F_2 de la elipse cuya ecuación se da.

13. $4x^2 + 9y^2 = 36$
14. $16x^2 + 9y^2 = 144$
15. $16x^2 + y^2 = 64$
16. $9x^2 + 25y^2 = 225$
17. $4x^2 + 36y^2 = 36$
18. $25x^2 + 4y^2 = 100$
19. $7x^2 + 3y^2 = 21$
20. $24x^2 + 5y^2 = 120$

En los Ejercicios 21—24, obtenga una ecuación cartesiana de la elipse $\mathcal{E}$ cuyas características se dan y trace un esquema de dicha elipse.

21. Centro O(0, 0), ejes sobre los ejes coordenados y pasa por los puntos S(1, 3) y T(4, 2)
22. Centro O(0, 0), ejes sobre los ejes coordenados y pasa por los puntos S(4, 3) y T(6, 2).
23. Focos $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$, y pasa por el punto $S(3, \frac{12}{5})$.
24. Centro O(0, 0), el eje principal es el eje y, la distancia que separa a los focos es 24 y pasa por el punto $S(\frac{60}{13}, 5)$.

En los Ejercicios 25—28, emplee la definición de elipse para obtener una ecuación cartesiana de la elipse $\mathcal{E}$ cuyos focos F_1 y F_2 están dados y para la cual está dada la suma de las distancias que separan a un punto de la elipse de los focos.

* **25.** $F_1(2, 4)$, $F_2(-2, 4)$; suma de distancias 6.
* **26.** $F_1(3, 2)$, $F_2(-3, 2)$; suma de distancias 8.
* **27.** $F_1(6, 1)$, $F_2(6, -1)$; suma de distancias 4.
* **28.** $F_1(-2, 4)$, $F_2(-2, -4)$; suma de distancias 12.

La longitud del segmento que es perpendicular al eje mayor de una elipse, que contiene a los focos de dicha elipse y cuyos extremos están sobre ella

recibe el nombre de *ancho focal* de la elipse. El segmento recibe el nombre de *lado recto* de la elipse.

* **29.** Demuestre que el ancho focal de una elipse $\mathcal{E}$ cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es $\dfrac{2b^2}{a}$.

* **30.** Demuestre que el ancho focal de una elipse $\mathcal{E}$ cuya ecuación es

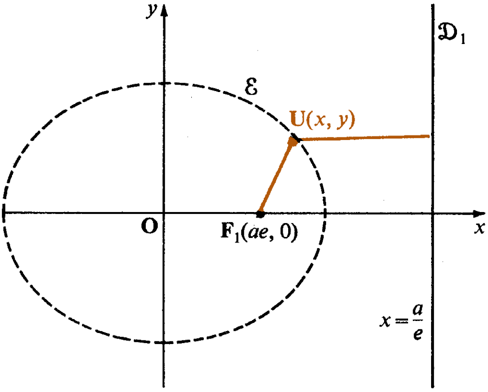
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es igual a $2b\sqrt{1 - e^2}$, donde $e = \dfrac{c}{a}$.

* **31.** Sea $\mathcal{E}$ el conjunto de todos los puntos **U** tales que el cociente de la distancia que separa a **U** del punto $\mathbf{F}_1(ae, 0)$ (véase el Ejercicio 30) y la distancia que separa a **U** de la recta $\mathfrak{D}_1$ cuya ecuación es $x = \dfrac{a}{e}$ es igual a e. Demuestre que $\mathcal{E}$ es una elipse cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

siempre y cuando $e < 1$ y $b^2 = a^2(1 - e^2)$. (Véase el siguiente diagrama).



* **32.** Demuestre que una ecuación cartesiana de la elipse $\mathcal{E}$ cuyos focos son $\mathbf{F}_1(0, c)$ y $\mathbf{F}_2(0, -c)$ y cuyos vértices son $\mathbf{V}_1(0, a)$ y $\mathbf{V}_2(0, -a)$ es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

donde $b^2 = a^2 - c^2 > 0$.

* **33.** Demuestre que si $x_2^2 > x_1^2 > 0$ y $y_1^2 > y_2^2 > 0$, entonces

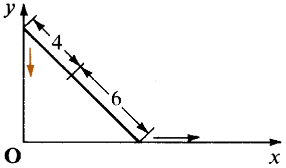
$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación cartesiana de una elipse o una circunferencia que pasa por los puntos $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$.

* **34.** Trace la gráfica de la ecuación que aparece en el Ejercicio 33, en el caso en que $x_2^2 > x_1^2 > 0$ y $y_2^2 = y_1^2$.

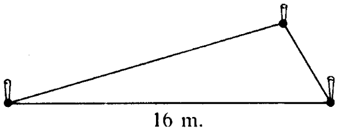
Problemas de aplicación 4—4

1. Supóngase que una escalera de longitud 1 m se apoya sobre una pared vertical y que tiene una marca sobre un peldaño que está a 4 m del extremo superior de la escalera.Demuestre que si el pie de la escalera se desliza, alejándose de la pared sobre una superficie horizontal, de modo que el extremo superior se desliza hacia abajo en contacto con la pared, entonces la marca sobre el peldaño describe una trayectoria elíptica.



(*Sugerencia*: Emplee un sistema de coordenadas como el que se muestra en la figura).

2. La base de un auditorio es de forma elíptica y tiene 20 m de longitud y 16 m de ancho. Si cae una aguja sobre un foco el ruido que produce se escucha claramente cerca del otro foco. ¿A que distancia está un foco del otro?
3. La Tierra se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol, y el Sol está sobre uno de los focos de esta elipse. Si la mínima distancia que separa a la tierra del Sol es de 147 000 000 kilómetros, y su mayor separación es de 150 000 000 kilómetros aproximadamente, ¿a qué distancia está el Sol del otro foco de la elipse? (*Sugerencia*: La menor y la mayor separación ocurren cuando la Tierra está sobre el eje mayor de la elipse.)
4. Se traza el contorno de una hortaliza de forma elíptica colocando dos estacas en el suelo con una separación de 16 m y colocando un lazo de longitud total de 36 m alrededor de ellas; se traza el contorno empleando una tercera estaca que al girarla alrededor de las dos fijas mantiene al lazo en tensión. ¿De qué longitud y de qué ancho será la hortaliza?



4—5 Hipérbola

Vimos en la sección 4—4 que una elipse es el lugar geométrico de los puntos que quedan determinados por la *suma* de dos distancias. En esta sección estudiaremos el lugar geométrico determinado por la *diferencia* de dos distancias; una *hipérbola*. Para dos puntos dados F_1 y F_2 del plano, el conjunto $\mathcal{H}$ de los puntos $U(x, y)$ del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias que separan a los puntos F_1 y F_2 de U es una constante dada, menor que $d(F_1, F_2)$, es una **hipérbola**. (Véase la Figura 4–15). Tal como en el caso de la elipse, los términos **focos, ejes principales, vértices** y **centro** de una hipérbola se refiere a los puntos fijos F_1 y F_2, a la

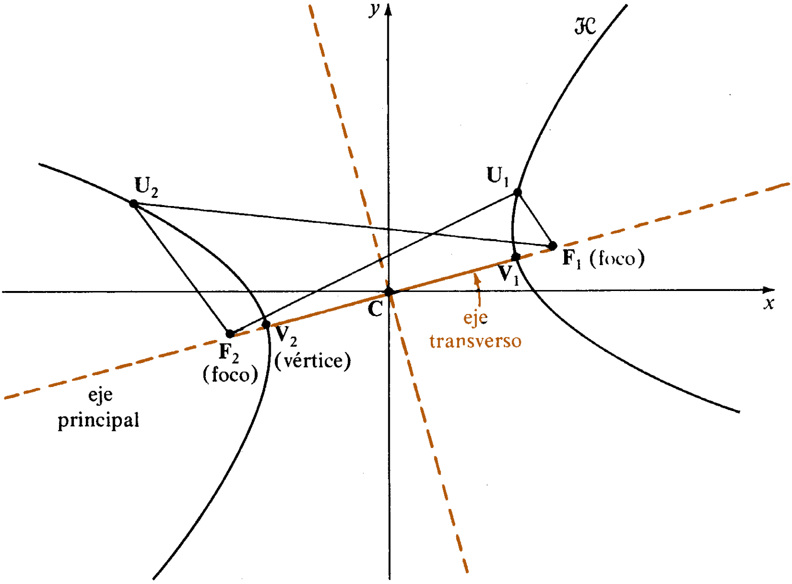
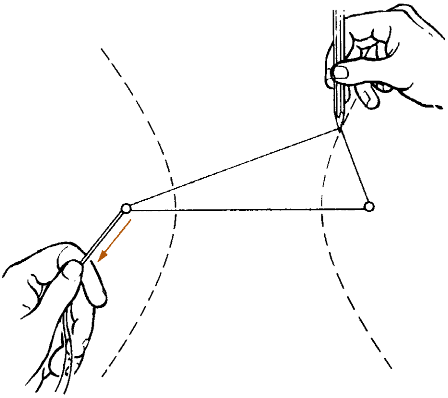


Figura 4—15

recta que pasa por ellos, a los puntos $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ de intersección de $\mathcal{H}$ con el eje principal, y al punto medio **C** del segmento $\overline{\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2}$, respectivamente. El segmento $\overline{\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2}$ recibe el nombre de **eje transversal** de la hipérbola. Obsérvese que una hipérbola consta de dos ramas separadas.

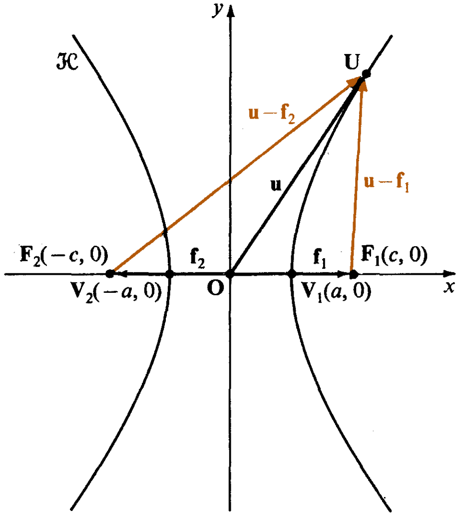
Hay varios métodos para construir una hipérbola. Uno de estos métodos, que es semejante al que se emplea para construir elipses y que se discutió en la Sección 4–4, pero un poco más difícil de llevar a cabo, es el siguiente: Atese un lápiz cerca del punto medio de un cordel, y pásese el cordel por debajo de dos tachuelas sujetas a un pedazo de cartón. Empleando el lápiz para mantener al cordel en tensión tómense los dos extremos en la mano y tírese del cordel como se muestra en la figura 4–16. El lápiz marcará una rama de la hipérbola. la otra rama se obtiene intercambiando los papeles de las tachuelas.

Figura 4—16



Considérese ahora la hipérbola $\mathcal{H}$ (Figura 4–17) cuyo centro es el origen, cuyos focos son $\mathbf{F}_1(c, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-c, 0)$, y para la cual el valor absoluto de la diferencia de distancias de cada punto $\mathbf{U}(x, y)$ de $\mathcal{H}$ a $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ es igual a la constante positiva $2a$, $a < c$. Entonces por definición de ***hipérbola***, el punto $\mathbf{U}(x, y)$ está sobre $\mathcal{H}$ si y sólo si

Figura 4—17



$$\left| \|\mathbf{u} - \mathbf{f}_1\| - \|\mathbf{u} - \mathbf{f}_2\| \right| = 2a,$$

o bien

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{f}_1\| - \|\mathbf{u} - \mathbf{f}_2\| = \pm 2a.$$

Puesto que $\mathbf{u} = (x, y)$, $\mathbf{f}_1 = (c, 0)$, y $\mathbf{f}_2 = (-c, 0)$, esta última ecuación se puede escribir en la forma

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{[x - (-c)]^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Repitiendo un cálculo similar al que aparece en las páginas 139 y 140 se puede demostrar que esta ecuación es equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

donde

$$b^2 = c^2 - a^2 > 0 \quad \text{y} \quad b > 0.$$

Tal como en el caso correspondiente a la elipse (página 140) los pasos son reversibles y entonces un punto $\mathbf{U}(x, y)$ está sobre $\mathcal{H}$ si y sólo si sus. coordenadas satisfacen la Ecuación (1).

Análogamente, una hipérbola con centro en el origen, focos en $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$, y para la cual el valor absoluto de la diferencia de distancias es igual a $2a$, $0 < a < c$, tiene una ecuación cartesiana de la forma

■
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

El valor de la constante a en las Ecuaciones (1) y (2) puede ser mayor, igual o menor que el valor de b.

Una hipérbola $\mathcal{H}$ cuya ecuación es de la forma (1) o (2) es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados. Entonces si $S(x, y)$ es un punto de $\mathcal{H}$, también lo son $S'(x, -y)$, $S''(-x, y)$, y $S'''(-x, -y)$.

Si se sustituye a y por 0 en la Ecuación (1) se obtiene $\frac{x^2}{a^2} = 1$, o sea $x = \pm a$. Por consiguiente a y $-a$ son las intersecciones de una hipérbola de la forma (1) con el eje x. Si se sustituye a x por 0 en la Ecuación (1) se obtiene $\frac{y^2}{b^2} = -1$. Puesto que $\frac{y^2}{b^2}$ es siempre no negativo, la hipérbola no corta al eje y.

Análogamente se puede demostrar que una hipérbola cuya ecuación es de la forma (2) corta al eje y en los puntos a y $-a$ y que no corta al eje x.

Consideremos ahora la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

si se despeja a y^2 en función de x se obtiene

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

de donde

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{o bien} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Las gráficas de estas ecuaciones son dos rectas que se cortan en el origen y cuyas pendientes son $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$, respectivamente.

Si se despeja en la Ecuación (1) de la página 146 a y^2 como función de x se obtiene

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2,$$

de donde

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} \quad \text{o} \quad y = -\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2},$$

que es a su vez equivalente a

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{o} \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

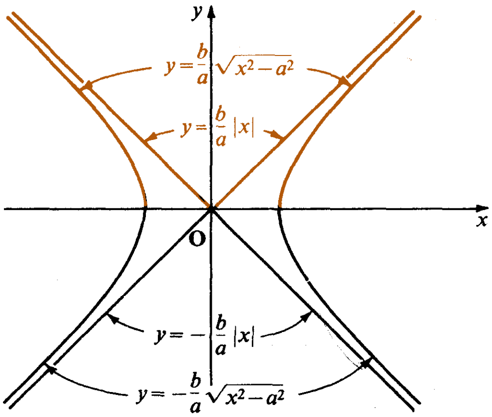


Figura 4–18

Ahora compárense los valores correspondientes de y para las rectas y la hipérbola. Como se ve en la Figura 4-18

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} < \frac{b}{a}|x|$$

para todos los reales para los cuales están definidos ambos miembros de la desigualdad. Sin embargo si se permite que $|x|$ crezca sin cota, entonces el valor de $\sqrt{x^2 - a^2}$ se acerca cada vez más al valor de $|x|$, y el valor de $\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ se acerca cada vez más a $\frac{b}{a}|x|$. De hecho se tiene

$$\begin{aligned}\frac{b}{a}|x| - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} &= \frac{b}{a}(|x| - \sqrt{x^2 - a^2})\left(\frac{|x| + \sqrt{x^2 - a^2}}{|x| + \sqrt{x^2 - a^2}}\right)\\ &= \frac{b(x^2 - x^2 + a^2)}{a(|x| + \sqrt{x^2 - a^2})}\\ &= \frac{ab}{|x| + \sqrt{x^2 - a^2}},\end{aligned}$$

que puede hacerse tan pequeño como se quiera tomando $|x|$ suficientemente grande.

Como se muestra en la Figura 4–18 se tiene también

$$-\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} > -\frac{b}{a}|x|$$

para todos los reales para los cuales están definidos ambos miembros de la desigualdad. Si $|x|$ aumenta sin cota entonces el valor de $-\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ se acerca más y más al valor de $-\frac{b}{a}|x|$.

Por lo tanto, a medida que $|x|$ crece sin cota, el valor de $|y|$ para la hipérbola se acerca más y más a $\frac{b}{a}|x|$, las ramas de la hipérbola se aproximan más y más a las rectas cuyas ecuaciones son $y = \frac{b}{a}x$, y

$y = -\frac{b}{a}x$, respectivamente. Estas rectas reciben el nombre de **asíntotas** de la hipérbola.

Con más generalidad, siempre que una curva se acerca de esta forma a una o más rectas se dice que las rectas son **asíntotas** de la curva. Se discutirá el concepto de asíntotas con más detalle en el Capítulo 6.

Las intersecciones con los ejes y las asíntotas de una hipérbola, así como las consideraciones de simetría, son útiles al trazar esquemas de una hipérbola. Como se muestra en la Figura 4–19 la longitud del eje transversal de una hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

es $2a$.

El segmento de recta que pasa por el centro de una hipérbola, que es perpendicular al eje principal, y cuyos extremos están a una distancia b, donde $b^2 = c^2 - a^2$, del centro se llama **eje conjugado** de la hipérbola. Por lo tanto la longitud del eje conjugado ($\overline{W_1W_2}$ en la Figura 4–19) es $2b$.

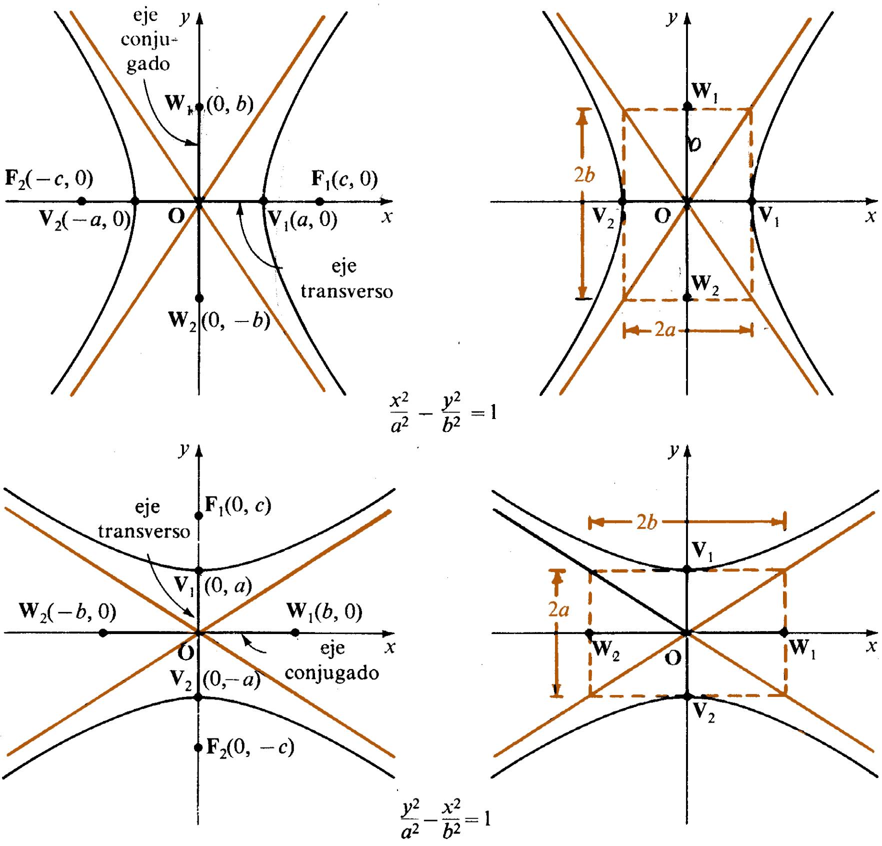
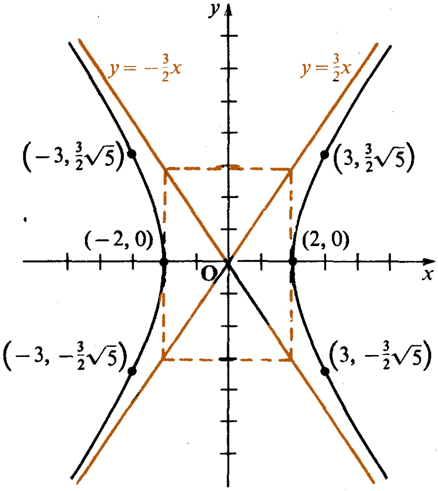


Figura 4—19

Una manera rápida de trazar un esquema de una hipérbola de uno de los tipos que se muestran en la Figura 4–19 es construir un rectángulo con centro en el origen y cuyos lados tienen longitudes $2a$ y $2b$, en el cual los lados de longitud $2a$ son paralelos al eje principal de la hipérbola. Las diagonales del rectángulo son entonces segmentos de las asíntotas de la hipérbola, y los puntos medios de los lados de longitud $2b$ son los vértices de la hipérbola.

Ejemplo 1 Trace un esquema de la gráfica de $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ empleando las asíntotas, las intersecciones con los ejes y argumentos de simetría.

Solución: Obsérvese primero que la gráfica es una hipérbola



con eje principal sobre el eje x, y que $a = 2$ y $b = 3$. Entonces las asíntotas son las rectas cuyas ecuaciones son $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$.

Si se sustituye a y por 0 en la ecuación dada, se ve que las intersecciones con el eje x son 2 y –2. Esta hipérbola no tiene intersecciones con el eje y.

Si se sustituye a x por 3 o –3 se obtiene que $y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{5}$. Por lo tanto los puntos $(3, \frac{3}{2}\sqrt{5})$, $(3, -\frac{3}{2}\sqrt{5})$, $(-3, \frac{3}{2}\sqrt{5})$, y $(-3, -\frac{3}{2}\sqrt{5})$ están sobre la gráfica. Empleando estos hechos se obtiene la gráfica que se muestra.

Ejercicios 4—5

En los Ejercicios 1—8, obtenga la ecuación de la hipérbola cuyos focos F_1 y F_2 y cuyos vértices V_1 y V_2 se dan. Trace una gráfica de la ecuación.

1. $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$; $V_1(3, 0)$, $V_2(-3, 0)$
2. $F_1(5, 0)$, $F_2(-5, 0)$; $V_1(4, 0)$, $V_2(-4, 0)$

3. $F_1(\sqrt{13}, 0)$, $F_2(-\sqrt{13}, 0)$; $V_1(3, 0)$, $V_2(-3, 0)$
4. $F_1(\sqrt{5}, 0)$, $F_2(-\sqrt{5}, 0)$; $V_1(\sqrt{3}, 0)$, $V_2(-\sqrt{3}, 0)$
5. $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$; $V_1(0, 4)$, $V_2(0, -4)$
6. $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$; $V_1(0, 3)$, $V_2(0, -3)$
7. $F_1(0, \sqrt{7})$, $F_2(0, -\sqrt{7})$; $V_1(0, \sqrt{3})$, $V_2(0, -\sqrt{3})$
8. $F_1(0, \sqrt{21})$, $F_2(0, -\sqrt{21})$; $V_1(0, \sqrt{5})$, $V_2(0, -\sqrt{5})$

En los Ejercicios 9—12, obtenga la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, para la cual se dan las longitudes de los ejes conjugado y transversal, y cuyos ejes principales se especifica.

Ejemplo. $2a = 8$, $2b = 10$; eje x

Solución: Se tiene

$$2a = 8, \ a = 4;$$

y

$$2b = 10, \ b = 5.$$

Por lo tanto una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

9. $2a = 10$, $2b = 8$; eje x
10. $2a = 14$, $2b = 6$; eje x
11. $2a = 26$, $2b = 10$; eje y
12. $2a = 2\sqrt{7}$, $2b = 4$; eje y

En los Ejercicios 13—20, calcule las coordenadas de los vértices y los focos de la hipérbola cuya ecuación se da. Obtenga las ecuaciones de las asíntotas y trace un esquema de la hipérbola.

13. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$
14. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$
15. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$
16. $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$
17. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$
18. $\frac{y^2}{13} - \frac{x^2}{4} = 1$
19. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$
20. $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{8} = 1$

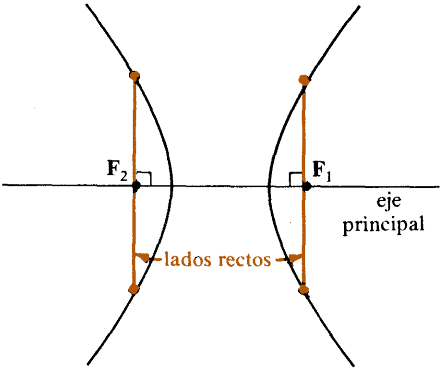
En los Ejercicios 21—26, obtenga una ecuación cartesiana de la hipérbola con centro en el origen y que satisface las condiciones dadas.

21. Focos en $F_1(4, 0)$ y $F_2(-4, 0)$; pasa por $S(14, 24)$.
22. Focos en $F_1(0, 4)$ y $F_2(0, -4)$; una de sus asíntotas tiene la ecuación $3y = x$.
* **23.** Eje principal sobre el eje x; pasa por los puntos $S(2, 1)$ y $T(4, 3)$.
* **24.** Eje principal sobre el eje x; pasa por los puntos $S(3, 1)$ y $T(9, 5)$.

* **25.** Eje principal sobre el eje y; un extremo del eje conjugado es $\mathbf{W}_1(3, 0)$; un vértice está sobre el punto medio del segmento que une al centro con un foco.

* **26.** Eje principal sobre el eje y; un foco en $\mathbf{F}_1(0, 4)$; $c = 3a$.

La longitud del segmento que es perpendicular al eje principal de una hipérbola, que contiene a los focos de dicha hipérbola y cuyos extremos están sobre ella se llama el *ancho focal* de la hipérbola. El segmento se llama *lado recto* de la hipérbola.



* **27.** Obtenga una ecuación cartesiana de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyo centro está en el origen, y ancho focal es 36 y uno de cuyos focos está en $\mathbf{F}_2(-12, 0)$.

* **28.** Demuestre que la hipérbola $\mathcal{H}$ y la elipse $\mathcal{E}$ cuyas ecuaciones son $3x^2 - y^2 = 12$ y $9x^2 + 25y^2 = 225$ respectivamente tienen los mismos focos.

* **29.** Demuestre que el ancho focal de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es $\dfrac{2b^2}{a}$

* **30.** Demuestre que el ancho focal de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

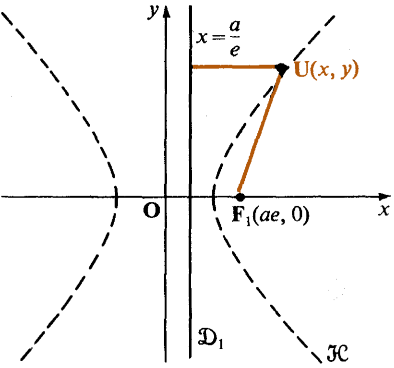
es $2b\sqrt{e^2 - 1}$, donde $e = \dfrac{c}{a}$.

* **31.** Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de todos los puntos $\mathbf{U}$ tales que el cociente de la distancia $\mathbf{U}$ que los separa del punto $\mathbf{F}_1(ae, 0)$ (véase en Ejercicios 30) y la distancia $\mathbf{U}$ que los separa de la recta $\mathcal{D}_1$ cuya ecuación es $x = \dfrac{a}{e}$ es igual a e.

Demuestre que $\mathcal{H}$ es la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

siempre y cuando $e > 1$ y $b^2 = a^2(e^2 - 1)$.



* **32.** Demuestre que una ecuación cartesiana de la hipérbola cuyos focos son $\mathbf{F}_1(0, c)$ y $\mathbf{F}_2(0, -c)$; y cuya diferencia de distancias es $2a$, $0 < a < c$, es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = c^2 - a^2 \geq 0$.

* **33.** Demuestre que si $x_2^2 > x_1^2 > 0$ y $y_2^2 > y_1^2 > 0$, entonces

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es una ecuación de una hipérbola que pasa por $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$.

* **34.** Trace la gráfica de la ecuación que se menciona en el Ejercicio 33 en el caso $(x_1, y_1) = (0, 0)$, pero con $(x_2, y_2) \neq (0, 0)$.

En los Ejercicios 35—38, emplee la definición de hipérbola para obtener una ecuación cartesiana de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyos focos son $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ y cuya diferencia de distancias tiene el valor absoluto dado.

* **35.** $\mathbf{F}_1(3, 1)$, $\mathbf{F}_2(-3, 1)$; $2a = 2$

* **36.** $\mathbf{F}_1(4, 4)$, $\mathbf{F}_2(4, -4)$; $2a = 6$

* **37.** $\mathbf{F}_1(4, 1)$, $\mathbf{F}_2(-4, 1)$; $2a = 4$

* **38.** $\mathbf{F}_1(2, 0)$, $\mathbf{F}_2(2, 10)$; $2a = 8$

Otra definición de las secciones cónicas

4–6 Propiedades del foco y la directríz

Al principio del capítulo se definió la parábola en términos de las distancias que separan a cada punto de la curva de un punto fijo (el foco) y de una recta dada (la directriz). Por otra parte se definieron la elipse y la hipérbola en términos de la suma y diferencia, respectivamente, de las distancias que separan cada punto de la curva de dos puntos fijos (los focos). Es posible también definir la elipse y la hipérbola en términos de distancias a un punto y una recta fijos, tal como se hizo en el caso de la parábola.

Considérese la elipse con centro en el origen, un foco en $\mathbf{F}_1(c, 0)$, y un vértice en $\mathbf{V}_1(a, 0)$, $0 < c < a$, como se muestra en la Figura 4–20. La distancia $d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1)$ de cada punto $\mathbf{U}(x, y)$ de la elipse al foco $\mathbf{F}_1$ está dada por

$$d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1) = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \tag{1}$$

Debido a la Ecuación (4), página 139, las coordenadas de cada punto $\mathbf{U}$ de la elipse debe satisfacer

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - cx,$$

o

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x. \tag{2}$$

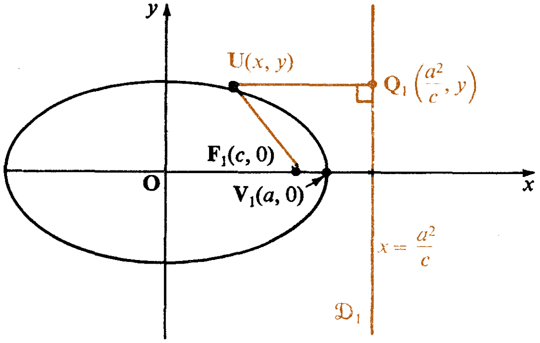


Figura 4—20

Sustituyendo (1) en (2) se tiene

$$d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1) = a - \frac{c}{a}x,$$

de donde se obtiene

$$d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1) = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c} - x\right). \tag{3}$$

Nótese ahora que $\frac{a^2}{c} > a \geq x$, puesto que $a > c > 0$ y $x \leq a$ para cada punto $\mathbf{U}(x, y)$ de la elipse. Por lo tanto $\frac{a^2}{c} - x > 0$, y según esto el factor $\frac{a^2}{c} - x$ que aparece en el segundo miembro de la Ecuación (3) es precisamente la distancia $d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)$ que separa al punto $\mathbf{U}(x, y)$ de la elipse de la recta $\mathfrak{D}_1$ cuya ecuación es $x = \frac{a^2}{c}$. Es decir la ecuación (3) se puede escribir en la forma

$$d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1) = \frac{c}{a} d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1). \tag{4}$$

El cociente $\frac{c}{a}$ recibe el nombre de **excentricidad** de la elipse, y se acostumbra denotarla mediante el símbolo e. Obsérvese que

$$0 < e < 1$$

puesto que $0 < c < a$. Sustituyendo a e por $\frac{c}{a}$ en la Ecuación (4)

$$\frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)} = e. \tag{5}$$

Puesto que este desarrollo es reversible, paso a paso, se sigue que se puede definir una elipse como el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que el *cociente* de las distancias que separan a cada punto sobre el lugar geométrico de un punto dado (el foco) y de una recta dada (la directriz) es una constante e, con $0 < e < 1$.

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ cuyo centro es $\mathbf{O}(0, 0)$, uno de cuyos focos es $\mathbf{F}_1(3, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{2}{3}$. Obtenga también una ecuación de la directriz $\mathfrak{D}_1$. asociada a este foco.

Solución: De la información dada $c = 3$. Entonces como $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$, se tiene

$$\frac{3}{a} = \frac{2}{3}, \quad \text{o bien} \quad a = \frac{9}{2}.$$

Ahora como para una elipse los valores de a, b y c están relacionados por

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

se tiene

$$b^2 = a^2 - c^2 = \tfrac{81}{4} - 9 = \tfrac{45}{4}.$$

Por lo tanto como $a^2 = (\frac{9}{2})^2 = \frac{81}{4}$, una ecuación de $\mathcal{E}$ es

$$\frac{x^2}{\frac{81}{4}} + \frac{y^2}{\frac{45}{4}} = 1,$$

o bien

$$\frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{45} = 1.$$

Sustituyendo los valores de a^2 y c en la ecuación

$$x = \frac{a^2}{c},$$

se obtiene

$$x = \frac{\frac{81}{4}}{3},$$

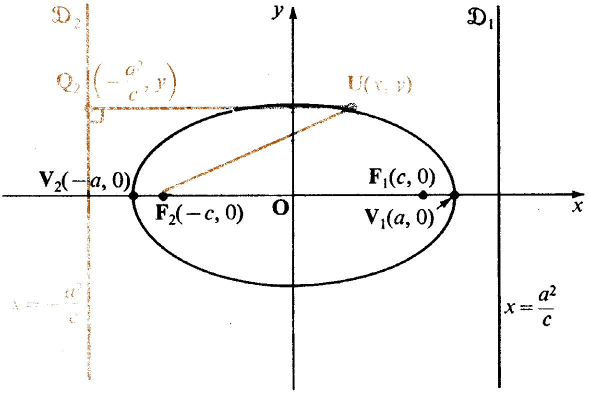
o sea

$$x = \tfrac{27}{4},$$

que es la ecuación de la directriz $\mathcal{D}_1$.

Una elipse con centro en **O**(0, 0), un foco en $\mathbf{F}_1(c, 0)$, y un vértice en $\mathbf{V}_1(a, 0)$ tiene también un foco en $\mathbf{F}_2(-c, 0)$. Empleando este foco como se indica en la Figura 4–21, se puede demostrar (véase el Ejercicio 32, página 160) que la recta $\mathcal{D}_2$ cuya ecuación es $x = -\dfrac{a^2}{c}$ es también una directriz de la elipse, es decir se puede demostrar que para cada punto $\mathbf{U}(x, y)$ sobre la elipse se tiene

Figura 4—21

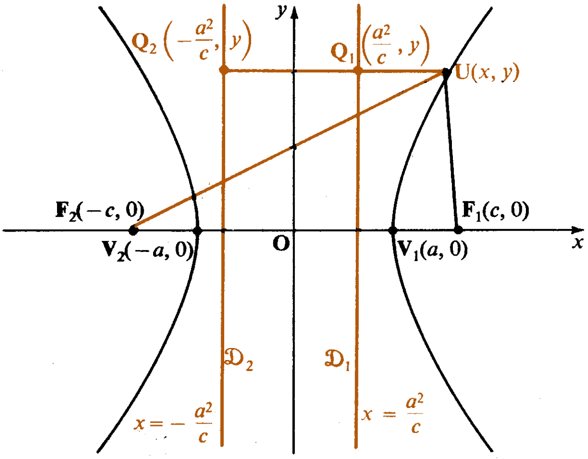


$$\frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_2)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_2)} = e.$$

Esto indica que toda elipse tiene dos focos y dos directrices, estando cada directriz asociada con un foco.

Empleando la Figura 4–22 se puede demostrar (Ejercicio 33, página 160) por un método análogo al empleado anteriormente en el caso de la elipse, que para una hipérbola con centro en el origen, foco en $\mathbf{F}_1(c, 0)$, y un vértice en $\mathbf{V}_1(a, 0)$, $0 < a < c$, el cociente de las distancias que separan a un punto $\mathbf{U}(x, y)$ de la hipérbola del foco $\mathbf{F}_1(c, 0)$ y de la recta $\mathfrak{D}_1$ cuya ecuación es $x = \dfrac{a^2}{c}$ está nuevamente dado por la Ecuación (5), página 154. Si se sustituye a la recta $\mathfrak{D}_1$ por la recta $\mathfrak{D}_2$ cuya ecuación es $x = -\dfrac{a^2}{c}$, y al foco $\mathbf{F}_1(c, 0)$ por el foco $\mathbf{F}_2(-c, 0)$, entonces la ecuación es todavía válida (Ejercicios 34, página 160). Es decir se tiene

Figura 4—22



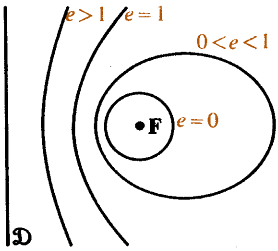
$$\frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)} = \frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_2)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_2)} = e.$$

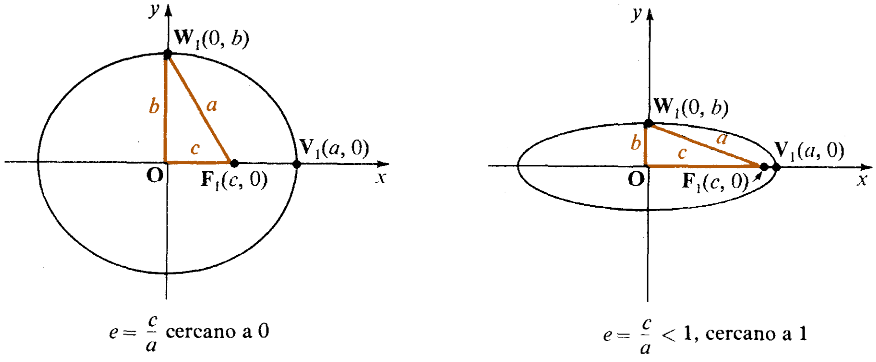
Claro está que en el caso de la hipérbola, como $c > a > 0$ y $e = \dfrac{c}{a}$, se tiene $e > 1$.

En resumen se han establecido los hechos siguientes, que se ilustran en el siguiente diagrama:

■ Para una recta dada $\mathfrak{D}$ y un punto fijo **F** que no esté sobre $\mathfrak{D}$, el lugar geométrico de los puntos **U** del plano tales que el cociente de las distacias de **U** a **F** y a $\mathfrak{D}$ es una constante, e, es

(a) Una elipse si $0 < e < 1$,
(b) una parábola si $e = 1$ y
(c) una hipérbola si $e > 1$.





$e = \frac{c}{a}$ cercano a 0

(*a*)

$e = \frac{c}{a} < 1$, cercano a 1

(*b*)

Figura 4—23

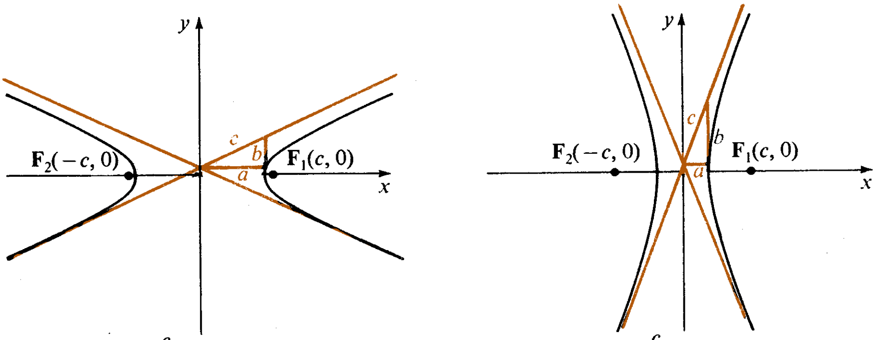
En todos los casos la constante e se llama *excentricidad* de la cónica.

Como se muestra en la Figura 4-23 la forma de una elipse está relacionada con su excentricidad. Si la excentricidad, $e = \frac{c}{a}$, es cercana a 0, entonces c, o sea $d(\mathbf{O}, \mathbf{F}_1)$, es muy pequeño comparado con a, y b es casi igual a a. Por lo tanto la elipse es casi circular (Figura 4-23(a)). De hecho se dice que una circunferencia tiene excentricidad cero. Si la excentricidad de una elipse es cercana a 1, entonces c es casi igual a a, y b es muy pequeño. En este caso el ancho focal (página 142) es pequeño y la elipse es alargada (Figura 4—23 (b)). Todas las elipses que tienen la misma excentricidad son semejantes (Ejercicio 28, página 159); es decir tienen la misma forma y una de ellas es simplemente una reducción o ampliación de cualquier otra.

La forma de una hipérbola también está relacionada con su excentricidad. Como se ve en la Figura 4-24 (a) si la excentricidad $e = \frac{c}{a}$, es ligeramente mayor que 1 entonces c es casi igual a a, y b es muy pequeño. Por consiguiente el ancho focal es pequeño y la hipérbola es "delgada". Si la excentricidad es grande (Figura 4-24 (b)), entonces (respecto a c) a es pequeño, y b es casi igual a c. Por consiguiente, el ancho focal es grande y la hipérbola es "ancha". Todas las hipérbolas que tienen la misma excentricidad son semejantes (Ejercicio 29, página 159).

Ejercicios 4—6

1. Obtenga la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ cuyos focos son $\mathbf{F}_1(4, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-4, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{4}{5}$.
2. Obtenga la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ con vértices en $\mathbf{V}_1(5, 0)$ y $\mathbf{V}_2(-5, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{3}{5}$.



$e = \frac{c}{a} > 1$, cercano a 1

(a)

$e = \frac{c}{a} > 1$, grande

(b)

Figura 4—24

3. Obtenga la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ con centro en el origen, uno de cuyos focos es $\mathbf{F}_1(3, 0)$, y para la cual la directriz $\mathcal{D}_1$ asociada a este foco tiene la ecuación $x = \frac{16}{3}$.
4. Obtenga la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ con centro en el origen, para la cual uno de los extremos del eje mayor está en $\mathbf{V}_1(0, 13)$, y una de cuyas directrices es la recta $\mathcal{D}_1$ que tiene la ecuación $y = \frac{169}{12}$.
5. Obtenga la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$, con focos $\mathbf{F}_1(5, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-5, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{1}{3}$.
6. Obtenga la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ cuyos vértices son $\mathbf{V}_1(4, 0)$ y $\mathbf{V}_2(-4, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{1}{3}$.
7. Obtenga la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyos focos son $\mathbf{F}_1(3, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-3, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{3}{2}$.
8. Obtenga la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyos focos son $\mathbf{F}_1(0, 2)$ y $\mathbf{F}_2(0, -2)$, y cuya excentricidad es $e = 3$.
9. Obtenga la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyo centro está en el origen, uno de cuyos focos es $\mathbf{F}_1(4, 0)$, y para la cual la directriz asociada es la recta $\mathcal{D}_1$ cuya ecuación es $x = \frac{3}{4}$.
10. Obtenga la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyo centro está en el origen, uno de cuyos vértices es $\mathbf{V}_1(4, 0)$, y tal que la directriz asociada $\mathcal{D}_1$ es la recta cuya ecuación es $x = \frac{16}{7}$.
11. Obtenga la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ una de cuyas directrices es la recta cuya ecuación es $x = \frac{1}{2}$ y cuyas asíntotas son las rectas cuyas ecuaciones son $y = \pm 3x$.
12. Obtenga la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ una de cuyas directrices es la recta cuya ecuación es $y = 2$ y cuyas asíntotas son las rectas dadas por $y = \pm x$.
13. Si $a = b$ en la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y con focos sobre los ejes coordenados, entonces la curva es una **hipérbola equilátera.** Diga cuál es la excentricidad de una hipérbola equilátera.
14. Demuestre que las asíntotas de una hipérbola equilátera (Véase el Ejercicio 13) son perpendiculares.

15. Calcule la excentricidad de una elipse si la recta que contiene a un extremo del eje menor y a un foco es perpendicular a la recta que contiene al mismo extremo del eje menor y al otro foco.

16. Demuestre que si p es la distancia que separa a un foco de la directriz correspondiente entonces $p = \frac{b^2}{c}$.

*** 17.** Demuestre que si p es la distancia que separa a un foco de la correspondiente directriz de una elipse, entonces la longitud del eje mayor es $\frac{2ep}{(1 - e^2)}$.

*** 18.** Demuestre que si p es la distancia que separa a un foco a la correspondiente directriz de una hipérbola, entonces la longitud del eje transversal es $\frac{2ep}{(e^2 - 1)}$.

*** 19.** Las asíntotas de una hipérbola cuyo eje transversal es horizontal tienen pendientes $\pm m$, respectivamente, con $m > 0$. Exprese la excentricidad de la hipérbola en términos de m.

*** 20.** Demuestre que para una elipse $\mathcal{E}$ cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b)$$

las longitudes de los segmentos que unen a los focos con un punto $U(x, y)$ de $\mathcal{E}$ son $a \pm ex$.

*** 21.** Demuestre que para la hipérbola $\mathcal{H}$ cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

las longitudes de los segmentos que unen a un punto $U(x, y)$ de $\mathcal{H}$ con los focos son $|ex \pm a|$.

*** 22.** Obtenga una ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyos focos son $F_1(6, 1)$ y $F_2(-4, 1)$, cuya excentricidad es $e = \frac{3}{2}$.

*** 23.** Obtenga una ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuyos vértices son $V_1(6, 1)$ y $V_2(-4, 1)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{3}{2}$.

*** 24.** Obtenga una ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ con centro en $C(2, 3)$, uno de cuyos focos es $F_1(6, 3)$, y para el cual la directriz asociada es la recta $\mathcal{D}_1$ cuya ecuación es $x = 3$.

*** 25.** Obtenga una ecuación de la elipse con centro en $C(2, 3)$, uno de cuyos focos está en $F_1(6, 3)$, y para el cual la directriz asociada es la recta $\mathcal{D}_1$ cuya ecuación es $x = \frac{33}{4}$.

*** 26.** Diga cuales son las ecuaciones de las directrices de la hipérbola $\mathcal{H}$ cuya ecuación es

$$x^2 - y^2 + 4x + 4y - 48 = 0.$$

*** 27.** Diga cuales son las ecuaciones de las directrices de la elipse $\mathcal{E}$ cuya. ecuación es

$$x^2 + 5y^2 + 6x - 40y - 167 = 0.$$

* **28.** Demuestre que todas las elipses con la misma excentricidad son semejantes. (*Sugerencia*: Demuestre que si las elipses $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ y $\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1$ tienen la misma excentricidad y $a_2 = ka_1$, entonces $b_2 = kb_1$. Ahora demuestre que si $\mathbf{U}_1(x, y)$ está sobre la primera elipse entonces $\mathbf{U}_2(kx, ky)$ está sobre la segunda elipse.)

* **29.** Demuestre que todas las hipérbolas con la misma excentricidad son semejantes. (*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 28.)

* **30.** Demuestre que todas las parábolas son semejantes. (*Sugerencia*: Para las parábolas $y^2 = 4p_1x$ y $y^2 = 4p_2x$, demuestre que si $\mathbf{U}_1(x, y)$ está sobre la primera parábola entonces $\mathbf{U}_2\left(\frac{p_2}{p_1}x, \frac{p_2}{p_1}y\right)$ está sobre la segunda).

* **31.** Demuestre que todas las circunferencias son semejantes. (*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 30).

* **32.** Demuestre que para todos los puntos $\mathbf{U}(x, y)$ de la elipse con focos en $\mathbf{F}_1(c, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-c, 0)$, y con vértices en $\mathbf{V}_1(a, 0)$ y $\mathbf{V}_2(-a, 0)$, se tiene

$$\frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_2)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_2)} = e,$$

donde $e = \frac{c}{a}$ y $\mathfrak{D}_2$ es la recta cuya ecuación es $x = -\frac{a^2}{c}$.

(*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 20.)

* **33.** Demuestre que para todos los puntos $\mathbf{U}(x, y)$ de una hipérbola con focos en $\mathbf{F}_1(c, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-c, 0)$, y con vértices en $\mathbf{V}_1(a, 0)$ y $\mathbf{V}_2(-a, 0)$,, se tiene

$$\frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_1)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_1)} = e,$$

donde $e = \frac{c}{a}$ y $\mathfrak{D}_1$ es la recta cuya ecuación es $x = \frac{a^2}{c}$.

(*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 21.)

* **34.** Demuestre que para todos los puntos $\mathbf{U}(x, y)$ de la hipérbola con focos en $\mathbf{F}_1(c, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-c, 0)$, y vértices en $\mathbf{V}_1(a, 0)$ y $\mathbf{V}_2(-a, 0)$, se tiene

$$\frac{d(\mathbf{U}, \mathbf{F}_2)}{d(\mathbf{U}, \mathfrak{D}_2)} = e,$$

donde $e = \frac{c}{a}$ y $\mathfrak{D}_2$ es la recta cuya ecuación es $x = -\frac{a^2}{c}$.

Resumen del capítulo

1. Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos. Este conjunto se determina normalmente especificando las condiciones geométricas que deben cumplir los puntos del conjunto.

2. La **ecuación de un lugar geométrico** es una ecuación que queda satisfecha por las coordenadas de cada punto del lugar geométrico, pero que no es satisfecha por ningún otro punto.
3. Una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia dada (el radio)de un punto dado (el centro). Una ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ se puede escribir de la forma

   $$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2,$$

   donde el punto $\mathbf{C}(h, k)$ es el centro y r es el radio de $\mathcal{C}$. Si se desarrollan los binomios, esta ecuación se puede escribir en la forma

   $$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

   donde D, E y F son constantes.
4. Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos del plano tales que cada punto del conjunto está a la misma distancia de un punto dado $\mathbf{F}$ (el **foco**) y de una recta dada $\mathcal{D}$ que no pasa por $\mathbf{F}$ (la **directriz**). La recta que contiene el foco $\mathbf{F}$ y es perpendicular a la directriz $\mathcal{D}$ recibe el nombre de **eje** de la parábola. Una parábola es simétrica con respecto a su eje.
5. La forma ordinaria de la ecuación de una parábola con vértice en el origen y cuyo eje está sobre el eje x o eje y es

   $$y^2 = 4px \quad \text{o bien} \quad x^2 = 4py,$$

   respectivamente, donde p es la distancia dirigida del vértice al foco.
6. Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias que separan a un punto del conjunto de dos puntos dados $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ (los **focos**) es una constante dada mayor que $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$. La recta que pasa por los focos es el **eje principal** de la elipse, y el punto medio del segmento que une a los focos es el **centro** de la elipse. Los puntos de intersección de la elipse y el eje principal son los **vértices** de la elipse. El segmento que une a los vértices es el **eje mayor** de la elipse, y el segmento de recta que es perpendicular al eje mayor en su punto medio y cuyos extremos están sobre la elipse es el **eje menor** de la elipse.
7. La forma ordinaria de una ecuación de la elipse cuyo centro está en el origen y cuyos focos están sobre el eje x o el eje y es

   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

   respectivamente, donde a es la longitud de un semieje mayor y $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (donde c es la distancia del centro a un foco) es la longitud de un semieje menor.
8. Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias que separan a cualquier punto del conjunto de dos puntos dados $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ (los focos) es una constante dada menor que $d(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$. Las definiciones de los términos **eje principal, centro** y **vértices** de una hipérbola son similares a las dadas para elipse (véase página 144). El segmento que une a los vértices es el **eje**

transversal de la hipérbola, y el segmento de longitud $2b$ (véase párrafo 9) que es perpendicular al eje transversal y lo bisecta es el **eje conjugado** de la hipérbola.

9. La forma ordinaria de la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y focos sobre el eje x o eje y es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

respectivamente, donde a es la longitud de un semieje transversal y $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ (donde c es la distancia que separa al centro de un foco) es la longitud de un semieje conjugado. Las rectas cuyas ecuaciones son

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad \text{ó} \quad y = \pm \frac{a}{b} x,$$

respectivamente, son las asíntotas de la hipérbola.

10. Las elipses, parábolas e hipérbolas se pueden describir como los lugares geométricos de los puntos tales que el cociente de las distancias que separan a cada punto del lugar geométrico de un punto dado (un foco) y de una recta dada (la directriz asociada al foco) es una constante, a saber, $\frac{c}{a}$ o e. La constante e recibe el nombre de **excentricidad** de la cónica. El lugar geométrico es una elipse, una parábola o una hipérbola según si $0 < e < 1$, $e = 1$, o $e > 1$. Se puede considerar que la excentricidad de una circunferencia es cero. Las elipses y las hipérbolas tienen dos focos y dos directrices; para una elipse o una hipérbola con centro en el origen y focos sobre el eje x las ecuaciones de las directrices son $x = \frac{a^2}{c}$ y $x = -\frac{a^2}{c}$. Una parábola tiene sólo un foco y sólo una directriz.

11. Si la excentricidad e de una elipse es cercana a 0, entonces la elipse es casi circular; si e es cercana a 1 (pero es menor que 1) entonces la elipse es relativamente alargada y delgada. Si la excentricidad de una hipérbola es cercana a 1 (pero es mayor que 1) entonces el ancho focal de la hipérbola es relativamente pequeño; si e es grande el ancho focal es grande. Todas las parábolas son semejantes y todas las circunferencias son semejantes. Todas las elipses de la misma excentricidad son semejantes y todas las hipérbolas de la misma excentricidad son semejantes.

Ejercicios de repaso del capítulo

1. Obtenga la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano que son equidistantes de S(2, 5) y T(−2, −3).
2. Obtenga la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que el segmento de recta que une a cualquier punto del lugar geométrico con S(1, 5) es perpendicular al segmento que une al punto con T(7, −3).

3. Obtenga una ecuación del lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la pendiente de la recta que pasa por cualquier punto del lugar geométrico y por S(4, 5) es la mitad de la pendiente de la recta que pasa por el punto y por T(−2, −3).

4. Obtenga la ecuación de una circunferencia de radio 7 y centro en C(−1, −3).

5. Calcule las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 12 = 0.$$

6. Obtenga la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos Q(0, −2), S(7, −3), y T(8, 4).

7. Obtenga la ecuación de la circunferencia con centro en S(4, −3) y que es tangente a la recta cuya ecuación es $x - y = 0$.

8. Obtenga la ecuación de la parábola con vértice en el origen y cuyo foco es F(−2, 0).

9. Obtenga una ecuación de la parábola con foco en F(0, −5) y cuya directriz es la recta $\mathfrak{D}$ cuya ecuación es $y = 3$.

10. Calcule las coordenadas del foco, y obtenga una ecuación de la directriz de la parábola con vértice en el origen y que pasa por los puntos S(−3, −4) y T(3, −4).

11. Obtenga una ecuación de la parábola con foco en F(2, 3) y cuya ecuación de la directriz $\mathfrak{D}$ es $x = -6$.

12. Obtenga una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$ de la parábola que pasa por los puntos Q(1, 0), S(0, −7), y T(−4, 5).

13. Obtenga una ecuación de la elipse con centro en el origen, uno de cuyos focos es $F_1(5, 0)$, y uno de cuyos vértices es $V_1(13, 0)$.

14. Obtenga una ecuación de la elipse con centro en el origen, con eje principal sobre el eje y, $a = \sqrt{5}$, y $b = 2$. Calcule cuales son las coordenadas de los focos y determine la excentricidad.

15. Encuentre las coordenadas de los focos y de los vértices de la elipse cuya ecuación es

$$25x^2 + 9y^2 = 225.$$

16. Obtenga una ecuación de la hipérbola con centro en el origen, uno de cuyos focos es $F_1(13, 0)$, y uno de cuyos vértices es $V_1(5, 0)$.

17. Obtenga una ecuación de la hipérbola con centro en el origen, con eje principal sobre el eje y, cuyo eje transversal tiene longitud 6 y el eje conjugado tiene longitud 8.

18. Encuentre las coordenadas de los vértices y los focos de la hipérbola dada por la ecuación es

$$\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{17} = 1.$$

obtenga también las ecuaciones de las asíntotas.

19. Obtenga una ecuación de la elipse con vértices en $V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$ cuya excentricidad es $e = \frac{3}{5}$.

20. Obtenga las ecuaciones de las directrices de la elipse dada por la ecuación

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

21. Obtenga una ecuación de la elipse con focos en $\mathbf{F}_1(7, 0)$ y $\mathbf{F}_2(-3, 0)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{3}{4}$.

22. Obtenga una ecuación de la hipérbola con vértices en $\mathbf{V}_1(0, 6)$ y $\mathbf{V}_2(0, -6)$, y cuya excentricidad es $e = \frac{5}{3}$.

23. Obtenga una ecuación de la hipérbola con centro en el origen, uno de sus focos es $\mathbf{F}_1(0, 10)$, y para la cual la directriz correspondiente es la recta $\mathcal{D}_1$ dada por la ecuación $y = \frac{8}{5}$.

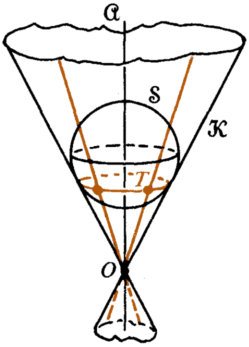
24. Obtenga una ecuación de la hipérbola que tiene a la recta $x = 1$ como directriz, y a las rectas $y = \pm\frac{2}{3}x$ como asíntotas.

Esferas de Dandelin

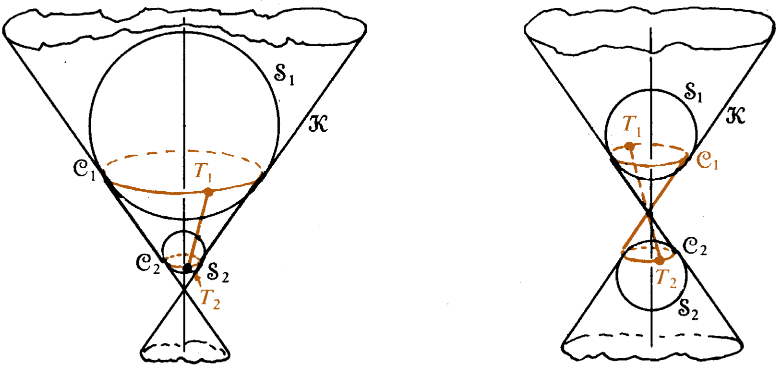
Es sorprendente, a pesar de que los antiguos griegos conocían bien muchas propiedades de las secciones cónicas, no fue sino hasta 1822 cuando se conocieron las elegantes configuraciones geométricas siguientes (véase Figura 4, página 166). Estas fueron descubiertas por dos matemáticos belgas, Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796—1874) y Germinal Pierre Dandelin (1794—1847).

Como observación preliminar nótese que para un punto O (Figura 1) que está fuera de la esfera $\mathcal{S}$, las rectas que pasan por O y son tangentes a $\mathcal{S}$ son las *generatrices* de un cono circular recto $\mathcal{K}$, cuyo vértice es O. Nótese también que los puntos de tangencia T forman una circunferencia $\mathcal{C}$ en un plano perpendicular al eje $\mathcal{A}$ del cono, y que la longitud $d(O, T)$ es la misma para todos los puntos T de $\mathcal{C}$.

Figura 1



Para dos esferas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ (figura 2) tangentes a $\mathcal{K}$ en las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ una generatriz de $\mathcal{K}$ toca a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en los puntos T_1 y T_2 respectivamente. La parte del cono que está entre dos planos paralelos que lo cortan recibe el nombre de *tronco*. La distancia $d(T_1, T_2)$ es la misma para todas las generatrices de $\mathcal{K}$, ya sea que las esferas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ estén en la misma rama del cono



(*a*) **(*b*)**

Figura 2

$\mathcal{K}$, (Figura 2(a) o no (Figura 2(b)). Se denotará a esta distancia constante mediante el símbolo $2a$. Entonces $2a$ es la altura inclinada del tronco del cono $\mathcal{K}$ cuyas bases están acotadas por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

Sea ahora $\mathcal{K}$ (Figura 3) un cono circular recto con vértice en V y cuyas generatrices forman un ángulo α, con el eje $\mathcal{A}$ del cono $\mathcal{K}$. Sea $\mathcal{P}$ un plano

$$0 < m^{R}(\alpha) < \frac{\pi}{2},$$

construido en tal forma que corte al eje y corte sólo una rama $\mathcal{N}_1$ del cono, formando una curva cerrada como se muestra a continuación. Sea $\mathcal{E}$ la curva formada por la intersección de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{K}$. Se demostrará por comparación directa que $\mathcal{E}$ es una elipse.

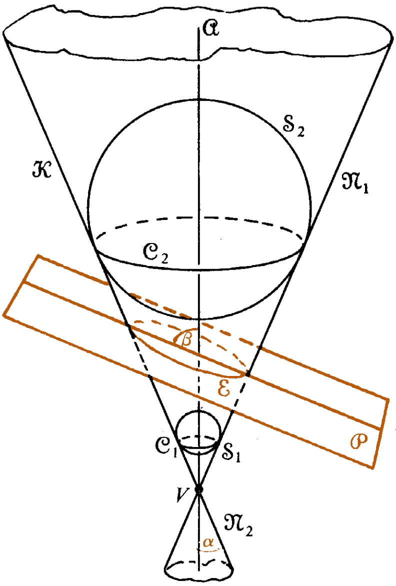


Figura 3

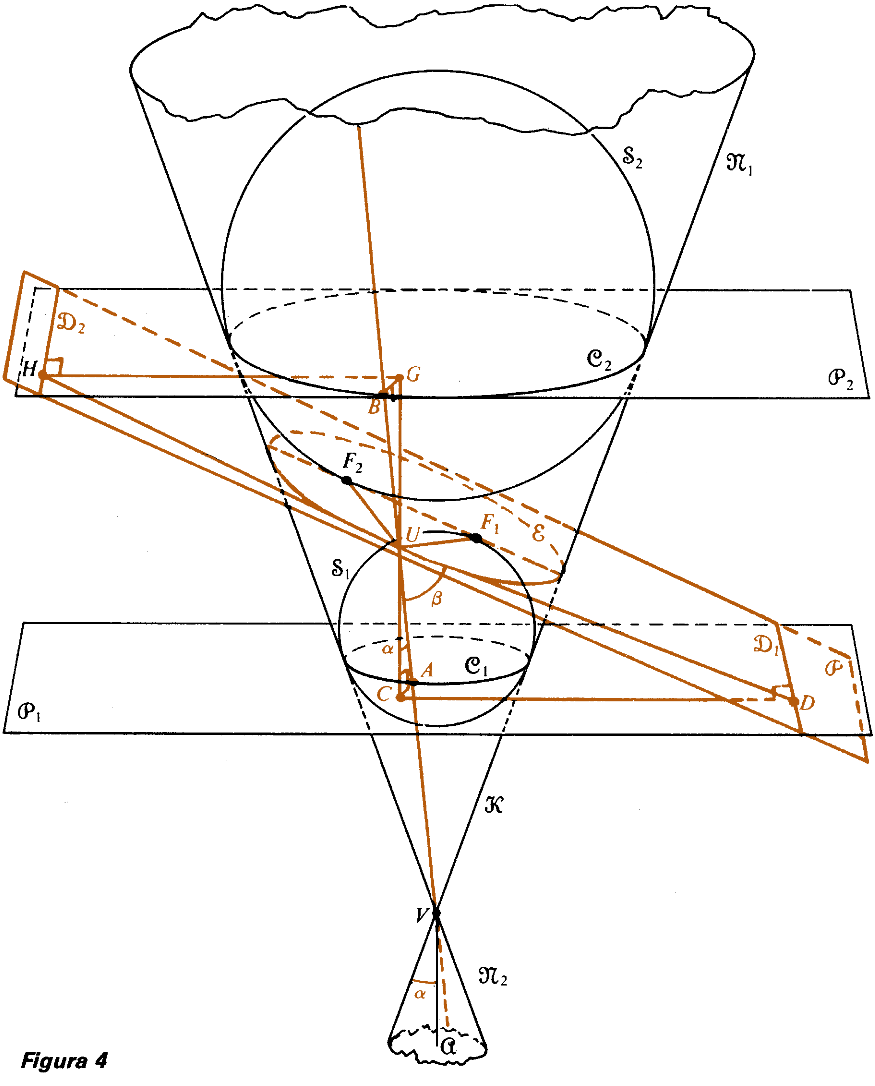


Figura 4

Sea $\mathcal{S}_1$ (figura 3) una esfera muy pequeña cuya circunferencia de contacto $\mathcal{C}_1$ esté del mismo lado de $\mathcal{P}$ que el vértice de $\mathcal{K}$, y sea $\mathcal{S}_2$ una gran esfera cuya circunferencia de contacto $\mathcal{C}_2$ esté en el lado opuesto de $\mathcal{P}$. Imagínese ahora que $\mathcal{S}_1$ se expande y $\mathcal{S}_2$ se contrae hasta que tocan a $\mathcal{P}$ en los puntos F_1 y F_2, respectivamente (Figura 4, página 166). En esta posición final las esferas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ reciben el nombre de *esferas de Dandelin*.

Supóngase que $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ son esferas de Dandelin y (como se muestra en la Figura 4) sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ los planos determinados por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ Sean $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ las intersecciones de $\mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}_2$, con $\mathcal{P}$ respectivamente.

Para cada punto U de $\mathcal{E}$, sean A y B los puntos en que la generatriz de $\mathcal{K}$ que pasa por U intersecta a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ respectivamente. Puesto que las rectas UF_1 y UA son tangentes a $\mathcal{S}_1$, y las rectas UF_2 y UB son tangentes a $\mathcal{S}_2$ se tiene

$$d(U, F_1) = d(U, A)$$

o sea

$$d(U, F_2) = d(U, B).$$

Sumando se obtiene

$$d(U, F_1) + d(U, F_2) = d(U, A) + d(U, B) = d(A, B).$$

Esto se puede escribir en la forma

$$d(U, F_1) + d(U, F_2) = 2a, \tag{1}$$

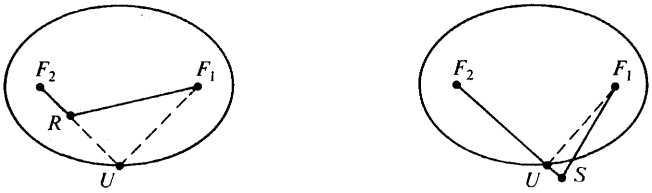
donde $2a = d(A, B)$ es la altura inclinada del tronco del cono $\mathcal{K}$, cuyas bases están acotadas por $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Además para cualquier punto R de $\mathcal{P}$ dentro de $\mathcal{E}$ se tiene

$$d(R, F_1) + d(R, F_2) < 2a,$$

y para cualquier punto S de $\mathcal{P}$ fuera de $\mathcal{E}$ se tiene

$$d(S, F_1) + d(S, F_2) > 2a,$$

como se ve en las Figuras 5(a) y 5(b). Por lo tanto $\mathcal{E}$ es el lugar geométrico de todos los puntos de $\mathcal{P}$ que satisfacen la Ecuación (1). Entonces por definición (página 137) $\mathcal{E}$ es una elipse con focos F_1 y F_2. La relación expresada por la Ecuación (1) da una interpretación geométrica de la constante $2a$ que aparece en la definición de una elipse; a saber, $2a$ es la altura inclinada del tronco.



(*a*) **Figura 5** (*b*)

Sea el punto C en la Figura 4 la base de la perpendicular al plano $\mathcal{P}_1$ que pasa por U, y sea D la base de la perpendicular a la recta $\mathcal{D}_1$ que pasa por C. Puesto que UC es perpendicular al plano $\mathcal{P}_1$, es paralela al eje . Entonces el ángulo entre UC y UA es igual a α, que es el ángulo entre el eje y el cono. Por lo tanto en el triángulo AUC se tiene

$$\cos \alpha = \frac{d(U, C)}{d(U, A)},$$

o bien, como $d(U, A) = d(U, F_1)$,

$$\cos \alpha = \frac{d(U, C)}{d(U, F_1)}.$$

Sea β el ángulo que forma $\mathcal{P}$ con el eje. Del triángulo UDC se tiene

$$\cos \beta = \frac{d(U, C)}{d(U, D)}$$

o bien como $d(U, D) = d(U, \mathfrak{D}_1)$,

$$\cos \beta = \frac{d(U, C)}{d(U, \mathfrak{D}_1)}.$$

Por lo tanto

$$\frac{d(U, F_1)}{d(U, \mathfrak{D}_1)} = \frac{d(U, F_1)/d(U, C)}{d(U, \mathfrak{D}_1)/d(U, C)}$$

$$= \frac{1/\cos \alpha}{1/\cos \beta}$$

$$= \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Según esto se tiene

$$d(U, F_1) = e[d(U, \mathfrak{D}_1)],$$

donde e, definida por

$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha},$$

tiene el mismo valor para los puntos U da $\mathcal{E}$. Esto quiere decir que $\mathfrak{D}_1$ es la directriz de la elipse $\mathcal{E}$ asociada con el foco F_1, y e es la excentricidad de $\mathcal{E}$. Un argumento similar muestra que $\mathfrak{D}_2$ es la directriz asociada al foco F_2.

Puesto que

$$0 < m^{R}(\alpha) < m^{R}(\beta) < \frac{\pi}{2}$$

se tiene

$$1 > \cos \alpha > \cos \beta > 0,$$

y por lo tanto

$$0 < \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} < 1,$$

es decir

$$0 < e < 1.$$

En la Figura 4 de la página 166 considérese que el cono $\mathcal{K}$ permanece fijo pero que el plano $\mathcal{P}$ gira hacia una posición horizontal, de modo que $m^{R}(\beta)$ se acerque a $\frac{\pi}{2}$ (tomando como eje de rotación a la recta horizontal en $\mathcal{P}$ que intersecta al eje $\mathfrak{a}$ del cono). ¿Resulta evidente que a medida que las esferas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ y los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, se ajustan apropiadamente, las directrices $\mathfrak{D}_1$ y $\mathfrak{D}_2$ se alejan indefinidamente, y que los focos F_1 y F_2 se acercan a un punto común? En la posición límite $\mathcal{P}$ es paralela a $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, y $\mathcal{E}$ se convierte en una circunferencia. La circunferencia no tiene directrices. Puesto que ahora $m^{R}(\beta) = \frac{\pi}{2}$, y $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, para la circunferencia se tiene

$$e = \frac{0}{\cos \alpha} = 0.$$

En la otra dirección considérese que $m^R(\beta)$ se acerca a $m^R(\alpha)$, tomándose el mismo eje de rotación. Entonces $\mathcal{S}_2$ se aleja cada vez más. En la posición límite $\mathcal{S}_2$ desaparece F_2 y $\mathfrak{D}_2$ desaparecen también. Ahora $\mathcal{P}$ es paralelo a la generatriz de $\mathcal{K}$, y la intersección de $\mathcal{P}$ y el cono es una parábola. Puesto que ahora $m^R(\beta) = m^R(\alpha)$, y $\cos\beta = \cos\alpha$, para la parábola se tiene

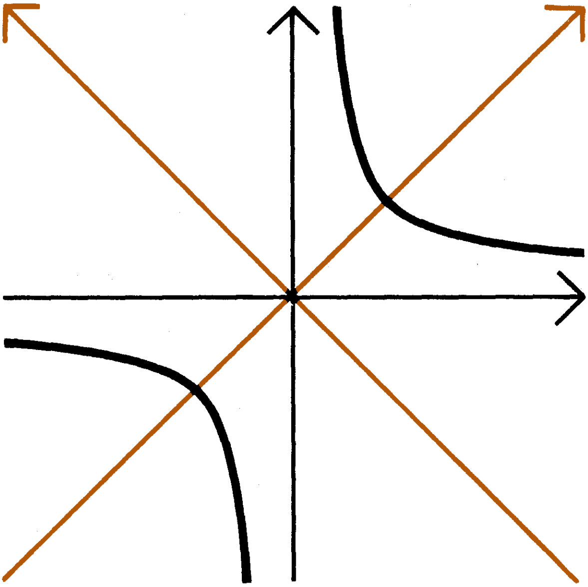
$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = 1.$$

A medida que $\mathcal{P}$ gira aún más, con $m^R(\alpha) > m^R(\beta) > 0$, $\mathcal{P}$ intersecta a la otra rama $\mathfrak{N}_2$, del cono $\mathcal{K}$, y un argumento análogo al anterior para el caso de la elipse muestra que la intersección de $\mathcal{P}$ con $\mathcal{K}$ es una hipérbola. Puesto que ahora $\frac{\pi}{2} > m^R(\alpha) > m^R(\beta) > 0$, y $0 < \cos\alpha < \cos\beta < 1$, para la hipérbola se tiene

$$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} > 1.$$

Como ejercicio se recomienda trazar y discutir figuras análogas a la Figura 4 para la circunferencia, parábola e hipérbola. Pueden considerarse también figuras correspondientes a varias secciones cónicas degeneradas; en particular para el caso de dos rectas paralelas se puede mantener a $\mathcal{S}_1$ fijo y permitir que el vértice $\mathcal{K}$ se aleje indefinidamente.

Capítulo 5



Se pueden emplear traslaciones y rotaciones de ejes para simplificar la identificación de las ecuaciones y trazo de gráficas de secciones cónicas que no estén en posiciones ordinarias. En este capítulo se estudiarán estos dos temas, y las tangentes a las secciones cónicas.

Transformaciones de Coordenadas

Traslaciones y rotaciones

5–1 Traslaciónes de ejes

En varios tipos de problemas matemáticos se puede aclarar el planteamiento de un problema, o se pueden simplificar algunos cálculos, si se cambia la colocación de los ejes de coordenadas. Un cambio tal de colocación es una *transformación de coordenadas*. En este capítulo se estudiarán dos tipos básicos de transformaciones de coordenadas: las *traslaciones* y las *rotaciones*.

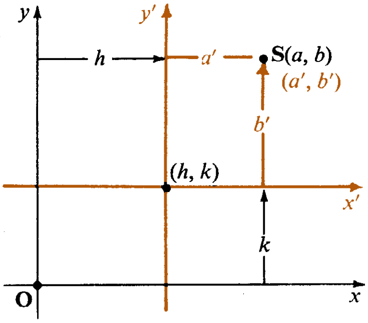


Figura 5–1

En la Figura 5–1 se muestran dos pares de sistemas de coordenadas cartesianos en el plano, cuyos ejes correspondientes son paralelos y tienen los mismos sentidos. Se puede considerar que los ejes x' y y' son el resultado de "deslizar" los ejes x y y sobre el plano manteniéndolos paralelos a sus posiciones originales hasta que el origen coincida con el punto cuyas coordenadas x y y son (h, k). Este "deslizamiento" o **traslación** de los ejes asigna a cada punto $S(a, b)$ del plano un nuevo par de coordenadas (a', b'). Como se muestra en la Figura 5–1, se tiene $a = a' + h$ y $b = b' + k$. Por lo tanto, las coordenadas x y y están relacionadas con las coordenadas x' y y' a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= x' + h, \\ y &= y' + k, \end{aligned} \tag{1}$$

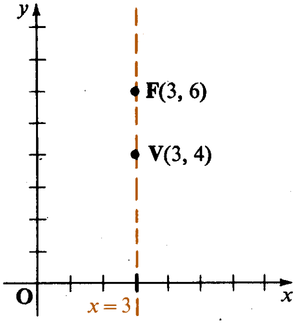
o bien

$$\begin{aligned} x' &= x - h, \\ y' &= y - k. \end{aligned} \tag{2}$$

Las Ecuaciones (1 y (2) se pueden emplear en el estudio de circunferencias cuyos centros no están en el origen, así como de parábolas, elipses e hipérbolas cuyos ejes sean paralelos a los ejes coordenados pero que estén colocadas en posiciones diferentes a las ordinarias que se estudiaron en el Capítulo 4.

Ejemplo 1. Una parábola tiene su vértice en $\mathbf{V}(3, 4)$ y su foco en $\mathbf{F}(3, 6)$. Obtenga una ecuación cartesiana de esta parábola.

Solución: Se traza primero un diagrama que muestre los ejes de coordenadas y los puntos dados. Puesto que el vértice y el foco de una parábola están sobre su eje, la parábola dada tiene a su eje sobre la recta cuya ecuación es $x = 3$.



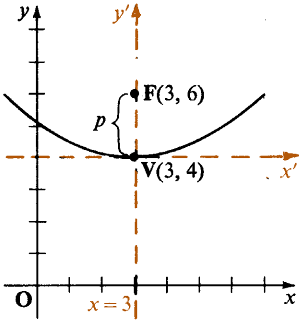
Ahora tracemos un par de ejes de coordenadas, x' y y', cuyo origen esté sobre el vértice $\mathbf{V}(3, 4)$ de la parábola. Una ecuación de la parábola en las variables x y y es entonces

$$x'^2 = 4py',$$

o puesto que $6 - 4 = 2 = p$,

$$x'^2 = 8y'. \qquad (3)$$

Es decir, los puntos de la parábola son puntos con coordenadas x' y y' satisfacen esta ecuación.



Ahora, empleando las Ecuaciones (2) de la página 171, con $h = 3$ y $k = 4$, se obtiene una ecuación de la parábola en las variables x y y sustituyendo los valores $x' = x - 3$ y $y' = y - 4$ en la Ecuación (3). Esto indica que la ecuación requerida es

$$(x - 3)^2 = 8(y - 4),$$

o sea

$$x^2 - 6x - 8y + 41 = 0.$$

Cualquier ecuacion de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{(No siendo } A \text{ y } C \text{ ambos 0)} \qquad (4)$$

tiene ordinariamente una gráfica que es una circunferencia, o que es una parábola, elipse o hipérbola cuyo eje (principal) es paralelo a un eje de coordenadas. En algunos casos excepcionales la gráfica puede ser un punto, una recta, dos rectas paralelas, dos rectas que se intersectan o el conjunto vacío.

Completando cuadrados en x y y, si tanto A como C son diferentes de 0, o bien en caso contrario, completando un cuadrado y combinando los términos lineales y constantes restantes, y empleando las ecuaciones (2) de la página 171 resulta sencillo identificar y trazar la gráfica de la curva que esté representada por una ecuación de la forma (4).

Ejemplo 2. Obtenga una ecuación en las variables x' y y' de la gráfica de

$$9x^2 - 4y^2 + 36x - 24y - 36 = 0$$

de tal manera que el centro de la gráfica esté sobre el origen en el sistema de coordenadas x' y y'. Haga su representación gráfica.

Solución: Completando cuadrados en x y y, y simplificando:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 36x - 4y^2 - 24y &= 36, \\ 9(x^2 + 4x) - 4(y^2 + 6y) &= 36, \\ 9(x^2 + 4x + 4) - 4(y^2 + 6y + 9) &= 36 + 36 - 36, \\ 9(x + 2)^2 - 4(y + 3)^2 &= 36. \end{aligned}$$

Dividiendo ambos miembros por 36, se obtiene

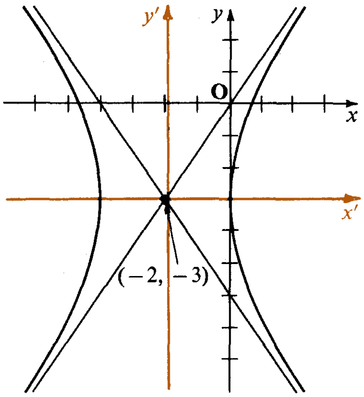
$$\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1,$$

o sea $$\frac{[x-(-2)]^2}{4} - \frac{[y-(-3)]^2}{9} = 1.$$

Ahora empleando las Ecuaciones (2) de la página 171 con $h = -2$ y $k = -3$, se puede escribir esta última ecuación en términos de las coordenadas x' y y'.

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1.$$

En la figura se muestra la gráfica correspondiente.



Ejemplo 3. Encuentre las coordenadas del vértice **V** y del foco **F** de la parábola dada por la ecuación

$$y^2 + 4x + 6y + 1 = 0.$$

Solución: Primero, complétese a cuadrados en y, y simplifíquese:

$$\begin{aligned} y^2 + 6y &= -4x - 1, \\ y^2 + 6y + 9 &= -4x - 1 + 9, \\ (y + 3)^2 &= -4x + 8, \\ (y + 3)^2 &= -4(x - 2), \end{aligned}$$

o bien

$$[y - (-3)]^2 = -4(x - 2).$$

(Continúa solución)

Ahora, empléese la Ecuación (2) de la página 171, con $h = 2$ y $k = -3$ para obtener una ecuación en x' y y', en la forma ordinaria de la parábola

$$y'^2 = -4x'.$$

En el sistema $x'y'$- ésta es la ecuación de una parábola cuyo vértice **V** tiene como coordenadas a $(x', y') = (0, 0)$ y cuyo foco **F** tiene coordenadas $(x', y') = (-1, 0)$.

Finalmente, empléese la Ecuación (1) de la página 171, con $h = 2$ y $k = -3$ para encontrar las coordenadas x y y del vértice y del foco: para el vértice **V** se tiene

$$(x, y) = \big(0 + 2, 0 + (-3)\big) = (2, -3),$$

y para el foco **F** se tiene

$$(x, y) = \big(-1 + 2, 0 + (-3)\big) = (1, -3).$$

El proceso de completar cuadrados y simplificar las ecuaciones resultantes que se empleó en los Ejemplos 2 y 3 se puede aplicar a cualquier ecuación de la forma (4). Siempre se puede tratar de obtener una ecuación de una de las formas que se muestran en la siguiente tabla. (Esta tabla debe entenderse, pero no debe ser memorizada.)

Tipo	*Ecuación*	*Gráfica*	*Centro*	*Vértices*	*Focos*
(1) $r > 0$ $a > b > 0$	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$	Circunferencia	(h, k)	—	—
	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	Elipse	(h, k)	$(h \pm a, k)$	$(h \pm \sqrt{a^2 - b^2}, k)$
	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2} + \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	Elipse	(h, k)	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm \sqrt{a^2 - b^2})$
(2) $p \neq 0$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	Parábola	—	(h, k)	$(h, k + p)$
	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	Parábola	—	(h, k)	$(h + p, k)$
(3) $a > 0$ $b > 0$	$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	Hipérbola	(h, k)	$(h \pm a, k)$	$(h \pm \sqrt{a^2 + b^2}, k)$
	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	Hipérbola	(h, k)	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm \sqrt{a^2 + b^2})$

Sin embargo, en casos excepcionales, cuando se haya reducido la ecuación de segundo grado a una forma que aparezca en el primer miembro de una ecuación contenida en la tabla, no se podrá expresar el segundo miembro en la forma que allí se muestra.

Si en las ecuaciones del Tipo 1, en lugar de r^2 (con $r > 0$) o de 1 en el segundo miembro aparece una constante *no positiva* q, ocurre lo siguiente. Si $q > 0$, entonces la gráfica es solamente el punto (h, k); y si $q < 0$, entonces la gráfica es el conjunto vacío.

Para las ecuaciones del Tipo 2, en lugar de $4p(x - h)$ o $4p(y - k)$, con $p \neq 0$, en el segundo miembro, puede obtenerse nuevamente una constante q. Si $q > 0$, entonces la gráfica son dos rectas (paralelas) horizontales, o dos rectas (paralelas) verticales. Si $q = 0$, entonces la gráfica es una recta horizontal o una recta vertical; y si $q < 0$, entonces la gráfica es $\emptyset$.

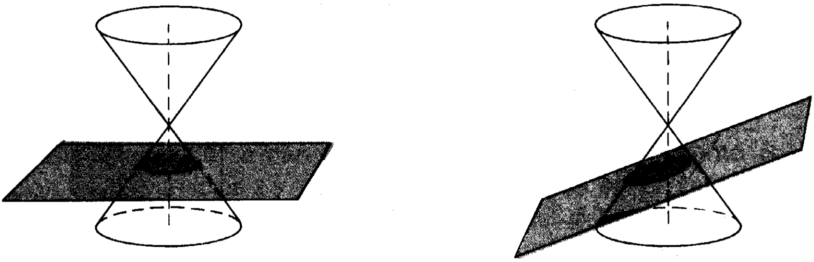
Para las ecuaciones del Tipo 3, en lugar de 1 en el segundo miembro puede tenerse 0. La gráfica es entonces un par de rectas que se intersecan.

De la discusión anterior se llega a los siguientes hechos:

■ La gráfica de $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (donde A y C no son ambos 0) es una:

1. *Circunferencia*, si $A = C$. En casos excepcionales, la gráfica puede ser un punto o bien $\emptyset$.
2. *Elipse*, si $A \neq C$ y A y C tienen el mismo signo ($AC > 0$). En casos excepcionales la gráfica puede ser un punto o $\emptyset$.
3. *Parábola*, Si $A = 0$ o bien $C = 0$. En casos excepcionales, la gráfica puede ser un par de rectas paralelas, o una sola recta o $\emptyset$.
4. *Hipérbola*, si A y C tienen signos contrarios ($AC < 0$). En casos excepcionales la gráfica puede ser un par de rectas que se cortan.

Los tipos de lugares geométricos que se mencionaron anteriormente reciben el nombre de **secciones cónicas**, o **cónicas**, puesto que resultan de la intersección de un plano con un cono circular recto de dos ramas. (Figuras 5 – 2 y 5 – 3).



Circunferencia

Plano perpendicular al eje, corta a una rama.

Elipse

Plano oblicuo al eje corta a una rama

Parábola

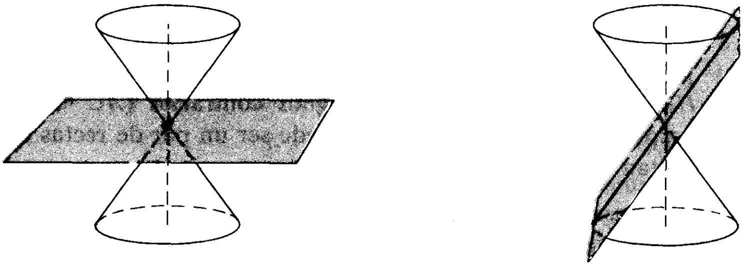
Plano paralelo a un elemento.

Hipérbola

Plano que corta a ambas ramas.

Figura 5—2

Los casos excepcionales no vacíos se obtienen cuando el plano pasa por el vértice del cono (Figura 5 – 3). (Para el caso de dos rectas paralelas hay que sustituir al cono por un cilindro circular recto, que se puede pensar es un cono cuyo vértice está a una distancia infinita). Los lugares geométricos excepcionales reciben el nombre de **secciones cónicas degeneradas.**



Punto

Plano que corta sólo en el vértice

Una Recta

Plano tangente a un elemento.

Par de rectas que se cortan

Plano que contiene al eje.

Par de rectas paralelas

Plano perpendicular a la base del cilindro.

Figura 5—3

Si se efectúan todas las simplificaciones y reducciones a forma ordinaria de las ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (\text{con } A \text{ y } C \text{ no siendo ambos } 0)$$

se obtienen (Ejercicios 39 – 45, página 172) los resultados que se resumen en la siguiente tabla, que debe servir como referencia, pero que nuevamente no debe memorizarse.

Tipo elíptico $AC > 0$	$A(4ACF - CD^2 - AE^2) < 0$	$A = C$		una circunferencia
		$A \neq C$		una elipse
	$A(4ACF - CD^2 - AE^2) > 0$			el conjunto vacío
	$4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$			un punto
Tipo parabólico $AC = 0$	$A \neq 0$ $C = 0$	$E \neq 0$		una parábola
		$E = 0$	$4AF - D^2 < 0$	dos rectas paralelas
			$4AF - D^2 = 0$	una recta
			$4AF - D^2 > 0$	el conjunto vacío
	$A = 0$ $C \neq 0$	$D \neq 0$		una parábola
		$D = 0$	$4CF - E^2 < 0$	dos rectas paralelas
			$4CF - E^2 = 0$	una recta
			$4CF - E^2 > 0$	el conjunto vacío
Tipo hiperbólico $AC < 0$	$4ACF - CD^2 - AE^2 \neq 0$			una hipérbola
	$4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$			dos rectas que se cortan

Ejercicios 5—1

En los Ejercicios 1—6 se dan las coordenadas *x, y* de un punto **S** y una ecuación en las variables *x* y *y*. Obtenga una ecuación en las variables *x′* y *y′* de la gráfica de la ecuación dada si el origen del sistema de coordenadas *x′y′* está en el punto **S**.

Ejemplo. $y^2 - 6y + 5 = 4x$; $\mathbf{S}(-1, 3)$

Solución: Si el origen del sistema $x'y'$- está sobre el punto $\mathbf{S}(-1, 3) = \mathbf{S}(h, k)$, entonces los sistemas xy- y $x'y'$- están relacionados mediante las ecuaciones

$$x = x' + h, \qquad y = y' + k,$$

o bien,

$$x = x' - 1, \qquad y = y' + 3.$$

Sustituyendo a x por $x' - 1$ y a y por $y' + 3$ en la ecuación dada, y simplificando la ecuación resultante, se obtiene

$$(y' + 3)^2 - 6(y' + 3) + 5 = 4(x' - 1),$$
$$y'^2 + 6y' + 9 - 6y' - 18 + 5 = 4x' - 4,$$
$$y'^2 = 4x'.$$

1. $x - 4y^2 + 16y - 7 = 0$; $\mathbf{S}(-3, 4)$
2. $x^2 - y^2 - 6x + 10y - 20 = 0$; $\mathbf{S}(3, 5)$
3. $x^2 + 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$; $\mathbf{S}(3, 2)$

4. $x^2 + y^2 - 8x + 10y - 4 = 0$; $S(4, -5)$
5. $x^2 + 2y^2 - 2x + 16y + 33 = 0$; $S(1, -4)$
6. $4x^2 - y^2 - 12x - 6y + 24 = 0$; $S(\frac{3}{2}, -3)$

En los Ejercicios 7—18, obtenga una ecuación cartesiana de la sección cónica que satisface las condiciones dadas. Haga su representación gráfica.

7. Parábola con vértice en $V(3, -2)$ y foco en $F(3, 4)$.
8. Parábola con vértice en $V(-\frac{3}{2}, 2)$ y foco en $F(1, 2)$.
9. Parábola con foco en $F(2, 4)$ y directriz cuya ecuación es $x = 8$.
10. Parábola con foco en $F(-1, 2)$ y directriz cuya ecuación es $y = -4$.
11. Elipse con focos en $F_1(1, 2)$ y $F_2(9, 2)$, y cuyo eje mayor tiene una longitud de 10.
12. Elipse con focos en $F_1(-3, 2)$ y $F_2(-3, 6)$, y cuyo eje mayor tiene una longitud de 12.
13. Elipse con vértices en $V_1(8, 2)$ y $V_2(-4, 2)$, y un foco en $F_1(6, 2)$.
14. Elipse con centro en $C(-2, 4)$, un vértice en $V_1(3, 4)$, y cuyo foco asociado a este vértice es $F_1(2, 4)$.
15. Hipérbola con focos en $F_1(3, 2)$ y $F_2(3, -6)$, y cuyo eje transversal tiene longitud 4.
16. Hipérbola con focos en $F_1(-6, -3)$ y $F_2(4, -3)$, y con un vértice $V_2(3, -3)$.
17. Hipérbola con vértices $V_1(6, 2)$ y $V_2(-2, 2)$, y cuya excentricidad es $\frac{7}{5}$.
18. Hipérbola con centro en $C(3, 2)$, con un foco en $F_1(3, 7)$, y cuya excentricidad es $\frac{5}{3}$.

En los Ejercicios 19—30, obtenga una ecuación $x'y'$ en las variables de la gráfica de la ecuación en las variables x y y dada, de manera que el centro, o en el caso de las parábolas el vértice, esté en el origen del sistema de coordenadas $x'y'$. Trace una gráfica de la curva que muestre ambos sistemas de ejes coordenados, e identifique el tipo de curva.

19. $x^2 + y^2 + 4x - 10y - 36 = 0$
20. $x^2 - 4y^2 + 4x + 32y - 64 = 0$
21. $2x^2 + y^2 + 8x - 8y - 48 = 0$
22. $x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$
23. $4x + y^2 + 4y - 4 = 0$
24. $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$
25. $4x^2 + 4y^2 - 12x + 8y - 3 = 0$
26. $8x - y^2 - 8y = 0$
27. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 24y + 45 = 0$
28. $x^2 - y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$
29. $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 7 = 0$
30. $4y^2 - 3x^2 + 8y - 12x - 16 = 0$

En los Ejercicios 31—36, trace la gráfica de la ecuación dada.

31. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$
32. $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y + 7 = 0$
33. $x^2 + 2y^2 - 4y + 3 = 0$
34. $x^2 - 8x + 15 = 0$
35. $y^2 + 6y + 9 = 0$
36. $x^2 + 10x + 30 = 0$

37. Emplee una traslación de coordenadas para eliminar los términos de primer grado de la ecuación $xy + 4x - 8y + 6 = 0$; es decir, obtenga una ecuación en las variables x' y y' de la gráfica de la ecuación dada tal que los términos de primer grado x' y y' tengan coeficiente 0. (*Sugerencia*: Sustituya a x por $x' + h$ y a y por $y' + k$, respectivamente, y calcule los valores apropiados de h y k)

38. Emplee el método descrito en el Ejercicio 37 para eliminar los términos de primer grado de la ecuación.

$$xy + ax + by + c = 0.$$

Los Ejercicios 39—45 se refieren a la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, en donde A y C son ambos distintos de cero.

* **39.** Demuestre que si $A = 0, C \neq 0$, y $D \neq 0$, entonces la ecuación es equivalente a una ecuación de la forma

$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

* **40.** Demuestre que si $A \neq 0, C = 0$, y $E \neq 0$, entonces la ecuación es equivalente a una ecuación de la forma

$$(x - h)^2 = 4p(y - k).$$

* **41.** Demuestre que si $A = C \neq 0$, entonces la ecuación es equivalente a una ecuación de la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = q.$$

¿Qué condición debe satisfacer q si la ecuación debe tener una gráfica no vacía en $\mathcal{R}^2$?

* **42.** Demuestre que si $A \neq C$, pero $AC > 0$, entonces la ecuación es equivalente a una ecuación de una de las formas

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1,$$

con $a > b > 0$, siempre y cuando $A(4ACF - CD^2 - AE^2) < 0$.

* **43.** Demuestre que si $AC < 0$, entonces la ecuación es equivalente a una ecuación de una de las formas

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1,$$

con $a > 0, b > 0$, siempre y cuando $4ACF - CD^2 - AE^2 \neq 0$.

* **44.** En el Ejercicio 42, ¿Por qué debe ser negativo $A(4ACF - CD^2 - AE^2)$? ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica si $A(4ACF - CD^2 - AE^2)$ es 0? ¿Qué sucede si esta cantidad es positiva?

* **45.** En el Ejercicio 43, ¿Por qué debe ser no nulo $4ACF - CD^2 - AE^2$?. ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica si $4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$?

* **46.** Se da a los puntos $S(x_1, y_1)$ y $T(x_2, y_2)$ las nuevas coordenadas (x_1', y_1') y (x_2', y_2'), mediante una traslación según las Ecuaciones (2) de la página 171. Verifique algebraicamente que

$$\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

e interprete geométricamente este hecho.

* **47.** Se da a los puntos $S(x_1, y_1), T(x_2, y_2)$, y $U(x_3, y_3)$ que son distintos, nuevas coordenadas $S'(x_1', y_1'), T'(x_2', y_2')$, y $U'(x_3', y_3')$, mediante una traslación de los ejes. Si $\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{s}', \mathbf{t}'$, y $\mathbf{u}'$ son los vectores que corresponden a $\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{S}', \mathbf{T}'$, y $\mathbf{U}'$, respectivamente verifique algebraicamente que

$$\frac{(\mathbf{t}' - \mathbf{s}') \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{s}')}{\|\mathbf{t}' - \mathbf{s}'\| \, \|\mathbf{u}' - \mathbf{s}'\|} = \frac{(\mathbf{t} - \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{t} - \mathbf{s}\| \, \|\mathbf{u} - \mathbf{s}\|},$$

e interprete este hecho geométricamente.

5—2 Rotación de ejes

En la Sección 5—1 se vio que se puede emplear una traslación de ejes para transformar una ecuación dada a una forma más sencilla (pero equivalente) cuya gráfica sea fácilmente reconocible. Esto también se aplica a las *rotaciones de ejes.*

Si se rotan los ejes de coordenadas alrededor del origen y se considera que están fijos todos los puntos del plano, entonces cada punto (o vector), excepto el origen, tendrá un nuevo par de coordenadas (o componentes). Estas nuevas coordenadas se pueden calcular empleando trigonometría como se indica a continuación.

En la Figura 5—4 se muestran dos pares de ejes de coordenadas en el plano. Como se muestra, los ejes x' y y' se han obtenido rotando a los ejes x y y alrededor del origen un ángulo ϕ. Supóngase que $\mathbf{S}$ es cualquier punto del plano, y que $\mathbf{S}$ tiene las coordenadas (x, y) con respecto a los ejes x y y, y tiene coordenadas (x', y') con respecto a los ejes x' y y'. Si el ángulo de dirección del vector $\mathbf{s}$ con respecto al eje x'- es y'- entonces, como se muestra, el ángulo de dirección de $\mathbf{s}$ con respecto al eje x' es $\theta - \phi$. Por lo tanto, si la magnitud de $\mathbf{s}$ es r, se tiene

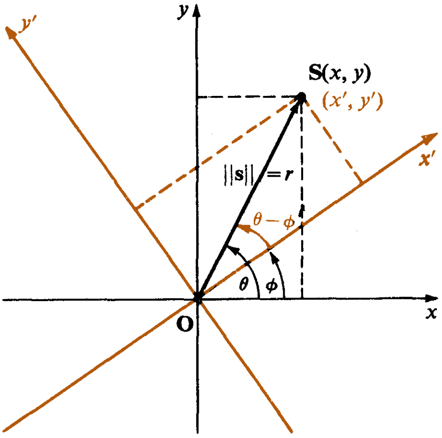


Figura 5—4

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \text{ sen } \theta$$

y

$$x' = r\cos(\theta - \phi), \qquad y' = r \text{ sen } (\theta - \phi). \qquad (*)$$

Por trigonometría se sabe que

$$\cos(\theta - \phi) = \cos\theta\cos\phi + \operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\phi,$$

$$\operatorname{sen}(\theta - \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi - \cos\theta\ \operatorname{sen}\phi.$$

Por consiguiente, las Ecuaciones x se pueden escribir en la forma

$$x' = r\cos\theta\cos\phi + r\operatorname{sen}\theta\ \operatorname{sen}\phi,$$
$$y' = r\operatorname{sen}\theta\cos\phi - r\cos\theta\ \operatorname{sen}\phi,$$

o bien, como $r\cos\theta = x$ y $r\ \operatorname{sen}\theta = y$, en la forma

■ $$x' = x\cos\phi + y\operatorname{sen}\phi, \qquad y' = -x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi. \tag{1}$$

Las Ecuaciones (1) a su vez se pueden escribir en forma equivalente como

■ $$x = x'\cos\phi - y'\operatorname{sen}\phi, \qquad y = x'\operatorname{sen}\phi + y'\cos\phi. \tag{2}$$

(Véase el Ejercicio 23, página 186.) Por lo tanto, ante una rotación de ejes, las coordenadas x y y de un punto están relacionadas con las coordenadas x' y y' a través de las Ecuaciones (1) o, equivalentemente, a través de las ecuaciones (2).

Ejemplo 1. Considérese una rotación de los ejes coordenados para la cual $m°(\phi) = 30$. Si las coordenadas x y y de los puntos **S** y **T** son $(4, -2)$ y $(3, 1)$, respectivamente, encuentre las coordenadas x' y y' de **S** y **T**.

Solución: Empléense las Ecuaciones (1) anteriores con $\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ y $\cos\phi = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ para calcular las coordenadas x' y y'.

Para **S** se tiene

$$x' = (4)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-2)(\tfrac{1}{2}), \qquad y' = (-4)(\tfrac{1}{2}) + (-2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$x' = 2\sqrt{3} - 1, \qquad y' = -2 - \sqrt{3}.$$

Para **T** se tiene

$$x' = (3)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (1)(\tfrac{1}{2}), \qquad y' = (-3)(\tfrac{1}{2}) + (1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$x' = \frac{3\sqrt{3} + 1}{2}, \qquad y' = \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}.$$

Así las coordenadas x' y y' de **S** y **T** son

$$(2\sqrt{3} - 1, -2 - \sqrt{3}) \quad \text{y} \quad \left(\frac{3\sqrt{3} + 1}{2}, \frac{-3 + \sqrt{3}}{2}\right),$$

respectivamente

Al resolver el Ejercicio 46, página 180 se verificó algebraicamente el hecho geométrico de que una traslación de ejes no altera las distancias entre puntos. Claro está que esto es también válido para rotaciones de ejes (Ejercicios 24, página 186), como se sugiere en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Para los puntos **S** y **T** mencionados en el Ejemplo 1, página 181, verificar que se obtiene el mismo resultado si se calcula $d(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ en cualquier sistema de coordenadas.

Solución: Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) representan las coordenadas x, y y, (x_1', y_1') y (x_2', y_2') las coordenadas x' y y' de **S** y **T** respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) &= (4, -2) \\
(x_2, y_2) &= (3, 1) \\
d(\mathbf{S}, \mathbf{T}) &= \sqrt{(3-4)^2 + [1-(-2)]^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2 + 3^2} \\
&= \sqrt{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x_1', y_1') &= (2\sqrt{3} - 1, -2 - \sqrt{3}) \\
(x_2', y_2') &= \left(\frac{3\sqrt{3}+1}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right) \\
d(\mathbf{S}, \mathbf{T}) &= \sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{9-6\sqrt{3}+3}{4} + \frac{1+6\sqrt{3}+27}{4}} \\
&= \sqrt{10}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $d(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ tiene el mismo valor en ambos sistemas de coordenadas.

Análogamente, al resolver el Ejercicio 47, página 180, se verifica algebraicamente el hecho geométrico de que una traslación de ejes no altera los ángulos . Esto también es válido, para las rotaciones de ejes (Ejercicio 25, página 186) puesto que estas transformaciones meramente asignan nuevas coordenadas a cada punto y no alteran la forma o tamaño de las figuras geométricas.

El siguiente ejemplo ilustra cómo se puede emplear una rotación de ejes para transformar una ecuación de una forma que no es familiar a una forma cuya gráfica se puede reconocer por inspección.

Ejemplo 3. Obtenga una ecuación en las variables x' y y' de la gráfica de $xy = 4$ bajo una rotación de ejes alrededor del origen con $m°(\phi) = 45$. Use este resultado para identificar la ecuación original y trace una gráfica de la misma.

Solución: Se tiene $\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $\operatorname{sen} 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Si se emplean estos valores en la Ecuación (2) página 181, se obtiene

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Sustituyendo estas expresiones de x y y en la ecuación $xy = 4$, se tiene

$$\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) = 4,$$

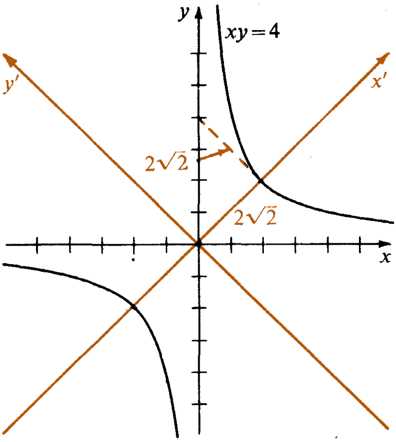
$$\frac{x'^2 - y'^2}{2} = 4,$$

$$x'^2 - y'^2 = 8,$$

ó

$$\frac{x'^2}{8} - \frac{y'^2}{8} = 1.$$

Se reconoce que la gráfica de esta última ecuación es una hipérbola con el eje principal sobre el eje x'. Por lo tanto, la gráfica de la ecuación original es una hipérbola cuyo eje principal forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje x. A continuación se muestra su gráfica.



Ejercicios 5—2

En los Ejercicios 1—6, encuentre las coordenadas x' y y' del punto cuyas coordenadas x y y se dan, si se rotan los ejes coordenados alrededor del origen un ángulo ϕ cuya medida se da.

Ejemplo. $(2, -3)$; $120°$

Solución: Puesto que $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, las Ecuaciones (1) de la página 181, toman la forma

$$x' = -\tfrac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \qquad y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}x - \tfrac{1}{2}y$$

Por lo tanto, para $(2, -3)$ se tiene

$$x' = -\tfrac{1}{2}(2) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-3) = -1 - \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}(2) - \tfrac{1}{2}(-3) = -\sqrt{3} + \tfrac{3}{2}.$$

Por consiguiente, las coordenadas buscadas son

$$\left(\frac{-2 - 3\sqrt{3}}{2}, \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}\right)$$

1. $(1, 3)$; $30°$
2. $(2, 3)$; $45°$
3. $(-2, 4)$; $240°$
4. $(-3, 7)$; $135°$
5. $(-6, -3)$; $315°$
6. $(0, -4)$; $225°$

En los Ejercicios 7—16, emplee las Ecuaciones (2) de la página 181, para obtener una ecuación en las variables $x'y'$ de la gráfica de la ecuación en las variables x y y dada; bajo una rotación de ejes del ángulo ϕ que se especifica.

7. $3x - 4y + 10 = 0; \operatorname{sen}\phi = \frac{3}{5}, \cos\phi = \frac{4}{5}$
8. $x - 2y - 3 = 0; \operatorname{sen}\phi = \frac{-5}{13}, \cos\phi = \frac{12}{13}$
9. $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 36 = 0; \operatorname{sen}\phi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$
10. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 = 0; \operatorname{sen}\phi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{5}}$
11. $2x^2 + 3xy + 2y^2 - 7 = 0; m°(\phi) = 45$
12. $x^2 - 2xy + y^2 - 3x = 0; m°(\phi) = 45$
13. $x^2 + y^2 = 25; m°(\phi) = 60$
14. $4x^2 + 9y^2 = 36; m°(\phi) = 90$

15. $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 30x + 40y - 45 = 0; \operatorname{sen}\phi = \frac{4}{5}, \cos\phi = \frac{3}{5}$
16. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y - 100 = 0; \operatorname{sen}\phi = \frac{4}{5}, \cos\phi = \frac{3}{5}$

En los Ejercicios 17–22, rote los ejes *x* y *y* de modo que la recta cuya ecuación y pendiente son dadas, con respecto a los ejes *x′* y *y′*, y obtenga una ecuación en las variables *x′* y *y′* de esta recta (Obtenga dos respuestas).

Ejemplo. $2x - y = 3; m = 0$

Solución: Empleando las Ecuaciones (2), página 181 se puede escribir la ecuación dada como

$$2(x'\cos\phi - y'\operatorname{sen}\phi) - (x'\operatorname{sen}\phi + y'\cos\phi) = 3.$$

Agrupando los términos que contienen a x' y a y' se tiene

$$\begin{aligned} 2x'\cos\phi - x'\operatorname{sen}\phi - 2y'\operatorname{sen}\phi - y'\cos\phi &= 3, \\ x'(2\cos\phi - \operatorname{sen}\phi) - y'(2\operatorname{sen}\phi + \cos\phi) &= 3. \qquad (*) \end{aligned}$$

La pendiente de la gráfica de esta ecuación es

$$m = \frac{2\cos\phi - \operatorname{sen}\phi}{2\operatorname{sen}\phi + \cos\phi}.$$

Como se desea que esta pendiente sea 0, se sigue que se debe tener

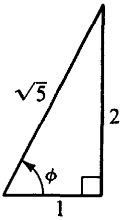
$$2\cos\phi - \operatorname{sen}\phi = 0,$$

o bien

$$\frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = \tan\phi = 2.$$

Puesto que ϕ es positivo se puede elegir ϕ tal que esté en el cuadrante I o en el cuadrante III. Se ilustran las dos situaciones en los diagramas que aparecen en la página 186.

Para identificar los valores de $\cos\phi$ y $\operatorname{sen}\phi$ del cuadrante I, se traza un triángulo rectángulo con un ángulo ϕ tal que $\phi = \frac{2}{1}$. Se sigue que la hipotenusa tiene una longitud $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, y que por lo tanto $\operatorname{sen}\phi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ y $\cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (*) se tiene



$$x'\left[2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\right] - y'\left[\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right] = 3,$$

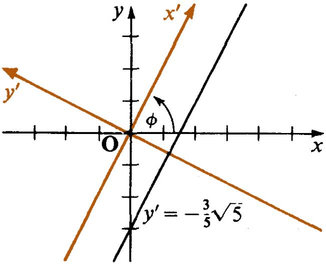
o bien

$$y' = -\tfrac{3}{5}\sqrt{5}.$$

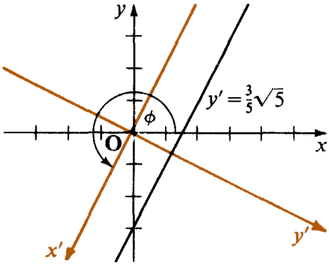
(*Continuación solución*)

Si ϕ está en el cuadrante III, se tiene $\operatorname{sen}\phi = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ y $\cos\phi = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, la Ecuación (*) se convierte en $y' = \frac{3}{5}\sqrt{5}$. Por lo tanto, la recta con pendiente 0 se puede representar por

$$y' = -\tfrac{3}{5}\sqrt{5} \quad \text{o como} \quad y' = \tfrac{3}{5}\sqrt{5}.$$



$0 < m^R(\phi) < \frac{\pi}{2}$



$\pi < m^R(\phi) < \frac{3\pi}{2}$

17. $2y - x = 4;\ m = 0$
18. $x + y = -2;\ m = 0$
19. $3x + y = 6;\ m = 3$
20. $x + y = 4;\ m = \frac{1}{2}$
21. $3x + y = 2$; no está definida la pendiente (recta vertical)
22. $x - y = 6$; no está definida la pendiente (recta vertical)

* **23.** Demuestre que si $x' = x\cos\phi + y\operatorname{sen}\phi$ y $y' = -x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi$, entonces $x = x'\cos\phi - y'\operatorname{sen}\phi$ y $y = x'\operatorname{sen}\phi + y'\cos\phi$, y recíprocamente. (*Sugerencia*: Resuelva simultáneamente las primeras dos ecuaciones, es decir, despeje a x y y, empleando el hecho de que $\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$.).

* **24.** Dados los puntos $S(x_1, y_1)$ y $T(x_2, y_2)$ son rotados obteniéndose las nuevas coordenadas (x_1', y_1') y, (x_2', y_2'), según las Ecuaciones (1) página 181. Verifique algebraicamente que

$$\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

e interprete geométricamente este hecho.

* **25.** Los puntos $S(x_1, y_1)$, $T(x_2, y_2)$, y $U(x_3, y_3)$ fueron rotados, encontrándose que $S'(x_1', y_1')$, $T'(x_2', y_2')$, y $U'(x_3', y_3')$, son las nuevas coordenadas. Si $\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{s}', \mathbf{t}'$, y $\mathbf{u}'$ son los vectores que corresponden a S, T, U, S′, T′, y U′, respectivamente, verifique algebraicamente que

$$\frac{(\mathbf{t}' - \mathbf{s}') \cdot (\mathbf{u}' - \mathbf{s}')}{\|\mathbf{t}' - \mathbf{s}'\|\ \|\mathbf{u}' - \mathbf{s}'\|} = \frac{(\mathbf{t} - \mathbf{s}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{s})}{\|\mathbf{t} - \mathbf{s}\|\ \|\mathbf{u} - \mathbf{s}\|},$$

y dele una interpretación geométrica.

Aplicaciones de las transformaciones

5–3 La ecuación general de segundo grado

Una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes, con A, B y C no siendo todos nulos, recibe el nombre de **ecuación de segundo grado**, o **cuadrática**, en dos variables. Si $B = 0$, la ecuación toma la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

y como se vió en la Sección 5 – 1 se puede identificar su gráfica completando cuadrados en x y y, y aplicando entonces una traslación de ejes apropiada.

Si $B \neq 0$ en la Ecuación (1) inmediatamente anterior, entonces no se puede identificar su gráfica directamente por este método. Sin embargo, se puede emplear una rotación de ejes para obtener una ecuación de la gráfica de (1) que no contenga un término en $x'y'$- y entonces se puede proceder como antes.

Si se rotan los ejes un ángulo ϕ medido en radianes, entonces las viejas y las nuevas coordenadas están relacionadas a través de

$$x = x' \cos\phi - y' \operatorname{sen}\phi$$

y

$$y = x' \operatorname{sen}\phi + y' \cos\phi. \qquad (2)$$

Si se sustituyen estos valores en la Ecuación (1) la ecuación resultante es de la forma

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \qquad (3)$$

donde (Ejercicio 19, página 191)

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\phi + B\cos\phi\operatorname{sen}\phi + C\operatorname{sen}^2\phi, & (4)\\
B' &= 2(C - A)\operatorname{sen}\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi), & (5)\\
C' &= A\ \operatorname{sen}^2\phi - B\cos\phi\ \operatorname{sen}\phi + C\cos^2\phi, & (6)\\
D' &= D\cos\phi + E\operatorname{sen}\phi, & (7)\\
E' &= -D\operatorname{sen}\phi + E\cos\phi, & (8)\\
F' &= F. & (9)
\end{aligned}$$

Para eliminar el término en $x'y'$- en (3), es decir, para tener $B' = 0$, se iguala el segundo miembro de (5) a 0, y se resuelve la ecuación resultante

$$2(C - A)\operatorname{sen}\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) = 0, \qquad (10)$$

despejando a ϕ. Recordando de trigonometría que para todos los valores reales de ϕ,

$$2\operatorname{sen}\phi\cos\phi = \operatorname{sen}2\phi \qquad \text{y} \qquad \cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi = \cos 2\phi.$$

Esto es, la Ecuación (10) es equivalente a

$$(C - A)\operatorname{sen}2\phi + B\cos 2\phi = 0. \qquad (11)$$

Ahora hay que considerar dos casos: (1) $A = C$ y (2) $A \neq C$.

Caso (1). Si $A = C$, la Ecuación (11) se convierte en

$$B \cos 2\phi = 0,$$

de donde

$$\cos 2\phi = 0.$$

Los valores de 2ϕ que satisfacen esta ecuación son de la forma

$$\frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \text{ entero},$$

y por lo tanto los valores de ϕ son de la forma

$$\frac{\pi}{4} + k\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad k \text{ entero}.$$

El menor valor positivo de esta forma para ϕ es $\frac{\pi}{4}$, y normalmente se emplea este valor.

Caso (2). Si $A \neq C$, entonces la Ecuación (11) es equivalente a

$$(A - C)\operatorname{sen} 2\phi = B \cos 2\phi,$$

$$\frac{\operatorname{sen} 2\phi}{\cos 2\phi} = \frac{B}{A - C},$$

ó

$$\tan 2\phi = \frac{B}{A - C}.$$

En este caso nuevamente se tienen una selección de valores de 2ϕ, y se puede restringir 2ϕ a cualquier intervalo de longitud π que se desee. Normalmente, se selecciona un valor en el intervalo $0 < 2\phi < \pi$, o bien $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, se puede restringir el ángulo de rotación a ser un ángulo agudo.

Ejemplo 1. Mediante una rotación de ejes identifique la gráfica de

$$x^2 - 3xy + 5y^2 - 4 = 0,$$

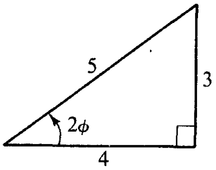
y trace un esquema de la gráfica

Solución: Puesto que $A = 1$, $B = -3$, y $C = 5$, se tiene

$$\tan 2\phi = \frac{-3}{1 - 5} = \frac{3}{4}.$$

Elíjase 2ϕ de modo que $0 < 2\phi < \pi$. Entonces, puesto que $2\phi > 0$, se sabe que $0 < 2\phi < \frac{\pi}{2}$, o bien $0 < \phi < \frac{\pi}{4}$.

Trazando un diagrama del triángulo rectángulo apropiado, como se muestra, por inspección se tiene que $\cos 2\phi = \frac{4}{5}$, $\operatorname{sen} 2\phi = \frac{3}{5}$. Para calcular los valores de $\cos \phi$ y $\operatorname{sen} \phi$, recuérdese de trigonometría que



$$\cos \phi = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}},$$

$$\operatorname{sen} \phi = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}.$$

Puesto que $0 < \phi < \frac{\pi}{4}$, $\cos \phi$ y $\operatorname{sen} \phi$ son positivos, es decir, debemos elegir el signo $+$ en cada caso. Así se tiene

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\operatorname{sen} \phi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Empleando estos valores en las Ecuaciones (2), página 181, se encuentra que las ecuaciones de rotación son

$$x = \frac{3x' - y'}{\sqrt{10}} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{x' + 3y'}{\sqrt{10}}.$$

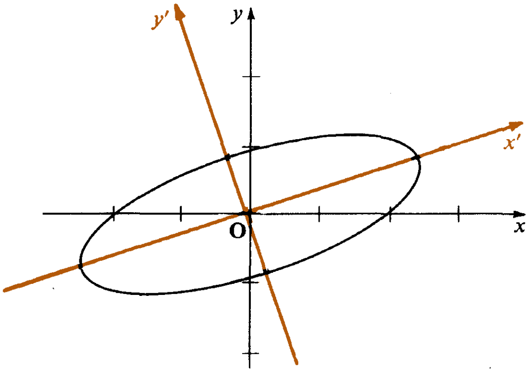
Sustituyendo estas expresiones de x y y en la ecuación $x^2 - 3xy + 5y^2 - 4 = 0$, se obtiene

$$5x'^2 + 55y'^2 = 40,$$

ó

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{\frac{8}{11}} = 1.$$

Esta es la ecuación de una elipse. A continuación se muestra su gráfica



Empleando las Ecuaciones (4) y (6) de la página 187, se obtiene alguna información directa sobre la gráfica de la ecuación general de segundo grado en dos variables (Ecuación (1), página 187). Obsérvese primero que, sumando los miembros correspondientes de las Ecuaciones (4) y (6) se obtiene

$$A' + C' = A(\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi) + C(\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi) = A + C.$$

Ahora se puede verificar (Ejercicio 20, página 191), empleando (4), (5) y (6) que

$$4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2.$$

El número $4AC - B^2$ recibe el nombre de **característica** de la Ecuación (1), y $4A'C' - B'^2$ es pues la característica de la ecuación transformada bajo una rotación. El que $4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2$ espresa que la característica es **invariante** bajo una rotación de ejes. Claro está, que en $A' + C' = A + C$, el número $A + C$ también es invariante bajo una rotación de ejes.

Uno de los propósitos de una rotación de ejes es proporcionar una ecuación transformada en la que $B' = 0$. Por la invariancia de la característica, si $B' = 0$, se tiene

$$4A'C' = 4AC - B^2. \tag{12}$$

Ya se ha visto que (página 177) la gráfica de

$$A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

donde A' y C' no son ambos 0, es del tipo elíptico si $A'C' > 0$, del tipo parabólico si $A'C' = 0$, y del tipo hiperbólico si $A'C' < 0$. Entonces, debido a la Ecuación (12) se tiene:

■ La gráfica de $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es
(1) de tipo elíptico si $4AC - B^2 > 0$,
(2) de tipo parabólico si $4AC - B^2 = 0$, y
(3) de tipo hiperbólico si $4AC - B^2 < 0$.

Ejemplo 2. Diga de qué tipo es la gráfica de

(a) $3x^2 - 14xy + 9x - 7y + 13 = 0$
(b) $6x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 3y - 41 = 0$
(c) $3x^2 - 12xy + 3y^2 + 6x - 4y + 8 = 0$
(d) $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 14x + 22y - 7 = 0$

Solución:
(a) $4AC - B^2 = (4)(3)(0) - 196 = -196 < 0$; hiperbólico
(b) $4AC - B^2 = (4)(6)(1) - 4 = 20 > 0$; elíptico
(c) $4AC - B^2 = (4)(3)(3) - 144 = -108 < 0$; hiperbólico
(d) $4AC - B^2 = (4)(3)(3) - 36 = 0$; parabólico

Ejercicios 5—3

En los Ejercicios 1–6, calcule los valores de sen ϕ y cos ϕ tales que ϕ defina una rotación de ejes que elimine el término en $x'y'$.

1. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

2. $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x + 8y - 32 = 0$

3. $2x^2 + \sqrt{3}xy + 5y^2 + x - 3y + 8 = 0$

4. $3xy - \sqrt{3}y^2 + 7x - 4y + 10 = 0$

5. $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 5x - 4y - 13 = 0$

6. $x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x + 3y + 12 = 0$

En los Ejercicios 7–12, emplee la característica para identificar el tipo de gráfica de la ecuación dada. Emplee una rotación de ejes para eliminar el término en $x'y'$. Trace un esquema de la gráfica y muestre tanto los ejes x y y como los ejes x' y y'. [*Sugerencia*: Parta de las Ecuaciones (4) y (9), página 187.]

7. $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 16$

8. $x^2 - 3xy + y^2 = 5$

9. $3x^2 + 4\sqrt{3}xy - y^2 = 15$

10. $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 25$

11. $7x^2 - 4xy + 4y^2 = 240$

12. $5x^2 - 12xy = 10$

En los Ejercicios 13–18, emplee una rotación de ejes para eliminar el término en $x'y'$ y emplee después una traslación para eliminar los términos de primer grado en la ecuación resultante. [*Sugerencia*: Emplee las Ecuaciones (4) y (9) página 187.]

13. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 5 = 0$

14. $4x^2 + 4xy + y^2 - 24x + 38y - 139 = 0$

15. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2\sqrt{3}x - 3y - 3 = 0$

16. $3xy - 4y^2 + x - 2y + 1 = 0$

17. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

18. $2x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x + 8y - 32 = 0$

Los Ejercicios 19—23, se refieren a la ecuación general cuadrática

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

* **19.** Verifique las Ecuaciones (4) y (9), página 187.

* **20.** Demuestre que $4AC - B^2$ es invariante bajo rotación de ejes.

* **21.** Demuestre que $A + C$ y $4AC - B^2$ son invariantes bajo una traslación de ejes.

La expresión $\Delta = 4ACF - B^2F - AE^2 - CD^2 + BDE$ que se menciona en los Ejercicios 22 y 23 recibe el nombre de **discriminante** de la ecuación general cuadrática. El discriminante Δ es invariante frente a traslaciones y rotaciones de ejes.

* **22.** Demuestre que si $D = 0$, $E = 0$, y $4AC - B^2 \neq 0$, entonces

$$F = \frac{\Delta}{4AC - B^2}.$$

Explique porqué F es invariante bajo rotaciones de ejes si $D = 0$, $E = 0$, y $4AC - B^2 \neq 0$.

* **23.** Demuestre que el discriminante $\delta = b^2 - 4ac$ de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, se puede escribir en la forma

$$\delta = -\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix},$$

y que el discriminante Δ (véase la página 191) se puede escribir en la

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}$$

5—4 Tangentes a las secciones cónicas

Considérese una parte de una curva dada (Figura 5 – 5) que contiene a los puntos $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$, y considérese la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$. Pensemos que $\mathbf{S}_2$ es una partícula que se desliza sobre la curva hacia $\mathbf{S}_1$, entonces se puede ver que la distancia que separa a $\mathbf{S}_1$ de $\mathbf{S}_2$ disminuye cada vez más y que de esta manera se puede hacer tan pequeña como se quiera. Se dice entonces que $\mathbf{S}_2$ **tiende a** $\mathbf{S}_1$ sobre $\mathcal{C}$ y que $\mathbf{S}_1$ es el **límite** de $\mathbf{S}_2$ en esas circunstancias.

En la Figura 5 – 5 se ve que a medida que $\mathbf{S}_2$ tiene a $\mathbf{S}_1$ sobre $\mathcal{L}_2$ la posición de la recta $\mathcal{L}_2$ se puede acercar a la posición de la recta $\mathcal{L}_1$. En tal caso, se dice que $\mathcal{L}_1$ es la **tangente** a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\mathbf{S}_1$.

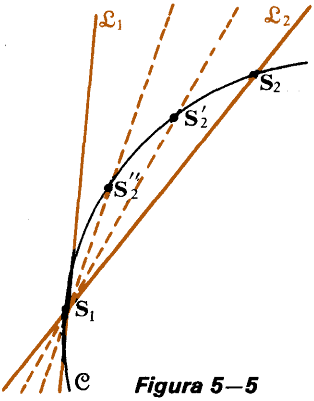


Figura 5—5

En esta sección estudiaremos el problema de obtener una ecuación de la recta tangente a una sección cónica $\mathcal{C}$ en un punto dado de ella. Para la solución de este problema se considerará el caso particular de una sección cónica que pase por el origen, y se estudiará el proceso de obtener la ecuación de una recta tangente a $\mathcal{C}$ en el origen.

Obsérvese primero que la gráfica $\mathcal{C}$ de cualquier ecuación se segundo grado contiene al origen si y sólo si su término constante es 0. Es decir, la gráfica $\mathcal{C}$ de

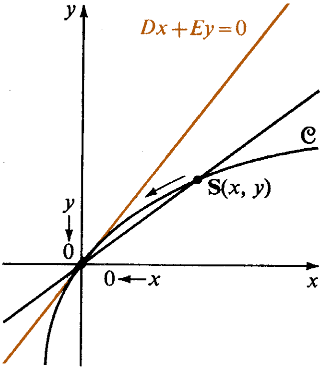
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

contiene al origen si y sólo si $F = 0$.

Nótese ahora que para valores de k tales que $0 < |k| < 1$, no sólo se tiene que $k^2 < |k|$, sino que al disminuir el valor de $|k|$, disminuye más rápidamente. Por ejemplo, al tomar k los valores $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, y $\frac{1}{1000}$, k^2 toma los valores $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10\,000}$, y $\frac{1}{1\,000\,000}$, respectivamente. Análogamente, para $0 < |h| < 1$ y $0 < |k| < 1$, si tanto h como k tienden a cero, entonces hk tiende a cero más rápidamente que el mayor de los valores de $|h|$ y $|k|$.

Considérese ahora el comportamiento de los diversos términos de la Ecuación (1), con $F = 0$, cuando tanto x como y tienden a 0, es decir, cuando el punto $\mathbf{S}(x, y)$ sobre la curva $\mathcal{C}$ tiende al origen **O** sobre $\mathcal{C}$. Nótese que los términos Ax^2, Bxy, y Cy^2 decrecen en valor absoluto mucho más rápidamente que el mayor de los valores $|x|$ y $|y|$. Por lo tanto, las coordenadas de los puntos $\mathbf{S}(x, y)$ que están sobre $\mathcal{C}$ y están *cerca del origen* no sólo satisfacen la Ecuacion (1), sino que satisfacen *aproximadamente* la ecuación $Dx + Ey = 0$.

Figura 5—6



Supóngase que D y E no son ambos 0. Entonces, como se muestra en la Figura 5—6, es plausible concluir que a medida que un punto $\mathbf{S}(x, y)$ sobre $\mathcal{C}$ tiende al **O** sobre $\mathcal{C}$, la recta que pasa por **S** y **O** tiende a la recta cuya ecuación es $Dx + Ey = 0$. Este razonamiento conduce al siguiente resultado, que no se demostrará en este libro:

Una ecuación de la tangente a la gráfica de $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0$, en el origen, si por lo menos uno de los números D ó E no es cero, está dada por $Dx + Ey = 0$.

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación de la tangente a la gráfica de

$$3x^2 + 4y^2 + 2x - 3y = 0$$

en el origen.

Solución: Por inspección, $D = 2$ y $E = -3$. Por lo tanto, la ecuación requerida es $2x - 3y = 0$.

El método que se ha discutido es aplicable a las gráficas de polinomios en general. Por ejemplo, la gráfica $\mathcal{G}$ de

$$x^6 - 7x^3y^2 + y^4 + 2x - 3y = 0$$

pasa por el origen **O**, puesto que el término constante es 0. Una ecuación de la recta tangente a $\mathcal{G}$ en **O** es $2x - 3y = 0$.

Frecuentemente se desea obtener una ecuación de la tangente a una sección cónica en un punto que no sea el origen. Aunque existen técnicas (de cálculo diferencial) para hacer esto directamente, es más sencillo realizar una traslación de ejes de modo que el punto en cuestión sea el nuevo origen. Se obtiene entonces la ecuación deseada mediante el método que se ha estudiado. Se efectúa entonces una segunda traslación regresando a los ejes originales para obtener la ecuación de la tangente requerida.

Ejemplo 2. Obtenga una ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que es tangente en el punto S(2, -1) a la elipse cuya ecuación es $x^2 + 4y^2 = 8$.

Solución: Nótese primero que el punto S(2, -1), está de hecho sobre la elipse, puesto que $(2)^2 + 4(-1)^2 = 8$.

Ahora, si se tome (2, -1) como nuevo origen, las ecuaciones de traslación son

$$x = x' + 2 \qquad \text{y} \qquad y = y' - 1.$$

Sustituyendo estos valores de x y y en la ecuación de la elipse, se obtiene

$$\begin{aligned}(x' + 2)^2 + 4(y' - 1)^2 &= 8,\\ x'^2 + 4x' + 4 + 4y'^2 - 8y' + 4 &= 8,\\ x'^2 + 4y'^2 + 4x' - 8y' &= 0.\end{aligned}$$

Ahora nótese que esta ecuación tiene un término constante 0, y que por lo tanto su gráfica contiene al origen en el sistema de coordenadas x' y y'. Entonces por inspección,

$$4x' - 8y' = 0,$$

o bien

$$x' - 2y' = 0,$$

es una ecuación de la recta $\mathcal{L}$ que es tangente a la elipse en el origen del sistema de coordenadas x' y y'. Si ahora se efectúa una traslación que reestablezca el sistema de coordenadas x y y empleando las ecuaciones

$$x' = x - 2 \qquad \text{y} \qquad y' = y + 1,$$

se obtiene

$$(x - 2) - 2(y + 1) = 0,$$

o bien

$$x - 2y - 4 = 0,$$

que es una ecuación en las variables x y y de la recta $\mathcal{L}$.

Para comparar técnicas se puede emplear este método general para resolver el Ejemplo 4, página 127.

Ejercicios 5—4

En los Ejercicios 1–8, obtenga una ecuación cartesiana de la tangente a la curva dada en el origen.

1. $x^2 - 3x + 4y = 0$
2. $y^2 + 7x - 5y = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$
4. $x^2 + y^2 + 3x + 5y = 0$
5. $3x^2 + 2y^2 + 6x - 9y = 0$
6. $4x^2 + 9y^2 - 4x + 6y = 0$
7. $x^2 - y^2 + 5x + 2y = 0$
8. $9y^2 - 6x^2 + 2x - y = 0$

En los Ejercicios 9–28, emplee la técnica mencionada en el Ejemplo 2, página 194, para obtener una ecuación en las variables *x* y *y* de la tangente a la curva cuya ecuación se da, en el punto con las coordenadas que se indican.

9. $x^2 + 2x - 3y + 1 = 0;\ (2, 3)$
10. $y^2 - 5x + 4y + 3 = 0;\ (3, 2)$
11. $x^2 + y^2 = 5;\ (-2, -1)$
12. $x^2 + y^2 = 25;\ (4, -3)$
13. $4x^2 + 9y^2 = 72;\ (-3, -2)$
14. $6x^2 + 3y^2 = 54;\ (1, -4)$
15. $x^2 - y^2 = -5;\ (2, -3)$
16. $5y^2 - 2x^2 = 18;\ (-1, -2)$

17. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0;\ (1, 3)$
18. $x^2 + y^2 - 3x + 7y + 2 = 0;\ (2, 0)$
19. $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1;\ (4, -3)$
20. $3x^2 + y^2 + 4x - 3y + 1 = 0;\ (-1, 3)$
21. $4x^2 - 3y^2 + 6x - 2y + 12 = 0;\ (2, -4)$
22. $y^2 - 2x^2 + 3x - 4y + 2 = 0;\ (-2, -2)$
23. $x^2 + 4xy - 3y^2 - 1 = 0;\ (2, 3)$
24. $10x^2 - 24xy + 3y^2 + 2x - 3y + 12 = 0;\ (1, 1)$
25. $3x^2 - 14xy + 9x - 7y + 30 = 0;\ (1, 2)$
26. $6x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 3y - 60 = 0;\ (3, 0)$
27. $3x^2 - 12xy + 3y^2 + 6x - 4y - 55 = 0;\ (2, -1)$
28. $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 14x + 22y = 0;\ (3, -3)$

* **29.** Demuestre que la tangente a la curva cuya ecuación es

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en cualquier punto de la curva tiene una ecuación de la forma

$$Ax_1x + B\left(\frac{x_1y + y_1x}{2}\right) + Cy_1y + D\left(\frac{x + x_1}{2}\right) + E\left(\frac{y + y_1}{2}\right) + F = 0.$$

[*Sugerencia*: Efectúe una traslación de ejes con $(h, k) = (x_1, y_1)$.]

* **30.** Demuestre que si la recta $\mathcal{L}$ es tangente a la parábola $\mathcal{P}$ cuya ecuación es $y^2 = 4px$ en el punto $\mathbf{A}(x_1, y_1)$ sobre $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{L}$ interseca al eje x en el punto $\mathbf{B}(-x_1, 0)$. [*Sugerencia:* Emplee el Ejercicio 29.]

* **31.** Emplee el resultado del Ejercicio 29 para demostrar que la pendiente m de la tangente está dada por

$$m = -\frac{2Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + 2Cy_1 + E}.$$

Otros métodos

5—5 Obtención de tangentes por el método del discriminante (Optativo)

Se vio en la Sección 5—4 que se puede pensar que la recta $\mathcal{L}_1$ tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto S_1 de $\mathcal{C}$ es la posición límite (si existe dicha posición límite) de la recta $\mathcal{L}_2$ que pasa por los puntos S_1 y S_2, cuando S_2 tiende a S_1 sobre $\mathcal{C}$. En esta sección, se estudiará esta situación desde un punto de vista ligeramente distinto. Refiriéndose a la Figura 5—5, página 192, se ve que la recta $\mathcal{L}_2$ interseca a la curva $\mathcal{C}$ en dos puntos S_1 y S_2. Cuando S_2 tiende a S_1, y $\mathcal{L}_2$ tiende a $\mathcal{L}_1$, los dos puntos de intersección de $\mathcal{L}_2$ con $\mathcal{C}$ se acercan el uno al otro, hasta que, intuitivamente, se convierten en un solo punto, al llegar $\mathcal{L}_2$ a la posición límite de $\mathcal{L}_1$. Por lo tanto, intuitivamente se puede pensar que el punto de tangencia es un punto de "doble intersección". Este concepto es análogo al de una raíz "doble" de una ecuación cuadrática.

Recuérdese de estudios de álgebra que la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

determina las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, en términos de los coeficientes reales a, b y c. El valor del discriminante $b^2 - 4ac$, determina la naturaleza de las raíces. Así para $b^2 - 4ac > 0$, hay dos raíces reales distintas, mientras que si $b^2 - 4ac = 0$, hay sólo una raíz real que se puede pensar intuitivamente es una raíz "doble", si se piensa que el discriminante es una variable que tiende a cero. En la Figura 5 – 7 se muestra esta situación gráficamente.

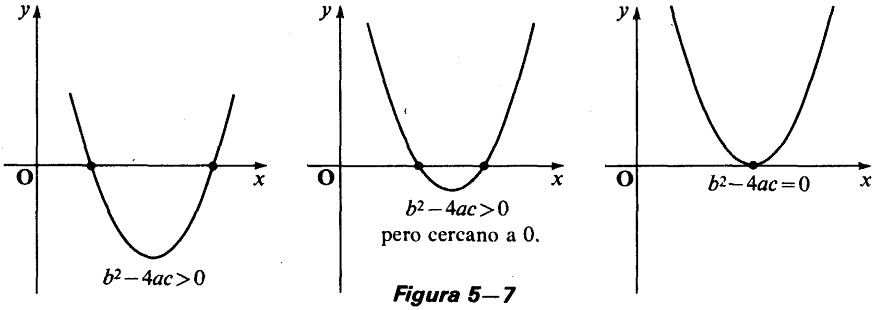


Figura 5—7

Se pueden combinar los conceptos de "punto de intersección doble" y de "raíz doble" de una ecuación cuadrática para construír un artificio que permite calcular cuáles son las tangentes a las secciones cónicas, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Una recta y una cónica no degenerada tienen 0, 1 ó 2 puntos en común. Tienen exactamente un punto común si y sólo si, o bien la recta es tangente a la sección cónica, o bien, en el caso de que la sección cónica sea una parábola, si la recta es paralela a su eje, y si la sección cónica es una hipérbola, la recta es paralela (pero no coincidente) a una de sus asíntotas.

Ejemplo 1. Dos rectas que pasan por el punto **R**$(-3, 4)$ son tangentes a la parábola $\mathcal{P}$ cuya ecuación es $y^2 = 16x$. Obtenga las ecuaciones de estas rectas.

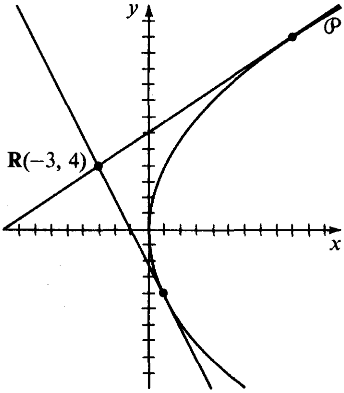
Solución: Nótese primero que la recta vertical que pasa por **R**$(-3, 4)$ no tiene ningún punto en común con la parábola, pues para cada punto de la parábola se tiene $x = \dfrac{y^2}{16} \geq 0$, y en consecuencia $x \neq -3$. Cualquier recta no vertical que pase por **R**$(-3, 4)$ tiene una ecuación de la forma

$$y - 4 = m(x + 3),$$

o bien

$$y = mx + 3m + 4. \qquad (1)$$

Si se resuelve esta ecuación simultáneamente con la ecuación $y^2 = 16x$, la solución (o soluciones) que se obtienen son las coordenadas del (o los) punto(s) de intersección de la recta y la parábola.



Si $m = 0$ en la Ecuación (1), la recta es paralela al eje de la parábola; existe pues un sólo punto de intersección en este caso, pero no es un punto de tangencia.

Si se despeja a x en función de y y m, $m \neq 0$, en la Ecuación (1) se obtiene

$$x = \frac{y - 3m - 4}{m}.$$

Sustituyendo este valor de x en la ecuación $y^2 = 16x$, se obtiene

$$y^2 = 16\left(\frac{y - 3m - 4}{m}\right),$$

$$my^2 = 16y - 48m - 64,$$

o bien

$$my^2 - 16y + 48m + 64 = 0. \qquad (2)$$

Comparando esta ecuación con la ecuación $ay^2 + by + c = 0$, $a \neq 0$, se ve que $a = m$, $b = -16$, y $c = 48m + 64$. El discriminante de (2) es entonces

$$\begin{aligned}(-16)^2 - 4(m)(48m + 64) &= 256 - 192m^2 - 256m \\ &= -192m^2 - 256m + 256.\end{aligned}$$

Ahora las soluciones de la Ecuación (2) son las coordenadas y de los puntos de intersección de la recta con la parábola. Para que exista tangencia, se desea que estos puntos sean uno solo; es decir, se desea que la Ecuación (2) con $m \neq 0$, tenga una sola solución. Para que esto suceda el discriminante de (2) debe ser 0:

$$-192m^2 - 256m + 256 = 0,$$

ó

$$-64(3m^2 + 4m - 4) = 0.$$

Esta ecuación es equivalente a

$$(3m - 2)(m + 2) = 0,$$

de donde se tiene

$$m = \tfrac{2}{3} \qquad ó \qquad m = -2.$$

Las ecuaciones de las rectas que pasan por **R**$(-3, 4)$ con pendientes $\frac{2}{3}$ y -2, respectivamente, son

$$y - 4 = \tfrac{2}{3}(x + 3) \qquad y \qquad y - 4 = -2(x + 3),$$

ó

$$2x - 3y + 18 = 0 \qquad y \qquad 2x + y + 2 = 0;$$

y por lo tanto estas ecuaciones son las ecuaciones de las dos tangentes pedidas.

En el ejemplo 1, la ecuación de las rectas $y - 4 = m(x + 3)$, representa a una **familia** de rectas que pasan por el punto **R**$(-3, 4)$. (Véase la Figura 5–8.) La pendiente m recibe el nombre de *parámetro* de la familia, puesto que cada valor de m define a un miembro de la familia, del mismo modo que el parámetro r en una ecuación paramétrica vectorial de una recta (página 49) determina un punto sobre la recta. La recta vertical, cuya ecuación es $x = -3$ también es miembro de esta familia.

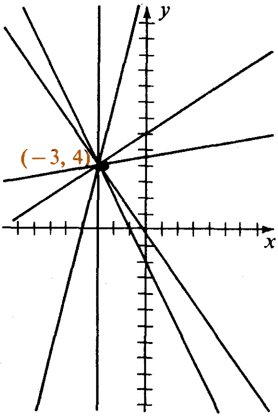


Figura 5–8

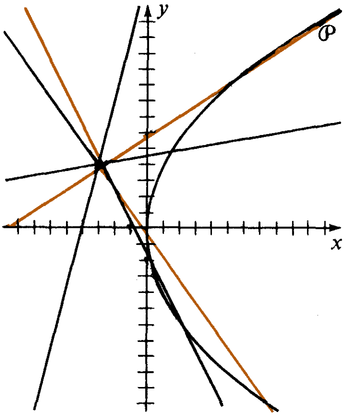


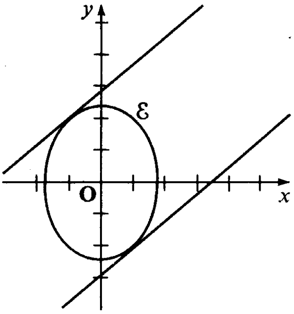
Figura 5–9

El problema planteado en el Ejemplo 1 se puede considerar como el de seleccionar de los miembros de esta familia aquellos dos que son tangentes a la parábola (rectas de color en la Figura 5–9).

El siguiente ejemplo se refiere a otra familia de rectas en la cual todos los miembros tienen la misma pendiente.

Ejemplo 2. Obtenga las ecuaciones de las rectas de pendiente $\frac{5}{6}$ que son tangentes a la elipse $\mathcal{E}$ cuya ecuación es

$$5x^2 + 3y^2 - 17 = 0.$$



Solución: Cada miembro de la familia de rectas de pendiente $\frac{5}{6}$ tiene una ecuación de la forma $y = \frac{5}{6}x + b$. Sustituyendo a y por $\frac{5}{6}x + b$ en la ecuación de la elipse se obtiene

$$5x^2 + 3(\tfrac{5}{6}x + b)^2 - 17 = 0,$$

$$5x^2 + 3\left(\frac{5x + 6b}{6}\right)^2 - 17 = 0,$$

$$5x^2 + \tfrac{3}{36}(25x^2 + 60bx + 36b^2) - 17 = 0,$$

$$60x^2 + 25x^2 + 60bx + 36b^2 - 204 = 0,$$

o bien

$$85x^2 + 60bx + 36b^2 - 204 = 0.$$

El discriminante de esta ecuación es

$$(60b)^2 - 4(85)(36b^2 - 204),$$

o bien

$$240(-36b^2 + 289).$$

Igualando el segundo factor a 0, tenemos

$$-36b^2 + 289 = 0,$$

o bien

$$b^2 = \tfrac{289}{36}.$$

Entonces,

$$b = \tfrac{17}{6} \quad \text{o bien} \quad b = -\tfrac{17}{6}.$$

Sustituyendo a b en la ecuación $y = \frac{5}{6}x + b$ por $\frac{17}{6}$ y $-\frac{17}{6}$, sucesivamente, se obtienen las ecuaciones de las tangentes pedidas,

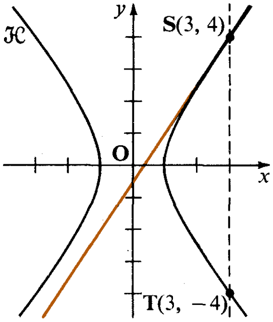
$$5x - 6y + 17 = 0 \qquad \text{y} \qquad 5x - 6y - 17 = 0.$$

Se puede emplear el método del discriminante para obtener una ecuación de la tangente a una sección cónica en un punto dado de la curva, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Obtenga una ecuación de la tangente en el punto S(3, 4) a la hipérbola $\mathcal{H}$ cuya ecuación es

$$x^2 - \frac{y^2}{2} = 1.$$

Solución: Nótese primero que **S** está sobre $\mathcal{H}$, puesto que $3^2 - \frac{4^2}{2} = 9 - 8 = 1$. La recta vertical que pasa por **S** también contiene al punto **T**(3, −4) en común con $\mathcal{H}$; por lo tanto, esta recta no es tangente a $\mathcal{H}$. Cualquier recta no vertical que pase por **S** tiene una ecuación de la forma



$$y - 4 = m(x - 3),$$

o bien

$$y = 4 + m(x - 3).$$

Sustituyendo este valor de y en la ecuación dada de $\mathcal{H}$, se obtiene

$$x^2 - \frac{[4 + m(x - 3)]^2}{2} = 1, \quad ó$$

$$(2 - m^2)x^2 + (-8m + 6m^2)x + (-9m^2 + 24m - 18) = 0. \tag{3}$$

Si $2 - m^2 = 0$, entonces la recta es paralela a una asíntota de la hipérbola, puesto que las pendientes de las asíntotas son $\pm\sqrt{2}$; hay un solo punto de intersección para $m = \pm\sqrt{2}$, pero no es un punto de tangencia.

Si $2 - m^2 \neq 0$, entonces la Ecuación (3) tiene dos raíces, al menos que su discriminante sea 0:

$$(-8m + 6m^2)^2 - 4(2 - m^2)(-9m^2 + 24m - 18) = 0.$$

Esta ecuación se reduce a

$$16(2m - 3)^2 = 0, \tag{4}$$

que es equivalente a

$$2m - 3 = 0, \quad ó \quad m = \tfrac{3}{2}.$$

La recta que pasa por **S** y que tiene pendiente $\frac{3}{2}$ tiene una ecuación

$$y = 4 + \tfrac{3}{2}(x - 3),$$

ó

$$3x - 2y - 1 = 0,$$

y por lo tanto ésta es la ecuación de la tangente pedida.

En el Ejemplo 3 no es en realidad necesario verificar al principio que el punto dado **S** esté sobre la sección cónica $\mathcal{K}$. El hecho de que sólo hay un valor de m en el conjunto de soluciones de la Ecuación (4) implica que **S** está sobre $\mathcal{K}$. Si hay dos valores $m \in \mathcal{R}$ en el conjunto de soluciones, como en el Ejemplo 1, página 197, entonces el punto dado está "fuera" de la sección cónica dada; es decir, cualquier porción conexa de la sección cónica presentaría una apariencia convexa al ser vista desde el punto. Si no existe $m \in \mathcal{R}$ en el conjunto de soluciones (por ejemplo, si la ecuación que determina m es $m^2 + 1 = 0$), entonces el punto está "dentro" de la cónica.

Para comparar técnicas se suguiere emplear el método más general que se ha presentado ahora para resolver el Ejemplo 4, página 127.

Ejercicios 5—5

En los Ejercicios 1—8, obtenga ecuaciones de todas las rectas que pasan por el punto **S** y que son tangentes a la curva cuya ecuación se da.

1. $S(0, 0)$; $y = x^2 + 4$
2. $S(0, 0)$; $y = x^2 + 1$
3. $S(0, 0)$; $x = y^2 + 9$
4. $S(0, 0)$; $x = -y^2 - 1$
5. $S(-3, 3)$; $y^2 + 3x = 0$
6. $S(-1, 0)$; $x^2 + y + x = 0$
7. $S(0, -3)$; $x^2 + y + 1 = 0$
8. $S(3, 0)$; $y^2 - 4x + 8 = 0$

En los Ejercicios 9—14, obtenga ecuaciones de todas las rectas que tienen la pendiente dada y que son tangentes a la curva cuya ecuación se da.

9. $m = 1$; $x^2 + y^2 = 8$
10. $m = \frac{3}{2}$; $x^2 + y^2 = 13$
11. $m = 1$; $y^2 = 4x - 8$
12. $m = 1$; $y^2 = 4x$
13. $m = 2$; $3x^2 + 2y = 0$
14. $m = -\frac{1}{2}$; $y^2 - 6x = 0$

En los Ejercicios 15—20, obtenga ecuaciones de todas las rectas que cumplen con las condiciones dadas.

15. Tangente a la curva cuya ecuación es $x^2 + 4y^2 - 4x + 6y = 0$, y es miembro de la familia con ecuaciones de la forma $y = \frac{2}{3}x + b$.
16. Tangente a la curva cuya ecuación es $y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$, y es miembro de la familia con ecuaciones de la forma $y = \frac{2}{3}x + b$.
17. Tangente a la curva cuya ecuación es $y = 4 - x^2$, y pasa por el punto **R**$(0, 5)$.
18. Tangente a la curva cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 4y = 16$, y pasa por el punto **R**$(2, 4)$.
19. Tangente a la curva cuya ecuación es $x^2 + 4y^2 = 4$, y es paralela a la gráfica de $x - 2y = 0$.
20. Tangente a la curva cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 40$, y es paralela a la gráfica de $3x - y = 4$.
21. Demuestre que si la recta cuya ecuación es $y = mx + k$ es tangente a la parábola cuya ecuación es $y^2 = 4px$, entonces $k = \dfrac{p}{m}$.

* **22.** Demuestre que si la recta con ecuación $y = mx + k$ es tangente a la elipse cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

entonces

$$k = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

* **23.** Demuestre que si la recta con ecuación $y = mx + k$ es tangente a la hipérbola que tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

entonces

$$k = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

Resumen del capítulo

1. Si se trasladan los ejes x y y de tal forma que el origen del nuevo sistema de coordenadas esté en un punto de coordenadas x' y y' sean (h, k), entonces las viejas coordenadas (x, y) y las nuevas coordenadas (x', y') de un punto están relacionadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned}$$

o, equivalentemente a través de

$$\begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k. \end{aligned}$$

2. Las **traslaciones** y **rotaciones** de ejes se emplean para transformar una ecuación que no esté en una forma familiar a una forma tal que la naturaleza y propiedades de su gráfica se puedan determinar por inspección.

3. Completando cuadrados en x y y se puede escribir una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A \neq 0 \text{ y } \quad C \neq 0,$$

o bien,

$$A(x - h)^2 + C(y - k)^2 = q, \qquad \text{donde } q \text{ es constante.}$$

Si $A \neq 0$ y $C = 0$, entonces se puede escribir la ecuación en forma equivalente como $A(x - h)^2 = q(y - k)$ ó $A(x - h)^2 = q$. Si $A = 0$ y $C \neq 0$, las formas son $C(y - k)^2 = q(x - h)$ y $C(y - k)^2 = q$. Entonces, empleando una traslación de ejes con $x' = x - h$ y $y' = y - k$, se puede transformar estas ecuaciones a formas ordinarias cuyas gráficas se reconocen fácilmente.

4. La intersección de un plano con un cono circular recto de dos ramas recibe el nombre de **sección cónica.** Si el plano no pasa por el vértice del cono, entonces la intersección es una circunferencia, elipse, parábola o hipérbola. Si el plano pasa por el vértice del cono entonces la intersección es un punto, una recta, o un par de rectas que se intersecan; estas intersecciones reciben el nombre de *cónicas degeneradas.* Otras cónicas degeneradas son un par de rectas paralelas distintas y el $\emptyset$.

5. Cada uno de los lugares geométricos mencionados en el párrafo 4 tiene una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde no todos los números A, B y C son nulos. Recíprocamente cada ecuación de esta forma tiene como gráfica a uno de los lugares geométricos mencionados.

6. Si se rotan los ejes x y y alrededor del origen un ángulo ϕ, entonces las nuevas coordenadas (x', y') de un punto están relacionadas con las viejas coordenadas (x, y) a través de

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi \\ y' &= -x \operatorname{sen} \phi + y \cos \phi \end{aligned}$$

o lo que es equivalente a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \phi - y' \operatorname{sen} \phi \\ y &= x' \operatorname{sen} \phi + y' \cos \phi. \end{aligned}$$

7. Para una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A, B, C \text{ no todos } 0,$$

se puede obtener una ecuación equivalente en las variables x' y y' en la cual el coeficiente de x' y y' es 0, mediante una rotación de ejes. Si $A \neq C$, entonces ϕ queda determinado por la ecuación

$$\tan 2\phi = \frac{B}{A - C}.$$

Si $A = C$, entonces 2ϕ no está definido y se conviene en que $\phi = \frac{\pi}{4}$.

8. La **característica** $4AC - B^2$ de una ecuación de segundo grado en dos variables es **invariante** bajo una rotación de ejes; es decir,

$$4A'C' - B'^2 = 4AC - B^2.$$

La expresión $A + C$ también es invariante bajo una rotación.

9. La gráfica de una ecuación de segundo grado en dos variables es
una circunferencia o una elipse si $4AC - B^2 > 0$ (un punto, $\emptyset$),
una parábola si $4AC - B^2 = 0$ (una recta, dos rectas paralelas, $\emptyset$),
una hipérbola si $4AC - B^2 < 0$ (dos rectas que se intersecan).

Las gráficas que se mencionan entre paréntesis son los casos degenerados.

10. Si una recta y una cónica no degenerada tienen exactamente un punto en común, entonces, con las dos siguientes excepciones, la recta es **tangente** a la sección cónica en el punto en común.
Excepciones: Una recta paralela al eje de una parábola, y una recta paralela, pero que no coincide con, una asíntota de una hipérbola.

11. Una ecuación de la recta tangente en el origen a la gráfica de

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0 \qquad (F = 0),$$

en donde al menos uno de los números D y E es no nulo se tiene

$$Dx + Ey = 0.$$

12. Para obtener una ecuación de la tangente a una sección cónica en el punto $S(h, k)$ que no sea el origen:
   1. Trasládense los ejes coordenados de modo que el origen del sistema x' y y' esté en el punto $S(h, k)$, y obténgase la ecuación de la cónica en las variables x' y y' bajo esta traslación.
   2. Empléese el resultado mencionado en el párrafo 11 para encontrar una ecuación de la tangente en las variables x' y y'.
   3. Transfórmese esta ecuación, en la ecuación requerida efectuando una traslación de ejes de modo que los ejes queden en su posición original.

13. (Optativo) Para un punto dado **S**, las ecuaciones de todas las tangentes a una sección cónica $\mathcal{C}$, que pasan por **S** se pueden obtener por el método del discriminante. Existen dos tangentes tales si **S** está "fuera" de $\mathcal{C}$, y nunguna si **S** está "dentro" de $\mathcal{C}$.

Ejercicios de repaso del capítulo

En los Ejercicios 1—4, obtenga una ecuación en las variables x' y y' de la gráfica de la ecuación dada en las variables x y y si el origen del sistema x' y y' está sobre el punto cuyas coordenadas se dan.

1. $4x^2 - 9y^2 + 24x - 36y - 60 = 0$; $(-3, -2)$
2. $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$; $(4, 6)$
3. $x^2 - 4x + 3y + 2 = 0$; $(2, -1)$
4. $y^2 - 8y - 4x + 12 = 0$; $(-1, 4)$

En los Ejercicios 5—8, obtenga una ecuación cartesiana de la sección cónica que satisface las condiciones dadas. Trace un esquema de la curva.

5. Circunferencia con centro en $S(3, -4)$ y radio 5.
6. Elipse con focos en $F_1(-1, 8)$ y $F_2(-1, 2)$ y con eje menor de longitud 8.
7. Parábola con vértice en $V(2, 7)$ y foco en $F(2, 3)$.
8. Hipérbola con centro en $S(2, 4)$, con eje transversal de longitud 10 y con excentricidad $\frac{13}{5}$.

9. Encuentre las coordenadas x' y y' de un punto cuyas coordenadas (x, y) son $(5, -3)$ si se rotan los ejes un ángulo de 30°.

10. Obtenga una ecuación en las variables x' y y' de la gráfica de $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 25$ si se rotan los ejes un ángulo de 45°.

11. Obtenga una ecuación en las variables x' y y' de la gráfica de $8x^2 + 12xy + 13y^2 = 884$ si se rotan los ejes un ángulo ϕ tal que

$$\cos\phi = \frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{3}{\sqrt{13}}\cdot$$

12. Rote los ejes x y y de modo que una recta $\mathcal{L}$ con ecuación $3x + 4y = 7$ tenga una pendiente 0 con respecto a los ejes x' y y', y obtenga una ecuación en las variables x' y y' de esta recta.

13. Emplee la característica $4AC - B^2$ para identificar el tipo de gráfica correspondiente a cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $3x^2 - 12xy - 3y^2 + 2x - 4y + 5 = 0;$
(b) $x^2 - 7xy + 12y^2 - 3x + 8y - 21 = 0;$
(c) $2x^2 + 5xy - 4y^2 + x - 2y + 17 = 0.$

14. Mediante una rotación de ejes obtenga una ecuación en las variables x' y y' que carezca de término en x' y y' y que sea equivalente a la ecuación

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 24x + 38y - 139 = 0.$$

Emplee una traslación de ejes para obtener una ecuación equivalente en las variables x'' y y'' que carezca de términos de primer grado.

15. Obtenga una ecuación de la tangente en el origen a la curva dada por

$$8x^2 - 6xy + 9y^2 + 13x - 24y = 0.$$

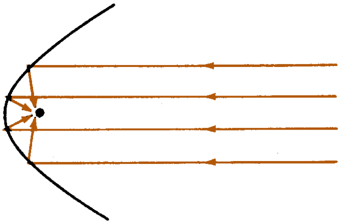
16. Obtenga una ecuación de la recta que es tangente en el punto $S(2, -2)$ a la curva cuya ecuación es $3x^2 + 8xy - 4y^2 + 5x - 7y + 12 = 0$.

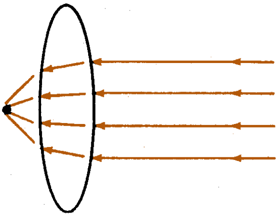
17. Obtenga las ecuaciones de las tangentes en el origen a la curva dada por la ecuación $x = y^2 - y + 1$.

18. Obtenga las ecuaciones de todas las rectas de pendiente —1 que son tangentes a la curva cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 25$.

Propiedades de reflexión de las secciones cónicas

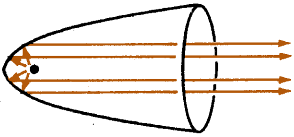
Los gigantescos radiotelescopios de Parkes, Australia y Jodrell Bank, Inglaterra, así como el de Andover, Maine y todos los demás radiotelescopios, son telescopios *reflectores*. Esto quiere decir que *por reflexión* concentran ondas de radio paralelas, incidentes, débiles en un punto focal, como se ilustra a la izquierda. Estos telescopios reflectores se usan para estudiar sistemas galácticos distantes, cuásares, etc., así como para observar y ayudar a dirigir vehículos espaciales.





La mayoría de los telescopios astronómicos destinados a recolectar luz emplean el mismo principio de reflexión, en lugar del principio de refracción que se ilustra a la derecha.

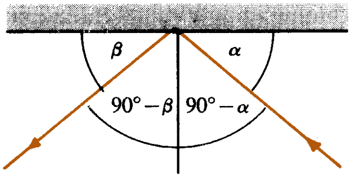
El principio de reflexión se usa inversamente en los faros de los automóviles, que arrojan un haz de rayos casi paralelos emitidos por un pequeño foco eléctrico.



Teóricamente la superficie reflectora de un telescopio reflector tiene la forma de un paraboloide de revolución, es decir, de una superficie generada por la rotación de una parábola alrededor de su eje (véase el Capítulo 10). Algunos de los grandes radiotelescopios reflectores cubren una región tan extensa de la superficie de la Tierra que deben construirse mediante un gran número de pequeños paneles reflectores que están colocados en puntos discretos sobre un paraboloide de revolución. El eje y el foco de la parábola son el eje y el foco respectivamente del paraboloide, y las ondas inciden paralelas al eje reflejándose por el foco.

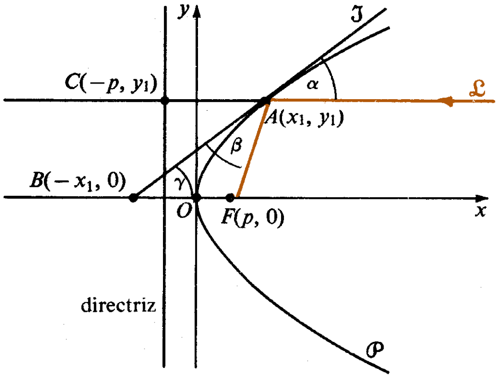
Incidentalmente la palabra "foco" se deriva de la palabra latina que quiere decir "hogar" o "chimenea". Fue introducida al lenguaje científico por Johann Kepler (1571—1630) en 1604.

Considérese ahora el por qué una parábola (y en consecuencia un paraboloide de revolución) tiene la propiedad de reflexión que se mencionó anteriormente. Sólo debe recordarse de Física, que cuando la luz, o una onda de radio, se refleja en una superficie lisa, el ángulo $90° - \beta$ de reflexión tiene la misma medida que el ángulo $90° - \alpha$ de incidencia.



La parábola $\mathcal{P}$ cuya ecuación es $y^2 = 4px$, $p > 0$, tiene su eje sobre el eje x. Sea $\mathcal{L}$, la recta paralela a ese eje y que interseca a $\mathcal{P}$ en el punto

$A(x_1, y_1)$, como se muestra en la figura siguiente, y sea $\mathfrak{T}$ la recta tangente a $\mathcal{P}$ en A. Sea α el ángulo entre $\mathcal{L}$ y $\mathfrak{T}$ sea β el ángulo entre $\mathfrak{T}$ y el segmento AF, y sea γ el ángulo formado por $\mathfrak{T}$ y el eje de $\mathcal{P}$ como se muestra en la figura. Es claro que,



$$m°(\gamma) = m°(\alpha), \tag{1}$$

puesto que $\mathcal{L}$ es paralela al eje x.

Sea B el punto de intersección de $\mathfrak{T}$ con el eje de la parábola. Se viò en el Ejercicio 30, página 195, que las coordenadas de B son $(-x_1, 0)$.

Sea C el punto de intersección de $\mathcal{L}$ con la directriz de la parábola. Entonces las coordenadas de C son $(-p, y_1)$.

Obsérvese en la figura que $d(A, C) = x_1 + p$ y también que $d(B, F) = x_1 + p$. Por lo tanto

$$d(B, F) = d(A, C). \tag{2}$$

Nótese también que por definición de parábola,

$$d(A, F) = d(A, C). \tag{3}$$

De las Ecuaciones (2) y (3(se sigue que

$$d(A, F) = d(B, F),$$

y según esto ABF es un triángulo isósceles con vértice en F. Por consiguiente,

$$m°(\beta) = m°(\gamma). \tag{4}$$

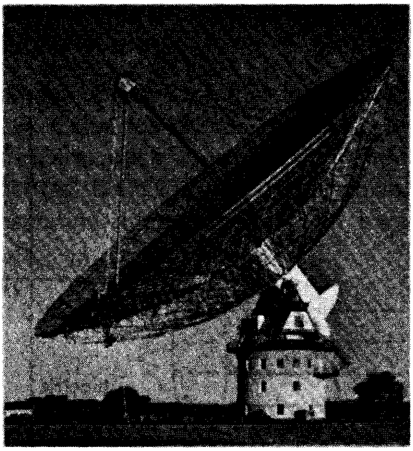
De las Ecuaciones (1) y (4) se sigue que

$$m°(\beta) = m°(\alpha),$$

y entonces

$$m°(90° - \beta) = m°(90° - \alpha).$$

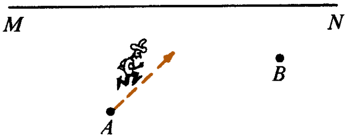
Tenemos pues que, por el principio físico de reflexión, las ondas incidentes paralelas al eje se reflejan en forma tal que pasan por el foco.



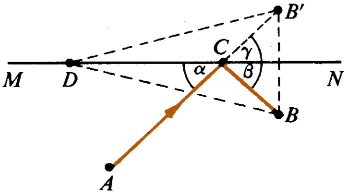
Este gigantesco radiotelescopio, situado en Parkes, Australia tiene un diámetro de 64 m y recibe ondas de radio provenientes del sistema solar, la galaxia y de nebulosas extragalácticas.

La elipse y la hipérbola tienen también propiedades de reflexión que son interesantes. Se pueden obtener analíticamente por el mismo método que se empleó en el caso de la parábola, pero aquí se presentará un argumento más intuitivo.

Si un hombre desea llegar lo más pronto que sea posible del punto A al punto B, tocando en el trayecto la pared MN, como se muestra en la figura,



¿Qué trayectoria debe elegir? Suponiendo que el terreno sea plano, y despreciando el tiempo que tarda en dar vuelta al tocar la pared, naturalmente eligiría recorrer segmento de recta del punto A al punto C sobre MN y después del punto C al punto B. ¿Pero cómo elegir el punto C? La contestación a esta pregunta es simple si se piensa en la reflexión B' de B sobre MN, es decir, en el punto sobre la recta perpendicular a MN que pasa por B y que está a la misma distancia de MN que B, pero que está al otro lado de MN. El hombre debe caminar directamente hacia B' hasta llegar al punto C sobre MN, y de allí debe dirigirse directamente de C a B.



En la figura anterior se ve que

$$\overline{AD} + \overline{DB'} > \overline{AC} + \overline{CB'}$$

donde D es cualquier punto de MN que sea distinto a C, y que por lo tanto

$$\overline{AD} + \overline{DB} > \overline{AC} + \overline{CB}.$$

En la figura se ve también que

$$m^\circ(\beta) = m^\circ(\gamma),$$

y que

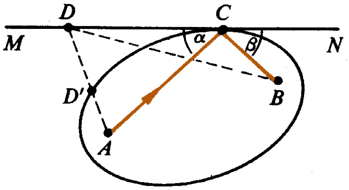
$$m^\circ(\gamma) = m^\circ(\alpha),$$

y que por lo tanto

$$m^\circ(\beta) = m^\circ(\alpha) \quad \text{y} \quad m^\circ(90^\circ - \beta) = m^\circ(90^\circ - \alpha).$$

Por consiguiente el punto C está también caracterizado por el hecho que el ángulo $90^\circ - \beta$ de reflexión es de la misma medida que el ángulo $90^\circ - \alpha$ de incidencia.

Considérese ahora que los puntos A y B son los focos de una elipse $\mathcal{E}$ y MN es una recta tangente a $\mathcal{E}$ en el punto C. Si el viajero debe tocar MN en algún punto al ir de A a B, ¿Qué punto de MN debe elegir? En la figura se ve fácilmente que



$$\overline{AD} + \overline{DB} > \overline{AD'} + \overline{D'B}.$$

Pero por definición de elipse, también se tiene que

$$\overline{AD'} + \overline{D'B} = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Por lo tanto,

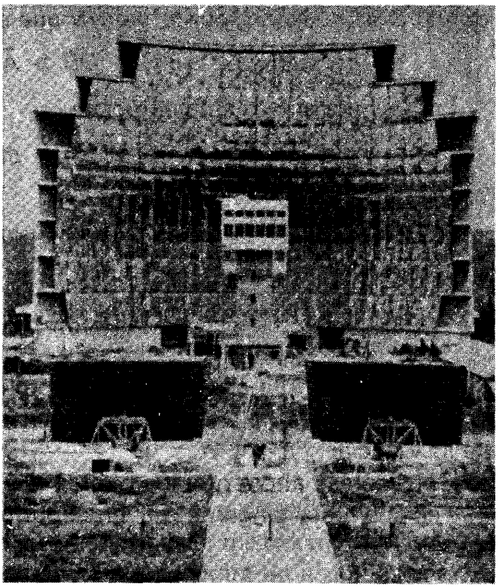
$$\overline{AD} + \overline{DB} > \overline{AC} + \overline{CB},$$

y según esto el viajero debe elegir el punto de tangencia para completar el recorrido en el mínimo tiempo posible.

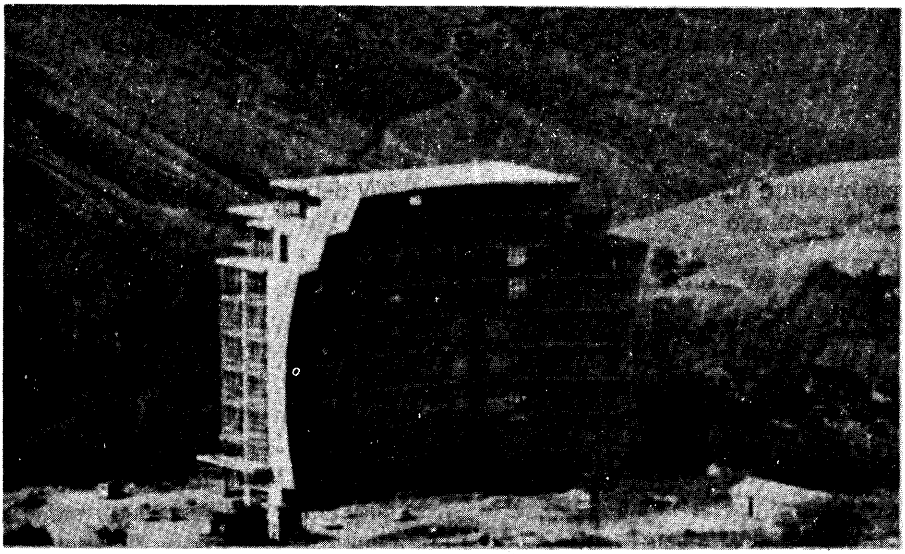
De esto se sigue que, *una recta tangente a una elipse forma ángulos de la misma medida con los radios focales que van al punto de tangencia.*

En el ejemplo anterior se puede reemplazar al viajero por un rayo de luz, y a la pared por una superficie reflectora, puesto que, debido al Principio de Fermat, la luz viaja también de A a B tocando la pared en forma tal que el tiempo total sea mínimo.

Esto indica que si se coloca material combustible de un foco de un reflector elíptico, este material se puede encender colocando una fuente de calor en el otro foco.



La caldera solar que se muestra en su etapa de construcción y en su forma final a la derecha, está situada en Odeillo, en los Pirineos franceses. La superficie reflectora de este espejo parabólico mide 54 X 40 m, formada por muchos espejos pequeños.

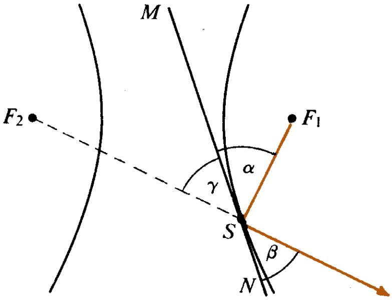


El mismo principio se aplica a las "galerias del murmullo". Un alfiler que se deje caer sobre el punto focal de Mormon Tabernacle en la ciudad Salt Lake, se escucha fácilmente en el otro foco que está a una distancia considerable.

Se cuenta que las paredes del Ratskeller en Bremen eran de forma más o menos elíptica, y que los consejales de la ciudad se enteraban muy a tiempo de lo que acontecía en la ciudad bebiendo vino tranquilamente en una mesa que estaba cerca de un punto focal, mientras que los ciudadanos se divertían en otra mesa cerca del otro punto focal.

Una recta *MN* que sea tangente a una hipérbola forma también ángulos de la misma medida con los radios focales que van al punto *S* de tangencia; es decir, en la siguiente figura

$$m°(\alpha) = m°(\gamma). \tag{5}$$



Si β es el complemento del ángulo de reflexión de un rayo de luz que va de F_1 a *S* en el espejo hiperbólico que se muestra, entonces

$$m°(90° - \beta) = m°(90° - \alpha)$$

puesto que el ángulo de reflexión tiene la misma medida que el ángulo de incidencia. Entonces,

$$m°(\beta) = m°(\alpha). \tag{6}$$

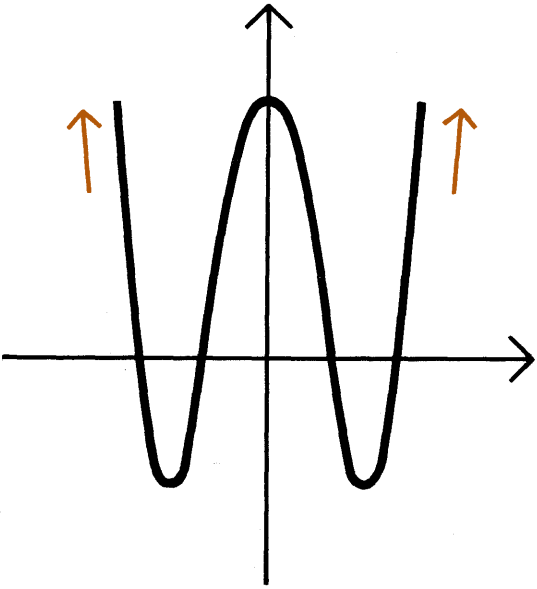
Por lo tanto, debido a las Ecuaciones 5 y 6

$$m°(\beta) = m°(\gamma),$$

y según esto el rayo se refleja a lo largo de una prolongación del segmento $\overline{F_2S}$. Por lo tanto, *parece* que el rayo provenga de F_2.

Una aplicación importante de los espejos hiperbólicos es el Telescopio Cassegrain, que emplea tanto un espejo parabólico como un hiperbólico. El foco escondido del espejo Cassegrain coincide con el de un espejo parabólico, y por lo tanto la luz que proviene del espejo parabólico y que parece converger hacia un foco se refleja totalmente en el otro foco.

Capítulo 6



A lo largo de este capítulo se estudiarán varias técnicas para trazar gráficas de polinomios y de funciones racionales. También se discutirán técnicas para sumar ordenadas y para trazar gráficas de ecuaciones paramétricas.

Trazo de Curvas

Trazo de gráficas de polinomios y funciones racionales

6—1 Polinomios

En estudios anteriores se menciona que una **función** f es un conjunto de pares ordenados (a, b), en el cual no hay dos segundas componentes que correspondan a la misma primera componente. El conjunto formado por las primeras componentes reciben el nombre de **dominio** de la función, y el conjunto formado por las segundas componentes se llama el **rango*** de la función. La asociación de los elementos del dominio con los del rango, formando pares, se lleva a cabo frecuentemente mediante una fórmula, tal como $x^2 + 2x$, en donde la variable x denota a un elemento del dominio y la variable $y = x^2 + 2x$ al elemento asociado del rango. El elemento particular y que se asocia al elemento dado x en la función f se denota mediante $f(x)$ (léase "f de x"). Se emplean también otros símbolos como F y G para denotar funciones.

En este libro se supondrá, al menos que se indique lo contrario, que el dominio de toda función que se menciona es el conjunto de números reales para el cual la fórmula empleada resulte en valores reales de los elementos del rango. Así las fórmulas $x^2 + 2x$ y $\dfrac{x}{(x - 1)(x + 2)}$ definen las funciones

$$f = \{(x, f(x)) : f(x) = x^2 + 2x\}$$

y

$$F = \left\{(x, F(x)) :\ F(x) = \frac{x}{(x - 1)(x + 2)}\right\},$$

donde el dominio de la función f es $\mathcal{R}$, mientras que el dominio de la función F es el conjunto de números reales excluyendo a 1 y —2.

En el Capítulo 2 se estudiaron las funciones lineales que están definidas por ecuaciones de la forma $y = mx + b$, que se pueden escribir como

$$l(x) = a_0x + a_1, \qquad a_0 \neq 0.$$

En el Capítulo 4 se estudiaron las funciones cuadráticas que son ecuaciones de la forma

$$q(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, \qquad a_0 \neq 0.$$

---

*Nota del T. También se le suele llamar contradominio.

Estos son casos particulares de un tipo de función más general, llamada *función polinomial.* Cualquier ecuación de la forma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (1)$$

donde las a_i son constantes, $a_0 \neq 0$, y n es un entero no negativo, define una **función polinomial** P. El segundo miembro de la Ecuación (1) recibe el nombre de **polinomio de grado** n. Por ejemplo, el polinomio $x^3 - 4$ es de grado 3, y el polinomio 7 es de grado 0. (La constante 0 recibe el nombre de **polinomio cero**; ya que no se le asigna ningún grado).

Puesto que en la Ecuación (1) el conjunto de valores de x es $\mathcal{R}$ y las $a_i \in \mathcal{R}$, la función P tiene una gráfica en $\mathcal{R}^2$ y se dice que es una **función polinomial real**. Por conveniencia trazaremos las gráficas de funciones empleando un sistema de coordenadas x y y sin importar que designación se le dé a la función. Así diremos que $P(0)$ o $f(0)$ es la intersección con el eje y de la función P o f, o de cualquier otra función que se emplee.

Al trazar gráficas de funciones polinomiales de grado mayor que 2 usualmente es necesario prestar más atención a la localización en el plano de puntos, más que en el caso de funciones lineales o cuadráticas. Existen sin embargo varias propiedades de las funciones polinomiales que son útiles al trazar sus gráficas.

1. *Término dominante.* Para valores de x con $|x|$ suficientemente grandes el primer término a_0x^n, del polinomio que aparece en el segundo miembro de

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad a_0 \neq 0,$$

"domina" a los demás términos del polinomio, en el sentido de que es mayor (tanto como se desee) en el valor absoluto que la suma de los términos restantes. Como consecuencia se puede obtener la forma general de la gráfica de una función polinomial real en regiones relativamente lejanas del origen examinando el grado del polinomio y el coeficiente del término de mayor grado. Si n es *par* (pero no nulo) y a_0 es *negativo,* entonces la gráfica se comporta como se sugiere en la Figura 6—1(a).

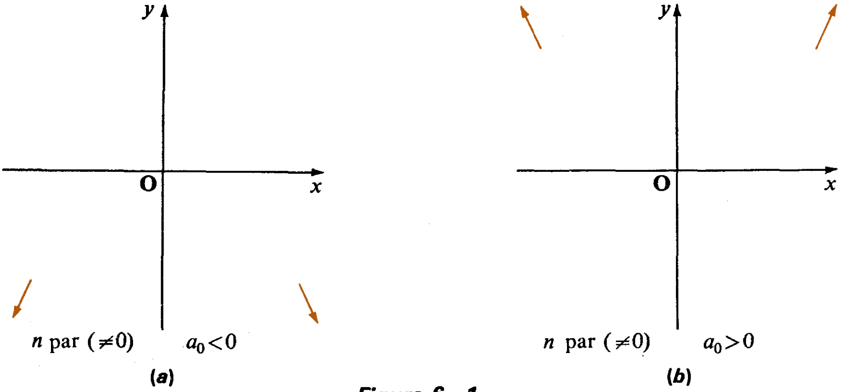
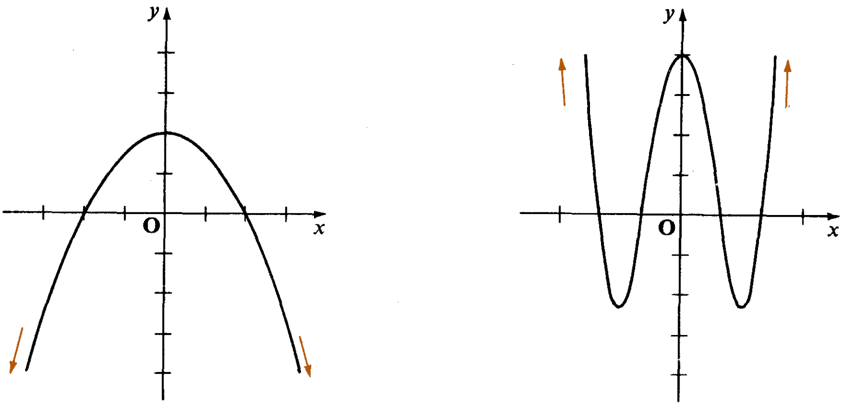


Figura 6—1

Pero si n es *par* (pero no nulo) y a_0 es *positivo* entonces la gráfica se comporta como se indica en la Figura 6—1(b).

En la Figura 6—2 se muestran ejemplos de este comportamiento.



$P(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$
$n=2 \quad a_0=-\frac{1}{2}$

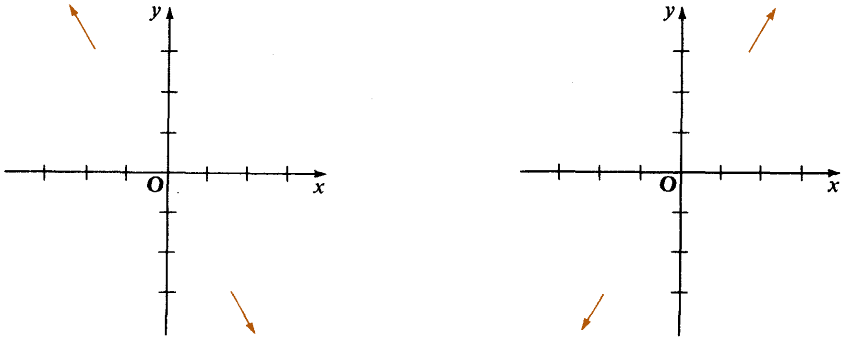
(*a*)

$P(x)=x^4-5x^2+4$
$n=4 \quad a_0=1$

(*b*)

Figura 6—2

Por otra parte, si la función polinomial es de grado *impar*, entonces en regiones suficientemente alejadas del origen el comportamiento general es del tipo que se muestra en la Figura 6—3.



n impar $\quad a_0<0$

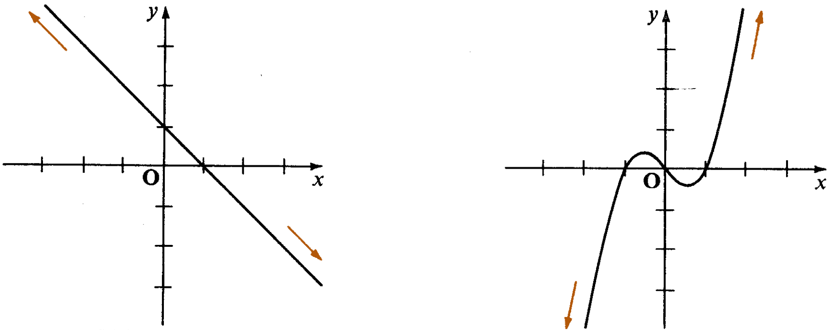
(*a*)

n impar $\quad a_0>0$

(*b*)

Figura 6—3

En la Figura 6—4 se muestran algunos ejemplos de este tipo de comportamiento.



$P(x) = -x+1$
$n=1 \quad a_0 = -1$

(*a*)

$P(x) = x^3 - x$
$n=3 \quad a_0 = 1$

(*b*)

Figura 6–4

2. *Puntos críticos.* En la Figura 6 – 5 se muestran partes de algunas gráficas típicas de funciones polinomiales. Al examinar estas gráficas de izquierda a derecha se ve que a veces la gráfica sube y a veces baja. Los puntos en los que deja de subir para empezar a bajar, o en los que deja de bajar para empezar a subir, se llaman **puntos críticos** o **máximos (mínimos) locales.**

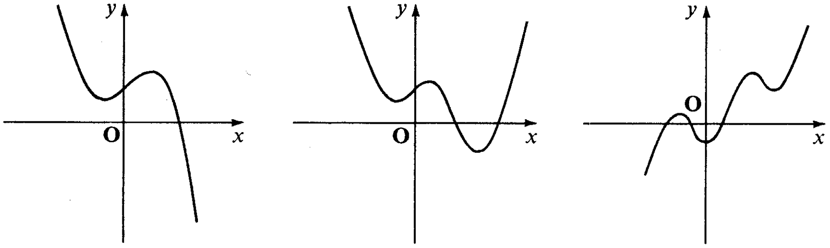


Figura 6–5

Al estudiar cálculo se demuestra que la gráfica de una función polinomial real de grado $n, n \geq 1$, tiene a lo sumo $n - 1$ puntos críticos, y que, de no ser este el caso, entonces tiene menos puntos críticos que $n - 1$ y que la diferencia de $n - 1$ con este número es un múltiplo de 2. Por lo tanto, la gráfica de una función polinomial de primer grado no tiene puntos críticos (véase la Figura 6 – 4(a)) y la gráfica de una función polinomial de segundo grado tiene un punto crítico (véase la Figura 6 – 2(a)). La gráfica de una función polinomial de tercer grado puede tener dos puntos críticos (véase la Figura 6 – 4 (b)) o puede no tener puntos críticos (véase la Figura 6 – 2(b)) o un punto crítico (por ejemplo $P(x) = x^4$). Análogamente la gráfica de una función polinomial de quinto grado puede tener 4, 2 ó 0 puntos críticos.

3. *Intersecciones con los ejes.* La gráfica de

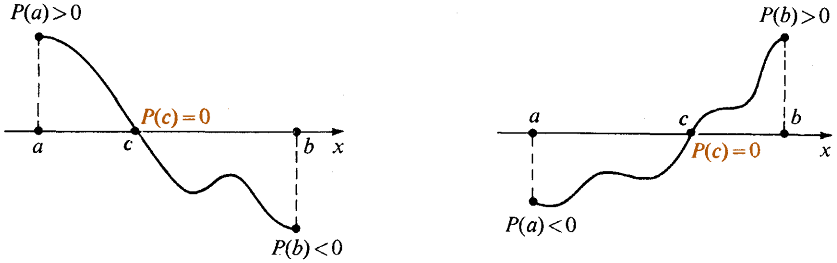
$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad a_0 \neq 0,$$

interseca claramente al eje y en a_n.

Los valores de x para los cuales

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{2}$$

son las intersecciones con el eje x. Son por lo tanto las **raíces** de la ecuación $P(x) = 0$. Estos valores de x se pueden obtener a veces por factorización. Si no se pueden calcular, muchas veces se pueden obtener aproximadamente. Nótese que una función P polinomial es *continua* (su gráfica no presenta interrupciones para $x \in \mathcal{R}$). Por lo tanto, si para $a < b$, $P(a)$ y $P(b)$ son de signo opuesto, entonces debe existir algún valor $c, a < c < b$, para el cual $P(c) = 0$. La Figura 6–6 sugiere el porqué esto es válido.



(*a*) (*b*)

Figura 6–6

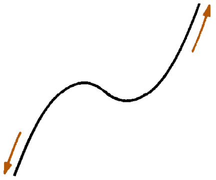
Al estudiar álgebra se aprende que un polinomio de la forma (2) tiene a lo sumo n raíces reales. Se sigue de esto que la gráfica de una función polinomial de grado n tiene *a lo más n* intersecciones con el eje x. Como se sugiere en las Figuras 6–3 y 6–4, una función polinomial de grado impar tiene al menos una intersección con el eje x.

En el siguiente ejemplo se ilustra como se emplean los hechos antes mencionados para trazar la gráfica de una función polinomial.

Ejemplo. Trace la gráfica de la función f definida por

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Solución: Nótese primero que el coeficiente del término de grado máximo del segundo miembro es positivo y que ese término es de grado 3. Esto significa que la gráfica tiene una configuración como la que se muestra en la figura, y que tiene a lo sumo dos puntos críticos. Por inspección de la ecuación que define la función se obtiene que la intersección con el eje y es 2.



(*Continúa solución*)

Factorizando el polinomio que aparece en el segundo miembro de la ecuacion que define la función se obtiene

$$
\begin{aligned}
x^3 - 2x^2 - x + 2 &= x^2(x - 2) - (x - 2) \\
&= (x - 2)(x^2 - 1) \\
&= (x - 2)(x - 1)(x + 1).
\end{aligned}
$$

Como esta expresión vale 0 cuando x es 2, 1 ó —1, estos números indican las intersecciones con el eje x. Por consiguiente se conocen las coordenadas de los siguientes puntos de la gráfica.

x	0	2	1	-1
y	2	0	0	0

Para obtener un diagrama más preciso se pueden identificar algunos otros puntos. Es decir,

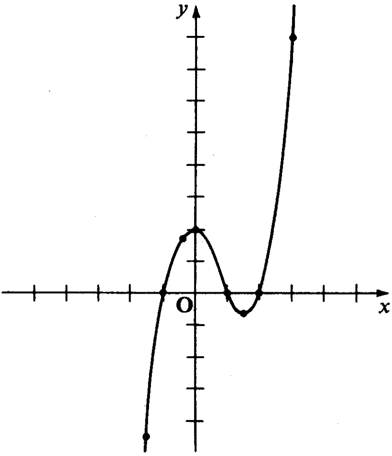
$$
\begin{aligned}
f(-\tfrac{3}{2}) &= (-\tfrac{3}{2})^3 - 2(-\tfrac{3}{2})^2 - (-\tfrac{3}{2}) + 2 \\
&= -\tfrac{27}{8} - \tfrac{9}{2} + \tfrac{3}{2} + 2 = -4\tfrac{3}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(-\tfrac{1}{2}) &= (-\tfrac{1}{2})^3 - 2(-\tfrac{1}{2})^2 - (-\tfrac{1}{2}) + 2 \\
&= -\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 2 = 1\tfrac{7}{8}
\end{aligned}
$$

$$f(\tfrac{3}{2}) = (\tfrac{3}{2})^3 - 2(\tfrac{3}{2})^2 - (\tfrac{3}{2}) + 2 = \tfrac{27}{8} - \tfrac{9}{2} - \tfrac{3}{2} + 2 = -\tfrac{5}{8}$$

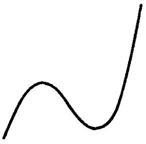
$$f(3) = 3^3 - 2(3^2) - 3 + 2 = 27 - 18 - 3 + 2 = 8.$$

Cuando se añaden los puntos $(-\tfrac{3}{2}, -4\tfrac{3}{8})$, $(-\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{7}{8})$, $(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{5}{8})$, y $(3, 8)$, que se han obtenido, se obtiene la gráfica que se muestra a continuación.

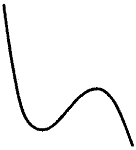


Ejercicios 6—1

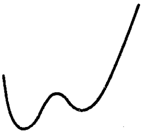
En los Ejercicios 1—10, la ecuación dada define una función cuya gráfica tiene una de las siguientes formas generales. En cada caso identifique la forma o formas apropiadas. (En algunos casos pueden existir dos posibilidades).



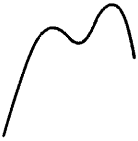
(*a*)



(*b*)



(*c*)



(*d*)

(*e*)

(*f*)

Ejemplo. $F(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 1$

Solución: La gráfica de la ecuación puede tener a lo sumo dos punto críticos, y el término dominante del polinomio tiene coeficiente negativo. La única posibilidad por lo tanto es (b).

1. $F(x) = -2x^4 + x^2 - 3x + 2$
2. $G(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$
3. $H(x) = 2x^5 - 3x^2 + x - 5$
4. $F(x) = -4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
5. $G(x) = -x^5 + 2x^3 + x^2 - 3$
6. $H(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
7. $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 2x + 1$
8. $G(x) = -\frac{2}{3}x^5 + x^4 - 3x^3 + 2$
9. $H(x) = 4x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x$
10. $J(x) = 2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 5x + 1$

En los Ejercicios 11—26,trace la gráfica de la función definida por la ecuación dada.

11. $f(x) = x^3$
12. $g(x) = -2x^3$
13. $f(x) = x^2 - x^3$
14. $g(x) = \frac{1}{4}(x^3 - x^2)$
15. $F(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$
16. $G(x) = \frac{1}{2}(x^3 - x)$
17. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
18. $h(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$
19. $f(x) = x^4$
20. $F(x) = -\frac{1}{4}x^4$
21. $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3$
22. $g(x) = x - x^4$
23. $f(x) = (x - 1)^2(x - 2)$
24. $g(x) = (x - 1)(4 - x^2)$
25. $f(x) = x(1 - x)^3$
26. $g(x) = (x^2 - 1)(x - 2)^2$

* **27.** Demuestre que la gráfica de $y = ax^4 + bx^2 + c$ tiene la propiedad de que si contiene al punto (x_1, y_1), entonces también contiene al punto $(-x_1, y_1)$. Cualquier función cuya gráfica tenga esta propiedad es una **función par**. Nótese que la gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.

* **28.** Demuestre que la gráfica de $y = ax^5 + cx^3 + ex$ tiene la propiedad de que sí contiene al punto (x_1, y_1), entonces también contiene al punto $(-x_1, -y_1)$. Cualquier función cuya gráfica tenga esta propiedad es una **función impar**. Se dice que las funciones impares son **simétricas con respecto al origen**.

6—2 Funciones racionales. Asíntotas verticales

Se define una **función racional** mediante una ecuación de la forma

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios que no tengan factores comunes que contengan a x, y donde $g(x)$ no es el polinomio cero.

Contrariamente a lo que sucede en el caso de los polinomios, una función racional puede tener un dominio que no sea $\mathcal{R}$. Claramente, cualquier valor de x para el que $g(x) = 0$ debe excluirse del dominio. Si $g(c) = 0$, entonces $f(c) \neq 0$ pues $f(x)$ y $g(x)$ no tiene factores comunes que contengan a x. La existencia de un número real c tal, dá a la gráfica de una función racional un carácter propio, como se ve en lo que se expone a continuación. Debido a que una función polinomial es continua si $g(c) = 0$ y $f(c) \neq 0$, entonces en la vecindad de c, $|g(x)|$ debe ser muy pequeño, y $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ debe ser muy grande. Si para un valor de x cercano a $c, f(x)$ y $g(x)$ son del mismo signo entonces $F(x)$ es grande y positivo; pero si $f(x)$ y $g(x)$ tienen signos opuestos, entonces $F(x)$ es grande y negativo.

Por ejemplo, el valor absoluto de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+2)}$$

aumenta indefinidamente al acercarse x a 1 y —2, puesto que al estar x en la vecindad de 1 ó —2 el denominador de la fracción es muy pequeño (es decir cercano a cero) mientras que el numerador se acerca a 1 ó —2. Por consiguiente la gráfica de f se aproxima a las gráficas de $x = 1$ y $x = -2$ como sugieren las flechas que aparecen en la Figura 6—7. Claro está que la curva no puede comportarse de todas estas formas puesto que es la gráfica de una función. Se pueden identificar las direcciones de esta gráfica en particular analizando los signos (+ ó —) que están asociados con el

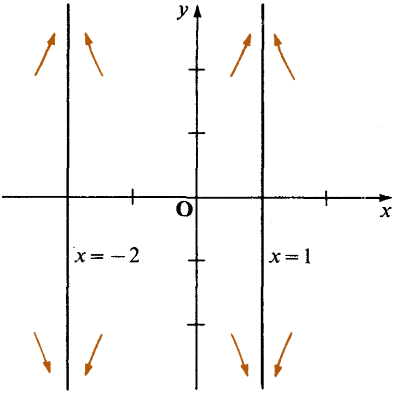
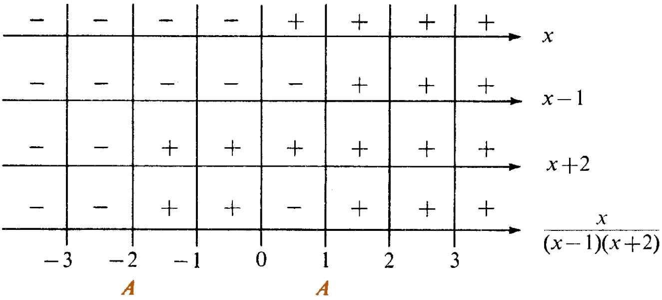


Figura 6—7

numerador y el denominador de la fracción que define a la función, y de esta manera determinando el signo de la ordenada en varios intervalos de x. Un artificio práctico para llevar esto a cabo es una *gráfica de signos.*

En la Figura 6 – 8 se muestra una gráfica de signos de la función $\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$. La gráfica de signos se construye indicando en el renglón superior el intervalo de números reales en el cual x es positivo $(x > 0)$ y el intervalo en el cual x es negativo $(x < 0)$. El segundo y el tercer renglón muestran, en forma análoga, en que intervalos $x - 1$ es positivo $(x > 1)$ y negativo $(x < 1)$, y donde $x + 2$ es positivo $(x > -2)$ y negativo $(x < -2)$. Los signos del último renglón se obtienen identificando aquellos intervalos en los que hay un número par o impar de factores negativos respectivamente. Este último renglón indica en que intervalos es positivo $\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$ y en que intervalos es negativo. La letra A indica los valores de x que están excluidos del dominio de la función.



−	−	−	−	+	+	+	+	x
−	−	−	−	−	+	+	+	$x-1$
−	−	+	+	+	+	+	+	$x+2$
−	−	+	+	−	+	+	+	$\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$

Figura 6 – 8

La información que aparece en la Figura 6 – 8 permite identificar las regiones en las que la gráfica no tiene puntos. Estas regiones prohibidas están sombreadas en la Figura 6 – 9. Combinando esta información con la que se obtiene de la Figura 6 – 7 se puede trazar un esquema de la gráfica, como se muestra en la Figura 6 – 9. En la próxima sección se estudiará el comportamiento de la gráfica a la izquierda de $x = -2$ y a la derecha de $x = 1$.

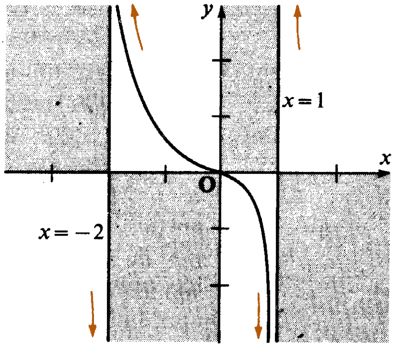


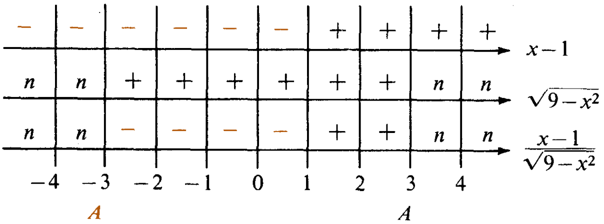
Figura 6 – 9

Las rectas tales como las gráficas de $x = -2$ y $x = 1$ que aparecen en la Figura 6 – 9 reciben el nombre de *asíntotas verticales.* En general, una **asíntota** es una recta a la cual una gráfica se acerca indefinidamente (véase la Sección 4 – 5.)

Las relaciones que no sean funciones racionales pueden tener también gráficas que tengan asíntotas verticales.

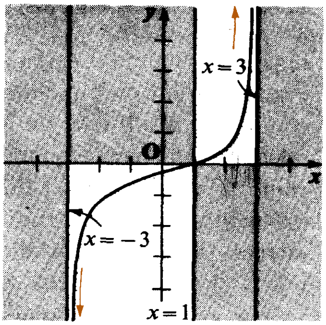
Ejemplo. Obtenga las ecuaciones de las asíntotas verticales de la gráfica de la función definida por $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{9-x^2}}$. De una representación gráfica que muestre las regiones donde la gráfica de la función no tiene puntos.

Solución: Por inspección se ve que el denominador de la fracción que define la función se anula cuando $x = 3$ y $x = -3$. Puesto que el numerador no es 0 en ninguno de estos valores, las ecuaciones de las asíntotas verticales son $x = 3$ y $x = -3$. Para



$$\frac{x-1}{\sqrt{9-x^2}},$$

el cálculo de la gráfica de signos requiere consideraciones adicionales, puesto que para $|x| > 3$ el radicando $9 - x^2$ es negativo y el denominador no está definido. Se puede emplear la letra n para indicar este hecho. Las regiones prohibidas del plano se pueden determinar como se muestra en la siguiente figura. Las flechas pequeñas de color sugieren el comportamiento asintótico de la gráfica, y se ha trazado un diagrama de la gráfica empleando las siguientes coordenadas:



x	-2	-1	0	1	2
y	-1.3	-0.7	$-\frac{1}{3}$	0	0.4

Ejercicios 6—2

En los Ejercicios 1—28,(a) obtenga las ecuaciones de las asíntotas verticales y (b) emplee una gráfica de signos como instrumento para identificar, e indicar en una figura, las regiones prohibidas del plano correspondientes a la relación definida por la ecuación dada. Emplee pequeñas flechas para sugerir el comportamiento asintótico de la gráfica.

1. $f(x) = \frac{3}{x}$

2. $g(x) = \frac{-2}{x}$

3. $h(x) = \frac{-4}{x - 2}$

4. $j(x) = \frac{3}{x + 3}$

5. $f(x) = \frac{2}{x(x + 1)}$

6. $g(x) = \frac{3}{x(x - 3)}$

7. $h(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$

8. $f(x) = \frac{2}{9 - x^2}$

9. $g(x) = \frac{2}{(x - 1)(x + 3)}$

10. $r(x) = \frac{1}{(x + 2)(x - 3)}$

11. $s(x) = \frac{x}{x + 2}$

12. $t(x) = \frac{x}{x - 3}$

13. $a(x) = \frac{-x}{x - 2}$

14. $b(x) = \frac{-x}{x + 1}$

15. $c(x) = \frac{x}{(x + 1)(x - 2)}$

16. $d(x) = \frac{x}{(x - 3)(x + 1)}$

17. $F(x) = \frac{2x}{(2x + 1)(x - 2)}$

18. $G(x) = \frac{3x}{(2x + 3)(x - 1)}$

19. $H(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 9}$

20. $F(x) = \frac{x - 3}{x^2 - 4}$

21. $G(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 3x - 10}$

22. $H(x) = \frac{3x - 2}{x^2 + 4x - 12}$

* **23.** $M(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

* **24.** $N(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 16}}$

* **25.** $Q(x) = \frac{x - 1}{x\sqrt{x^2 - 4}}$

* **26.** $R(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x(x^2 - 1)}$

* **27.** $y^2 = \frac{x}{(x - 3)(x + 1)}$

* **28.** $y^2 = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}$

6–3 Funciones racionales. Asíntotas horizontales y oblicuas

La gráfica de una función racional puede tener también asíntotas horizontales. Tales asíntotas se pueden identificar como funciones racionales, es el caso definido por

$$y = f(x) = \frac{1}{x-3}$$

despejando a x como función de y. Así se obtiene

$$x = \frac{3y+1}{y},$$

y es evidente que la gráfica de $y = 0$ (el eje x) es una asíntota de la curva pues el numerador se acerca a 1 cuando el denominador se acerca a 0.

Existe una forma más cómoda de identificar las asíntotas horizontales, a saber, estudiando el comportamiento de $f(x)$ a medida que x crece indefinidamente. Se puede demostrar que la gráfica de la función definida por

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m}, \tag{1}$$

donde $a_0, b_0 \neq 0$ con m y n enteros positivos, tiene una asíntota horizontal en

a. $y = 0$, si $n < m$;

b. $y = \dfrac{a_0}{b_0}$, si $n = m$.

c. Si $n > m$, la gráfica no tiene asíntotas horizontales.

Lo anterior puede considerarse plausible puesto que al dividir tanto el numerador como el denominador de la fracción que aparece en la Ecuación (1) por x^m se obtiene

$$y = \frac{\dfrac{a_0}{x^{m-n}} + \dfrac{a_1}{x^{m-n+1}} + \cdots + \dfrac{a_n}{x^m}}{b_0 + \dfrac{b_1}{x} + \cdots + \dfrac{b_m}{x^m}}.$$

Si $n < m$, entonces x^{m-n} es una potencia positiva y entera de x y al crecer $|x|$, cada término que contiene una potencia de x en el denominador tiende a 0. Por lo tanto y tiende a cero, y la gráfica de $y = 0$ (el eje x) es una asíntota. Si se hace una consideración parecidas para el caso $m = n$ se llega a la conclusión de que la gráfica de $y = \dfrac{a_0}{b_0}$ es una asíntota. Si $n > m$, entonces al crecer $|x|$ también crece $|y|$.

Además de la identificación de las asíntotas horizontales y verticales, y de las regiones prohibidas, hay otros conceptos que resultan útiles al trazar gráficas de funciones racionales; a saber.

1. Las intersecciones de la gráfica con los ejes x y y.
2. El signo de los valores de y al adquirir x valores cercanos a las asíntotas.
3. Seleccionar algunos puntos de la gráfica.

Ejemplo 1. Termine la representación gráfica de

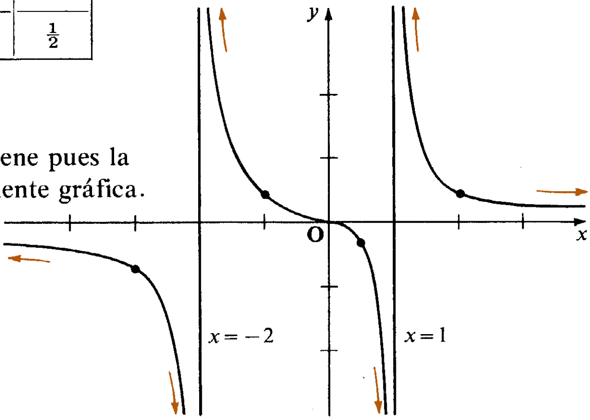
$$y = \frac{x}{(x-1)(x+2)}$$

que se empezó en la Sección 6—2.

Solución: Puesto que $y = \dfrac{x}{x^2 + x - 2}$ se ve que el grado del denominador es mayor que el grado del numerador y por lo tanto el eje x es una asíntota horizontal. Se pueden obtener las coordenadas de algunos puntos, como los siguientes.

x	-3	-1	$\frac{1}{2}$	2
y	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$

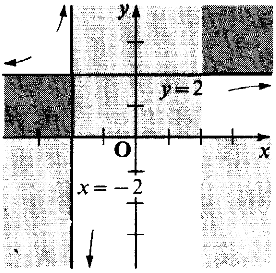
Se tiene pues la siguiente gráfica.



Ejemplo 2. Trace la gráfica de la función racional f definida por

$$y = f(x) = \frac{2x-4}{x+2}.$$

Solución: Por inspección se ve que hay una asíntota vertical en $x = -2$. Por la afirmación b de la página 224, hay una asíntota horizontal en $y = \frac{2}{1}$, o sea 2. Elaborando una gráfica de signos o realizando mentalmente con cuidado las operaciones de los signos de las expresiones $2x - 4$ y $x + 2$, se obtiene la siguiente figura, que muestra las asíntotas, así como las regiones prohibidas en color gris. Dividiendo $2x - 4$ por $x + 2$, se escribe la ecuación que define la función en la forma

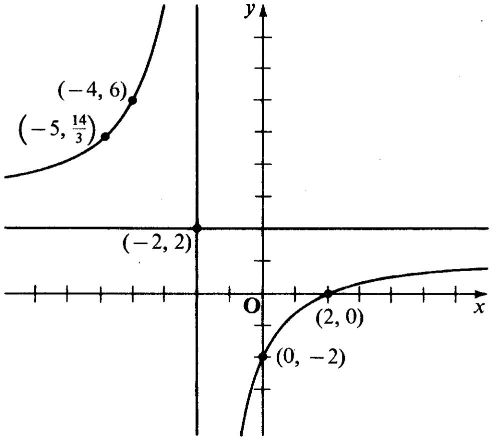


$$y = 2 - \frac{8}{x+2},$$

se ve que si $x > -2$, entonces $y < 2$, y si $x < -2$, entonces $y > 2$. Por lo tanto, las regiones en color rojo también son regiones prohibidas, y la gráfica debe acercarse a las asíntotas como lo indican las flechas.

Si $x = 0$ entonces $f(x) = -2$, y la única intersección con el eje y es -2. Si $f(x) = 0$, entonces $x = 2$, donde 2 es la única intersección con el eje x.

Finalmente colocando en la figura algunos puntos de la gráfica que estén en el segundo cuadrante, se localiza la posición de la curva y se logra terminar el trazo que se muestra en la siguiente figura



Vale la pena observar que cuando se escribe la ecuación del Ejemplo (2) en la forma equivalente

$$xy + 2y - 2x + 4 = 0, \qquad x \neq -2,$$

resulta claro que es la ecuación de una hipérbola, y efectuando una traslación de ejes apropiada, la gráfica tendría una ecuación del tipo $x'y' = k$. Se ve que la hipérbola tiene su centro en $(-2, 2)$.

Si el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, se presenta una situación especial en lo referente a las asíntotas. Considérese la función racional definida por

$$y = r(x) = \frac{2x^2 + 3x + 5}{x + 3}. \tag{2}$$

Si se divide a $2x^2 + 3x + 5$ por $x + 3$, obteniéndose

$$\begin{array}{r|l} & 2x - 3 \\ \hline x + 3 & 2x^2 + 3x + 5 \\ & \underline{2x^2 + 6x} \\ & \quad - 3x + 5 \\ & \quad \underline{- 3x - 9} \\ & \qquad\qquad 14 \end{array}$$

Así que,

$$r(x) = 2x - 3 + \frac{14}{x + 3}.$$

Si $|x|$ crece, $\left|\dfrac{14}{x+3}\right|$ se hace pequeño y es evidente que $r(x)$ se acerca a $2x - 3$ por encima si x es positivo, y por debajo si x es negativo. Por lo tanto, la gráfica de $a(x) = 2x - 3$ es una asíntota. Obsérvese que aunque la asíntota es una recta, no es paralela a ninguno de los ejes de coordenadas, es una *asíntota oblicua* de la gráfica de la Ecuación (2). Obsérvese también que cuando se escribe la ecuación en forma equivalente como $2x^2 - xy + 3x - 3y + 5 = 0$, $x \neq -3$, se le reconoce como la ecuación de una hipérbola.

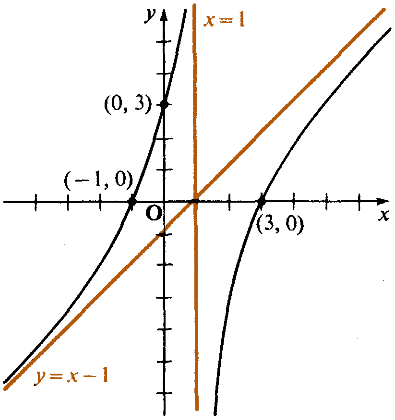
Ejemplo 3. Trace la gráfica de la función racional definida por

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}.$$

Solución: Por inspección se obtiene que hay una asíntota vertical en $x = 1$, y que no hay asíntotas horizontales. Si $x = 0$, entonces $f(x) = 3$, y 3 es la única intersección con el eje y. Si $f(x) = 0$ entonces $x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x - 3)(x + 1) = 0$ y $x = 3$ ó $x = -1$. Por lo tanto las intersecciones con el eje x son 3 y —1. Finalmente puesto que

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} = x - 1 - \frac{4}{x - 1},$$

la gráfica de $a(x) = x - 1$ es una asíntota oblicua. La gráfica se muestra en la siguiente figura.



Si $n > m + 1$ en la Ecuación (1), página 224, entonces el polinomio $Q(x)$ que se obtiene al dividir el numerador por el denominador será de segundo orden, o de orden superior. En tal caso la gráfica de la función racional se aproxima a la gráfica del polinomio Q tanto como se quiera.

Ejercicios 6—3

En los Ejercicios 1—18, trace la gráfica de la función racional definida por la ecuación dada.

1. $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$

2. $g(x) = \dfrac{8}{x+2}$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

4. $g(x) = \dfrac{x}{x+3}$

5. $F(x) = \dfrac{2x}{x-4}$

6. $G(x) = \dfrac{3x}{2x+4}$

7. $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

8. $h(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

9. $F(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x-1)}$

10. $G(x) = \dfrac{x}{(x+2)(x-2)}$

11. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$

12. $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-6}$

13. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-x-6}$

14. $g(x) = \dfrac{3x^2}{x^2-3x-10}$

15. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$

16. $h(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x+2}$

17. $g(x) = \dfrac{4x^3-16x^2-x+4}{(x-3)^2}$

***18.** $f(x) = \dfrac{1+2x-x^2-2x^3}{(x-2)^2}$

En los Ejercicios 19—24, la ecuación determina una relación que no es una función. Trace una gráfica de la relación.

*** 19.** $y^2 = \dfrac{x}{4-x}$

*** 20.** $y^2 = \dfrac{x^3-8}{2x}$

*** 21.** $y^2 = \dfrac{4x^2}{x^2-4}$

***22.** $y^2 = \dfrac{3x^2-x^3}{x+1}$

***23.** $y^2 = \dfrac{(x-1)^2}{9-x^2}$

***24.** $y^2 = \dfrac{x^2}{4-x^2}$

*** 25.** Efectúe una traslación de ejes apropiada y demuestre que la gráfica de la ecuación que aparece en el Ejemplo 2, página 225, tiene una ecuación de la forma $x'y' = k$.

*** 26.** Repita el Ejercicio 25 para la ecuación $y = f(x) = \dfrac{x-a}{x-b}$, $a \neq b$.

*** 27.** Demuestre que la función f definida por $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es una función par y trace su gráfica. (*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 27, página 219).

*** 28.** Demuestre que la función f definida por $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ es una función impar y trace un esquema de su gráfica. (*Sugerencia*: Véase el Ejercicio 28, página 219.)

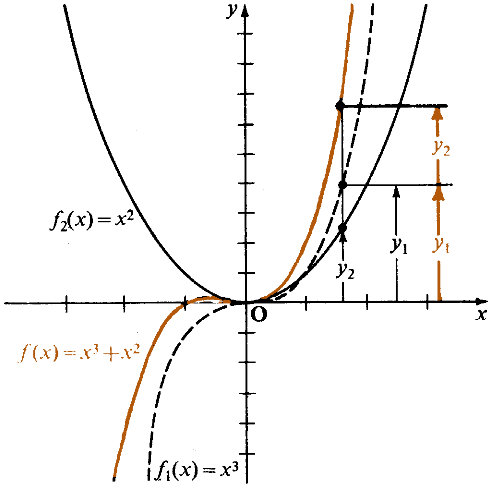
Trazo de gráficas de otras funciones

6—4 Suma de ordenadas

Además de las técnicas para trazar gráficas de funciones que se han discutido hasta ahora, existe otro método que puede ser útil en algunos casos; la **suma**, o **composición, de ordenadas**. Este método se puede emplear si la función f, cuya gráfica se desea trazar, se puede escribir como la suma de las funciones f_1 y f_2, cuyas gráficas son fáciles de obtener. Se puede entonces construir la gráfica f trazando las gráficas de f_1 y f_2 en el mismo sistema de coordenadas, y sumando gráficamente las ordenadas correspondientes, como se muestra en el Ejemplo 1 a continuación. (Este método también se puede emplear, aunque no fácilmente, si la función f es la suma de más de dos funciones).

Ejemplo 1. Trace la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2$ por suma de ordenadas.

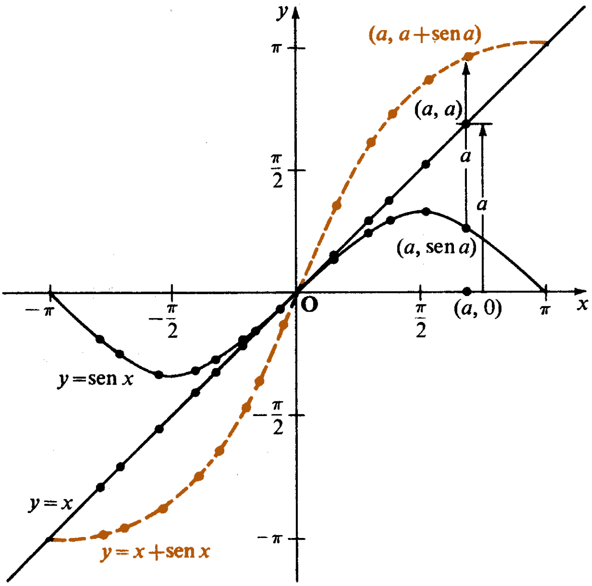
Solución: Sean $f_1(x) = x^3$ y $f_2(x) = x^2$. Entonces para cualquier número real a se tiene $f(a) = f_1(a) + f_2(a)$: es decir, la ordenada de f en a es la suma de las ordenadas de f_1 y f_2 en a. Trácense las gráficas de $f_1(x) = x^3$ y $f_2(x) = x^2$ en el mismo sistema de coordenadas, como se muestra a continuación, y sume gráficamente las distancias dirigidas $f_1(x)$ y $f_2(x)$, para un número suficiente de valores de x, que permitan determinar la forma de la gráfica. (Se han empleado escalas diferentes en los ejes x y y en este caso para que la figura sea más clara.)



Claro está que en general no se emplea la suma de ordenadas para construir la gráfica de funciones polinominales. Sin embargo si la ecuación que define la función contiene uno o más términos que no sean monomios, frecuentemente este método resultará efectivo.

Ejemplo 2. Trace la gráfica de la función definida por $y = x + \text{sen } x$.

Solución: Obsérvese que x debe ser un número real. Por lo tanto si se piensa en x en términos de la medida de un ángulo, debe recordarse de la trigonometría que se debe suponer que la medida está en radianes, puesto que no aparece el símbolo de grados. Se puede construir la gráfica trazando primero la gráfica de $y = \text{sen } x$ y después sumando el valor correspondiente de x a cada ordenada, como se muestra a continuación.



Ejercicios 6—4

En los Ejercicios 1—16, emplee la suma de ordenadas para trazar el esquema de la gráfica de la función definida por la ecuación dada.

1. $f(x) = (x + 2) + (x - 3)$

2. $g(x) = (x - 5) + (4 - 3x)$

3. $h(x) = x^2 + x$

4. $f(x) = 2x^2 - x$

5. $g(x) = x^3 + (x - 1)$

6. $h(x) = (x + 3) - x^3$

7. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

8. $g(x) = x - \dfrac{1}{x^2}$

9. $h(x) = x + 2^x$

10. $j(x) = x - 2^{-x}$

11. $y = x + \cos x$

12. $g(x) = 2x - \text{sen } x$

13. $y = x + \log_{10} x$

14. $f(x) = x - \log_{10} x$

***15.** $y = \frac{1}{3}x^2 + \cos 2x$

***16.** $h(x) = \frac{1}{3}x^2 + \text{sen } 2x$

6—5 Ecuaciones paramétricas

Se ha visto en la Sección 2—1 que las ecuaciones

$$x = x_1 + r(x_2 - x_1) \qquad \text{y} \qquad y = y_1 + r(y_2 - y_1)$$

reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas* de la recta que pasa por los puntos $S(x_1, y_1)$ y $T(x_2, y_2)$, y que a la variable r se le llama *parámetro.*

Con más generalidad considérense el par de ecuaciones paramétricas

$$x = f(r) \qquad \text{y} \qquad y = g(r),$$

donde r es elemento de un conjunto dado S. Para cada valor de r en S, estas ecuaciones determinan un valor de x, y un valor de y correspondiente. Estos pares de valores de x y y son las coordenadas cartesianas de un punto, y el conjunto de puntos definidos de esta manera es la gráfica de las ecuaciones paramétricas. (Como se mencionó en la página 213, el dominio S de r se considera normalmente que es el conjunto de todos los números reales para los cuales $x = f(r)$ y $y = g(r)$ sean números reales.)

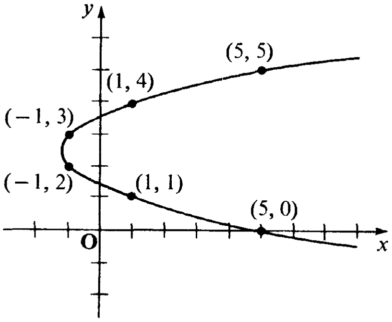
Ejemplo 1. Trace la gráfica de las ecuaciones paramétricas.

$$x = r^2 - 3r + 1 \qquad \text{y} \qquad y = r + 1.$$

Solución: Puesto que se requiere calcular pares ordenados (x, y) con los cuales se construirá la gráfica, se empieza construyendo una tabla de valores dando valores apropiados a r:

r	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
x	29	19	11	5	1	−1	−1	1	5	11
y	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6

A continuación se localizan en el plano los puntos cuyas coordenadas x y y aparecen en la tabla, y se traza la gráfica.



En ciertos casos se pueden combinar las ecuaciones paramétricas para obtener una sola ecuación cartesiana mediante la eliminación del parámetro. Por ejemplo considérense las ecuaciones que aparecen en el Ejemplo 1 anterior:

$$x = r^2 - 3r + 1 \qquad \text{y} \qquad y = r + 1.$$

Si se despeja a r de la segunda ecuación en términos de y, y se sustituye esta expresión de r en la primera ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} x &= (y-1)^2 - 3(y-1) + 1, \\ x &= y^2 - 2y + 1 - 3y + 3 + 1, \\ x &= y^2 - 5y + 5. \end{aligned}$$

Se ve que esta es la ecuación de una parábola.

Ejemplo 2. Obtenga una ecuación cartesiana de la gráfica de

$$x = 2\cos r, \qquad y = 5\,\mathrm{sen}\, r,$$

por eliminación del parámetro.

Solución: Si despejamos en las ecuaciones paramétricas $\cos r$ y $\mathrm{sen}\, r$, respectivamente se tiene

$$\frac{x}{2} = \cos r \qquad \text{y} \qquad \frac{y}{5} = \mathrm{sen}\, r.$$

Si se elevan al cuadrado ambos miembros de estas dos ecuaciones y se suman miembro a miembro, las ecuaciones resultantes son

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = \cos^2 r + \mathrm{sen}^2 r.$$

Puesto que $\cos^2 r + \mathrm{sen}^2 r = 1$ para toda r, se tiene que la ecuación cartesiana de la gráfica es

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Nótese que como r toma valores entre 0 y 2π, las ecuaciones originales producen todas las combinaciones posibles de valores positivos y negativos de x y y, y no se añaden puntos a la gráfica cuando se elevan al cuadrado las ecuaciones.

Al eliminar el parámetro no simpre produce una solución que sea un conjunto equivalente al inicial. Por ejemplo, considérese las ecuaciones paramétricas

$$x = \mathrm{sen}\, r \qquad \text{y} \qquad y = 1 - \cos 2r.$$

Empleando la identidad trigonométrica

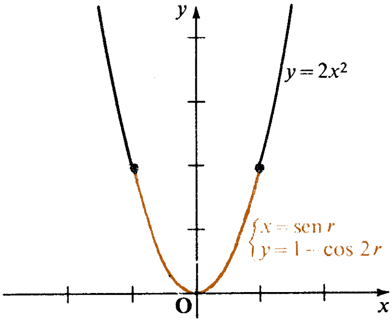
$$\cos 2r = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2 r,$$

se tien que

$$\begin{aligned} y &= 1 - (1 - 2\,\mathrm{sen}^2 r), \\ y &= 2\,\mathrm{sen}^2 r, \\ \text{o sea} \qquad y &= 2x^2. \end{aligned}$$

La gráfica de esta ecuación es una parábola: contiene todos los puntos (x, y) tales que $x \in \mathcal{R}, y \geq 0$, y $y = 2x^2$. Sin embargo, para $x = \operatorname{sen} r$, $|x|$ debe ser menor o igual que 1, luego $y = 1 - \cos 2r$, $0 \leq y \leq 2$. Por lo tanto, cualquier punto sobre la gráfica de las ecuaciones paramétricas es un punto de la gráfica de $y = 2x^2$, pero el recíproco de esta afirmación no es válido. Por lo que, si no se ponen restricciones adicionales sobre el dominio y el rango, la ecuación cartesiana no tiene la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas. En la Figura 6–10 se muestra la relación que existe entre las gráficas.

Figura 6–10



Existe un número ilimitado de ecuaciones paramétricas de cualquier curva en el plano, cada una de las cuales dependen de un parámetro particular. Se puede obtener un conjunto de tales ecuaciones empleando la simple relación $y = rx$, donde r es un parámetro, junto con una ecuación cartesiana de la curva.

Ejemplo 3. Obtenga un conjunto de ecuaciones paramétricas de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Solución: Sea $y = rx$, sustituyendo en la ecuación dada se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 + (rx)^2 - 2x &= 0, \\ x^2 + r^2x^2 - 2x &= 0, \\ x^2(1 + r^2) - 2x &= 0, \\ x[x(1 + r^2) - 2] &= 0. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$x = 0 \qquad \text{ó} \qquad x(1 + r^2) - 2 = 0.$$

Si $x = 0$, entonces $y = rx = 0$. La segunda ecuación se emplea para despejar a x en términos de r obteniéndose

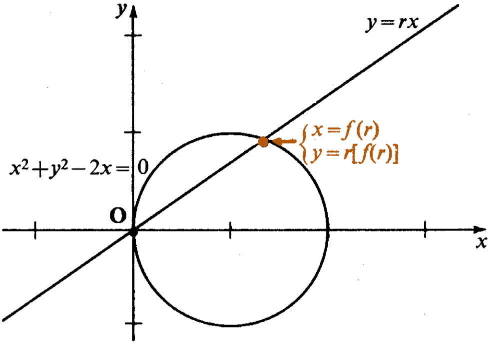
$$x = \frac{2}{1 + r^2}.$$

Como $y = rx$, se tiene finalmente el conjunto de ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{2}{1 + r^2}, \qquad y = \frac{2r}{1 + r^2}.$$

Obsérvese que las ecuaciones paramétricas obtenidas en el Ejemplo 3 no indican que el origen pertenece a la curva, puesto que no existe un valor de r para el cual $x = 0$. Para ver porqué ocurre esto, estúdiese la Figura 6—11.

Figura 6—11



Al emplear la relación $y = rx$ junto con la ecuación $x^2 + y^2 - 2x = 0$, se expresa efectivamente a x y y en términos del parámetro r (la pendiente de $y = rx$) para aquellos puntos en los que las dos gráficas se intersecan. Los valores de x de los puntos de intersección están determinados por

$$x[x(1 + r^2) - 2] = 0.$$

Ahora, para cada pendiente r, la recta interseca a la circunferencia en dos puntos, uno de los cuales es el origen. La coordenada x del origen está dada por $x = 0$, y la coordenada x del otro punto de intersección está dada por $x(1 + r^2) - 2 = 0$. La única excepción a que la recta interseca a la circunferencia en dos puntos ocurre en el caso en que la recta sea tangente a la circunferencia en el origen. Este caso, puesto que una recta vertical no tiene pendiente definida, el punto de intersección único (en el origen) no se puede representar mediante coordenadas de la forma $(f(r), rf(r))$, y en este grado es deficiente la solución dada del Ejemplo 3.

En este ejemplo se pudo identificar el significado geométrico del parámetro r como la pendiente de la recta secante que pasa por el origen. En muchos problemas importantes el parámetro no tiene un significado geométrico (o físico).

Ejercicios 6—5

En los Ejercicios 1—10, trace un esquema de la gráfica de las ecuaciones paramétricas empleando el método estudiado en el Ejemplo 1, página 231.

1. $x = 2t + 1, y = 2 - t$

2. $x = 3t - 2, y = 3 - 2t$

3. $x = 2 + \frac{1}{t}, y = t + 1$

4. $x = \frac{2 + t}{t}, y = \frac{3 - t}{t}$

5. $x = t + 1, y = t^2 + 4$

6. $x = t^2 - 3, y = t + 1$

7. $x = t^2 + 1, y = t^2 - 1$

8. $x = t^2, y = 8 - t^2$

9. $x = t^2, y = t^3$

10. $x = |t|, y = t^2$

En los Ejercicios 11—18, trace la gráfica de las ecuaciones paramétricas en el intervalo $0 \leq m^\circ(r) < 360$ ó $0 \leq m^R(r) < 2\pi$.

11. $x = \operatorname{sen} r, y = \cos r$

12. $x = \operatorname{sen} r, y = \operatorname{sen} 2r$

13. $x = 1 - \cos r, y = 1 + \operatorname{sen} r$

14. $x = \sec r, y = \tan r$

15. $x = 2 + \cos r, y = \cos 2r$

16. $x = \operatorname{sen} r, y = \cos 2r - 1$

17. $x = \cos \frac{r}{2}, y = 1 + \cos r$

18. $x = \operatorname{sen} r, y = \cos 2r$

En los Ejercicios 19—26, elimine el parámetro r del par de ecuaciones para obtener una ecuación cartesiana.

19. $x = r - 3, y = 3 + r$

20. $x = 2r + 1, y = 3 - r$

21. $x = r + 2, y = r^2 + 6r + 11$

22. $x = r^2 - r + 2, y = 2 - r$

23. $x = \frac{1}{r}, y = r + \frac{1}{r}$

24. $x = r + 2, y = \frac{2}{r(r + 4)}$

25. $x = r^2 + r, y = r^2 - r$

26. $x = r^2 + 2r, y = r^2 - 2$

En los Ejercicios 27—34, elimine el parámetro r para obtener una ecuación cartesiana. ¿Es la gráfica de la ecuación cartesiana igual a la gráfica de las ecuaciones paramétricas? Explique la respuesta.

27. $x = 3 \operatorname{sen} r, y = 3 \cos r$

28. $x = 4 \cos r, y = 3 \operatorname{sen} r$

29. $x = \operatorname{sen} r, y = \cos 2r$

30. $x = \cos r, y = \cos 2r$

31. $x = \cos 2r, y = 2 \operatorname{sen} r \cos r$

32. $x = 1 - \cos 2r, y = \cos r$

33. $x = 1 - \cos r, y = \cos 2r$

34. $x = \operatorname{sen} r + \cos r, y = \operatorname{sen} r - \cos r$

En los Ejercicios 35—42, emplee la relación $y = rx$ para obtener ecuaciones paramétricas. ¿Es la gráfica de las ecuaciones paramétricas igual a la gráfica de la ecuación cartesiana? Explique la respuesta.

35. $2x + y = 6$

36. $3x - 4y = 12$

37. $x^2 + y^2 = 9$

38. $x^2 - y^2 = 16$

39. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

40. $2x^2 + 3y^2 = 36$

41. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

42. $x^3 + xy^2 + y^2 - 3x^2 = 0$

* **43.** Si se emplea la relación $y = x + r$ para obtener ecuaciones paramétricas de la gráfica de $y = f(x)$, ¿cuál es el significado geométrico del parámetro r?

* **44.** Si se emplea la relación $y = r(x + 1)$ para obtener ecuaciones paramétricas de la gráfica de $y = f(x)$, ¿cuál es el significado geométrico de la constante aditiva 1?

* **45.** Emplee la relación $y = x + r$ para obtener ecuaciones paramétricas de la circunferencia dada por ecuación cartesiana $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Explique porqué la gráfica de las ecuaciones paramétricas es igual o distinta a la gráfica de la ecuación cartesiana, según sea el caso.

* **46.** Emplee la relación $y = r(x + 1)$ para obtener ecuaciones paramétricas de la circunferencia cuya ecuación cartesiana es $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Explique porqué la gráfica de las ecuaciones paramétricas es igual o distinta a la gráfica de la ecuación cartesiana, según sea el caso.

Resumen del capítulo

1. Toda ecuación de la forma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

donde las a_i son constantes, con $a_0 \neq 0$, y n es un entero no negativo define una **función polinomial**. Una técnica para trazar la gráfica de las funciones polinomiales consiste en estudiar el **término dominante**, el número de **puntos críticos** posibles y las **intersecciones con los ejes** x y y.

2. Toda ecuación de la forma

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios que no tienen factores comunes que contengan a x, y donde $g(x)$ no es el polinomio cero, define una **función racional**. Una técnica para trazar la gráfica de una función racional consiste en estudiar las **intersecciones con los ejes** x y y, las asíntotas, las regiones prohibidas del plano, y el calcular algunos puntos de la gráfica.

3. Algunas funciones tienen gráficas que se construyen fácilmente sumando las ordenadas correspondientes de las gráficas de otras funciones. Esta técnica para trazar gráficas recibe el nombre de **suma** o **composición de ordenadas**.

4. Se puede trazar la gráfica de ecuaciones paramétricas dando valores al parámetro, para así definir pares ordenados (x, y) y marcando en el plano a los puntos calculados. A veces es más conveniente **eliminar el parámetro** y simplemente trazar la gráfica de la ecuación cartesiana resultante. En este último caso debe tenerse el cuidado de indicar qué restricciones hay que aplicar a x y y para que la ecuación cartesiana tenga la misma gráfica que las ecuaciones paramétricas.

Ejercicios de repaso del capítulo

1. ¿Cuántos puntos críticos pueden tener las gráficas de
$$y = 2x^7 + 3x^6 - 2x + 5?$$
2. Trace la gráfica de la función f definida por $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 4x + 15$.
3. Obtenga las ecuaciones de las asíntotas verticales de la gráfica de la función racional f definida por
$$f(x) = \frac{2x^2}{(x-3)(x+1)},$$
y trace una gráfica que muestre las regiones prohibidas del plano.
4. Obtenga las ecuaciones de las asíntotas **(a)** horizontales y **(b)** oblicuas de la gráfica de la función que se menciona en el Ejercicio 3, y dé su representación gráfica.
5. Emplee la suma de ordenadas para trazar la gráfica de función g definida por
$$g(x) = x^2 + (2x - 3).$$
6. Trace la gráfica de las ecuaciones paramétricas
$$x = r - 1, \qquad y = r^2.$$
7. Elimine el parámetro r de las ecuaciones
$$x = r + 2, \qquad y = r^2 - 1.$$
y obtenga una ecuación cartesiana equivalente
8. Emplee la relación $y = rx$ para obtener ecuaciones paramétricas de la gráfica de $2x^2 - 4y^2 = 1$.

Mapeos en el plano

Al estudiar la gráfica de una ecuación tal como

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0,$$

se ha visto que se puede escribir la ecuación en la forma equivalente

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 4. \tag{1}$$

Después mediante la sustitución

$$\begin{aligned} x' &= x - 4, \\ y' &= y + 3, \end{aligned} \tag{2}$$

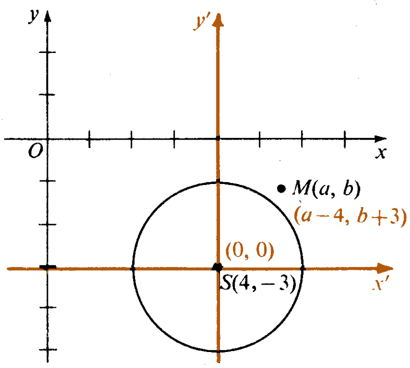
nuevamente se puede escribir una ecuación equivalente en términos de las nuevas coordenadas en la forma

$$x'^2 + y'^2 = 4. \tag{3}$$

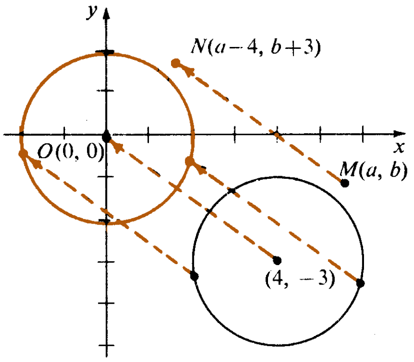
Al hacer esto se efectúa un *cambio de coordenadas*, como se indica en la figura que aparece a continuación (a la izquierda).

Las Ecuaciones (1) y (3) designan al mismo conjunto de puntos, a saber, a la circunferencia con centro en el punto S de coordenadas $(x, y) = (4, -3)$, o bien $(x', y') = (0, 0)$, y de radio 2. Se tiene pues que en la discusión anterior se han empleado las Ecuaciones (2) para obtener la Ecuación (3), que es un alias (otro nombre) del conjunto de puntos que anteriormente se designaban mediante la Ecuación (1).

Hay otra interpretación de las Ecuaciones (2) que es igualmente importante: estas ecuaciones definen un *mapeo* del plano sobre sí mismo. En este mapeo se considera que existe sólo un sistema de coordenadas, y se considera que cada punto $U(x, y)$ se mapea sobre un punto correspondiente $U'(x', y')$, donde x' y y' están dadas por las Ecuaciones (2). Así el punto



Traslación de ejes (alias)



Traslación del plano (alibi)

$M(a, b)$ se mapea sobre el punto $N(a-4, b+3)$. Puesto que para cada punto U en el plano, la coordenada x de U' es 4 unidades menor que la coordenada de U, y la coordenada y de U' es 3 unidades mayor que la coordenada y de U, se ve en particular que el mapeo de la circunferencia definida por la Ecuación (1) es una circunferencia con centro en el origen y radio 2 como se muestra en la figura de la página 238.

En un mapeo tal como el que se mencionó anteriormente, es conveniente pensar que los puntos se transportan físicamente a las posiciones indicadas por el mapeo. Se dice entonces que un mapeo es una *transformación del plano*. Si se emplea esta interpretación se dice que las Ecuaciones (2) se han usado para obtener un "alibi" (otro lugar) del conjunto de puntos definido por la Ecuación (1).

En general se pueden entender las ecuaciones

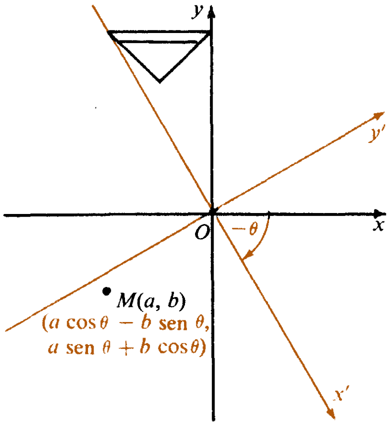
$$x' = x + h$$
$$y' = y + k$$

de dos maneras. Son ecuaciones de la *traslación de ejes* por una cantidad vectorial $(-h, -k)$, en la que los ejes x' y y' tienen los mismos sentidos que los ejes x y y respectivamente, y el origen del sistema es el punto cuyas coordenadas x y y son $(-h, -k)$. Pero son también ecuaciones de la *traslación del plano* por la cantidad vectorial (h, k), en la que cada punto $M(a, b)$ se mapea sobre un punto correspondiente $N(a+h, b+k)$.

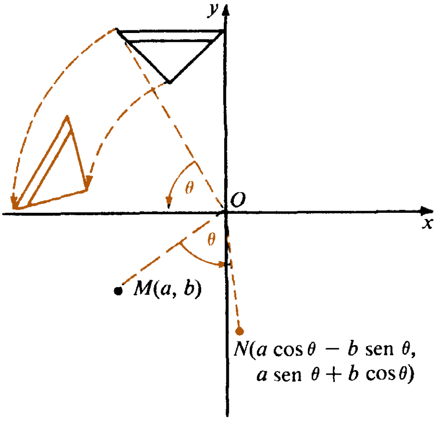
De la misma manera se pueden interpretar las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta \\ y' &= x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{4}$$

como una *rotación de ejes* (alias), como se muestra en la figura que aparece a la izquierda a continuación, o como una *rotación del plano* (alibi), en la cual cada punto del plano se mapea sobre un punto correspondiente, como se ilustra a la derecha a continuación.



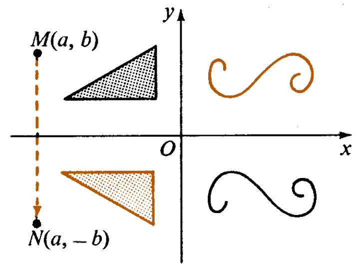
Rotación de ejes (alias)



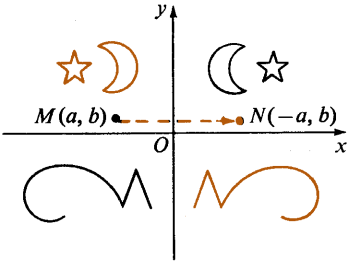
Rotación de planos (alibi)

A continuación se muestran las ecuaciones e ilustraciones de algunas otras transformaciones básicas en el plano.

Reflexiones sobre los ejes:

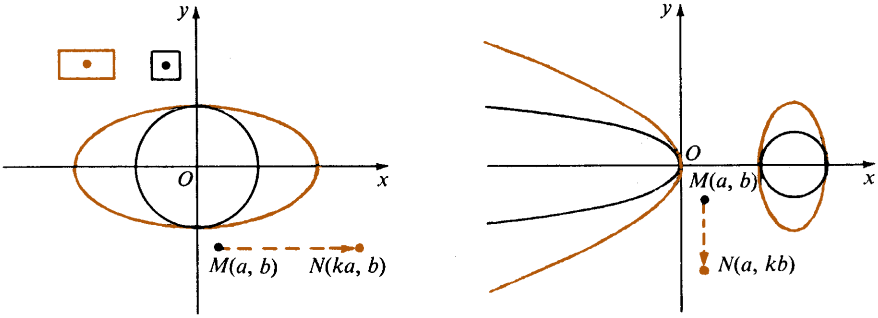


$$x' = x$$
$$y' = -y$$



$$x' = -x$$
$$y' = y$$

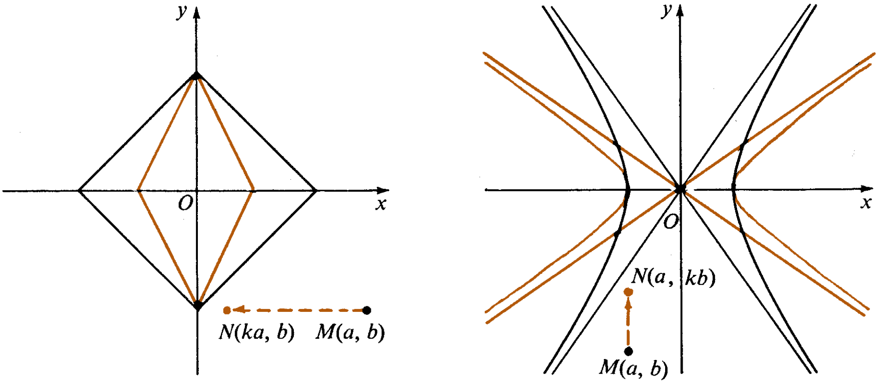
"Esfuerzos" en una dimensión



$$x' = kx$$
$$y' = y$$

$$x' = x$$
$$y' = ky$$

Elongaciones $k > 1$

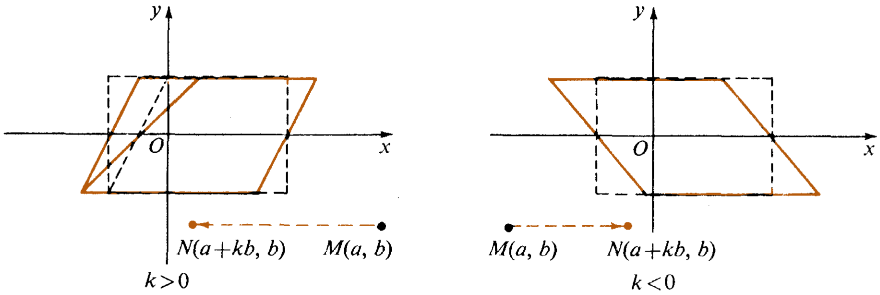


$$x' = kx$$
$$y' = y$$

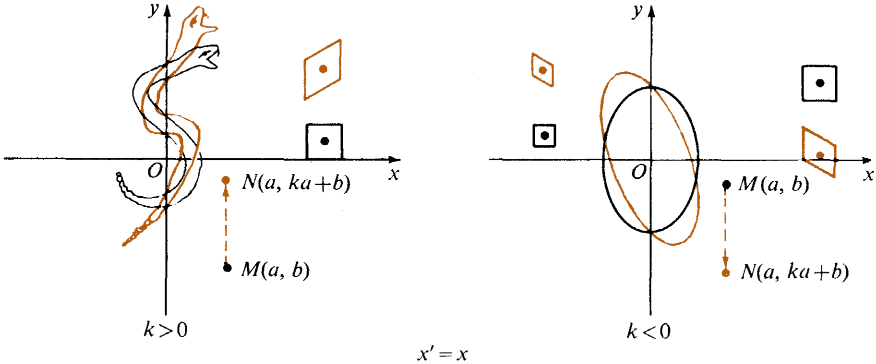
$$x' = x$$
$$y' = ky$$

Compresiones $0 < k < 1$

Otros tipos de transformaciones:



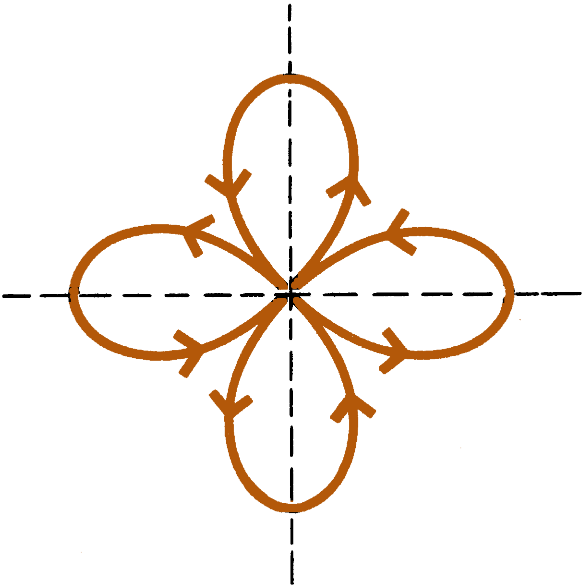
$$x' = x + ky$$
$$y' = y$$



$$x' = x$$
$$y' = kx + y$$

En la nota que aparece al final del Capítulo 7 se estudiarán las transformaciones que se obtienen mediante una sucesión de estas transformaciones básicas.

Capítulo 7



En matemáticas y en algunas de sus aplicaciones a veces resulta más útil emplear coordenadas polares que usar coordenadas cartesianas. En el desarrollo de este capítulo se introducen las coordenadas polares y se estudian las ecuaciones polares y sus gráficas.

Coordenadas Polares

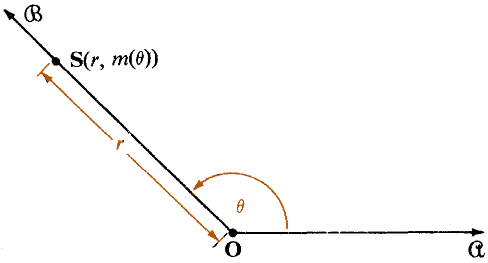
Ecuaciones polares y sus gráficas

7—1 Sistema de coordenadas polares

En los capítulos anteriores se han empleado sistemas de coordenadas cartesianas en el plano. En este capítulo se estudiarán otros sistemas de coordenadas en el plano que resultan útiles: *los sistemas de coordenadas polares.*

Para ver cómo se define un sistema de coordenadas polares, considérese un segmento $\mathcal{A}$ con un punto inicial **O** (véase la Figura 7—1). Para cualquier punto **S** del plano, sea $\mathcal{B}$ el segmento que pasa por **S** y cuyo punto inicial es **O**, y sea θ el ángulo cuyo lado inicial es $\mathcal{A}$ y cuyo lado final es $\mathcal{B}$, aceptándose la convención de que el sentido positivo de rotación va al contrario del sentido en que giran las manecillas del reloj. Entonces, como se muestra en la Figura 7—1, el punto **S** queda determinado por las coordenadas $(r, m(\theta))$, donde r es la distancia que separa a **S** de **O**, y $m(\theta)$ es la medida de θ en algunas unidades dadas, normalmente grados o radianes. (Nótese que no se restringe θ a ser un ángulo cuya medida satisfaga la condición $0 \leq m^\circ(\theta) < 360$, como se hace en el caso de los vectores). Las coordenadas $(r, m(\theta))$, o más brevemente (r, θ), se llaman **coordenadas polares** de **S**. El segmento $\mathcal{A}$ recibe el nombre de **eje polar** y el punto **O** es el **polo**. Los segmentos suyo punto inicial es el polo reciben el nombre de **segmentos polares**.

Figura 7—1



El ángulo de dirección θ que aparece en la Figura 7—1 tiene el mismo lado final que un número infinito de ángulos cuyo eje inicial es el eje polar. Puesto que se puede emplear a cualquiera de estos ángulos para especificar la posición del segmento $\mathcal{B}$, el punto **S** se puede determinar mediante un número infinito de pares ordenados de coordenadas polares. Por ejemplo, si **S** tiene las coordenadas

$$(3, 120°),$$

tiene también las coordenadas

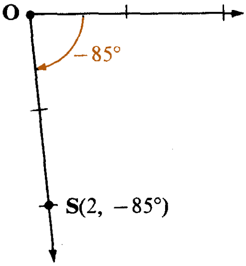
$$(3, 120° - 360°), \text{ o } (3, -240°),$$
$$(3, 120° + 360°), \text{ o } (3, 480°),$$

y en general

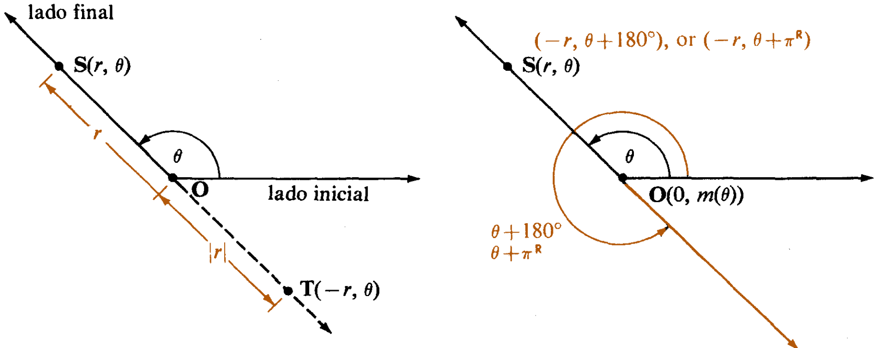
$$(3, 120° + k(360°)), \text{ donde } k \text{ es un entero.}$$

Ejemplo 1. Ubique en el plano al punto **S** cuyas coordenadas polares son $(2, -85°)$.

Solución: Dibújese primero un ángulo θ cuya medida sea $-85°$. Entonces, sobre el lado final de θ, mídanse dos unidades de distancia a partir del polo, y llámese **S** al punto así localizado.



En lo dicho en la página 243 se considera que la distancia r es una distancia no dirigida, es decir, que es un número no negativo. Sin embargo, en algunos casos es conveniente pensar que r es una distancia *dirigida*, que puede ser a veces un número negativo. Se aceptará esta posibilidad de aquí en adelante. Es usual, como se muestra en la Figura 7—2 (a), interpretar a la distancia positiva r como la distancia medida sobre el lado final del ángulo de dirección θ, a partir de **O**, e interpretar una distancia negativa r como una distancia $|r|$ medida a lo largo del segmento cuyo punto inicial es **O** pero que tiene el sentido *opuesto* al del lado final de θ.



(a) (b)

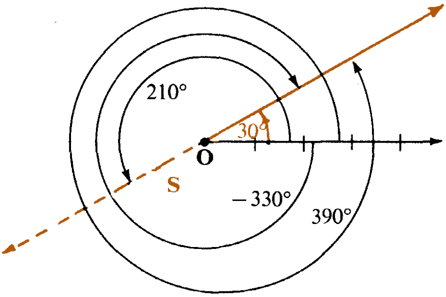
Figura 7—2

Así, como se muestra en la Figura 7—2(b), si un punto **S** queda determinado por las coordenadas polares (r, θ), entonces también queda determinado por las coordenadas $(-r, \theta + 180°)$ o $(-r, \theta + \pi^R)$. Nótese que el polo se puede especificar por medio de *cualquier* par ordenado de la forma $(0, m(\theta))$, donde el ángulo de dirección x es arbitrario.

Ejemplo 2. Ubique en el plano al punto **S** cuyas coordenadas polares son $(-1, 30°)$, y escriba tres pares más de coordenadas de **S**.

Solución: Trácese primero un ángulo θ de medida 30°.

Prólonguese ahora el lado final de θ hacia el lado opuesto del polo y mídase una unidad a partir del polo a lo largo de esta



dirección. Llegando así al punto **S**.

Los tres pares de coordenadas de **S** requeridas son

$$(-1, 30° + 360°), \text{ or } (-1, 390°);$$

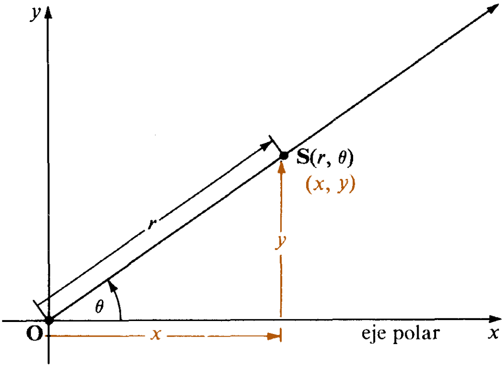
$$(-1, 30° - 360°), \text{ or } (-1, -330°);$$

y

$$(-(-1), 30° + 180°), \text{ or } (1, 210°).$$

Si, como se muestra en la Figura 7—3, el polo de un sistema de coordenadas está en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas, y el eje polar

Figura 7—3



coincide con la parte no negativa del eje x, entonces las coordenadas cartesianas (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) de un punto **S** del plano están relacionadas a través de las ecuaciones

■
$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \tag{1}$$

y también, si $x^2 + y^2 \neq 0$, por las ecuaciones

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\theta = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}},\ \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{2}$$

Se puede verificar que las Ecuaciones (1) son válidas tanto para $r \geq 0$ como para $r < 0$. En las Ecuaciones (2) debe usarse el mismo signo en todas las ecuaciones. Por ejemplo, si r es negativo, entonces se tiene $r = -\sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{-\sqrt{x^2 + y^2}}$, y $\text{sen}\,\theta = \dfrac{y}{-\sqrt{x^2 + y^2}}$. La primera ecuación (2) es también válida para $x^2 + y^2 = 0$.

Ejemplo 3. **(a)** Obtenga las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas polares son $(3, 120°)$.
(b) Obtenga dos pares de coordenadas polares, un par con $r > 0$, y el otro par con $r < 0$, de un punto cuyas coordenadas cartesianas son $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Solución: **(a)** Empleando las Ecuaciones (1) se tiene

$$x = r\cos\theta = 3\cos 120° = 3(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{3}{2},$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 3\,\text{sen}\,120° = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Por lo tanto, $(x, y) = \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

(b) Usando las Ecuaciones (2) se tiene

$$\begin{aligned} r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} &= \pm\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} \\ &= \pm\sqrt{2 + 2} \\ &= \pm\sqrt{4} = \pm 2; \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\pm 2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{y} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{-\sqrt{2}}{\pm 2} = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por lo tanto, para $r > 0$, se tiene

$$r = 2, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{y} \qquad \text{sen}\,\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

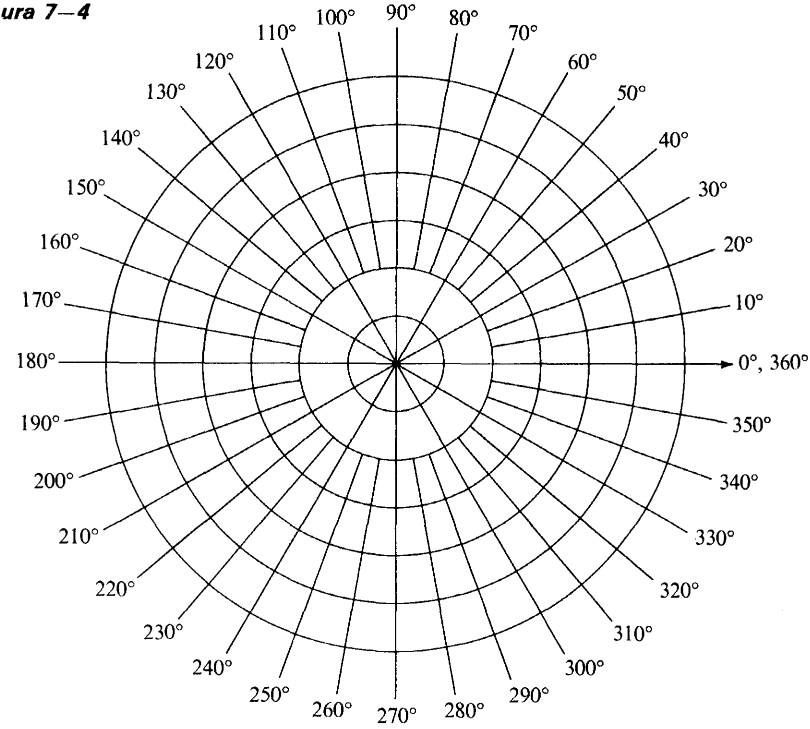
Puesto que $\cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{sen} 315° = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, un par de coordenadas con $r > 0$ es $(2, 315°)$.
Análogamente, para $r < 0$, se tiene

$$r = -2, \qquad \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

y por consiguiente un par de coordenadas con $r < 0$ es $(-2, 135°)$.

En cursos anteriores se adquiere familiaridad con el uso de papel que contiene coordenadas rectangulares. Existe también papel especial que sirve para graficar puntos cuyas coordenadas polares se conocen. Este papel contiene: (1) un conjunto de segmentos que salen del polo, y (2) un conjunto de círculos concéntricos, cuyo centro es el polo (véase la Figura 7—4). Las medidas de los ángulos definidos por los segmentos radiales frecuentemente son múltiplos de $10°$, o a veces $\frac{\pi^R}{18}$, y los radios de los círculos son múltiplos de alguna unidad de longitud que sea conveniente. Para ubicar a un punto cuyas coordenadas sean (r, θ), sólo hay que contar r unidades a lo largo del segmento que defina el ángulo de medida $m°(\theta)$.

Figura 7—4



Ejercicios 7—1

En los Ejercicios 1—12, trace la gráfica del punto cuyas coordenadas polares se dan, y escriba tres pares más de coordenadas polares de ese punto.

1. $(3, 25^\circ)$
2. $(4, 45^\circ)$
3. $(2, 120^\circ)$
4. $(3, 150^\circ)$
5. $\left(2, \frac{\pi^R}{2}\right)$
6. $\left(3, \frac{3\pi^R}{4}\right)$
7. $\left(1, \frac{7\pi^R}{6}\right)$
8. $\left(4, \frac{7\pi^R}{4}\right)$
9. $(-1, 40^\circ)$
10. $(-3, 100^\circ)$
11. $\left(-2, \frac{5\pi^R}{6}\right)$
12. $\left(-4, \frac{11\pi^R}{6}\right)$

En los Ejercicios 13—24, encuantre las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas polares se dan.

13. $(2, 45^\circ)$
14. $(3, 30^\circ)$
15. $(6, 90^\circ)$
16. $(5, 270^\circ)$
17. $(3, 180^\circ)$
18. $(4, 360^\circ)$
19. $(2, 135^\circ)$
20. $(3, 240^\circ)$
21. $(-2, 330^\circ)$
22. $(-1, 60^\circ)$
23. $(-3, 150^\circ)$
24. $(-5, 225^\circ)$

En los Ejercicios 25—36, encuentre dos pares de coordenadas polares, tales que un par tenga $r > 0$ y el otro con $r < 0$, del punto cuyas coordenadas cartesianas se dan. En cada caso elija a θ de modo que $0 \leq m^\circ(\theta) < 360$.

25. $(\sqrt{3}, -3)$
26. $(4, 4)$
27. $(0, 5)$
28. $(2\sqrt{3}, -2)$
29. $(3, -3)$
30. $(-3, 0)$
31. $(-4, -4\sqrt{3})$
32. $(-5, -5)$
33. $(0, -4)$
34. $(-\sqrt{3}, 1)$
35. $(2, -2)$
36. $(6, -2\sqrt{3})$

* **37.** Demuestre que si un punto $S(x_1, y_1)$ tiene coordenadas polares (r, θ), y un punto $T(x_2, y_2)$ tiene coordenadas polares $(-r, \theta)$, entonces $x_1 = -x_2$ y $y_1 = -y_2$.

* **38.** Emplee el hecho de que para toda θ, $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ y $\cos(-\theta) = \cos\theta$ para demostrar que si un punto $S(x_1, y_1)$ tiene coordenadas polares (r, θ) y un punto $T(x_2, y_2)$ con coordenadas polares $(r, -\theta)$, entonces $x_1 = x_2$ y $y_1 = -y_2$.

* **39.** Emplee el hecho de que para toda θ, $\operatorname{sen}(\pi^R - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos(\pi^R - \theta) = -\cos\theta$. para demostrar que si un punto $S(x_1, y_1)$ tiene coordenadas polares (r, θ) y un punto $T(x_2, y_2)$ con coordenadas polares $(r, \pi^R - \theta)$ entonces $x_1 = -x_2$ y $y_1 = y_2$.

* **40.** Emplee el hecho de que para toda θ, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi^R}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ y $\cos\left(\frac{\pi^R}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$, para demostrar que si un punto $S(x_1, y_1)$ tiene coordendas polares (r, θ) y un punto $T(x_2, y_2)$ tiene coordenadas polares $\left(r, \frac{\pi^R}{2} - \theta\right)$, entonces $x_1 = y_2$ y $y_1 = x_2$.

7–2 Ecuaciones polares

En la página 246 se vió que las coordenadas cartesianas y polares de un punto están relacionadas a través de

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{1}$$

y que para $x^2 + y^2 \neq 0$, a través de

$$r = \pm\sqrt{x^2+y^2}, \ \cos\theta = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}, \ \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{2}$$

Se pueden emplear estas ecuaciones para transformar la ecuación de un lugar geométrico de forma cartesiana a la forma polar y de forma polar a forma cartesiana respectivamente.

Ejemplo 1. Transforme la ecuación $y = x + 3$ a una ecuación polar de la forma $r = f(\theta)$.

Solución: Sustituyendo las Ecuaciones (1) anteriores en la ecuación $y = x + 3$, se obtiene

$$r\,\mathrm{sen}\,\theta = r\cos\theta + 3,$$

de donde

$$r\,\mathrm{sen}\,\theta - r\cos\theta = 3,$$

$$r(\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta) = 3,$$

ó

$$r = \frac{3}{\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta}.$$

Nótese en el Ejemplo 1 que los valores de θ para los cuales $\cos\theta = \mathrm{sen}\,\theta$, es decir, los valores para los cuales $m^\circ(\theta) = 45^\circ + k(180^\circ)$, con k entero, no están en el dominio de θ.

Ejemplo 2. Transforme la ecuación polar

$$r = \frac{1}{1 - \cos\theta}$$

a una ecuación cartesiana y trace una gráfica de la ecuación.

Solución: Excluyendo los valores de θ para los cuales $1 - \cos\theta = 0$, se puede reescribir la ecuación dada en la forma equivalente

$$r(1 - \cos\theta) = 1,$$

ó

$$r - r\cos\theta = 1.$$

Ahora empleando las Ecuaciones (1) y (2) de la página 249 se puede sustituir a $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ por r, y a x por $r\cos\theta$, en esta ecuación para obtener

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} - x = 1,$$

o

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = 1 + x.$$

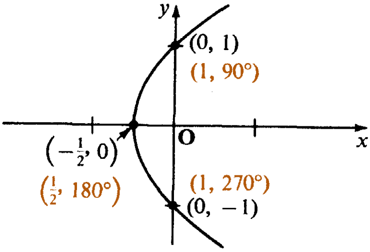
Elevando al cuadrado ambos miembros se obtiene

$$x^2 + y^2 = 1 + 2x + x^2,$$

o

$$y^2 = 2x + 1.$$

Se reconoce a esta última ecuación como la ecuación de una parábola. Se muestra a continuación su gráfica.



Ejercicios 7—2

En los Ejercicios 1—12, transforme la ecuación cartesiana dada en una ecuación polar de la forma $r = f(\theta)$.

1. $x^2 + y^2 = 25$
2. $x^2 + y^2 - 16 = 0$
3. $x^2 + y = 0$
4. $3x - y^2 = 0$
5. $y = x - 4$
6. $x + 3y = 2$
7. $3x^2 + 4y^2 = 5$
8. $4x^2 + 9y^2 = 36$
9. $x^2 - y^2 = 16$
10. $9x^2 - 4y^2 = 36$
11. $xy = 4$
12. $xy + 9 = 0$

En los Ejercicios 13—24, transforme la ecuación polar dada en una ecuación cartesiana y trace una gráfica de la ecuación.

13. $r = 4$
14. $r = 3$
15. $r = 4\,\text{sen}\,\theta$
16. $r = 8\cos\theta$
17. $r = \dfrac{5}{\text{sen}\,\theta - \cos\theta}$
18. $r = \dfrac{4}{\text{sen}\,\theta + \cos\theta}$
19. $r = \dfrac{3}{3 - \cos\theta}$
20. $r = \dfrac{4}{4 + \text{sen}\,\theta}$
21. $r = \dfrac{3}{2 - \text{sen}\,\theta}$
22. $r = \dfrac{5}{3 + \cos\theta}$
23. $r = \dfrac{2}{5 - \cos\theta}$
24. $r = \dfrac{3}{6 - \text{sen}\,\theta}$

* **25.** Emplee el hecho de que para toda θ_1 y θ_2,

$$\cos\theta_2\cos\theta_1 + \text{sen}\,\theta_2\,\text{sen}\,\theta_1 = \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

para demostrar que la distancia que separa a los puntos cuyas coordenadas son (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) está dada por $d = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2r_1\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

* **26.** Emplee el resultado del Ejericio 25 para demostrar que una ecuación polar de la circunferencia de radio a y centro en $\mathbf{C}(r_1, \theta_1)$ es

$$r^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) + r_1^2 - a^2 = 0.$$

7–3 Gráficas de ecuaciones polares

La **gráfica de una ecuación polar** en un sistema de coordenadas polares es el conjunto de todos los puntos del plano que tienen *al menos* un par de coordenadas polares (r, θ) que satisfacen la ecuación. Nótese que un punto de la gráfica puede tener algunos pares de coordenadas polares que no satisfagan la ecuación. Por ejemplo, las coordenadas polares $(-3, 180°)$ no satisfacen la ecuación polar $r = 3$. Sin embargo, el punto **R** que tiene estas coordenadas está sobre la gráfica de la ecuación, puesto que **R** tiene también las coordenadas $(3, 0°)$.

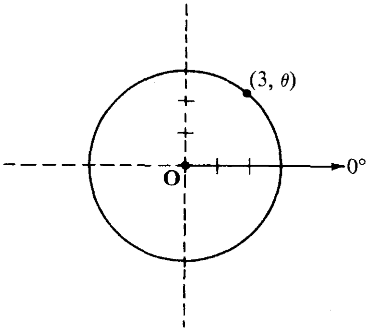
Una manera de trazar la gráfica de una ecuación polar es sencillamente ubicar en el plano algunos puntos. Puesto que muchas ecuaciones polares involucran funciones trigonométricas a veces resulta útil una table de valores de las funciones trigonométricas, cmo la que aparece en la página 387. Sin embargo, en muchos casos, los valores que aparecen en la tabla abreviada que se muestra a continuación bastan para trazar una gráfica. Para ángulos que estén en el segundo, tercer o cuarto cuadrante, los valores correspondientes se obtienen ajustando apropiadamente los signos.

$m°(\theta)$	sen θ	cos θ	tan θ
0	0	1	0
30	$\frac{1}{2} = 0.500$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0.866$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0.577$
45	$\frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0.707$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0.707$	1
60	$\frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0.866$	$\frac{1}{2} = 0.500$	$\sqrt{3} \doteq 1.732$
90	1	0	no definido

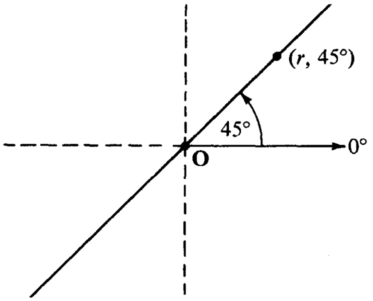
Ejemplo 1. Trace las gráficas de

(a) $r = 3$, **(b)** $\theta = 45°$, **(c)** $r = 3 \cos \theta$, **(d)** $r = \text{sen } 2\theta$.

Solución: **(a)** Como r es constante, es igual para todos los valores de θ. Cualquier punto cuyas coordenadas sean de la forma $(3, \theta)$ está sobre la gráfica y viceversa. Por lo tanto, la gráfica es una circunferencia con centro en **O** y radio 3 como se muestra a continuación.

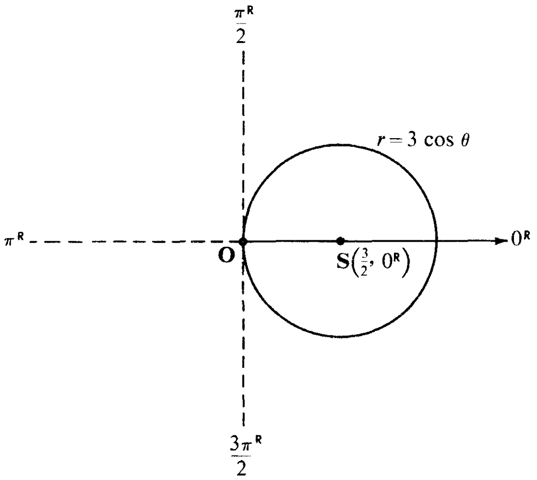


(b) Puesto que θ es constante es igual para todos los valores de r. Cualquier punto cuyas coordenadas sean de la forma $(r, 45°)$ está sobre la gráfica y viceversa. Por lo tanto, la gráfica es una recta que pasa por el polo y que forma un ángulo de 45° con el eje polar, como se muestra a continuación. Los puntos tales que $r > 0$ están en el primer cuadrante y los puntos tales que $r < 0$ están en el tercer cuadrante.



(c) La gráfica de la ecuación $r = 3 \cos \theta$, se obtiene calculando primero una tabla de valores como se muestra a continuación. A medida que se localizan los puntos cuyas coordenadas aparecen en esta tabla se verá que se tienen dos pares de coordenadas para cada punto: por ejemplo, $(-3, \pi^{R})$ determina el mismo punto que $(3, 0^{R})$. La gráfica es una circunferencia con centro en $S(\frac{3}{2}, 0^{R})$ y que pasa por **O**, como se muestra.

θ	0^{R}	$\frac{\pi^{R}}{6}$	$\frac{\pi^{R}}{3}$	$\frac{\pi^{R}}{2}$	$\frac{2\pi^{R}}{3}$	$\frac{5\pi^{R}}{6}$	π^{R}	$\frac{7\pi^{R}}{6}$	$\frac{4\pi^{R}}{3}$	$\frac{3\pi^{R}}{2}$	$\frac{5\pi^{R}}{3}$	$\frac{11\pi^{R}}{6}$	$2\pi^{R}$
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$r = 3 \cos \theta$	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	-3	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3



(d) Prepárese una tabla de valores como se muestra a continuación.

① ②

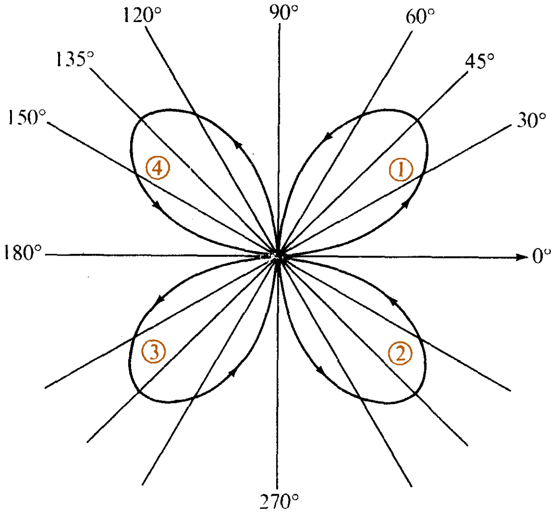
θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
2θ	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$r = \operatorname{sen} 2\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

③ ④

θ	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
2θ	360°	420°	450°	480°	540°	600°	630°	660°	720°
$r = \operatorname{sen} 2\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

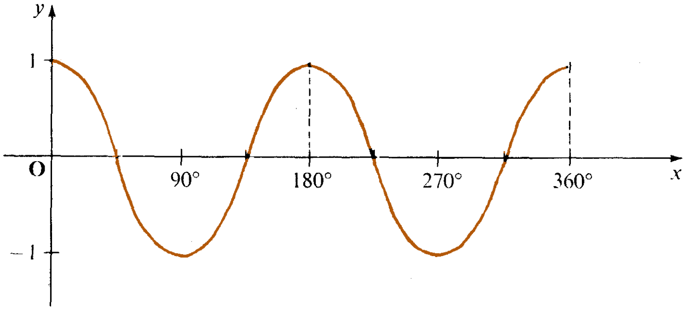
La gráfica de esta ecuación es una "roseta de cuatro hojas". Los números que aparecen dentro de las hojas indican qué hoja contiene a los puntos cuyas coordenadas aparecen en la parte correspondiente de la tabla anterior. Las flechas que aparecen en la figura indican la trayectoria contínua de un punto que recorra la curva a medida que θ va de 0° a 360°.

Otra forma de trazar gráficas de ecuaciones polares de este tipo, que es en general más sencilla, es trazar la gráfica de la función trigonométrica correspondiente en un sistema de coordenadas cartesianas y emplear la información que proporciona esta *gráfica auxiliar* acerca del comportamiento de y para deducir el comportamiento de r a lo largo de varior intervalos sucesivos de la medida del ángulo.



Ejemplo 2. Trace una gráfica de $r = \cos 2\theta$.

Solución: Trácese primero uno de dos ciclos de $y = \cos 2x$ en un sistema de coordenadas cartesiano, como se muestra. Por

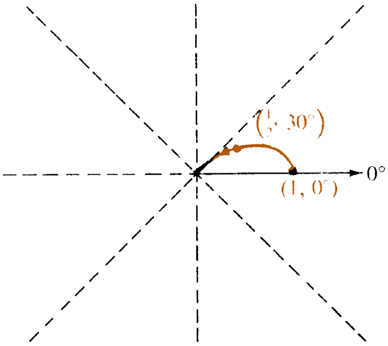


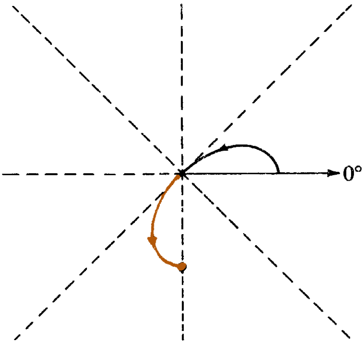
inspección de esta gráfica se verifica la información que aparece en la siguiente tabla.

Intervalo de $m°(\theta)$	0°–45°	45°–90°	90°–135°	135°–180°
Comportamiento de r	Disminuye de 1 a 0	Disminuye de 0 a −1	Aumenta de −1 a 0	Aumenta de 0 a 1

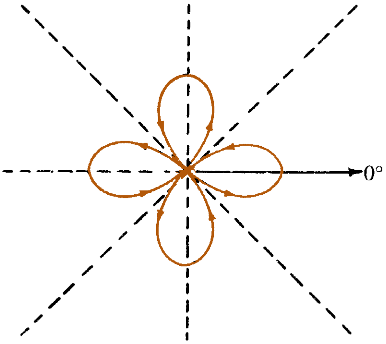
Intervalo de $m°(\theta)$	180°–225°	225°–270°	270°–315°	315°–360°
Comportamiento de r	Disminuye de 1 a 0	Disminuye de 0 a −1	Aumenta de −1 a 0	Aumenta de 0 a 1

Esta información se emplea para trazar una gráfica de $r = \cos 2\theta$ a lo largo del intervalo 0° a 45°. Se puede obtener más precisión ubicando unos cuantos puntos como se muestra a continuación.





Ahora se continúa el trazo en el intervalo que va de 45° a 90°, empleando la simetría de la gráfica de $y = \cos 2x$.



Se continúa este procedimiento hasta que se obtiene la gráfica completa, como se muestra a continuación. Esta curva es otra "roseta de cuatro hojas".

Al trazar las gráficas polares resultan útiles a veces los siguientes hechos acerca de la simetría (véanse los Ejercicios 37–40, página 248):

1. Si al sustituir a θ por $-\theta$ en una ecuación polar la ecuación no cambia, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto a la recta que contiene al eje polar.
2. Si al sustituir a r por $-r$ en una ecuación polar la ecuación no cambia, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al polo.
3. Si al sustituir a θ por $\pi^{R} - \theta$ en una ecuación polar la ecuación no cambia, entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto a la recta cuya ecuación es $\theta = \dfrac{\pi^{R}}{2}$.
4. Si al sustituir a θ por $\dfrac{\pi^{R}}{2} - \theta$ en una ecuación polar la ecuación no cambia,

entonces la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto a la recta cuya ecuación es $\theta = \frac{\pi^{\mathrm{R}}}{4}$.

Ejercicios 7—3

En los Ejercicios 1—30, dar la representación gráfica de la ecuación polar dada.

1. $r = 4$
2. $r = 5$
3. $\theta = 60°$
4. $\theta = 135°$
5. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$
6. $r = 4 \cos \theta$
7. $r = \operatorname{sen} 3\theta$ (roseta de tres hojas)
8. $r = \cos 3\theta$ (roseta de tres hojas)
9. $r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$ (cardioide)
10. $r = 3(1 - \cos \theta)$ (cardioide)
11. $r = 4 - 2 \operatorname{sen} \theta$ (caracol)
12. $r = 2 - 4 \operatorname{sen} \theta$ (caracol)
13. $r = 2 \cos (\theta + 45°)$
14. $r = 3 \operatorname{sen}(\theta - 60°)$
15. $r = 2 \sec \theta$
16. $r = 3 \csc \theta$
17. $r^2 = 2 \cos \theta$ (lemniscata)
18. $r^2 = \cos 2\theta$ (lemniscata)
19. $r = \tan \theta$
20. $r = \cot \theta$
21. $r = \frac{4}{2 - \cos \theta}$
22. $r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$
23. $r = \frac{4}{1 + 2 \cos \theta}$
24. $r = \frac{2}{1 + 2 \cos \theta}$
25. $r = \frac{2}{1 + 2 \operatorname{sen} \theta}$
26. $r = \frac{3}{1 - 2 \operatorname{sen} \theta}$

* **27.** $(r^2 - 2r \cos \theta + 1)(r^2 + 2r \cos \theta + 1) = 4$ (óvalo de Cassini)
* **28.** $r = \tan \theta \operatorname{sen} \theta$ (cisoide)
* **29.** $r = m^{\mathrm{R}}(\theta)$ (espiral de Arquímedes)
* **30.** $r = 2^{\frac{1}{2} m^{\mathrm{R}}(\theta)}$ (espiral logarítmica)

7—4 Intersecciones de gráficas para ecuaciones polares

Si es posible resolver un sistema de ecuaciones cartesianas analíticamente, también es posible obtener las coordenadas de todos los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones. Puesto que las coordenadas polares de un punto no son únicas, esto no es necesariamente válido en el caso de un sistema de ecuaciones polares. Las gráficas de un sistema de ecuaciones polares se pueden intersecar en uno o varios puntos, cuyas coordenadas no sean solución del sistema como se muestra en el siguiente ejemplo. Se debe pues distinguir, al tratar sistemas de ecuaciones polares, entre los pares ordenados que son soluciones del sistema y aquellos que identifican los puntos de intersección de las gráficas.

Ejemplo. Para las ecuaciones

$$r = 3 + 6 \cos \theta \qquad \text{y} \qquad r = 3,$$

(a) Obtenga todos los (r, θ) que satisfacen el sistema de ecuaciones.

(b Obtenga los puntos de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones en el intervalo $0 \leq m°(\theta) \leq 360$.

Solución: **(a)** Si se sustituye a r por 3 en la ecuación $r = 3 + 6 \cos \theta$, se obtiene

$$3 = 3 + 6 \cos \theta,$$

de donde

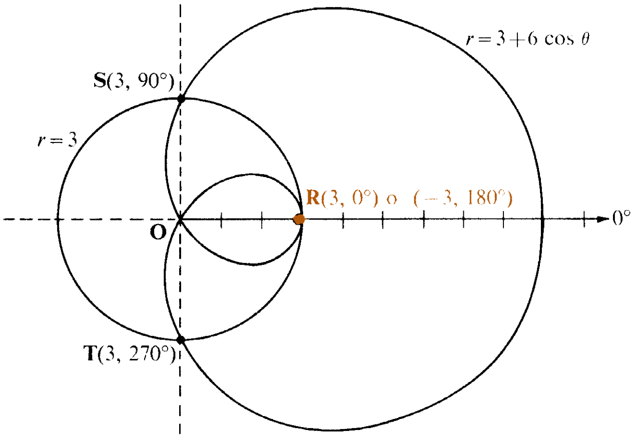
$$\cos \theta = 0,$$

y

$$m°(\theta) = 90 \text{ o } 270.$$

Por lo tanto (3, 90°) y (3, 270°) son los pares (r, θ) que satisfacen ambas ecuaciones.

(b) Trace las gráficas de ambas ecuaciones en el mismo sistema de coordenadas polares.



Por inspección se ve que los puntos **S**(3, 90°) y **T**(3, 270°) son los puntos de intersección, como se obtuvo en la parte (a). Se ve también que hay un tercer punto de intersección **R**. Un par de coordenadas de este punto es $(3, 0°)$, que satisface la ecuación $r = 3$ pero no así la ecuación $r = 3 + 6 \cos \theta$. Otro par de coordenadas del punto **R** es $(-3, 180°)$, que satisface la ecuación $r = 3 + 6 \cos \theta$ pero no satisface la ecuación $r = 3$. Puesto que ambos pares definen a **R** se pueden emplear ambos para designarlo. Por consiguiente, los puntos de intersección en el intervalo dado son $\mathbf{R}(3, 0°)$, $\mathbf{S}(3, 90°)$, y $\mathbf{T}(3, 270°)$.

Ejercicios 7—4

En los Ejercicios 1—8, obtenga todos los (r, θ), con $0 \leq m°(\theta) < 360$, que satisfacen el sistema de ecuaciones polares dado.

1. $r = \operatorname{sen} \theta, r = \cos \theta$

2. $r = 1 + \operatorname{sen} \theta, r = 1 + \cos \theta$

3. $r = \cos \theta, r = 1 - \cos \theta$

4. $r = \operatorname{sen} \theta, r = 1 - \operatorname{sen} \theta$

5. $r = 1, r = \operatorname{sen} 2\theta$

6. $r = \sqrt{3}, r = 2 \cos 2\theta$

7. $r = \operatorname{sen} \theta, r = \csc \theta$

8. $r = \cos \theta, r = \sec \theta$

En los Ejercicios 9—16, obtenga las coordenadas de todos los puntos de intersección de las gráficas del sistema dado de ecuaciones polares en el intervalo $0 \leq m°(\theta) < 360$.

9. $r = 4, r = 2 \sec \theta$

10. $r = 4 \cos 2\theta, r = \operatorname{sen} \theta$

11. $r = 4 - 4 \cos \theta, r = \dfrac{4}{1 - \cos \theta}$

12. $r = 6, r = 3 \csc \theta$

13. $r = 3 \csc \theta, r = 4(1 + \operatorname{sen} \theta)$

14. $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen} \theta}, r = \dfrac{6}{1 + \operatorname{sen} \theta}$

15. $r \operatorname{sen} \theta = 1, r = 3 - 2 \operatorname{sen} \theta$

16. $r \operatorname{sen} \theta = 1, r = 2 - \operatorname{sen} \theta$

En los Ejercicios 17—20, encontrar el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones polares dado en el intervalo $0 \leq m°(\theta) < 360$ mediante métodos analíticos; después, obtenga las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones en este intervalo por métodos gráficos. Explique el motivo de cada discrepancia.

17. $r = \cos \theta, r = 1 + 2 \cos \theta$

18. $r = \operatorname{sen} \theta, r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$

19. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta, r^2 = \cos 2\theta$

20. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta, r = \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta$

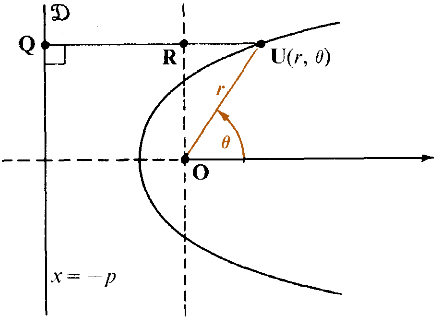
Ecuaciones polares de lugares geométricos

7–5 Ecuaciones polares de las secciones cónicas

En la Sección 4 – 6 se vió que se pueden definir las parábolas, elipses e hipérbolas en términos del cociente de las distancias de cada punto de la curva a un foco y a una directriz correspondiente. En esta sección se estudiarán las ecuaciones polares de estas curvas.

Considérese primero una sección cónica cuyo foco esté en el polo y una recta $\mathfrak{D}$ cuya ecuación cartesiana es de la forma $x = -p$ $(p > 0)$ que sea la directriz correspondiente, como se muestra en la Figura 7 – 5.

Figura 7–5



Recuérdese de la Sección 4 – 6 que si **U** es cualquier punto de la sección cónica, entonces la excentricidad e $(e > 0)$ de la sección cónica está dada por

$$e = \frac{d(\mathbf{O}, \mathbf{U})}{d(\mathfrak{D}, \mathbf{U})}.$$

De esta ecuación se tiene

$$d(\mathbf{O}, \mathbf{U}) = e[d(\mathfrak{D}, \mathbf{U})]. \tag{1}$$

Sin embargo, en términos de coordenadas polares se tiene

$$d(\mathbf{O}, \mathbf{U}) = |r|;$$

y si $l(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$ y $l(\mathbf{R}, \mathbf{U})$ son las distancias dirigidas de **Q** a **R** y de **R** a **U** respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} d(\mathfrak{D}, \mathbf{U}) &= |l(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) + l(\mathbf{R}, \mathbf{U})| \\ &= |p + r\cos\theta|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la Ecuación (1) se puede escribir en la forma equivalente

$$|r| = e|p + r\cos\theta|,$$

ó

$$r = \pm(ep + er\cos\theta).$$

Se puede demostrar que las ecuaciones

$$r = ep + er\cos\theta \qquad \text{y} \qquad r = -(ep + er\cos\theta)$$

representan en realidad al mismo conjunto de puntos (véase el Ejercicio 20, página 262). Por lo tanto, el lugar geométrico queda representado por la ecuación

$$r = ep + er\cos\theta,$$

ó

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}. \tag{2}$$

Se dice que la Ecuación (2) es la **forma polar ordinaria de una sección cónica** con foco en el origen y cuya directriz correspondiente es la recta con ecuación $x = -p$.

Ejemplo. Diga qué curva es, obtenga la ecuación cartesiana de una directriz, y trace la gráfica de

$$r = \frac{4}{2 - \cos\theta}.$$

Solución: Puesto que se desea que el denominador del segundo miembro sea de la forma $1 - e\cos\theta$, se puede multiplicar tanto al numerador cono al denominador del segundo miembro por $\frac{1}{2}$ para obtener

$$r = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta}. \tag{3}$$

Ahora por inspección se ve que $e = \frac{1}{2}$. Puesto que $\frac{1}{2} < 1$, la curva es una elipse.

A continuación comparando las Ecuaciones (2) y (3) se ve que

$$ep = 2,$$

ó puesto que $e = \frac{1}{2}$,

$$\tfrac{1}{2}p = 2.$$

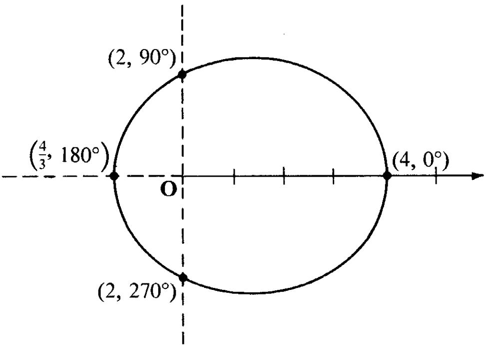
por lo tanto,

$$p = 4,$$

y una ecuación cartesiana de una directriz es

$$x = -4.$$

Para trazar la gráfica calcúlense primero las coordenadas de algunos puntos de la curva. Sustituyendo a $m^\circ(\theta)$ por 0, 90, 180 y 270 en la ecuación dada se obtiene $r = 4, 2, \frac{4}{3},$ y 2 respectivamente. Por lo tanto, los puntos $(4, 0°)$, $(2, 90°)$, $(\frac{4}{3}, 180°)$, y $(2, 270°)$ están sobre la elipse. Si se conocen estos puntos se puede trazar la gráfica con una precisión aceptable como se muestra a continuación.



Ahora para una sección cónica con foco en el polo y cuya directriz correspondiente es la recta con ecuación $x = p$ $(p > 0)$, se demuestra fácilmente que la forma polar es (véase el Ejercicio 17, página 262).

■
$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}.$$

Para una sección cónica con foco en el polo y cuya directríz correspondiente es paralela al eje polar la forma es (véase el Ejercicio 18, página 262).

■
$$r = \frac{ep}{1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta},$$

donde p es positivo, y se elige al signo $+$ si la directriz está por encima del foco y el signo $-$ si la directriz está por debajo del foco.

Ejercicios 7—5

En los Ejercicios 1—10, identifique la curva, obtenga una ecuación cartesiana de una directriz y trace una gráfica de la ecuación dada.

1. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

2. $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$

3. $r = \dfrac{6}{2 + \cos\theta}$

4. $r = \dfrac{8}{1 + 3\cos\theta}$

5. $r = \dfrac{10}{1 + \mathrm{sen}\,\theta}$

6. $r = \dfrac{4}{3 + 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$

7. $r = \dfrac{16}{4 - 5\,\mathrm{sen}\,\theta}$

8. $r = \dfrac{12}{1 - 4\,\mathrm{sen}\,\theta}$

9. $r = \dfrac{8}{5 + 4\,\mathrm{sen}\,\theta}$

10. $r = \dfrac{10}{5 - 2\cos\theta}$

En los Ejercicios 11—16,obtenga una ecuación polar de la sección cónica que se menciona y que tenga al polo como foco correspondiente a la directriz dada.

11. Parábola cuya directriz tiene la ecuación cartesiana $x = -4$.
12. Parábola cuya directriz tiene la ecuación cartesiana $y = 2$.
13. Elipse con excentricidad $\frac{3}{4}$ y la directriz tiene la ecuación cartesiana $y = -6$.
14. Elipse con excentricidad $\frac{2}{3}$ y la directriz tiene la ecuación cartesiana $x = 4$.
15. Hipérbola con excentricidad 2 y la directriz tiene la ecuación cartesiana $x = -4$.
16. Hipérbola con excentricidad $\frac{3}{2}$ y la directriz tiene la ecuación cartesiana $y = 6$.
* **17.** Emplee un razonamiento similar al que aparece en las páginas 259 – 260 para demostrar que una ecuación polar de una sección cónica con excentricidad e, un foco en el polo, y cuya directriz correspondiente tiene la ecuación cartesiana $x = p$ $(p > 0)$ es

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}.$$

* **18.** Demuestre que una ecuación polar de una sección cónica cuya excentricidad es e, con un foco en el polo, y cuya directriz correspondiente tiene la ecuación cartesiana $y = -p$ $(p > 0)$ es $r = \dfrac{ep}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$.
* **19.** Obtenga el lugar geométrico de la ecuación

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos(\theta - \alpha)},$$

donde α es un ángulo constante
* **20.** Demuestre que las ecuaciones

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \qquad \text{y} \qquad r = \frac{-ep}{1 + e\cos\theta}$$

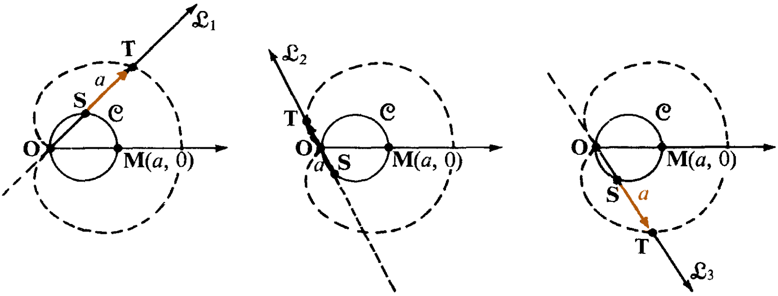
tienen la misma gráfica. [*Sugerencia:* Un punto cuyas coordenadas polares son (r, θ) tiene también las coordenadas polares $(-r, \theta + \pi)$, y $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$ para toda θ.]

–6 Problemas acerca de lugares geométricos en coordenadas polares

Se pueden obtener ecuaciones en forma polar de varios lugares geométricos en forma similar a la que se usó para obtener ecuaciones cartesianas de lugares geométricos (Sección 4 – 1). De hecho, la obtención de la Ecuación (2), página 260 es un ejemplo de esto. En muchos casos una ecuación polar de una curva es más sencilla que la ecuación cartesiana correspondiente.

Ejemplo 1. Sea **O** un punto fijo sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ de diámetro a, y para cada recta *dirigida* $\mathcal{L}$ que pase por **O** sea **S** es segundo punto en el cual $\mathcal{L}$ intersecta a $\mathcal{C}$. (Si $\mathcal{L}$ es tangente a $\mathcal{C}$, es decir **S** = **O**.) Colóquese el punto **T** sobre $\mathcal{L}$ de tal manera que $l(\mathbf{S}, \mathbf{T})$, que es la distancia *dirigida* de **S** a **T**, sea igual a a. (Nótese que $l(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = -l(\mathbf{T}, \mathbf{S})$.) Obtenga una ecuación polar del lugar geométrico de todos los puntos **T**.

Solución: Empléese un sistema de coordenadas polares con el polo en **O** y cuyo eje polar esté sobre el diámetro que contiene a **O**, como se muestra en el siguiente diagrama. Sea **M** el segundo punto donde la circunferencia interseca al eje polar.

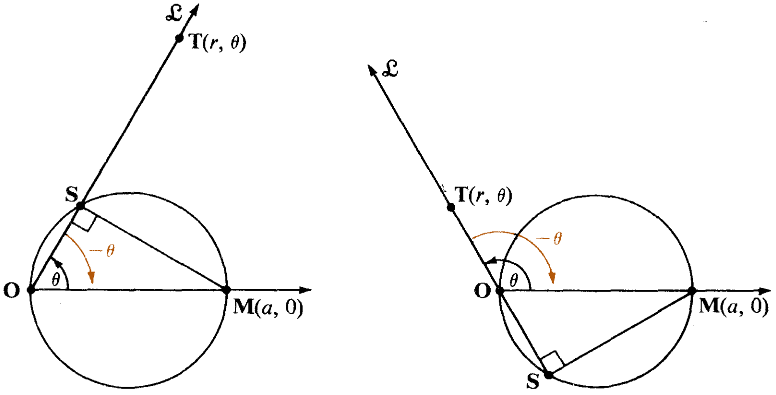


Por definición un punto $\mathbf{T}(r, \theta)$ sobre la recta dirigida $\mathcal{L}$ está en el lugar geométrico si y sólo si

$$l(\mathbf{O}, \mathbf{T}) = l(\mathbf{O}, \mathbf{S}) + a.$$

Se muestran en el diagrama anterior tres posiciones ($\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, y $\mathcal{L}_3$) de la recta $\mathcal{L}$, y los correspondientes puntos **S** y **T**.

En los siguientes diagramas se ve que $l(\mathbf{O}, \mathbf{T}) = r$ y que $l(\mathbf{O}, \mathbf{S}) = l(\mathbf{O}, \mathbf{M}) \cos(-\theta) = a \cos \theta$.



Por lo tanto, sustituyendo a r por $l(\mathbf{O}, \mathbf{T})$ y a $a \cos \theta$ por $l(\mathbf{O}, \mathbf{S})$ en la ecuación

$$l(\mathbf{O}, \mathbf{T}) = l(\mathbf{O}, \mathbf{S}) + a,$$

se tiene

$$r = a \cos \theta + a = a(1 + \cos \theta).$$

Por lo tanto,

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

es la ecuación requerida del lugar geométrico.

Esta curva en forma de corazón (véase el primer juego de diagramas en la página 263) recibe el nombre de **cardioide**. Una cardioide es un caso particular de una **caracol**, que es la curva definida por $l(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = k$, donde k es una constante no nula, pero no necesariamente igual al diámetro a de la circunferencia.

Al obtener ecuaciones polares de lugares geométricos es útil tener una fórmula en forma polar de la distancia entre dos puntos. Se obtiene esta fórmula como sigue: Supóngase que $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano. Entonces, por las Ecuaciones (1), página 246, las coordenadas cartesianas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se pueden expresar en la forma $(r_1 \cos \theta_1,\ r_1 \operatorname{sen} \theta_1)$; y $(r_2 \cos \theta_2,\ r_2 \operatorname{sen} \theta_2)$, respectivamente. Sustituyendo a x_1, x_2, y_1, y y_2 en la fórmula cartesiana de distancia

$$d(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

por las correspondientes expresiones en términos de r y θ, se tiene

$$d(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sqrt{(r_2 \cos \theta_2 - r_1 \cos \theta_1)^2 + (r_2 \operatorname{sen} \theta_2 - r_1 \operatorname{sen} \theta_1)^2},$$

que (véase Ejercicio 25, página 250) se puede simplificar para obtenerse

$$d(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2r_1(\cos \theta_2 \cos \theta_1 + \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1)}.$$

Puesto que

$$\cos \theta_2 \cos \theta_1 + \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_1 = \cos (\theta_2 - \theta_1),$$

se tiene la fórmula requerida

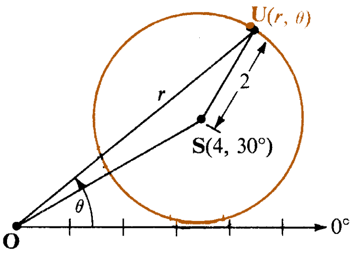
$$d(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2r_1 \cos (\theta_2 - \theta_1)}.$$

Nótese que esta fórmula expresa la Ley de los Cosenos que se estudia en trigonometría.

Ejemplo 2. Obtenga una ecuación polar del lugar geométrico de todos los puntos **U** del plano que están a dos unidades de distancia del punto S(4, 30°).

Solución: Trácese un esquema. Empleando la fórmula de la distancia con $(r_2, \theta_2) = (r, \theta)$ y $(r_1, \theta_1) = (4, 30°)$, se obtiene

$$d(\mathbf{S}, \mathbf{U}) = \sqrt{r^2 + 4^2 - 2(r)(4)\cos(\theta - 30°)}.$$



Entonces puesto que $d(\mathbf{S}, \mathbf{U}) = 2$, se tiene

$$\sqrt{r^2 + 16 - 8r\cos(\theta - 30°)} = 2,$$
$$r^2 + 16 - 8r\cos(\theta - 30°) = 4,$$

o

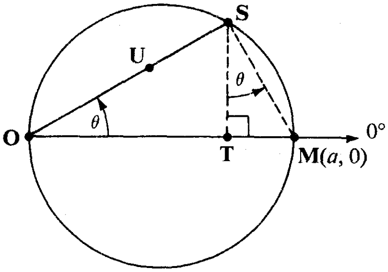
$$r^2 - 8r\cos(\theta - 30°) + 12 = 0.$$

Ejercicios 7—6

En los Ejercicios 1—8, obtenga una ecuación polar del lugar geométrico de los puntos $\mathbf{U}(r, \theta)$.

1. El lugar geométrico de los puntos medios **U** de todas las cuerdas trazadas del polo a los puntos de la circunferencia cuya ecuación es $r = 2\cos\theta$.
2. El lugar geométrico de todos los puntos **U** que son equidistantes del polo y la recta con ecuación cartesiana $x = a$.
3. El lugar geométrico de todos los puntos **U** cuya distancia al polo es la mitad de su distancia a la recta con ecuación cartesiana $y = b$.
4. El lugar geométrico de todos los puntos **U** para los cuales la suma de la distancia al polo y la distancia S(4, 0°) es 6.
5. El lugar geométrico de todos los puntos **U** para los cuales la diferencia de su distancia al polo y su distancia a S(4, 90°) es 2.
6. El lugar de todos los puntos medios **U** de los segmentos de longitud 3 con un extremo en el eje polar y el otro sobre la recta cuya ecuación es $\theta = 90°$.

En los Ejercicios 9—12 empléese el diagrama siguiente. Para obtener los lugares geométricos que se especifican.



7. El lugar geométrico de todos los puntos **U** tales que la distancia dirigida $l(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ descrita en el Ejemplo 1, página 263, es una constante k, donde $k > a$.
8. El lugar geométrico de todos los puntos **U** tales que la distancia dirigida $l(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ descrita en el Ejemplo 1, página 263, es igual a una constante k, donde $k < a$.
9. El lugar geométrico de todos los puntos **U** tales que $d(\mathbf{O}, \mathbf{U}) = d(\mathbf{T}, \mathbf{M})$.
10. El lugar geométrico de todos los puntos **U** tales que $d(\mathbf{O}, \mathbf{U}) = d(\mathbf{O}, \mathbf{T}) - d(\mathbf{T}, \mathbf{M})$.
11. El lugar geométrico de todos los puntos tales que $d(\mathbf{O}, \mathbf{U}) = d(\mathbf{O}, \mathbf{S}) - d(\mathbf{O}, \mathbf{T})$.
12. El lugar geométrico de todos los puntos **U** tales que $d(\mathbf{O}, \mathbf{U}) = d(\mathbf{T}, \mathbf{S})$.

Resumen del capítulo

1. Los puntos del plano se pueden determinar mediante **coordenadas polares** tal como se hace con coordenadas cartesianas. Las coordenadas polares y cartesianas se relacionan a través de las ecuaciones

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta,$$

y también, para $x^2 + y^2 \neq 0$, a través de las ecuaciones

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\theta = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}},\ \text{sen}\,\theta = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}},$$

donde hay que elegir el mismo signo en las tres ecuaciones.

2. La **gráfica de una ecuación polar** es el conjunto de todos los puntos que tienen al menos un par de coordenadas polares tales que satisfacen la ecuación. Se pueden trazar gráficas de ecuaciones polares ubicando algunos puntos o empleando una **gráfica auxiliar** para deducir el comportamiento de r en intervalos sucesivos de la medida del ángulo.
3. Las gráficas de ecuaciones polares se pueden intersecar aunque las ecuaciones polares no tengan una solución común.

4. Las parábolas, elipses e hipérbolas que tiene un foco en el polo y cuya correspondiente directriz tiene una ecuación cartesiana de la forma $x = \pm p$ ó $y = \pm p$ tienen ecuaciones polares de la forma

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{ep}{1 \pm e\operatorname{sen}\theta},$$

respectivamente.

5. Se pueden emplear coordenadas polares para definir lugares geométricos.

Ejercicios de repaso del capítulo

1. Calcule las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas polares son (3, 60°).
2. Calcule un par de coordenadas polares, con $r > 0$ y $0 \leq m°(\theta) < 360$,

   del punto con coordenadas cartesianas $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
3. Transforme la ecuación cartesiana $y^2 = 4x$ en una ecuación polar.
4. Transforme la ecuación polar $r = 3\cos\theta$ en una ecuación cartesiana.
5. Trace una gráfica de $r = 2 + 2\cos\theta$.
6. Resuelva el sistema

$$r = \cos\theta$$
$$r = \cos^2\theta - 2$$

   en el intervalo $0 \leq m°(\theta) < 360$ por métodos analíticos.
7. Obtenga las coordenadas de todos los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones $r = \operatorname{sen}\theta$ y $r = 1 + \cos^2\theta$ en el intervalo $0 \leq m°(\theta) < 360$.
8. Obtenga una ecuación polar de la elipse con excentricidad $\frac{1}{2}$ con un foco en el polo y cuya directriz correspondiente es la recta con ecuación cartesiana $y = -2$.
9. Obtenga una ecuación cartesiana de la directriz de la hipérbola cuya ecuación es

$$r = \frac{12}{1 - 2\operatorname{sen}\theta}.$$

10. Obtenga una ecuación polar del lugar geométrico de todos los puntos equidistantes del polo y de la recta cuya ecuación cartesiana es $x = -4$.

Transformaciones afines

En el estudio que aparece al final del Capítulo 6 se mencionaron varias transformaciones simples del plano. Se pueden generar otras transformaciones del plano aplicando sucesivamente estas transformaciones simples o básicas.

Por ejemplo, si a la transformación T_1 definida por

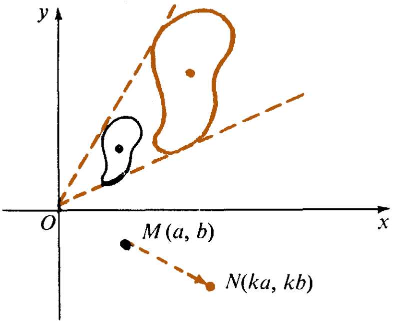
$$\begin{aligned} x' &= kx \\ y' &= y \end{aligned} \qquad (1)$$

se sigue por una transformación T_2 definida por

$$\begin{aligned} x'' &= x' \\ y'' &= ky' \end{aligned} \qquad (2)$$

—es decir, si los puntos $U(x, y)$ se mapean en los puntos $U'(x', y')$, donde x' y y' están dados por las Ecuaciones (1), y después los puntos $U'(x', y')$ se mapean en los puntos $U''(x'', y'')$, donde x'' y y'' están dados por las Ecuaciones (2) entonces

$$\begin{aligned} x'' &= kx \\ y'' &= ky. \end{aligned}$$



Esta transformación recibe el nombre de *producto* T de T_1 y T_2, y se designa mediante $T = T_2T_1$ La notación T_2T_1 significa que primero se aplica la transformación T_1, y después se aplica la transformación T_2 al resultado de la transformación T_1.

La transformación T_2T_1 mencionada anteriormente es una *transformación de semejanza*. Es una *dilatación* si $|k| > 1$, como se ilustra en la figura anterior, y es una *contracción* si $0 < |k| < 1$.

La afirmación de que dos transformaciones del plano son iguales significa que cada punto del plano se mapea en el mismo punto al aplicarse ambas transformaciones. Por ejemplo, para las transformaciones T_1 y T_2 definidas por las Ecuaciones (1) y (2) anteriores, se ve fácilmente que $T_2T_1 = T_1T_2$, aunque no se formen los productos en el mismo orden.

Si se obtiene una transformación T mediante la aplicación sucesiva de n transformaciones básicas del plano, las que se estudiaron al final del Capítulo 6, (véanse las páginas 238—241) entonces se dice que T se ha descompuesto en el siguiente producto

$$T = T_nT_{n-1} \cdot \cdot \cdot T_2T_1.$$

Toda transformación del plano que se puede descomponer en un producto de transformaciones básicas de esta manera se puede representar mediante ecuaciones de la forma.

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + h, \\ y' &= cx + dy + k, \end{aligned} \tag{3}$$

donde *a, b, c, d, h,* y *k* son constantes y el *determinante de los coeficientes* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ es distinto de cero. Se dice que una transformación del tipo (3), para la cual el determinante de los coeficientes sea no nulo, es una *transformación afín.* En particular, todas las transformaciones básicas son transformaciones afines.

Recíprocamente toda transformación afín se puede expresar como el producto de transformaciones básicas del tipo que se ha estudiado previamente. (De hecho, toda rotación se puede expresar como el producto de transformaciones básicas de otros tipos, y por lo tanto se podría omitir a las rotaciones de la lista de transformaciones básicas.)

Es interesante observar que la ley conmutativa no se aplica en general al producto de transformaciones afines. Es decir, no siempre se tiene $T_1T_2 = T_2T_1$ para las transformaciones afines T_1 y T_2. Para ver que esta afirmación es verdadera, sea la transformación T_1 la reflexión del plano sobre el eje x y sea T_2 la rotación del plano de un ángulo cuya medida es 90°. Se puede comprobar fácilmente que T_2T_1 mapea al punto $S(1, 0)$ en el punto $T(0, 1)$, mientras que T_1T_2 mapea a S en el punto $R(0, -1)$, y se tiene $R \neq T$.

La ley asociativa, $T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)T_1$, si es válida para los productos de transformaciones afines, como se ve fácilmente considerando a las transformaciones desde un punto de vista geométrico.

Toda transformación afin T tiene una *transformación inversa* que T^{-1} "deshace" lo que "hizo" T. Es fácil ver que esto es cierto para las transformaciones básicas. Una traslación por una catidad vectorial (h, k) tiene un inverso que es la traslación por la cantidad vectorial $(-h, -k)$ y una rotación de un ángulo θ tiene su inverso en la rotación del ángulo $-\theta$. Una dilatación con factor k tiene su inverso que es la contracción con el factor k, y la transformación del tipo $\frac{1}{k}$, con factor k tiene como inverso a la transformación del tipo k con factor $-k$. (Véanse las páginas 238—241.)

Por tanto, la transformación producto $T^{-1}T$ mapea cada punto del plano en si mismo, y es entonces igual a la *transformación idéntica.*

$$T^{-1}T = I = TT^{-1}$$

y

$$IT = T = TI.$$

Para demostrar que el producto T_2T_1 de dos transformaciones básicas tiene inverso, nótese que

$$(T_1^{-1}T_2^{-1})(T_2T_1) = T_1^{-1}(T_2^{-1}T_2)T_1 = T_1^{-1}IT_1 = T_1^{-1}T_1 = I.$$

Por lo tanto, el inverso de T_2T_1 es $T_1^{-1}T_2^{-1}$. Análogamente, el inverso de $T_3T_2T_1$ es $T_1^{-1}T_2^{-1}T_3^{-1}$ Continuando de este modo se puede demostrar por inducción que todo producto de transformaciones básicas tiene inverso, y que además toda transformación afín tiene un inverso afín.

Se puede demostrar también *directamente* que toda transformación afín tiene inverso afín, despejando en las ecuaciones (3) a x y y en términos de x' y y'. Puesto que el determinante de los coeficientes es distinto de 0, se obtiene

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} x' - \frac{b}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} y' - \frac{dh - bk}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ y &= \frac{-c}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} x' + \frac{a}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} y' + \frac{ch - ak}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{aligned} \tag{4}$$

Puesto que la transformación (3) mapea puntos $U(x, y)$ en puntos $U'(x', y')$ y la transformación (4) mapea a los puntos U' en los puntos originales U, la transformación (4) es el inverso de la transformación (3).

El concepto de *grupo de transformaciones* es importante en muchas ramas de las matemáticas así como en aplicaciones a la Física Atómica, la Cristalografía, etc. Cualquier conjunto no vacío $\mathcal{G}$ de transformaciones del plano es un *grupo de transformaciones* si tiene las siguientes propiedades:

1. *Cerradura*. Si $T_1 \in \mathcal{G}$ y $T_2 \in \mathcal{G}$, entonces $T_2T_1 \in \mathcal{G}$.
2. *Asociatividad*. Si $T_1 \in \mathcal{G}$, $T_2 \in \mathcal{G}$ y $T_3 \in \mathcal{G}$, entonces $T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)T_1$.
3. *Inverso*. Si $T \in \mathcal{G}$, entonces T tiene inverso $T^{-1} \in \mathcal{G}$.

Obsérvese puesto que $T^{-1}T \in \mathcal{G}$ y $T^{-1}T = I$, todo grupo xx de transformaciones del plano contiene a la transformación idéntica, I.

El conjunto de todas las transformaciones afines del plano, por ejemplo, es un grupo de transformaciones. Si se incluye a la transformación idéntica, entonces el conjunto de todas las traslaciones, el conjunto de todas las rotaciones, el conjunto de todos los esfuerzos unidimensionales, etc., son grupos.

Un subconjunto de un grupo dado puede también formar un grupo. Por ejemplo, el conjunto cuyos elementos son la identidad y las rotaciones $R_{\frac{\pi}{2}}$, R_π y $R_{\frac{3\pi}{2}}$ del plano de ángulos de medida en radianes $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$, respectivamente, es un grupo cuando se define la multiplicación como se muestra en la siguiente tabla. Nótese que este grupo es conmutativo, es decir, que para toda T_1 y toda T_2 del grupo se tiene $T_1T_2 = T_2T_1$.

	I	$R_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	$R_{\frac{3\pi}{2}}$
I	I	$R_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	$R_{\frac{3\pi}{2}}$
$R_{\frac{\pi}{2}}$	$R_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	$R_{\frac{3\pi}{2}}$	I
R_π	R_π	$R_{\frac{3\pi}{2}}$	I	$R_{\frac{\pi}{2}}$
$R_{\frac{3\pi}{2}}$	$R_{\frac{3\pi}{2}}$	I	$R_{\frac{\pi}{2}}$	R_π

Uno de los conceptos más importantes en Matemáticas es el concepto de *invariante*. Se dice a veces que la geometría se ocupa de estudiar las propiedades que son invariantes bajo transformaciones dadas.

Las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones son *transformaciones rígidas*. El tamaño y la forma de las figuras planas son invariantes bajo transformaciones. Las transformaciones de semejanza dejan invariante la forma pero no el tamaño, por ejemplo, mapeos que dejan invariante la medida de ángulos son los mapas Mercator.

El área es invariante bajo transformaciones del tipo que se muestra en las páginas 240—241, pero las distancias y ángulos no son invariantes bajo este tipo de transformaciones. Luego, ¿existe *alguna* propiedad de las figuras planas que sea invariante ante *todas* las transformaciones afines?

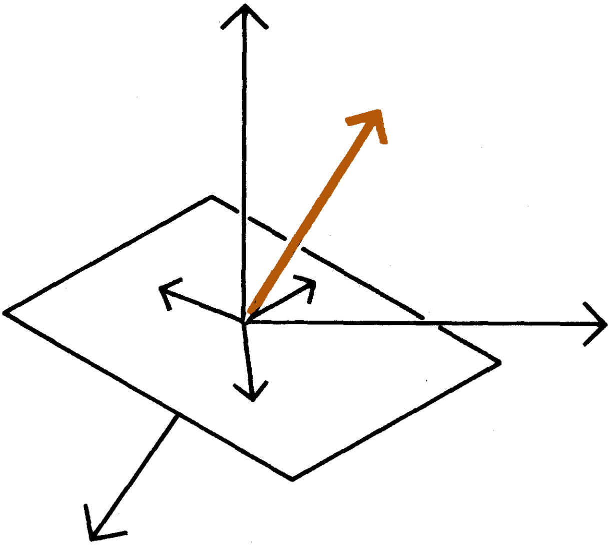
Si se sustituye en la ecuación lineal

$$Ax + By + C = 0, \tag{5}$$

donde A y B no son ambos cero, a x y y por las expresiones que aparecen en el segundo miembro de las Ecuaciones (4) respectivamente, se obtiene una ecuación lineal en las variables x' y y'. (Hay que comprobar que los coeficientes de x' y y' no son ambos cero.) Recíprocamente, si en la ecuación lineal en x' y y' se sustituyen los segundos miembros de las Ecuaciones (3), se obtiene la Ecuación (5). Se sigue que *la propiedad de ser una recta es invariante bajo transformaciones afines.*

Nótese que las propiedades invariantes mencionadas son *propiedades no métricas*, en contraposición a la longitud, área y medida de ángulo, que son propiedades métricas. La *Geometría Afín* es el estudio de las propiedades que son invariantes bajo transformaciones afines. La *Geometría Métrica* es el estudio de las propiedades que son invariantes bajo transformaciones rígidas. La *Geometría Euclidiana* incluye tanto a la Geometría Métrica como al estudio de las propiedades que son invariantes bajo transformaciones de semejanza.

Capítulo 8



En este capítulo se estudiarán el álgebra y la geometría de vectores en tres dimensiones. Se presentan los conceptos de cosenos directores y producto vectorial de los vectores.

Vectores en el Espacio

Geometría de ternas ordenadas

8—1 Coordenadas cartesianas; distancia entre dos puntos

Es bien conocida la definición de producto cartesiano $A \times B$ de los conjuntos A y B, a saber,

$$A \times B = \{(x, y): x \in A \quad \text{y} \quad y \in B\}.$$

Se aplica una definición similar al producto cartesiano $A \times B \times C$ de los conjuntos A, B y C.

$$A \times B \times C = \{(x, y, z): x \in A, y \in B, \quad \text{y} \quad z \in C\}.$$

El simbolo (x, y, z) representa una **terna ordenada**.

En este capítulo se considerará el producto cartesiano

$$\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} = \mathcal{R}^3,$$

es decir

$$\{(x, y, z): x \in \mathcal{R}, y \in \mathcal{R}, \quad \text{y} \quad z \in \mathcal{R}\}.$$

Como se verá, cada terna ordenada (x, y, z) de números reales se puede asociar en forma única a un punto en el espacio, y cada punto en el espacio se puede asociar en forma única con una terna ordenada de números reales mediante un sistema de coordenadas cartesianas rectangular en tres dimensiones. Por lo tanto existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los puntos en el espacio y $\mathcal{R}^3$, y la representación geométrica de $\mathcal{R}^3$ es el espacio tridimensional.

Para visualizar una forma de establecer un sistema tridimensional de coordenadas cartesianas, piénsese en una mano derecha orientada en forma tal que el pulgar apunte hacia la derecha, el índice apunta hacia arriba y el anular hacia el corazón del lector (Figura 8 – 1). Si ahora se piensa en un sistema de coordenadas en el espacio en el cual una primera recta dividida

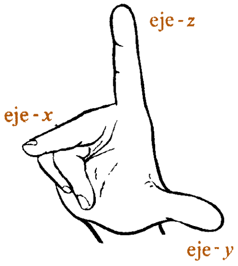
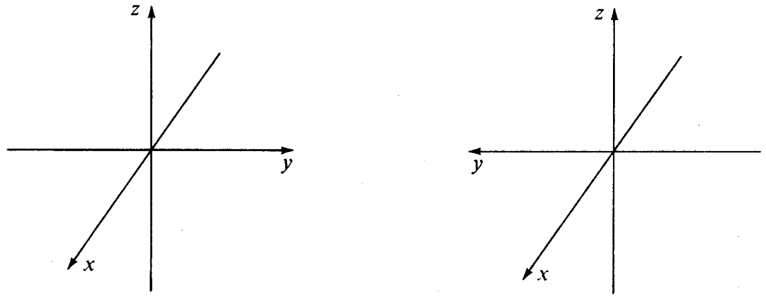


Figura 8—1

en segmentos, el eje x, está en la dirección en que el anular apunta el corazón, una segunda recta dividida en segmentos, el eje y, apunta en la dirección del pulgar, y una tercera recta dividida en segmentos, el eje z, apunta en la dirección del índice, se tiene un esquema mental de un sistema de coordenadas cartesianas derecho [Figura 8 – 2(a)]. Para obtener un sistema de coordenadas izquierdo [Figura 8 – 2(b)] basta cambiar a la mano derecha por la mano izquierda y repetir el proceso (con el pulgar apuntando hacia la izquierda y los otros dedos como antes).

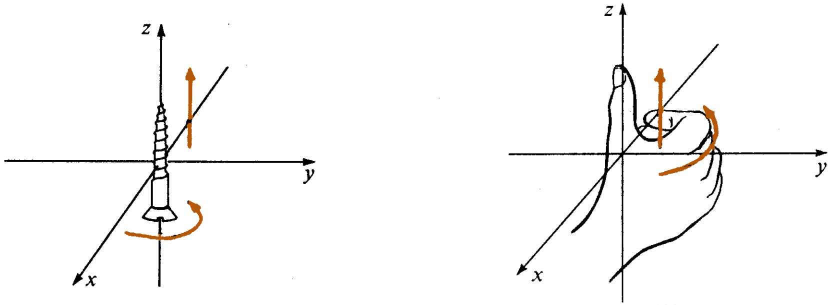


Sistema derecho
(*a*)

Sistema izquierdo
(*b*)

Figura 8—2

Nótese que si se piensa en un tornillo con eje a lo largo del eje z, entonces al hacer girar al tornillo de la dirección positiva del eje x hacia la dirección positiva del eje y, el tornillo avanzará en la dirección positiva del eje z en un sistema derecho, [Figura 8 – 3(a)], pero esto no sucederá en un sistema izquierdo. Además si se doblan los dedos de la mano de la dirección positiva del eje x hacia la dirección positiva del eje y, en un sistema derecho el pulgar apuntará en la dirección positiva del eje z [Figura 8—3(b)]. En este libro sólo se emplearán sistemas derechos.



(*a*)
(*b*)

Figura 8—3

Más formalmente, para establecer un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional tal, hay que elegir tres rectas mutuamente perpendiculares en el espacio, divididas en segmentos, que se corten en el punto **O**, y numerar los segmentos, que deben ser de la misma longitud en las tres rectas, empezando desde el punto **O**. El punto **O** es entonces el **origen** y las rectas son los **ejes de coordenadas**. El primero, segundo y tercer ejes se asocian a las coordenadas x, y y z respectivamente, como se mencionó en las páginas 273 y 274.

Los tres planos definidos por los ejes de coordenadas son los **planos cartesianos**. Al trazar un esquema de un sistema de coordenadas, se piensa normalemente que el plano que contiene a los ejes x y y es horizontal (plano xy). Se piensa que el plano que contiene a los ejes x y z (plano xz) y el plano que contiene a los ejes y y z (plano yz) son verticales. El sistema de coordenadas se dibuja normalmente como si la visual se dirigiera hacia el origen, con la parte positiva del eje x apuntando hacia afuera de la página, la parte positiva del eje y apuntando hacia la derecha y la parte positiva del eje z apuntando hacia arriba, de modo que las partes negativas de los tres ejes están detrás de los planos coordenados. Para indicar esto, las partes negativas de los ejes se representan frecuentemente mediante líneas punteadas (Figura 8 – 4).

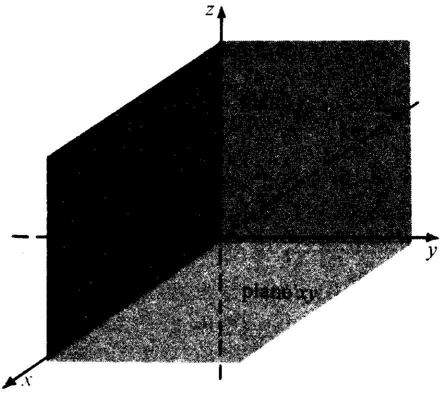


Figura 8—4

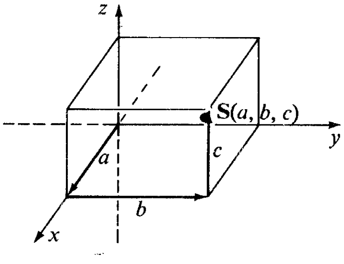


Figura 8—5

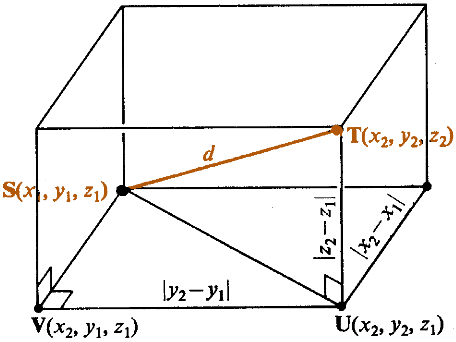
En un sistema de coordenadas cartesianas tridimensional se ubica a un punto especificando las distancias dirigidas que separan al punto de los planos cartesianos. Por ejemplo el punto **S** que aparece en la Figura 8 – 5 tiene las coordenadas (a, b, c), donde a, b, y c son las distancias dirigidas del punto a los planos yz, xz y xy respectivamente. Se ve en la Figura 8 – 5 que un punto en el espacio determina en forma única sus propias coordenadas, y recíprocamente, que una terna ordenada de números reales determina en forma única a un punto en el espacio. Por lo tanto dos ternas ordenadas (a, b, c) y (x, y, z) corresponden al mismo punto si y sólo si son iguales, es decir, si y sólo si $a = x, b = y,$ y $c = z$.

Los tres planos cartesianos dividen al espacio en ocho partes llamadas **octantes**. Normalmente sólo se asigna un número 1, al octante superior frontal. Los demás octantes se identifican mediante los signos de las componentes de las ternas ordenadas a las que están asociados, como, $(+, -, +)$ o bien $(-, -, +)$.

La distancia que separa a dos puntos en el espacio se obtiene aplicando el Teorema de Pitágoras dos veces. En efecto, si $\mathbf{S}(x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos en el espacio (figura 8—6), entonces la distancia $d(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ entre estos puntos es

$$d(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\cdot \tag{1}$$

Figura 8—6



Para ver porqué esto es así se procede como sigue: construyendo planos paralelos a los planos cartesianos que pasen por **S** y **T**, se ubica a $\mathbf{U}(x_2, y_2, z_1)$ y $\mathbf{V}(x_2, y_1, z_1)$. Los puntos **S, T** y **U** forman entonces un triángulo rectángulo. Empleando el Teorema de Pitágoras se obtiene

$$d(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sqrt{[d(\mathbf{S}, \mathbf{U})]^2 + [d(\mathbf{U}, \mathbf{T})]^2}.$$

Ahora empleando la fórmula de distancia se tiene

$$\begin{aligned} d(\mathbf{S}, \mathbf{U}) &= \sqrt{[d(\mathbf{S}, \mathbf{V})]^2 + [d(\mathbf{V}, \mathbf{U})]^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \end{aligned}$$

Puesto que $d(\mathbf{U}, \mathbf{T}) = |z_2 - z_1|$, sustituyendo se obtiene la Ecuación (1)

Ejemplo. Calcule la distancia que separa a $\mathbf{S}(2, 4, 1)$ de $\mathbf{T}(6, 7, 13)$.

Solución: Aplicando la fórmula de distancia (1) anterior, con $x_2 - x_1 = 6 - 2 = 4$, $y_2 - y_1 = 7 - 4 = 3$, y $z_2 - z_1 = 13 - 1 = 12$, se tiene $d(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Ejercicios 8—1

En los Ejercicios 1—8, trace una gráfica del punto en el espacio cuyas coordenadas se dan

1. $(1, 2, 1)$
2. $(3, 2, 1)$
3. $(0, 2, 3)$
4. $(4, 0, 2)$
5. $(4, 3, 0)$
6. $(0, 0, 5)$
7. $(3, 0, 0)$
8. $(0, 4, 0)$

En los Ejercicios 9—14 diga qué condición(es) deben cumplir las coordenadas de todos los puntos (x, y, z) que están en el (los) plano(s) dado(s).

9. Plano xy
10. Plano yz
11. Plano xz
12. Planos xy y yz
13. Planos xy y xz
14. Planos yz y xz

En los Ejercicios 15—20, calcule los valores de x, y y z tales que las dos ternas ordenadas sean iguales.

Ejemplo. $(x + y, x - y, z), (3, 1, 4)$

Solución: Si las dos ternas ordenadas son iguales se tiene

$$x + y = 3, \quad x - y = 1, \quad \text{y} \quad z = 4.$$

Se pueden obtener los valores de x y y resolviendo las dos primeras ecuaciones simultáneamente. Los valores requeridos son

$$x = 2, \quad y = 1, \quad \text{y} \quad z = 4.$$

15. $(3, y, z + 1), (3, 4, 5)$
16. $(x, 5, z - 2), (4, 5, 2)$
17. $(x + 1, y - 3, z + 4), (-2, 3, 6)$
18. $(x - 2, y + 2, z - 4), (0, 0, 0)$
19. $(x + 4, 3, z + 5), (4, y + 3, 2)$
20. $(1, y - 3, z + 2), (x - 5, 4, 6)$

En los Ejercicios 21—28, calcule la distancia que separa a los puntos **S** y **T**.

21. $\mathbf{S}(1, 1, 2), \mathbf{T}(2, 3, 4)$
22. $\mathbf{S}(-1, 1, 3), \mathbf{T}(0, -1, 1)$
23. $\mathbf{S}(2, -1, 5), \mathbf{T}(0, 2, -1)$
24. $\mathbf{S}(3, 1, -3), \mathbf{T}(5, 4, 3)$
25. $\mathbf{S}(2, 1, 0), \mathbf{T}(3, 5, 8)$
26. $\mathbf{S}(-2, 1, -3), \mathbf{T}(2, 2, 5)$
27. $\mathbf{S}(4, 5, 7), \mathbf{T}(6, 6, 5)$
28. $\mathbf{S}(5, 3, -6), \mathbf{T}(2, -1, 6)$

29. Emplee la fórmula de distancia y el recíproco del Teorema de Pitágoras para demostrar que los puntos $\mathbf{S}(3, 5, 2), \mathbf{T}(2, 3, -1)$, y $\mathbf{U}(6, 1, -1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

30. Demuestre que los puntos S(6, 3, 4), T(2, 1, −2), y U(4, −1, 10) son los vértices de un triángulo isósceles.

31. Demuestre que los puntos S(2, −1, 3), T(4, 2, 1), y U(−2, −7, 7) están sobre una recta.

32. Demuestre que el punto medio de un segmento cuyos extremos son $S_1(x_1, y_1, z_1)$ y $S_2(x_2, y_2, z_2)$ es el punto $S_m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

33. Obtenga una ecuación cuya gráfica es el conjunto de todos los puntos que están a 3 unidades de distancia de S(2, 3, 4).

34. Obtenga una ecuación tal que la gráfica sea el conjunto de todos los puntos que son equidistantes de S(−1, 4, 0) y T(2, −1, 1).

* **35.** Obtenga una ecuación cuya gráfica sea el conjunto de todos los puntos para los cuales la suma de sus distancias a los puntos S(0, 4, 0) y T(0, −4, 0) sea 10 unidades de distancia.

* **36.** Demuestre que la ecuación de una esfera de radio 3 y centro en S(1, −2, 2) es $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z = 0$.

* **37.** Demuestre que la ecuación de una esfera de radio r y centro en $S(x_1, y_1, z_1)$ es $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$.

* **38.** Completando cuadrados en x, y y z, obtenga el radio y las coordenadas del centro de la esfera cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 8y - 8 = 0.$$

8—2 Vectores en el espacio

Cada terna ordenada de números reales (v_1, v_2, v_3) se puede asociar a una traslación en el espacio, tal como cada par ordenado de números reales se puede asociar con una traslación en el plano (Figura 8 − 7). Por lo tanto se define una terna ordenada de números reales como un **vector** (tridimensional).

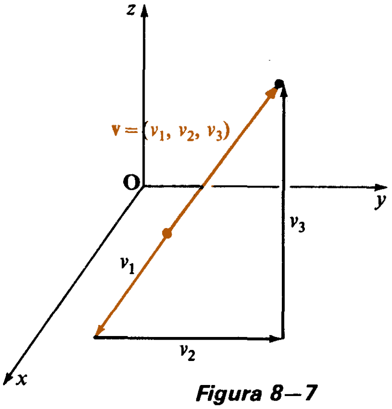


Figura 8—7

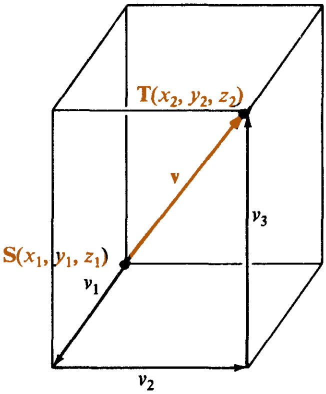


Figura 8—8

En la Figura 8 – 8 aparece un segmento dirigido, o **vector geométrico**, que representa al vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Este vector geométrico representa a la traslación del punto $\mathbf{S}(x_1, y_1, z_1)$ al punto $\mathbf{T}(x_2, y_2, z_2)$. De la figura se ve que $v_1 = x_2 - x_1, v_2 = y_2 - y_1$, y $v_3 = z_2 - z_1$. Por lo tanto el vector geométrico que va del punto cuyas coordenadas son (x_1, y_1, z_1) al punto cuyas coordenadas son (x_2, y_2, z_2) es una representación geométrica del vector

$$\mathbf{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Se dice que el punto **S** de la Figura 8 – 8 es el **punto inicial** del vector geométrico, y que **T** es su **punto final.** Si el punto inicial de un vector geométrico es el origen $\mathbf{O}(0, 0, 0)$, entonces se dice que el vector está en su **posición ordinaria**, y que es la **representación ordinaria** del vector correspondiente.

La norma $\|\mathbf{v}\|$ de un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbb{R}^3$ se define como

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Tal como sucede en $\mathbb{R}^2$, la norma de un vector de $\mathbb{R}^3$ se puede interpretar como la longitud de cualquiera de sus representaciones geométricas. Por lo tanto la norma del vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ „ que se muestra en la Figura 8 – 8 es igual a la longitud de $\overrightarrow{\mathbf{ST}}$, es decir

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

o bien

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Otras definiciones que se aplican a los vectores de dos dimensiones se pueden extender directamente a los vectores en tres dimensiones. En particular si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ son vectores tridimesionales entonces

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) \qquad (1)$$

$$-\mathbf{v} = -(v_1, v_2, v_3) = (-v_1, -v_2, -v_3) \qquad (2)$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{v} + (-\mathbf{u}) = (v_1 - u_1, v_2 - u_2, v_3 - u_3) \qquad (3)$$

$$\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (0, 0, 0) = \mathbf{0} \qquad (4)$$

$$\mathbf{v} \text{ es un vector unidad si y sólo si } \|\mathbf{v}\| = 1. \qquad (5)$$

$$\text{Si } r \text{ es un escalar, entonces } r\mathbf{v} = r(v_1, v_2, v_3) = (rv_1, rv_2, rv_3). \qquad (6)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 \qquad (7)$$

Ejemplo 1. Demuestre que si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$.

Solución: De la definición (7) anterior se tiene

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2.$$

Puesto que $\|\mathbf{v}\|^2 = (\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2})^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, se sigue que

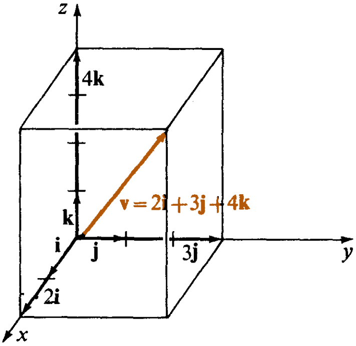
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2.$$

Tal como en el caso de $\mathcal{R}^2$, un vector en $\mathcal{R}^3$ se puede expresar como la suma de componentes vectoriales paralelas a los ejes de coordenadas. Recuérdese, de la Sección 1 – 8, que **i** y **j** son los vectores unidad en las direcciones de las partes positivas de los ejes x y y respectivamente, y que cualquier vector se puede escribir en forma única como una combinación lineal de **i** y **j**. Por ejemplo $\mathbf{v} = (2, 3)$ se puede escribir como $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. En $\mathcal{R}^3$, **i** y **j** representan también vectores unidad en las direcciones de las partes positivas de los ejes x y y respectivamente, y **k** se define como el vector unidad en la dirección de la parte positiva del eje z. Entonces

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Todo vector de $\mathcal{R}^3$ se puede escribir en una y sólo una forma como una combinación lineal de **i, j** y **k**. Por ejemplo para el vector $\mathbf{v} = (2, 3, 4)$, se tiene $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ (véase la Figura 8 – 9.)

Figura 8—9



Ejercicios 8—2

En los Ejercicios 1—8,se dan las coordenadas de dos puntos **S** y **T**. Exprese al vector **v**, que representa a la traslación de **S** a **T**, tanto (a) como una terna ordenada, como (b) en la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Después calcule

Ejemplo. S(3, 1, 5), T(–1, 4, 2)

Solución: (a) $\mathbf{v} = (-1 - 3, 4 - 1, 2 - 5) = (-4, 3, -3)$

(b) $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

(c) $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9 + 9} = \sqrt{34}$

1. S(2, –1, 5), T(4, 3, 3)
2. S(2, 1, 5), T(–3, 2, –1)
3. S(0, 4, 5), T(5, –1, 0)
4. S(3, 0, –2), T(0, 4, 6)
5. S(–3, –3, –3), T(3, 3, 3)
6. S(0, 0, 3), T(–3, 0, 0)
7. S(5, –1, 0), T(0, 0, –2)
8. S(8, –6, –2), T(5, 1, –1)

En los Ejercicios 9—16 **u** = (3, −1, 2) y **w** = (1, 7, −6). Exprese al vector **v** en la ecuación dada como una terna ordenada.

Ejemplo. $\mathbf{v} = \mathbf{u} - 2\mathbf{w}$

Solución: se tiene $2\mathbf{w} = 2(1, 7, -6) = (2, 14, -12)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (3, -1, 2) - (2, 14, -12)\\ &= (3 - 2, -1 - 14, 2 + 12)\\ &= (1, -15, 14).\end{aligned}$$

9. $\mathbf{v} = -3\mathbf{u}$
10. $\mathbf{v} = \frac{2}{3}\mathbf{w}$
11. $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + \mathbf{w})$
12. $\mathbf{v} = 2\mathbf{w} - \mathbf{u}$
13. $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$
14. $\mathbf{w} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v}$
15. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{v} + 2\mathbf{w}$
16. $2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 3(\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w})$

En los Ejercicios 17—24,calcule **u** · **v** para los vectores dados **u** y **v**.

17. $\mathbf{u} = (-3, 2, 0), \mathbf{v} = (1, 1, 1)$
18. $\mathbf{u} = (1, -4, 5), \mathbf{v} = (-5, -2, 8)$
19. $\mathbf{u} = (-2, 3, -6), \mathbf{v} = (0, 4, -9)$
20. $\mathbf{u} = (7, 0, -3), \mathbf{v} = (-1, 6, 9)$
21. $\mathbf{u} = (-3, -4, -5), \mathbf{v} = (-6, 5, 7)$
22. $\mathbf{u} = (7, 2, -9), \mathbf{v} = (3, 1, 9)$
23. $\mathbf{u} = (9, 0, -2), \mathbf{v} = (\frac{1}{2}, 3, \frac{2}{3})$
24. $\mathbf{u} = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{3}), \mathbf{v} = (5, \frac{3}{4}, -2)$

En los Ejercicios 25—35, sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vectores en $\mathcal{R}^3$, y sean *r* y *s* escalares. Demuestre que cada afirmación es válida.

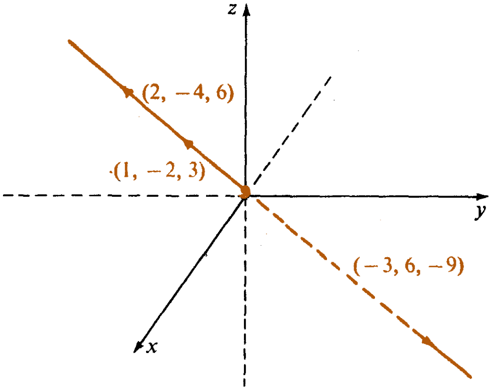
* **25.** $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
* **26.** $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
* **27.** $r(s\mathbf{v}) = (rs)\mathbf{v}$
* **28.** $r\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si $r = 0$ o bien $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
* **29.** $r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r\mathbf{u} + r\mathbf{v}$
* **30.** $(r + s)\mathbf{u} = r\mathbf{u} + s\mathbf{u}$
* **31.** $\|r\mathbf{u}\| = |r|\,\|\mathbf{u}\|$
* **32.** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
* **33.** $r(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (r\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$
* **34.** $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
* **35.** $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|^2$

Propiedades de los vectores en el espacio

8—3 Cosenos directores

Como se muestra en la Figura 8 – 10 las representaciones geométricas ordinarias de los vectores $(1, -2, 3)$ y $(2, -4, 6)$ están sobre el mismo segmento dirigido que empieza en el origen, puesto que $(2, -4, 6) = 2(1, -2, 3)$. Se dice entonces que los vectores $(1, -2, 3)$ y $(2, -4, 6)$ tienen la *misma* dirección.

Figura 8—10



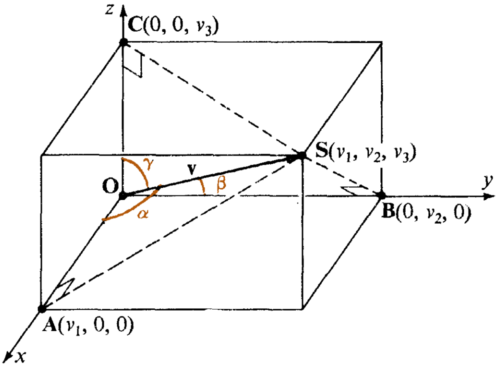
La representación geométrica ordinaria del vector $(-3, 6, -9)$, está sobre la misma recta que la representación ordinaria de $(1, -2, 3)$, puesto que $(-3, 6, -9) = -3(1, -2, 3)$, pero se extiende hacia el otro lado del origen. Se dice entonces que los vectores $(1, -2, 3)$ y $(-3, 6\ -9)$ tienen sentidos *opuestos*.

En general si $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^3$ y k es un escalar, entonces los vectores $\mathbf{v}$ y $k\mathbf{v}$ tienen la **misma dirección** y el mismo sentido si $k \geq 0$ pero tienen **sentidos opuestos** si $k < 0$. Se dice en ambos casos que $\mathbf{v}$ y $k\mathbf{v}$ son **vectores paralelos.**

Se ha visto que la dirección de un vector bidimensional no nulo queda determinado por la medida $m°(\theta)$, $0 \leq m°(\theta) < 360$, del ángulo que forma la parte positiva del eje x con la representación geométrica ordinaria del vector. La dirección de un vector no nulo tridimensional queda determinada por tres **ángulos de dirección**, cada uno de los cuales separa a la representación geométrica ordinaria de una de las partes positivas de los ejes de coordenadas. Estos ángulos de dirección se denotan normalmente mediante letras griegas de la siguiente manera: α es el ángulo de dirección con respecto a la parte positiva del eje x, β es el ángulo de dirección con respecto a la parte positiva del eje y, y γ es el ángulo de dirección con respecto a la parte positiva del eje z. En la Figura 8 – 11 se ilustra la situación del vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Los ángulos de dirección α, β, y γ se eligen de modo que

$$\begin{aligned} 0 &\leq m°(\alpha) \leq 180, \\ 0 &\leq m°(\beta) \leq 180, \\ 0 &\leq m°(\gamma) \leq 180. \end{aligned} \tag{1}$$

Figura 8–11



Los cosenos de los ángulos de dirección de un vector reciben el nombre de **cosenos directores** del vector. En la Figura 8–11 los ángulos **OAS**, **OBS**, y **OCS** son ángulos rectos. Se tiene pues que los cosenos directores de **v** están dados por

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \cos\beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}, \cos\gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}, \tag{2}$$

donde $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \neq 0$. Puesto que α, β, y γ están restringidos por las condiciones (1), página 282, los ángulos de dirección quedan determinados en forma única por los cosenos directores. Por ejemplo si $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$, entonces

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \cos\gamma = 0,$$

y
$$m^\circ(\alpha) = 45, m^\circ(\beta) = 135, m^\circ(\gamma) = 90.$$

(Obsérvese que la representación geométrica ordinaria de **v** está en el plano xy.)

Si $\|\mathbf{v}\| = 0$, es decir, si **v** es el vector cero, entonces las expresiones $\frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}$, $\frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}$, y $\frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$ que definen a los cosenos directores no tienen sentido. Se acordará en este caso asignar al vector **v** cualquier dirección que resulte conveniente. Nuevamente (véase la página 16) esto es geométricamente razonable puesto que la representación geométrica ordinaria del vector cero (el origen) está sobre todo vector geométrico que esté en posición ordinaria.

Considérese ahora la relación que existe entre los cosenos directores de un vector no nulo $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Por la Ecuación (2) anterior se tiene

$$\cos^2\alpha = \frac{v_1^2}{\|\mathbf{v}\|^2}, \cos^2\beta = \frac{v_2^2}{\|\mathbf{v}\|^2}, \text{ y } \cos^2\gamma = \frac{v_3^2}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Por lo tanto, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{\|\mathbf{v}\|^2} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$, o bien

■
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3}$$

Por lo tanto, los cosenos directores de un vector no son independientes; si se conocen dos de ellos se pueden calcular el valor absoluto del tercero. Si $\cos\alpha$, $\cos\beta$, y γ son los cosenos directores de un vector no nulo (v_1, v_2, v_3), $\mathbf{v} =$ entonces la Ecuación (3) implica que $= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}(v_1, v_2, v_3)$ es el vector unidad que tiene la misma dirección que **v**.

Ejemplo 1. Verifique que la suma de los cuadrados de los cosenos directores del vector $\mathbf{v} = (1, -2, 3)$ es 1, y obtenga un vector unitario en la dirección de **v**.

Solución. Primero calcúlese $\|\mathbf{v}\|$:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}\cdot$$

ahora

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}, \tag{4}$$

y

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{14}, \cos^2\beta = \frac{4}{14}, \cos^2\gamma = \frac{9}{14}\cdot$$

Entonces

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1}{14} + \frac{4}{14} + \frac{9}{14} = \frac{14}{14} = 1.$$

Debido a (4) el vector unidad requerido, que tiene la misma dirección que **v** es

$$\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

Si los vectores no nulos **u** y **v** son paralelos, es decir si $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ para algún escalar no nulo k, entonces los vectores tienen o bien los mismos cosenos directores, o los cosenos directores de **u** son los negativos de los de **v**. Recíprocamente si los vectores no nulos **u** y **v** tienen los mismos cosenos directores, o bien los cosenos directores de uno de ellos son los negativos de los del otro, entonces **u** es un múltiplo escalar de **v**, o sea, **u** y **v** son paralelos.

Para comprobar que la primera afirmación es válida nótese que para $\mathbf{u} = k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$, los cosenos directores están dados por

$$\cos\alpha = \frac{kv_1}{\|k\mathbf{v}\|} = \frac{kv_1}{|k|\,\|\mathbf{v}\|}, \cos\beta = \frac{kv_2}{\|k\mathbf{v}\|} = \frac{kv_2}{|k|\,\|\mathbf{v}\|}, \cos\gamma = \frac{kv_3}{\|k\mathbf{v}\|} = \frac{kv_3}{|k|\,\|\mathbf{v}\|},$$

de donde se tiene

$$\cos\alpha = \pm\frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \cos\beta = \pm\frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}, \text{ y } \cos\gamma = \pm\frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|},$$

en donde se toma el signo + en todas las fórmulas si k es positivo, y se toma el signo — en todas las fórmulas si k es negativo. Pero estos son los cosenos directores de **v** o sus negativos.

Para comprobar la afirmación recíproca, supóngase que los vectores no nulos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tienen cosenos directores iguales, o que los cosenos directores son los unos el negativo de los otros. Entonces tenemos

$$\frac{u_1}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{u_2}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{u_3}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} \tag{5}$$

o

$$\frac{u_1}{\|\mathbf{u}\|} = -\frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{u_2}{\|\mathbf{u}\|} = -\frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}, \frac{u_3}{\|\mathbf{u}\|} = -\frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}. \tag{6}$$

En el último caso se tiene

$$u_1 = -\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|} v_1, u_2 = -\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|} v_2, u_3 = -\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|} v_3,$$

de manera que

$$(u_1, u_2, u_3) = -\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}(v_1, v_2, v_3).$$

Como $\|\mathbf{u}\| \neq 0$ y $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, $-\frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}$ es un escalar no nulo, y por lo tanto **u** es un múltiplo escalar no nulo de **v**.

Mediante un razonamiento similar se comprueba que es verídica la afirmación de que **u** es un múltiplo escalar no nulo de **v** en el caso de que los cosenos directores sean iguales (Ecuación (5)).

Por lo tanto los vectores no nulos **u** y **v** son paralelos si y sólo si **u** y **v** tienen los mismos cosenos directores, o bien si y sólo si los cosenos directores de **u** son los negativos de los cosenos directores de **v**. Si los cosenos directores son iguales, **u** y **v** tienen el mismo sentido; si los cosenos directores son los unos el negativo de los otros, **u** y **v** tienen sentidos opuestos.

Ejemplo 2. Obtenga el vector **u** si $\|\mathbf{u}\| = 14$ y si **u** tiene el sentido opuesto al del vector $\mathbf{v} = (2, 5, -3)$.

Solución: Los cosenos directores de **v** son

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{38}}, \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{38}},$$

y

$$\cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{38}}.$$

Por lo tanto un vector unitario con sentido opuesto al de **v** es $\left(\frac{-2}{\sqrt{38}}, \frac{-5}{\sqrt{38}}, \frac{3}{\sqrt{38}}\right)$. Puesto que $\|\mathbf{u}\| = 14$, se sigue que

$$\mathbf{u} = 14\left(\frac{-2}{\sqrt{38}}, \frac{-5}{\sqrt{38}}, \frac{3}{\sqrt{38}}\right) = \left(\frac{-28}{\sqrt{38}}, \frac{-70}{\sqrt{38}}, \frac{42}{\sqrt{38}}\right).$$

Ejercicios 8–3

En los Ejercicios 1–8, obtenga los cosenos directores del vector dado.

1. $(-1, 2, 2)$

2. $(0, 3, -4)$

3. $(5, 0, 12)$

4. $(4, -4, 2)$

5. $(-3, -5, \sqrt{2})$

6. $(3, 2, 6)$

7. $(12, -3, 4)$

8. $(-8, -4, 1)$

En los Ejercicios 9–14, obtenga el vector unidad en la dirección del vector cuya representación geométrica va de **S** a **T**.

9. $\mathbf{S}(1, -2, 5)$, $\mathbf{T}(4, 0, 11)$

10. $\mathbf{S}(-3, 1, 0)$, $\mathbf{T}(-2, 3, 2)$

11. $\mathbf{S}(2, -2, -1)$, $\mathbf{T}(-4, -5, 1)$

12. $\mathbf{S}(9, 2, -1)$, $\mathbf{T}(-3, 5, -5)$

13. $\mathbf{S}(10, 9, -2)$, $\mathbf{T}(3, 4, -3)$

14. $\mathbf{S}(-3, -1, -2)$, $\mathbf{T}(1, 3, -2)$

15. Si para un vector $\mathbf{v}$, $\cos\alpha = \frac{2}{11}$ y $\cos\beta = \frac{-6}{11}$, calcule $\cos\gamma$. (hay dos respuestas correctas.)

16. Si para un vector $\mathbf{v}$, $\cos\beta = \frac{3}{10}$ y $\cos\gamma = \frac{2}{5}$, calcule $\cos\alpha$.

En los Ejercicios 17–22, obtenga el vector **u** cuya norma se da y que tiene el mismo sentido que el vector **v** dado.

17. $\|\mathbf{u}\| = 8$; $\mathbf{v} = (1, 2, 5)$

18. $\|\mathbf{u}\| = 6$; $\mathbf{v} = (3, 3, 3)$

19. $\|\mathbf{u}\| = \frac{1}{2}$; $\mathbf{v} = (6, 12, 4)$

20. $\|\mathbf{u}\| = \frac{1}{4}$; $\mathbf{v} = (3, 0, 4)$

21. $\|\mathbf{u}\| = 14$; $\mathbf{v} = (6, 4, -2)$

22. $\|\mathbf{u}\| = 7\sqrt{2}$; $\mathbf{v} = (-3, 5, -4)$

23–28. Repita los Ejercicios 17–22 considerando que **u** y **v** deben tener sentidos opuestos en lugar de tener el mismo sentido.

En los Ejercicios 29 y 30, diga cuales de los vectores dados son paralelos.

29. $(3, 0, 2)$, $(3, 1, 2)$, $(-6, 0, -4)$

30. $(5, 2, 7)$, $(3, 2, -1)$, $(-3, -2, 1)$

En los Ejercicios 31–34, α, β, y γ son los ángulos directores de un vector.

31. Obtenga $m^\circ(\alpha)$ si $m^\circ(\beta) = m^\circ(\gamma) = 90$.

32. Obtenga $m^\circ(\alpha)$ si $m^\circ(\beta) = m^\circ(\gamma) = 45$.

33. Si $m^\circ(\alpha) = 120$ y $m^\circ(\gamma) = 45$, obtenga $m^\circ(\beta)$.

34. Si $m^\circ(\alpha) = 135$ y $m^\circ(\beta) = 60$, obtenga $m^\circ(\gamma)$.

* **35.** Demuestre que si un vector $\mathbf{v}$ es paralelo al eje x, entonces los cosenos directores de $\mathbf{v}$ son o bien $(1, 0, 0)$ o $(-1, 0, 0)$.

* **36.** Demuestre que si un vector $\mathbf{v}$ es paralelo a una recta en el plano yz, entonces los cosenos directores de $\mathbf{v}$ son de la forma $(0, b, \pm\sqrt{1 - b^2})$.

8—4 Vectores paralelos y perpendiculares

Si **u** y **v** son dos vectores no nulos de $\mathcal{R}^3$, entonces el ángulo que forman se puede especificar de la misma manera que el ángulo que forman dos vectores en $\mathcal{R}^2$ (página 31). A saber θ es el ángulo $0 \leq m°(\theta) \leq 180$, entre los vectores geométricos con representaciones ordinarias que representan a los vectores **u** y **v** [Figura 8–12(a)].

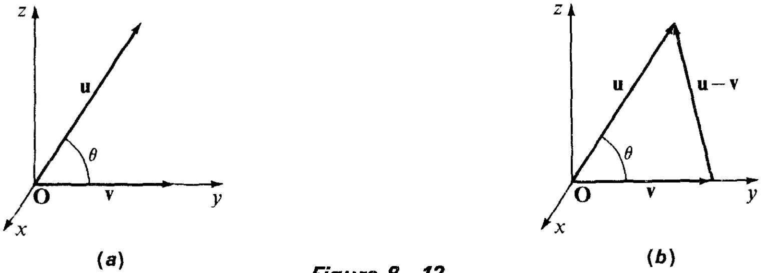


Figura 8—12

Se ve en la Figura 8–12(b) que si los vectores **u** y **v** no son paralelos entonces los tres vectores **u**, **v**, y **u** — **v** tienen representaciones geométricas que forman un triángulo. Empleando la Ley de los Cosenos se puede demostrar, mediante un razonamiento parecido al que aparece en la página 31. (Ejercicios 30, página 292) que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}. \tag{1}$$

Ejemplo 1. Obtenga el coseno del ángulo que forman los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{v} = (2, -1, 2)$.

Solución: De la Ecuación (1) se tiene

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{(1, 2, 3)\cdot(2, -1, 2)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\,\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}$$

$$= \frac{2-2+6}{\sqrt{14}\,\sqrt{9}}$$

$$= \frac{6}{3\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

La Ecuación (1) es también válida si los vectores **u** y **v** son paralelos, puesto que con $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ $(k \neq 0)$, se tiene que ambos miembros toman el valor 1 $(k > 0)$ o que ambos miembros toman el valor -1 $(k < 0)$. Esta fórmula no es válida si **u** o **v** son cero; pero en ese caso se puede asignar al $\cos\theta$ cualquier valor entre 1 y -1, inclusive, puesto que al vector cero se le puede asignar cualquier dirección.

Los vectores **u** y **v** son paralelos si y sólo si $m°(\theta) = 0$ 180 es decir si y sólo si $\cos\theta = \pm 1$. Por lo tanto, se puede emplear la Ecuación (1), página 287, así como las pruebas referentes a múltiplos escalares o cosenos directores (páginas 282 y 285) para decidir si dos vectores no nulos son paralelos o no.

Ejemplo 2. ¿Son paralelos los vectores $\mathbf{u} = (3, -1, 1)$ y $\mathbf{v} = (6, -2, 3)$?

Solución: *Método 1.* Puesto que las componentes de **u** y **v** no son proporcionales, es decir como $6 = 2(3)$, $-2 = 2(-1)$, pero $3 \neq 2(1)$, los vectores no son paralelos.

Método 2. Se tiene

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

y

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Sean $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, y $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ los ángulos directores de **u** y **v** respectivamente. Entonces $\cos\alpha_1 = \dfrac{3}{\sqrt{11}}$ y $\cos\alpha_2 = \dfrac{6}{7} \neq \pm\dfrac{3}{\sqrt{11}}$. Por lo que **u** y **v** no son paralelos.

Método 3. De la ecuación (1)

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\\ &= \frac{(3, -1, 1)\cdot(6, -2, 3)}{\sqrt{11}(7)}\\ &= \frac{18 + 2 + 3}{7\sqrt{11}} = \frac{23}{7\sqrt{11}}.\end{aligned}$$

Puesto que θ no es 1 ni -1, los vectores no son paralelos.

Dos vectores no nulos **u** y **v** son perpendiculares, u ortogonales, si y sólo si la medida del ángulo comprendido entre ellos es 90°, esto es, si y sólo si $\cos\theta = 0$. De la ecuación (1) se obtiene inmediatamente que los vectores no nulos **u** y **v** en $\mathcal{R}^3$ son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. Esto se puede generalizar al vector cero si se dice que los vectores **u** y **v** son perpendiculares u ortogonales, cuando $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, sean o no **u** y **v** el vector cero.

En la sección 1 – 6, se vio que en $\mathcal{R}^2$ el vector $\mathbf{v_p} = (-v_2, v_1)$ es perpendicular a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.. Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, entonces todo vector en $\mathcal{R}^2$ que es perpendicular a **v** tiene necesariamente, o la misma dirección que $\mathbf{v_p}$ o el sentido opuesto; esto es, todo vector es necesariamente paralelo a $\mathbf{v}_p$ (y también todos los múltiplos escalares de él) (véase la Figura 8 – 13). Por lo que todos los vectores perpendiculares a **v** son paralelos.

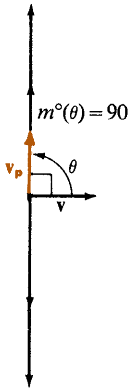


Figura 8–13

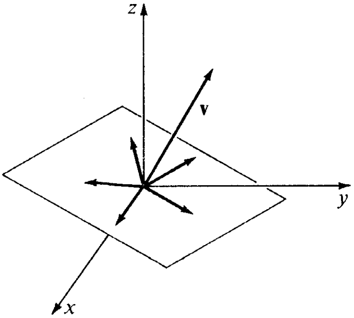


Figura 8–14

En $\mathcal{R}^3$, la situación es distinta. Considérese el vector $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$. El producto escalar de **v** con cada uno de los vectores $(0, -3, 2)$, $(3, 0, -1)$, y $(-2, 1, 0)$ es 0:

$$\begin{aligned}(1, 2, 3)\cdot(0, -3, 2) &= 0 - 6 + 6 = 0,\\ (1, 2, 3)\cdot(3, 0, -1) &= 3 + 0 - 3 = 0,\\ (1, 2, 3)\cdot(-2, 1, 0) &= -2 + 2 + 0 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto **v** es perpendicular a los tres vectores. Sin embargo ningún par de estos tres vectores es paralelo, puesto que los cosenos directores de $(0, -3, 2)$, $(3, 0, -1)$, y $(-2, 1, 0)$ son

$$0, -\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0$$

respectivamente.

En realidad es posible obtener un número infinito de vectores no paralelos, cada uno de los cuales es perpendicular a **v**, como se indica en la Figura 8–14. Esto sugiere que el conjunto de representaciones geométricas de todos los vectores perpendiculares a **v** cubre el plano completamente, lo cual se empleará en el próximo capítulo.

Para obtener un vector **u** que sea perpendicular a un vector **v** dado en $\mathcal{R}^3$, se asignan dos componentes a **u**, y para calcular la tercera se emplea el hecho que **u** es perpendicular a **v** si y sólo si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Ejemplo 3. Calcule el valor de z tal que $\mathbf{u} = (1, 4, z)$ y $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ sean perpendiculares.

Solución: El vector **u** es perpendicular a **v** si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, es decir, si y sólo si

$$\begin{aligned} (1, 4, z) \cdot (1, 2, 3) &= 0, \\ 1 + 8 + 3z &= 0, \\ 3z &= -9, \\ z &= -3. \end{aligned}$$

La definición de los términos *proyección vectorial (componente vectorial)* y *proyección escalar (componente escalar)* de vectores tridimensionales es análoga a aquella que se hace para vectores bidimensionales. (Véase las páginas 34 – 38). En particular considérese la Figura 8 – 15, en la que aparecen las representaciones geométricas ordinarias de los vectores no nulos **u** y **v** y el segmento que pasa por el punto final $V(x, y, z)$ de **v** y que es perpendicular a la recta que contiene a **u**. El vector cuya representación geométrica va del punto inicial de **v** al pié de la perpendicular mencionada enteriormente recibe el nombre de **proyección vectorial** de **v** sobre **u**, o bien se dice que es la **componente vectorial** de **v** paralela a **u**. La distancia dirigida formada por la longitud de esta proyección vectorial es la **proyección escalar** de **v** sobre **u**, o la **componente escalar** de **v** paralela a **u**, y se denota mediante el símbolo $\text{Comp}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}$.

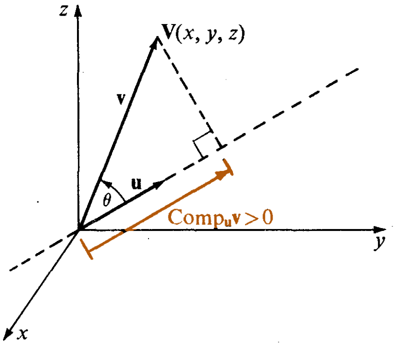


Figura 8—15

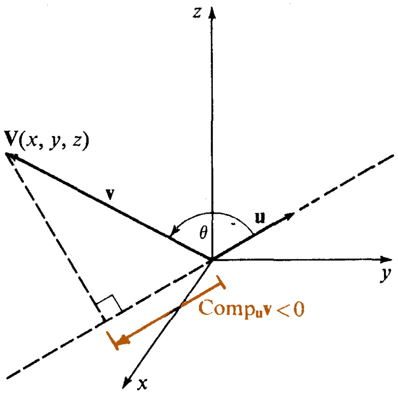


Figura 8—16

Como se muestra en la Figura 8 – 16 si esta componente escalar es negativa, entonces la componente vectorial tiene sentido opuesto al de **u**. En ambos casos la distancia *no dirigida* igual a la longitud de la proyección vectorial de **v** sobre **u** es sencillamente $|\text{Comp}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v}|$.

Es evidente de las Figuras 8 – 15 y 8 – 16 que

$$\text{Comp}_{\mathbf{u}}\, \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cos \theta.$$

Entonces de la Ecuación (1), página 287, se tiene

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|},$$

o bien

$$\|\mathbf{v}\|\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Por lo tanto

$$\text{Comp}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|}. \tag{2}$$

Ejemplo 4. Obtenga la componente escalar de $\mathbf{v} = (1, 3, 5)$ paralela a $\mathbf{u} = (1, -2, 2)$.

Solución:

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1-6+10}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{5}{3}.$$

Ejercicios 8—4

En los Ejercicios 1—6, calcule el coseno del ángulo que forman los vectores dados.

1. $(2, 1, -2), (1, 1, 0)$
2. $(2, 2, -1), (1, 1, 1)$
3. $(1, -1, -2), (-2, -1, 1)$
4. $(6, -2, 4), (5, -4, 3)$
5. $(2, 3, 5), (5, -2, 3)$
6. $(2, 1, 3), (-3, 3, -1)$

En los Ejercicios 7—12, diga si los vectores dados son paralelos, perpendiculares u oblicuos.

7. $(6, -3, -9), (-2, 1, 3)$
8. $(3, 2, -5), (14, -6, 6)$
9. $(-2, 3, 4), (-6, -8, 3)$
10. $(1, 0, -2), (-2, -1, 1)$
11. $(2, 3, 0), (0, 0, -5)$
12. $(3, 0, 4), (0, 7, 0)$

En los Ejercicios 13—18, calcule un valor de *x*, *y* ó *z* tal que el segundo vector sea perpendicular al primero

13. $(3, -6, -2), (4, 2, z)$
14. $(5, 15, 7), (14, 7, z)$
15. $(2, 5, -6), (5, y, 10)$
16. $(8, -3, 6), (3, y, -1)$
17. $(2, -1, 3), (x, -9, -1)$
18. $(5, -4, 2), (x, 3, 1)$

En los Ejercicios 19—24, obtenga la componente escalar de **v** sobre **u** para los vectores **u** y **v** dados.

19. $\mathbf{u} = (2, 1, 2), \mathbf{v} = (2, 1, 1)$
20. $\mathbf{u} = (3, 0, -4), \mathbf{v} = (1, -3, 4)$
21. $\mathbf{u} = (0, -1, 0), \mathbf{v} = (-3, 4, -1)$
22. $\mathbf{u} = (12, 5, 0), \mathbf{v} = (3, 1, -2)$
23. $\mathbf{u} = (1, -3, 2), \mathbf{v} = (4, 3, 1)$
24. $\mathbf{u} = (-2, 3, 1), \mathbf{v} = (0, -2, 4)$

En los Ejercicios 25—29 emplee la Ecuación (1) de la página 287.

25. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son R(2, 7, 1), S(8, 5, 5), y T(7, 3, 4) es un triángulo rectángulo.

26. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son R(3, 1, −2), S(8, 4, 6), y T(6, 7, 0) es un triángulo rectángulo.

27. Demuestre que el triángulo cuyos vértices son R(1, 3, −3), S(2, 2, −1), y T(3, 4, −2) es un triángulo equilátero.

28. Demuestre que el cuadrilátero **QRST** cuyos vértices son Q(−1, 9, −2), R(−7, 1, 1), S(−9, 4, 5), y T(−3, 12, 2) es un rectángulo.

* **29.** Demuestre que si θ es el ángulo que forman los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en $\mathcal{R}^3$, entonces $\cos\theta = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$, donde α_1, β_1, y γ_1 son los ángulos directores de $\mathbf{v}_1$, y α_2, β_2, y γ_2 son los ángulos directores de $\mathbf{v}_2$.

* **30.** Demuestre que para los vectores no nulos **u** y **v** el ángulo θ que determinan sus representaciones geométricas ordinarias obedece la ecuación $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$.

* **31.** Demuestre que si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son vectores no nulos para los cuales no existe un escalar k tal que $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, entonces el ángulo θ que forman no satisface ni la ecuación $\cos\theta = 1$ ni la ecuación $\cos\theta = -1$.

Una operación especial para vectores en el espacio

8—5 El producto vectorial de dos vectores

Las representaciones geométricas ordinarias de dos vectores no paralelos **u** y **v** determinan un plano que pasa por el origen. Debería ser posible entonces obtener un vector no nulo **w** cuya representación geométrica ordinaria sea perpendicular a este plano, es decir, un vector **w** que sea ortogonal tanto a **u** como a **v**.

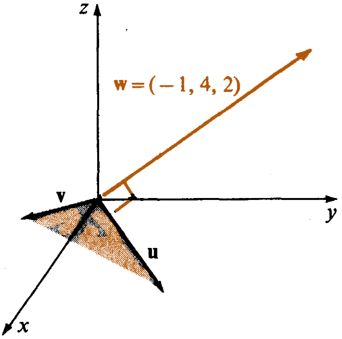
Ejemplo 1. Obtenga un vector no nulo **w** que sea ortogonal tanto al vector $\mathbf{u} = (0, 1, -2)$ como al vector $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$.

Solución: Se desea obtener un vector no nulo $\mathbf{w} = (x, y, z)$ para el cual tanto $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = 0$ como $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 0$, es decir, para el cual

$$(0, 1, -2)\cdot(x, y, z) = 0,$$
$$(2, 0, 1)\cdot(x, y, z) = 0,$$

o bien

$$y - 2z = 0,$$
$$2x + z = 0.$$



Haciendo $x = -1$, por ejemplo, se obtiene que $z = 2$ y $y = 4$ satisfacen estas ecuaciones. Por lo tanto el vector $\mathbf{w} = (x, y, z) = (-1, 4, 2)$ es perpendicular tanto a **u** como a **v**.

En general para los vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, el vector $\mathbf{w} = (x, y, z)$ es ortogonal tanto a **u** como a **v** si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, es decir, si y sólo si

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot (x, y, z) = 0,$$
$$(v_1, v_2, v_3) \cdot (x, y, z) = 0,$$

o

$$\begin{aligned} u_1x + u_2y + u_3z &= 0, \\ v_1x + v_2y + v_3z &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Si el determinante $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$ es distinto de cero, se puede aplicar la Regla de Cramer (página 106) para obtener la única solución de las Ecuaciones (1), despejando a x y y en términos de z:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -u_3z & u_2 \\ -v_3z & v_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & -u_3z \\ v_1 & -v_3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}. \tag{2}$$

Puesto que el multiplicar a cada elemento de una columna (o renglón) de un determinante por un número es equivalente a multiplicar al determinante por ese número (véase el Ejercicio 25, página 297) y puesto que el intercambiar dos columnas de un determinante es equivalente a multiplicar el determinante por —1 (véase Ejercicio 26, página 297), las Ecuaciones (2) se pueden escribir en la forma

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} z, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}} z.$$

Haciendo $z = k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$, donde $k \in \mathcal{R}$ es una constante arbitraria, se puede escribir esta solución en **forma simétrica** como

$$(x, y, z) = k\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right). \tag{3}$$

Si $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$ pero uno de los otros determinantes que aparecen en la Ecuación (3) es diferente de cero, se puede despejar en las Ecuaciones (1) a x y z o a y y z en términos de la tercera variable, y se obtiene nuevamente la forma simétrica (3). Por lo tanto:

■ Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, no todos los determinantes

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

son 0, entonces el vector $\mathbf{w} = (x, y, z)$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$ si y sólo si

$$(x, y, z) = k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}),$$

donde

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right). \tag{4}$$

(Nótese que si los tres determinantes son 0 entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, 0, 0)$, y por lo tanto $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es también ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$; pero en este caso existen también vectores que no son de la forma $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ que son ortogonales tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$.)

Para cualesquiera dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ dado por la Ecuación (4) recibe el nombre de **producto vectorial**, o **producto cruz**, de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. (Nótese que el producto vectorial de dos vectores es un *vector*, mientras que el producto escalar de dos vectores es un *escalar.*)

De la Ecuación (4) se ve que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se puede escribir en la forma

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}. \tag{5}$$

Aunque hasta ahora se han considerado solo números reales como elementos de un determinante, se reconoce que el segundo miembro de la Ecuación (5) es el desarrollo del determinante vectorial $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix}$ por menores del tercer renglón (véase la Sección 3 – 3).

Por lo tanto se escribe

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3)\mathbf{i} - (u_1 v_3 - v_1 u_3)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - v_1 u_2)\mathbf{k}$$

$$= (u_2 v_3 - v_2 u_3)\mathbf{i} + (u_3 v_1 - v_3 u_1)\mathbf{j} + (u_1 v_2 - v_1 u_2)\mathbf{k} \tag{6}$$

Obsérvese que se puede fácilmente obtener el desarrollo del segundo miembro de la Ecuación (6) si se repite parte del determinante

$$\begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_1 & v_2 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & & \end{array}$$

Los coeficientes escalares de **i, j** y **k** son los determinantes de segundo orden que aparecen arriba y a la derecha de **i, j** y **k** respectivamente. Por ejemplo se muestra a **j** y su coeficiente en color.

Ejemplo 2. Si $\mathbf{u} = (2, 2, 1)$ y $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$, calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y verifique que es perpendicular tanto a **u** como a **v**. ¿Es **u** perpendicular a **v**?

Solución:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = [4 - (-1)]\mathbf{i} + [1 - 4]\mathbf{j} + [-2 - 2]\mathbf{k}$$

$$= 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

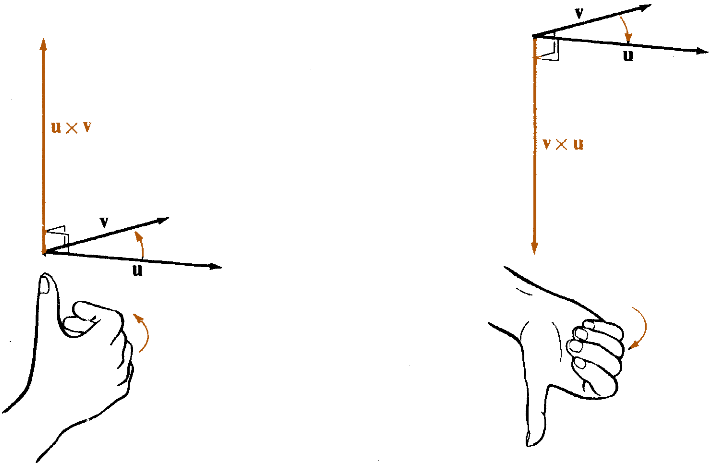
$$= (5, -3, -4).$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (2, 2, 1) \cdot (5, -3, -4) = 10 - 6 - 4 = 0,$$

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (1, -1, 2) \cdot (5, -3, -4) = 5 + 3 - 8 = 0.$$

Puesto que ambos productos escalares son 0, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular tanto a **u** como a **v**. Puesto que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2, 2, 1) \cdot (1, -1, 2) = 2 - 2 + 2 = 2 \neq 0$, **u** no es perpendicular a **v**.

La orientación del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ en relación a las direcciones de **u** y **v** es la misma que la orientación del eje z con respecto a las partes positivas de los ejes x y y. (Los vectores **u** y **v** no son necesariamente perpendiculares, claro está). Por lo tanto si en un sistema derecho (página 274) se doblan los dedos de la mano derecha de la dirección de **u** hacia la dirección de **v** entonces el pulgar apuntará en la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$- tal como apuntó en la dirección del eje z si se doblan los dedos de la mano de la parte positiva del eje x hacia la parte positiva del eje y [véase la Figura 8 – 17(a)].



(*a*) (*b*)

Figura 8—17

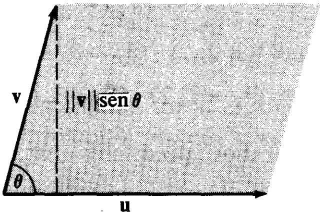
Obsérvese en la Figura 8 – 17 (b) que los vectores $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ tienen sentidos opuestos. De hecho se tiene $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$, como se puede verificar fácilmente. Por consiguiente la operación binaria de tomar el producto vectorial de dos vectores *no* es una operación conmutativa.

La norma del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ obedece la ecuación

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta,$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores **u** y **v** (Ejercicios 36, página 298). Por lo tanto si **u** y **v** son no paralelos, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ tiene la interpretación física de ser el área de la región acotada por el paralelogramo la cual dos de sus lados adyacentes son las representaciones geométricas de **u** y **v** (Figura 8—18).

Figura 8–18



El que dos vectores en $\mathcal{R}^3$ sean paralelos si y sólo si uno de ellos sea un múltiplo escalar del otro (página 282) tienen una implicación sobre el producto vectorial de dichos vectores. Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son vectores paralelos con $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$, entonces $u_1 = cv_1$, $u_2 = cv_2$, y $u_3 = cv_3$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} cv_1 & cv_2 & cv_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} \\ &= c \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} \\ &= c(0, 0, 0) = (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Es decir, el producto vectorial de dos vectores paralelos es el vector cero. En particular se tiene

$$\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Recíprocamente, si el producto vectorial de dos vectores **u** y **v** es el vector cero, entonces uno de ellos debe ser un múltiplo escalar del otro (Ejercicios 38, página 298) y por consiguiente los dos vectores deben ser paralelos.

El producto vectorial de vectores en $\mathcal{R}^3$ tiene las siguientes propiedades adicionales, que el lector debe verificar (Ejercicios 30 y 31, página 298):
Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{R}^3$ y $r \in \mathcal{R}$, entonces

1. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ Propiedad distributiva
2. $\mathbf{u} \times (r\mathbf{v}) = (r\mathbf{u}) \times \mathbf{v}$
   $= r(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ Propiedad asociativa escalar

Ejercicios 8—5

En los Ejercicios 1—10, calcule el producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y demuestre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es perpendicular a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -1)$

2. $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$

3. $\mathbf{u} = (-2, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$

4. $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$

5. $\mathbf{u} = (2, 0, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 5, 1)$

6. $\mathbf{u} = (-2, -3, -1)$,
$\mathbf{v} = (-1, -2, -1)$

7. $\mathbf{u} = (3, 1, -2)$, $\mathbf{v} = (4, -1,3)$

8. $\mathbf{u} = (3, 5, -3)$, $\mathbf{v} = (-2, 1, 7)$

9. $\mathbf{u} = (1, 2, a)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, b)$

10. $\mathbf{u} = (a, b, c)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$

11. Si $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{v} = (3, 0, -1)$, calcule $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. Compare este resultado con el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ obtenido en el Ejercicio 1.

12. Si $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$ y $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$, calcule $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. Compare este resultado con el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ obtenido en el Ejercicio 2.

13. Demuestre que si $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (2, -1, 4)$, y $\mathbf{w} = (-1, 2, -3)$, entonces $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.

14. Demuestre que si $\mathbf{u} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$, y $\mathbf{w} = (-1, 1, -2)$, entonces $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.

15. Demuestre que si $r = 2$, $\mathbf{u} = (2, -3, 1)$ y $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$ entonces $r\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times r\mathbf{v} = r(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

16. Demuestre que si $r = -3$, $\mathbf{u} = (1, 4, -1)$ y $\mathbf{v} = (1, -2, 3)$, entonces $r\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times r\mathbf{v} = r(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

17. Demuestre que para todo vector $\mathbf{v}$ de $\mathcal{R}^3$, $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

18. Demuestre que si $\mathbf{u}$ es un vector de $\mathcal{R}^3$, $\mathbf{v} = (2, -1, -2)$, y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}$.

En los Ejercicios 19—22, demuestre que cada afirmación es válida.

19. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$

20. $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$

21. $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

22. $-\mathbf{i} \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

23. Obtenga los valores de a y b tales que $(2, a, 1) \times (1, b, 2) = (3, -3, -1)$.

24. Obtenga los valores de a y b tales que $(1, 2, a) \times (3, -b, 1) = (10, 5, -10)$.

* **25.** Demuestre que para todos los valores reales a, b, c, d y k

$$\begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

* **26.** Demuestre que para todos los valores reales de a, b, c, y d

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

* **27.** Dado que $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo que forman $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, calcule el área de un paralelogramo dos de cuyos lados adyacentes son las representaciones geométricas de los vectores $\mathbf{u} = (3, -3, 1)$ y $\mathbf{v} = (1, 2, -3)$.

* **28.** Emplee lo afirmado en el Ejercicio 27 para calcular el área del paralelogramo **ABCD** con vértices en **A**$(-1, 3, 2)$, **B**$(3, -3, 4)$, **C**$(5, 0, 3)$, y **D**$(1, 6, 1)$.

* **29.** Demuestre que si θ es el ángulo que forman los vectores no ortogonales **u** y **v**, entonces

$$\tan\theta = \frac{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}.$$

(*Sugerencia:* Use la información mencionada en el Ejercicio 27).

* **30.** Demuestre que para cualesquiera vectores **u, v** y **w** en $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w}).$$

* **31.** Demuestre que para toda $r \in \mathbb{R}$ y cualesquiera vectores **u** y **v** en $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} \times (r\mathbf{v}) = (r\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = r(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

* **32.** Demuestre que $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 1$ y $\mathbf{j} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = -1$.

* **33.** Demuestre que para $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, y $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$,

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Este número es el **triple producto escalar** de **u, v** y **w**.

* **34.** Emplee el resultado del Ejercicio 35 para Demostrar que $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ es ortogonal a **v** y **w**.

* **35.** Demuestre que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$.

* **36.** Emplee el resultado del Ejercicio 35 y la identidad $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$ para obtener la fórmula que aparece en el Ejercicio 27.

* **37.** Demuestre que si **u** y **v** son vectores unidad ortogonales entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un vector unidad.

* **38.** Demuestre que si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces **u** y **v** son paralelos (*Sugerencia*: Emplee la fórmula mencionada en el Ejercicio 27).

* **39.** Dados los vectores **u, v, r** y **s** demuestre que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{s}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})$. (identidad de Lagrange.)

Resumen del capítulo

1. Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los puntos del espacio de tres dimensiones y el conjunto $\mathbb{R}^3$ de todas las ternas ordenadas (x, y, z) de números reales. Cada terna ordenada (x, y, z) se puede asociar en forma única con un punto $\mathbf{S}(x, y, z)$ del espacio mediante un sistema de coordenadas cartesianas. En un sistema de coordenadas cartesianas derecho, si se doblan los dedos de la mano derecha de la parte positiva del eje x hacia la parte positiva del eje y, el pulgar apunta en la dirección positiva del eje z.
2. La distancia que separa a dos puntos $\mathbf{S}(x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2, z_2)$ en el espacio está dada por $d(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

3. Se puede asociar a cada terna ordenada (v_1, v_2, v_3) de números reales una traslación en el espacio. Se dice entonces que una terna ordenada es, por definición, un **vector tridimensional**. Si la traslación es del punto $S(x_1, y_1, z_1)$ al punto $T(x_2, y_2, z_2)$ entonces las componentes del vector $\mathbf{v}$ son $v_1 = x_2 - x_1, v_2 = y_2 - y_1$ y $v_3 = z_2 - z_1$. La **norma** de $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ está dada por
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$
4. El vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se puede expresar como la suma de componentes vectoriales paralelas a los ejes de coordenadas. Es decir,
$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k},$$
donde $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ son vectores unidad en las direcciones positivas de los ejes x, y y z respectivamente.
5. La **dirección** de un vector no nulo $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ queda determinada por los ángulos α, β, y γ que forma la representación geométrica ordinaria del vector con las partes positivas de los ejes x, y y z respectivamente. Los ángulos α, β, y γ son los **ángulos de dirección** de $\mathbf{v}$. La medida de cada ángulo de dirección está por definición entre 0° y 180°, inclusive.
6. Los cosenos de los ángulos de dirección de un vector no nulo $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ reciben el nombre de **cosenos directores** de $\mathbf{v}$ y están dados por
$$\cos\alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}, \cos\beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}, \cos\gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}.$$
Los cosenos directores están relacionados a través de
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$
7. Dos vectores de $\mathbb{R}^3$ son paralelos si y sólo si tiene la misma dirección y sentidos iguales u opuestos, es decir, si y sólo si el uno es un múltiplo escalar del otro. Dos vectores no nulos son paralelos si y sólo si tienen los mismos cosenos directores, o bien si los cosenos directores de uno son el negativo de los cosenos directores del otro.
8. El coseno del ángulo θ que forman dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ está dado por
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$
9. Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \pm\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ y son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. El vector cero es paralelo a todo vector y es también perpendicular a todo vector.
10. La **componente escalar** del vector $\mathbf{v}$ paralela al vector $\mathbf{u}$ está dada por
$$\text{Comp}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|}.$$

11. El **producto vectorial** de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ está dado por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = (u_2v_3 - v_2u_3)\mathbf{i} + (u_3v_1 - v_3u_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - v_1u_2)\mathbf{k};$$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es un vector perpendicular tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$. Si se doblan los dedos de la mano derecha desde la dirección de $\mathbf{u}$ hacia la dirección de $\mathbf{v}$ entonces, en un sistema de coordenadas derecho, el pulgar apunta hacia la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Puesto que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ la operación binaria de tomar el producto vectorial de dos vectores es no conmutativa.

12. La norma de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está dada por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo que forman $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Por lo tanto $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ es el área de la región acotada por el paralelogramo dos de cuyos lados adyacentes son las representaciones geométricas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

13. Los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Ejercicios de repaso del capítulo

1. Trace la gráfica del punto en el espacio cuyas coordenadas son (2, 3, 4).
2. Calcule la distancia que separa a los puntos $S(5, -1, -2)$ y $T(7, 2, 4)$.
3. Exprese al vector $\mathbf{v}$, que está representado mediante el vector geométrico que va del punto $S(1, 0, -3)$ al punto $T(3, 2, -5)$ primero como una terna ordenada y después en la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Calcule $\|\mathbf{v}\|$.
4. Si $\mathbf{u} = (2, -1, 4)$ y $\mathbf{v} = (5, 1, -3)$, obtenga $\mathbf{w}$ tal que

   (a) $\mathbf{w} = \mathbf{u} + 2\mathbf{v}$; (b) $\mathbf{w} = 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$; (c) $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$.

5. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son los vectores dados en el Ejercicio 4, calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
6. Obtenga los cosenos directores del vector $\mathbf{v} = (2, -3, 6)$; obtenga un vector unidad en la dirección de $\mathbf{v}$. Demuestre que la suma de los cuadrados de los cosenos directores de $\mathbf{v}$ es 1.
7. Obtenga el vector $\mathbf{v}$ si $\|\mathbf{v}\| = 5$ y $\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que el vector $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$.
8. Calcule el coseno del ángulo formado por los vectores $\mathbf{u} = (1, 3, 2)$ y $\mathbf{v} = (3, -2, -1)$.
9. Obtenga un valor de y tal que los vectores $\mathbf{u} = (1, 4, -2)$ y $\mathbf{v} = (-4, y, -3)$ sean ortogonales.
10. Calcule $\operatorname{Comp}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = (1, -4, 5)$ y $\mathbf{v} = (-4, 0, 3)$.
11. Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ si $\mathbf{u} = (2, 4, 1)$ y $\mathbf{v} = (3, -1, -2)$.
12. Obtenga los valores de a y b tales que $(1, a, 4) \times (2, b, 3) = (10, 5, -5)$.

Matrices y transformaciones afines homogéneas

En el comentario que aparece al final del Capítulo 7 se mencionan las transformaciones afines generales del plano. Una *transformación afin homogénea* del plano es una transformación afin T con ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy. \end{aligned} \tag{1}$$

Nótese que el origen es un punto fijo ante tal transformación: es decir, toda transformación afín mapea el origen en si mismo.

La transformación T anterior se puede especificar anotando el valor de las cuatro componentes de su malla rectángular, o *matriz*, de coeficientes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. (Recuérdese la Sección 3—3.)

Si la transformación afín homogénea S tiene la matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix},$$

se puede verificar fácilmente que la transformación afín ST es homogénea y que tiene la matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix}.$$

En el álgebra de matrices se emplean las mismas letras **T** y **S** para denotar a matrices que las que se emplean en geometría afín para denotar a las correspondientes transformaciones afines homogéneas. Así se escribe

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \quad ST = \begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix}.$$

Según esto se define la *multiplicación de matrices* en forma tal que

$$ST = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Examinando los elementos de la matriz producto que aparece en el segundo miembro de la Ecuación (2), se ve como se obtienen, y se ve también porqué se dice que la multiplicación de matrices se efectúa multiplicando "renglones por columnas".

Si $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, entonces la misma definición de multiplicación de renglones por columnas afirma que

$$TX = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Las Ecuaciones (1) se pueden escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix},$$

y por lo tanto, por la Ecuación (3), como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

o simplemente, haciendo $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, como

$$X' = TX. \tag{4}$$

La matriz identidad I, o la matriz de coeficientes de transformación identidad I, es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, puesto que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Por las Ecuaciones (4) del comentario que aparece al final del Capítulo 7 (página 270) el inverso de la matriz T que corresponde a la transformación T dada por las Ecuaciones (1) es

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} & \dfrac{-b}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \\ \dfrac{-c}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} & \dfrac{a}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \end{bmatrix}.$$

Se puede verificar fácilmente que $T^{-1}T = I$ y que $TT^{-1} = I$.

Para despejar a X en la Ecuación (4) como función de X', simplemente se multiplica por la izquierda a ambos miembros de esta ecuación por T^{-1}:

$$T^{-1}X' = T^{-1}(TX) = (T^{-1}T)X = IX = X.$$

Por lo tanto

$$X = T^{-1}X'. \tag{5}$$

Por ejemplo, si se desea determinar las coordenadas del punto R tal que la transformación T definida por

$$x' = 2x - y,$$
$$y' = 4x + y,$$

lo mapea en el punto $S(3, 9)$, se toma

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3, \\ 4x + y &= 9, \end{aligned} \tag{6}$$

y se despeja a x y y como sigue.

Se escriben estas ecuaciones en forma matricial

$$TX = X',$$

con $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, y $X' = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$, y se ve que

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{4}{6} & \frac{2}{6} \end{bmatrix},$$

y que por lo tanto

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T^{-1}X' = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{4}{6} & \frac{2}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{6} + \frac{9}{6} \\ -\frac{12}{6} + \frac{18}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Luego las coordenadas de R son $(2, 1)$.

Obsérvese que otra interpretación, muy distinta pero quizás más familiar, del ejemplo que se ha mencionado es que las Ecuaciones (6) son ecuaciones de rectas que se cortan en el punto R cuyas coordenadas son $(2, 1)$.

Puesto que, para la transformación afín homogénea T dada por las Ecuaciones (1), la Ecuación (4) determina X' cuando está dado X y recíprocamente la Ecuación (5) determina X cuando está dado X' se sigue que toda transformación afín homogénea es un mapeo biunívoco del plano en sí mismo. [Esto mismo es válido para las transformaciones afines generales, puesto que tales transformaciones se pueden considerar como transformaciones afines seguidas de una traslación (véase las Ecuaciones (3) y (4) en las páginas 268 y 270.]

La teoría de matrices se emplea en el diseño y operación de vehículos destinados a la exploración espacial. Los sumergibles como este están equipados con sistemas de navegación y rastreo avanzados que se emplean para efectuar estudios arqueológicos y para la investigación oceanográfica.

Una transformación de la forma (1) recibe el nombre de *transformación lineal*, sea o no cero el determinante de los coeficientes. Si el determinante de los coeficientes es igual a 0 se dice que la transformación es *singular*. De lo contrario es una transformación *no singular*. Esto indica que una transformación afín homogénea es una transformación lineal no singular.

La matriz de coeficientes de una transformación lineal singular no tiene inverso, y una transformación tal *no* es biunívoca.

Se puede ver, a través de ejemplos, cual es el mapeo del plano ante una transformación lineal singular.

En el caso muy especial

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

se tiene

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces el mapeo de cada punto $P(x, y)$ es el origen $O(0, 0)$, y se mapea a todo el plano en un solo punto.

Otro ejemplo es

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix},$$

y todos los puntos $P(x, y)$ se mapean en $Q(x, 0)$, es decir, en sus proyecciones sobre el eje x. Esto indica que se mapea todo el plano en una recta que pasa por el origen.

Análogamente si

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix},$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 6x + 3y \end{bmatrix}$$

y

$$x' = 2x + y,$$
$$y' = 6x + 3y,$$

de donde

$$y' = 3x',$$

y nuevamente se mapea a todo el plano en una recta que pasó por el origen.

Estos ejemplos ilustran el hecho de que una transformación lineal singular mapea el plano ya sea en el origen o en una recta que pasa por el origen.

La teoría de matrices se aplica tanto a las transformaciones afines no homogéneas como a las homogéneas. Por lo tanto definiendo la suma de matrices como la suma de los correspondientes elementos de las matrices se pueden escribir las Ecuaciones (3) de la página 268 en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix},$$

o bien

$$X' = TX + H, \text{ donde } H = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}.$$

Multiplicando por T^{-1} se obtiene

$$T^{-1}X' = T^{-1}TX + T^{-1}H,$$

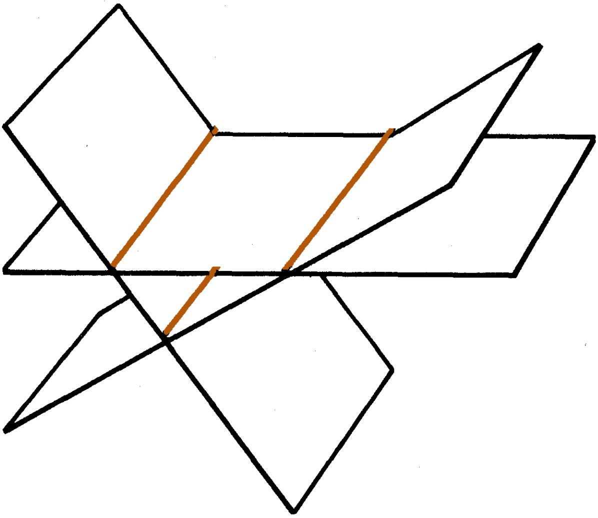
o

$$X = T^{-1}X' - T^{-1}H.$$

Se puede verificar que esta es la forma matricial de las Ecuaciones (4) que aparecen en el comentario al final del Capítulo 7 (página 270).

La palabra matriz fue introducida al lenguaje de las matemáticas por el matemático del siglo XIX James Joseph Sylvester (1814—1897). La teoría de matrices tiene en la actualidad muchas aplicaciones en matemáticas puras y aplicadas. En particular, se usa en disciplinas modernas tales como la teoría de juegos y programación lineal. Una buena parte de los cálculos científicos e industriales que se efectúa mediante computadoras digitales rápidas para el diseño y uso de vehículos espaciales y submarinos, y para otros estudios ambientales, se efectúan mediante matrices. Sin embargo la teoría de matrices se desarrolló inicialmente debido a sus aplicaciones a transformaciones geométricas tales como las que se han discutido anteriormente. Una gran parte de este desarrollo fue logrado por el matemático inglés William Rowan Hamilton (1806—1865), pero el estudio sistemático de la teoría básica fue hecho por otro matemático inglés Arthur Cayley (1821—1895).

Capítulo 9



Al igual que en el capítulo 2, aquí obtendremos las ecuaciones vectoriales y cartesianas de rectas, así como planos en el espacio. También se estudiarán las intersecciones de rectas y planos, al mismo tiempo que se presentarán algunas fórmulas de distancia que son útiles.

Rectas y Planos en el Espacio

Ecuaciones de rectas y planos

9—1 Rectas en el espacio

Muchos de los hechos que se han estudiado en los Capítulos 1 y 2 acerca de los vectores en $\mathcal{R}^2$ tienen análogos en $\mathcal{R}^3$. Por ejemplo si $\mathbf{S}(2, 4, 5)$ y $\mathbf{T}(0, -2, 6)$ son dos puntos de una recta $\mathcal{L}$ en el espacio (Figura 9—1) entonces el vector $\mathbf{t} - \mathbf{s} = (0, -2, 6) - (2, 4, 5) = (-2, -6, 1)$ tiene una representación geométrica que está sobre $\mathcal{L}$ y que por lo tanto es paralela a $\mathcal{L}$. Entonces el vector $(-2, -6, 1)$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}$. (véase la página 53).

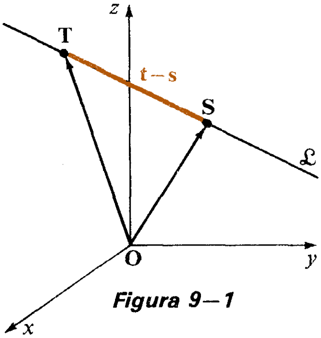


Figura 9—1

Mediante un razonamiento análogo al que aparece en la Sección 2—1 se puede demostrar que si $\mathbf{U}(x, y, z)$ representa a un punto en el espacio entonces

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{t} - \mathbf{s}), \quad r \in \mathcal{R}, \tag{1}$$

es una ecuación paramétrica vectorial de $\mathcal{L}$. Entonces $\mathcal{L}$ se puede especificar como

$$\{\mathbf{U}\colon \mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{t} - \mathbf{s}), r \in \mathcal{R}\}.$$

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por los puntos $\mathbf{S}(3, -1, 0)$ y $\mathbf{T}(4, 1, 3)$.

Solución: El punto $\mathbf{S}(3, -1, 0)$ está sobre $\mathcal{L}$, y $\mathbf{t} - \mathbf{s} = (4, 1, 3) - (3, -1, 0) = (1, 2, 3)$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}$. Por lo tanto si $\mathbf{U}(x, y, z)$ representa a un punto en el espacio, una ecuación paramétrica vectorial de $\mathcal{L}$ es

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{t} - \mathbf{s}),$$

$$(x, y, z) = (3, -1, 0) + r(1, 2, 3),$$

o bien

$$(x, y, z) = (3 + r, -1 + 2r, 3r).$$

Tal como en el caso de vectores en dos dimensiones, si se restringe el dominio de r, en la Ecuación (1), a un intervalo cerrado, entonces la gráfica de la ecuación es un segmento de recta. En particular si $0 \leq r \leq 1$, entonces la gráfica es el segmento $\overline{\mathbf{ST}}$. Se puede identificar a los puntos que están a una distancia dada de **S** sobre **T** eligiendo apropiadamente el parámetro r, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. Obtenga las coordenadas de los puntos que trisecan al segmento cuyos extremos son $\mathbf{S}(2, 1, 8)$ y $\mathbf{T}(-1, 3, 7)$.

Solución: El vector $\mathbf{t} - \mathbf{s} = (-1 - 2, 3 - 1, 7 - 8) = (-3, 2, -1)$ es un vector de dirección de la recta que pasa poor los puntos dados **S** y **T**, y $\mathbf{t} - \mathbf{s}$ va de **S** a **T**. Por lo tanto una ecuación paramétrica vectorial del segmento $\overline{\mathbf{ST}}$ es

$$\mathbf{u} = (2, 1, 8) + r(-3, 2, -1),\ 0 \leq r \leq 1.$$

Para obtener los puntos de trisección se hace $r = \frac{1}{3}$ y $r = \frac{2}{3}$, de donde

$$(2, 1, 8) + \tfrac{1}{3}(-3, 2, -1) \quad \text{y} \quad (2, 1, 8) + \tfrac{2}{3}(-3, 2, -1),$$

o bien

$$(2 - 1, 1 + \tfrac{2}{3}, 8 - \tfrac{1}{3}) \quad \text{y} \quad (2 - 2, 1 + \tfrac{4}{3}, 8 - \tfrac{2}{3}),$$

respectivamente. Entonces las coordenadas de los puntos requeridos de trisección son $(1, \frac{5}{3}, \frac{23}{3})$ y $(0, \frac{7}{3}, \frac{22}{3})$.

Considérese ahora nuevamente la recta $\mathcal{L}$ que se menciona en el Ejemplo 1. La ecuación paramétrica vectorial de $\mathcal{L}$, que se da en la solución,

$$(x, y, z) = (3 + r, -1 + 2r, 3r),$$

es equivalente a tres ecuaciones cartesianas

$$x = 3 + r,\ y = -1 + 2r, \quad \text{y} \quad z = 3r.$$

Estas tres ecuaciones son las *ecuaciones paramétricas cartesianas* de $\mathcal{L}$, con parámetro escalar r. Si se despeja a r en estas ecuaciones se obtiene

$$r = x - 3,\ r = \frac{y - (-1)}{2}, \quad \text{y} \quad r = \frac{z}{3},$$

o bien

$$r = \frac{x - 3}{1},\ r = \frac{y - (-1)}{2}, \quad \text{y} \quad r = \frac{z - 0}{3}.$$

Como el segundo miembro de cada una de estas ecuaciones es igual a r, se pueden igualar los segundos miembros para obtener

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y - (-1)}{2} = \frac{z - 0}{3}. \qquad (2)$$

Las Ecuaciones (2) reciben el nombre de *ecuaciones simétricas* de $\mathcal{L}$. Los números 1, 2 y 3 que aparecen en los denominadores son los *números directores* de $\mathcal{L}$, ya que son las componentes de un vector de dirección de $\mathcal{L}$. Puesto que $\|(1, 2, 3)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$, un conjunto de cosenos directores de $\mathcal{L}$ es $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$. Obsérvese que los números 3, —1 y 0 que aparecen en los numeradores de las Ecuaciones (2) son las coordenadas del punto $S(3, -1, 0)$ que está sobre $\mathcal{L}$.

Con más generalidad, si $S(x_1, y_1, z_1)$ y $T(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos en el espacio, entonces una **ecuación paramétrica vectorial** de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por **S** y **T** es

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + r(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

o bien

$$(x, y, z) = \big(x_1 + r(x_2 - x_1), y_1 + r(y_2 - y_1), z_1 + r(z_2 - z_1)\big). \quad (3)$$

La recta $\mathcal{L}$ tiene entonces las siguientes **ecuaciones paramétricas cartesianas**

$$x = x_1 + r(x_2 - x_1), y = y_1 + r(y_2 - y_1), z = z_1 + r(z_2 - z_1). \quad (4)$$

Si las diferencias $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, y $z_2 - z_1$ no son todas cero entonces $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}$, y por lo tanto $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, y $z_2 - z_1$ son **números directores** de $\mathcal{L}$. Si $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, y $z_2 - z_1$ son todos distintos de cero entonces

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (5)$$

son las **ecuaciones simétricas** de la recta $\mathcal{L}$ dada. Si el vector de dirección $\mathbf{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ se escribe en la forma (v_1, v_2, v_3), entonces las Ecuaciones (5) se convierten en

$$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2} = \frac{z - z_1}{v_3}. \quad (6)$$

Ejemplo 3. Obtenga las ecuaciones simétricas de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $S(2, 5, -1)$ y que tiene al vector $\mathbf{v} = (3, -2, 2)$. como vector de dirección.

Solución: Puesto que $S(2, 5, -1) \in \mathcal{L}$ y $\mathbf{v} = (3, -2, 2)$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}$, las ecuaciones simétricas para $\mathcal{L}$, son

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 5}{-2} = \frac{z + 1}{2}.$$

Al estudiar geometría se ve que dos rectas en el espacio son paralelas si son coplanares y no se intersecan. Se definirá aquí el concepto de rectas paralelas en términos de sus vectores de dirección. Se dirá pues, tal como se hizo para el plano (página 60), que dos rectas en el espacio son paralelas si y sólo si sus vectores de dirección son paralelos. (Obsérvese que se considera nuevamente que dos rectas coincidentes son paralelas.)

Ejemplo 4. Obtenga las ecuaciones simétricas de la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto S(3, −1, 4) y que es paralela a la recta cuyas ecuaciones simétricas son

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z}{4}.$$

Solución: Los números directores de $\mathcal{L}$ son 1, −2, y 4. Entonces, empleando la Ecuación (6) se tiene

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-4}{4}.$$

Al estudiar geometría se ve que en el espacio dos planos, o una recta y un plano, son paralelos si no se intersecan. Se adoptarán definiciones similares, excepto que se considerará a dos planos coincidentes como paralelos, y se considerará que las rectas que están sobre un plano son paralelas a dicho plano. En las Secciones 9–2 a 9–4 se discutirán estos conceptos más detalladamente en términos de vectores.

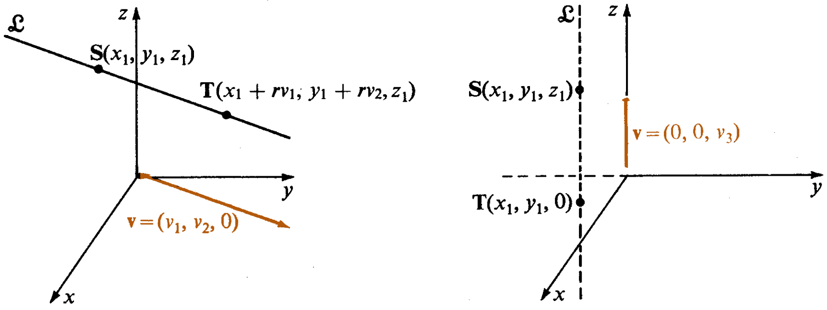
Si una recta es paralela a un plano cartesiano, entonces uno de sus números directores es 0. Por lo tanto no tiene ecuaciones simétricas de la forma (6), puesto que uno de los denominadores sería 0. Por ejemplo, si una recta $\mathcal{L}$ es paralela al plano *xy*, pero no a los ejes *x* o *y* (Figura 9–2(a)) entonces tiene un vector de dirección de la forma $(v_1, v_2, 0)$, donde $v_1, v_2 \neq 0$. Aunque $\mathcal{L}$ no tiene ecuaciones de la forma (6), si contiene al punto $S(x_1, y_1, z_1)$ se puede determinar mediante las ecuaciones

$$\frac{x-x_1}{v_1}=\frac{y-y_1}{v_2} \quad \text{y} \quad z=z_1.$$

Si una recta es paralela a un eje de coordenadas, entonces dos de sus números directores son 0, y en lugar de las ecuaciones simétricas se tiene simplemente las ecuaciones que expresan las dos coordenadas constantes de cada punto sobre la recta. De esta manera, si la recta $\mathcal{L}$ que es paralela al eje *z* pasa por el punto $S(x_1, y_1, z_1)$ la recta se puede especificar mediante las ecuaciones

$$x = x_1 \quad \text{y} \quad y = y_1$$

(véase la Figura 9–2(b)). La recta xx interseca al plano *xy* en el punto $T(x_1, y_1, 0)$, como se muestra a continuación.



(*a*) **Figura 9—2** (*b*)

Tal como sucede en el plano, si un vector $\mathbf{v} \in \mathcal{R}^3$ es un vector de dirección de una recta $\mathcal{L}$, entonces el vector $-\mathbf{v}$ es también un vector de dirección de $\mathcal{L}$ y se puede considerar que la dirección de $\mathcal{L}$ es o la de $\mathbf{v}$, o la de $-\mathbf{v}$. Cuando se asocia una recta $\mathcal{L}$, a un vector de dirección particular $\mathbf{v}$, se dice que $\mathcal{L}$ es una **recta dirigida**, y que su dirección es la de $\mathbf{v}$. Por ejemplo la recta $\mathcal{L}$ que pasa por el punto $\mathbf{S}(2, 4, 3)$ y que tienen al vector $\mathbf{v} = (3, -1, -2)$ como vector de dirección es la misma que la recta que pasa por el punto $\mathbf{S}$ y que tiene al vector $-\mathbf{v} = (-3, 1, 2)$, como vector de dirección; pero estas dos descripciones de $\mathcal{L}$ especifican dos rectas *dirigidas* distintas puesto que sus sentidos son opuestos.

El ángulo que forman dos rectas dirigidas se define como el ángulo ϕ, $0 \leq m°(\phi) \leq 180$, que forman sus vectores de dirección. Nótese que esta definición se aplica a todas las rectas dirigidas en el espacio sin importar si se intersecan o no.

Ejemplo 5. Demuestre que para el ángulo ϕ que forman las rectas dirigidas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ cuyos vectores de dirección son $\mathbf{v}_1 = (-1, -1, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 1, \sqrt{6})$, respectivamente, se tiene $m°(\phi) = 120$.

Solución: Puesto que el ángulo ϕ satisface la ecuación

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{v}_2\|}\\ &= \frac{(-1, -1, 0)\cdot(1, 1, \sqrt{6})}{(\sqrt{2})(\sqrt{8})}\\ &= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

se tiene $m°(\phi) = 120$.

Ejercicios 9–1

En los Ejercicios 1–6, obtenga una ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por los puntos **S** y **T** dados. Obtenga dos conjuntos de cosenos directores para la recta.

1. $\mathbf{S}(-1, 5, 7)$, $\mathbf{T}(-4, 1, 3)$
2. $\mathbf{S}(2, 3, -1)$, $\mathbf{T}(5, -3, 1)$
3. $\mathbf{S}(1, -2, -3)$, $\mathbf{T}(2, -3, 2)$
4. $\mathbf{S}(1, 2, 3)$, $\mathbf{T}(-2, 3, 4)$
5. $\mathbf{S}(2, -3, 4)$, $\mathbf{T}(5, 2, -1)$
6. $\mathbf{S}(1, 0, 3)$, $\mathbf{T}(2, 0, 3)$

En los Ejercicios 7–12, encuentre las coordenadas del (los) punto(s) que divide(n) al segmento cuyos extremos son **S** y **T** de la manera que se especifica.

7. $\mathbf{S}(-1, 3, 6)$, $\mathbf{T}(7, 5, -2)$; bisecta
8. $\mathbf{S}(-4, -3, 0)$, $\mathbf{T}(8, 7, 12)$; bisecta
9. $\mathbf{S}(-6, 1, 5)$, $\mathbf{T}(3, 13, -1)$; triseca
10. $\mathbf{S}(6, 0, -3)$, $\mathbf{T}(-6, 9, -12)$; triseca
11. $\mathbf{S}(-1, 2, 1)$, $\mathbf{T}(7, 6, -11)$; divide en cuatro partes iguales
12. $\mathbf{S}(-8, 2, 3)$, $\mathbf{T}(0, 6, 11)$; divide en cuatro partes iguales

En los Ejercicios 13—18, obtenga el coseno del ángulo ϕ que forma la recta dirigida $\mathcal{L}_1$ con vector de dirección $\mathbf{v}_1$ y la recta dirigida $\mathcal{L}_2$, con vector de dirección $\mathbf{v}_2$.

13. $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2), \mathbf{v}_2 = (3, 2, 6)$
14. $\mathbf{v}_1 = (3, 0, 4), \mathbf{v}_2 = (-5, 12, 0)$
15. $\mathbf{v}_1 = (-4, 8, 1), \mathbf{v}_2 = (3, 4, -12)$
16. $\mathbf{v}_1 = (9, 6, 2), \mathbf{v}_2 = (-2, 6, -9)$
17. $\mathbf{v}_1 = (9, -6, 2), \mathbf{v}_2 = (2, 6, 9)$
18. $\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$

En los Ejercicios 19—40, obtenga las ecuaciones simétricas de las rectas que pasan por:

19. $\mathbf{S}(0, 2, -1)$, y con vector de dirección. $(1, 3, 4)$.
20. $\mathbf{S}(-1, 1, -3)$, y con vector de dirección. $(2, 1, -3)$.
21. $\mathbf{S}(0, 0, 0)$, y con vector de dirección. $(1, 1, 1)$.
22. $\mathbf{S}(-2, 3, 2)$, y con vector de dirección. $(2, 1, -5)$.
23. $\mathbf{S}(3, -1, 4)$ y $\mathbf{T}(2, -3, 2)$.
24. $\mathbf{S}(-4, 1, 3)$ y $\mathbf{T}(2, -3, 0)$.
25. $\mathbf{S}(2, -1, 3)$ y $\mathbf{T}(-2, 1, -3)$.
26. $\mathbf{S}(1, 0, 1)$ y $\mathbf{T}(14, 7, 3)$.
27. $\mathbf{S}(2, 1, -4)$ y $\mathbf{T}(5, 3, -4)$.
28. $\mathbf{S}(-3, 2, 0)$ y $\mathbf{T}(6, 2, -1)$.
29. $\mathbf{S}(5, -1, 4)$ y $\mathbf{T}(5, -1, 2)$.
30. $\mathbf{S}(3, 5, -4)$ y $\mathbf{T}(-2, 5, -4)$.
31. $\mathbf{S}(1, 4, -2)$, y es paralela a la recta con ecuaciones simétricas

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y+7}{3} = \frac{z-5}{-6}.$$

32. $\mathbf{S}(3, -4, 6)$, y es paralela a la recta con ecuaciones simétricas

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z+3}{4}.$$

33. $\mathbf{S}(-2, -4, -1)$, y es paralela a la recta con ecuaciones simétricas

$$x + 2 = 3 - y = 4 - z.$$

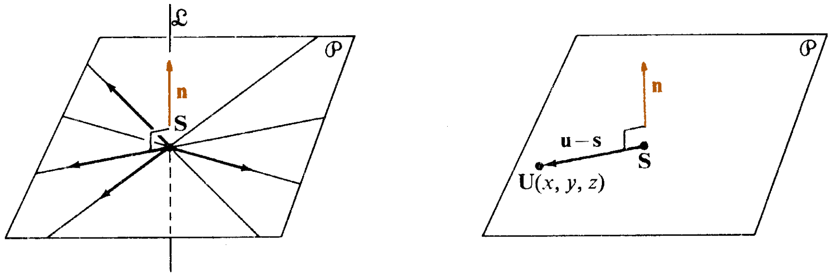
34. $\mathbf{S}(5, -\sqrt{2}, \sqrt{3})$, y es paralela a la recta con ecuaciones simétricas

$$\frac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{z+4}{\sqrt{7}}.$$

35. $\mathbf{S}(1, 2, 3)$, y es paralela a la recta que pasa por $\mathbf{Q}(2, 1, -4)$ y $\mathbf{T}(1, 2, 2)$.
36. $\mathbf{S}(2, -1, -4)$, y es paralela a la recta que pasa por $\mathbf{Q}(1, 1, 3)$ y $\mathbf{T}(0, 3, -2)$.
37. $\mathbf{S}(1, 5, -7)$, y es paralela a la recta que pasa por $\mathbf{Q}(2, -1, 3)$ y $\mathbf{T}(5, 1, 3)$.
38. $\mathbf{S}(-5, 1, 0)$, y es paralela a la recta que pasa por $\mathbf{Q}(5, -1, 4)$ y $\mathbf{T}(5, 1, 2)$.
39. $\mathbf{S}(6, -1, 4)$, y es paralela a la recta que pasa por $\mathbf{Q}(3, 2, 5)$ y $\mathbf{T}(3, 2, 2)$.
40. $\mathbf{S}(1, 3, 1)$, y es paralela a la recta que pasa por $\mathbf{Q}(4, 7, -6)$ y $\mathbf{T}(4, 3, -6)$.

9–2 Planos en el espacio

En la Sección 8 – 4 se vió que es posible encontrar un número infinito de vectores no paralelos que sean perpendiculares un vector dado en $\mathcal{R}^3$, y que las representaciones geométricas ordinarias de esos vectores estén en el mismo plano. Usando éstos hechos se puede especificar que un plano $\mathcal{P}$ esté en el espacio, puesto que, como se sugiere en la Figura 9 – 3 (a), $\mathcal{P}$ está compuesto de los puntos que están sobre todas las rectas que son perpendiculares a la recta $\mathcal{L}$ en el punto **S** de $\mathcal{L}$. Por lo tanto, como se muestra en la Figura 9 – 3 (b):



(*a*) *Figura 9—3* (*b*)

■ Si $\mathcal{P}$ es un plano y **S** un punto en $\mathcal{P}$, y si **n** es un vector no nulo cuya representación geométrica es perpendicular a $\mathcal{P}$, entonces un punto $\mathbf{U}(x, y, z)$ está sobre $\mathcal{P}$ si y sólo si

$$(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{1}$$

Por lo tanto la Ecuación (1) es una ecuación de $\mathcal{P}$.

Puesto que $\mathbf{U}(x, y, z)$ es cualquier punto (arbitrario) de $\mathcal{P}$, la Ecuación (1) es simplemente una afirmación de que el vector **n** tiene una representación geométrica que es perpendicular a *todo* vector geométrico cuyo punto inicial sea **S** y esté sobre $\mathcal{P}$. Un vector que tenga una representación geométrica perpendicular a un plano es **perpendicular** a $\mathcal{P}$. Un vector no nulo perpendicular a un plano $\mathcal{P}$, recibe el nombre de **vector normal**, o simplemente **normal**, a $\mathcal{P}$.

Puesto que el producto escalar de dos vectores es un escalar, se puede emplear la Ecuación (1) para obtener una ecuación cartesiana de un plano.

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación cartesiana del plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto $\mathbf{S}(2, 3, -1)$ y que tiene al vector $\mathbf{n} = (1, 3, 2)$. como vector normal.

Solución: Sea $\mathbf{U}(x, y, z)$ cualquier punto de $\mathcal{P}$. Entonces por la Ecuación (1) se tiene

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} &= 0,\\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} &= 0,\\ (x, y, z) \cdot (1, 3, 2) - (2, 3, -1) \cdot (1, 3, 2) &= 0,\\ x + 3y + 2z - (2 + 9 - 2) &= 0,\\ x + 3y + 2z - 9 &= 0.\end{aligned}$$

Nótese que la ecuación cartesiana del plano que aparece en el Ejemplo 1 es de primer grado con respecto a las variables x, y, z, y que los coeficientes de las variables son las componenetes respectivas del vector normal **n**. Esto sugiere (Ejercicios 29, página 317) que si $U(x, y, z)$ representa a un punto en el espacio y $\mathcal{P}$ es un plano que pasa por el punto $S(x_1, y_1, z_1)$, y cuya normal es $\mathbf{n} = (a, b, c)$, entonces una ecuación cartesiana de $\mathcal{P}$ es

■

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{2}$$

donde

$$d = -(ax_1 + by_1 + cz_1).$$

se puede obtener una ecuación cartesiana de un plano $\mathcal{P}$ si se conocen las coordenadas de cualesquiera tres puntos no colineales que estén sobre $\mathcal{P}$. Si S_1, S_2, y S_3 son tres puntos no colineales, entonces el vector $(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1) = \mathbf{n}$ es perpendicular al plano $\mathcal{P}$ que queda determinado por S_1, S_2, y S_3, y **n** es no nulo puesto que los vectores $\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1$ no son paralelos. Por lo tanto **n** es normal a $\mathcal{P}$ y se puede encontrar una ecuación de $\mathcal{P}$ sustituyendo las coordenadas de **n** y las de S_1 (o bien de S_2 o S_3) en la Ecuación (2) anterior.

Ejemplo 2. Obtenga una ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos $S_1(1, 2, 3)$, $S_2(3, -1, 0)$, y $S_3(2, 2, -1)$.

Solución: $\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1 = (3, -1, 0) - (1, 2, 3) = (2, -3, -3)$, y $\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1 = (2, 2, -1) - (1, 2, 3) = (1, 0, -4)$. Entonces el vector $(\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1) = \mathbf{n}$ es normal al plano definido por los tres puntos. Se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1) \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1)\\ &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix}\\ &= 12\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k},\end{aligned}$$

o bien

$$\mathbf{n} = (12, 5, 3).$$

Puesto que $S(x_1, y_1, z_1) = (1, 2, 3)$, por la Ecuación (2) se tiene

$$12x + 5y + 3z - [12(1) + 5(2) + 3(3)] = 0,$$

o bien

$$12x + 5y + 3z - 31 = 0,$$

que es una ecuación del plano:

Nótese que si en la solución del Ejemplo 2 se hubiera empleado $S_2(3, -1, 0)$ en lugar de $S_1(1, 2, 3)$ en la Ecuación (2) se hubiera obtenido

$$d = -[12(3) + 5(-1) + 3(0)] = -31;$$

o que si se hubiera usado $S_3(2, 2, -1)$, entonces se hubiera obtenido

$$d = -[12(2) + 5(2) + 3(-1)] = -31,$$

de modo que el resultado es el mismo en todos los casos.

Si una de las componentes de un vector $\mathbf{n} = (a, b, c)$ normal al plano $\mathcal{P}$ es cero, entonces existe una representación geométrica de $\mathbf{n}$ perpendicular al eje correspondiente, y $\mathcal{P}$ es paralelo a ese eje. Esto resulta evidente de un estudio del coseno director asociado. Por ejemplo, si $a = 0$, entonces

$$\cos\alpha = \frac{0}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0,$$

y una representación geométrica de $\mathbf{n}$ es perpendicular al eje x. Si dos componentes de $\mathbf{n}$ son cero entonces una representación geométrica de $\mathbf{n}$ es perpendicular a los dos ejes correspondientes, y por lo tanto es paralela al tercer eje. En tal caso, el plano cuya normal es $\mathbf{n}$ es paralelo al plano cartesiano que contiene a los ejes correspondientes a las componentes nulas. Por ejemplo, cualquier plano cuyo vector normal sea $\mathbf{n} = (0, 0, c)$ es paralelo al plano xy, y es perpendicular al eje z. Un plano tal se puede representar mediante una ecuación de la forma $z = \textit{constante}$.

Una recta $\mathcal{L}$ es **paralela** a un plano $\mathcal{P}$ si y sólo si un vector de dirección de $\mathcal{L}$ es perpendicular a un vector normal a $\mathcal{P}$. (Nótese que $\mathcal{L}$ puede estar contenido en $\mathcal{P}$). Una recta $\mathcal{L}$ es **perpendicular** a un plano $\mathcal{P}$, si y sólo si un vector de dirección de $\mathcal{L}$ es paralelo a un vector normal a $\mathcal{P}$. Por lo tanto si $\mathbf{v}$ es un vector de dirección de la recta $\mathcal{L}$ y $\mathbf{n}$ es normal al plano $\mathcal{P}$, entocnes:

■ $\mathcal{L}$ es paralelo a $\mathcal{P}$ si y sólo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$.
$\mathcal{L}$ es perpendicular a $\mathcal{P}$ si y sólo si $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$.

Análogamente dos planos son paralelos o perpendiculares si y sólo si sus respectivas normales son paralelas o perpendiculares. Es decir si $\mathcal{P}_1$ es un plano con normal $\mathbf{n}_1$, y $\mathcal{P}_2$ es un plano con normal $\mathbf{n}_2$, entonces

■ $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$.
$\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$.

Obsérvese que de esta definición de planos paralelos resulta que todo plano $\mathcal{P}$ es paralelo a si mismo, puesto que para cualquier vector $\mathbf{n}$ normal a $\mathcal{P}$, se tiene $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$.

Ejercicios 9–2

En los Ejercicios 1–6, obtenga una ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto dado **S** y que tiene el vector normal **n** dado.

1. $\mathbf{S}(1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = (-1, 3, 5)$

2. $\mathbf{S}(2, -1, 4)$; $\mathbf{n} = (2, 3, -1)$

3. $\mathbf{S}(-1, -1, -1)$; $\mathbf{n} = (3, 4, -5)$

4. $\mathbf{S}(2, -1, 0)$; $\mathbf{n} = (2, -1, -2)$

5. $\mathbf{S}(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$

6. $\mathbf{S}(2, 2, -2)$; $\mathbf{n} = (0, 1, 2)$

En los Ejercicios 7–12, obtenga una ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos **A, B** y **C** dados.

7. $\mathbf{A}(3, 4, 1), \mathbf{B}(-1, -2, 5), \mathbf{C}(1, 7, 1)$

8. $\mathbf{A}(3, 1, 4)$, $\mathbf{B}(2, 1, 6)$, $\mathbf{C}(3, 2, 4)$

9. $\mathbf{A}(2, 1, 3)$, $\mathbf{B}(-1, -2, 4)$, $\mathbf{C}(4, 2, 1)$

10. $\mathbf{A}(3, 2, 1)$, $\mathbf{B}(1, 3, 2)$, $\mathbf{C}(1, -2, 3)$

11. $\mathbf{A}(4, 2, 1)$, $\mathbf{B}(-1, -2, 2)$, $\mathbf{C}(0, 4, -5)$

12. $\mathbf{A}(-1, -2, -1)$, $\mathbf{B}(-3, -1, -4)$, $\mathbf{C}(1, 2, 3)$

En los Ejercicios 13–18, obtenga las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto **S** y que es perpendicular al plano cuya ecuación se da.

13. $\mathbf{S}(1, -3, 4)$; $x - 3y + 2z = 4$

14. $\mathbf{S}(-2, 1, 3)$; $x + 2y - 2z - 5 = 0$

15. $\mathbf{S}(1, -1, 2)$; $4x - 3y + 2z - 7 = 0$

16. $\mathbf{S}(1, -2, -3)$; $x - 3y + 2z + 4 = 0$

17. $\mathbf{S}(3, -1, 4)$; $2x + 2y - z = 4$

18. $\mathbf{S}(-6, 4, 1)$; $3x - 2y + 5z + 8 = 0$

19. Obtenga una ecuación del plano que bisecta perpendicularmente al segmento cuyos extremos son $\mathbf{S}(4, 7, -1)$ y $\mathbf{T}(6, -1, 5)$.

20. Obtenga una ecuación del plano que biseca perpendicularmente al segmento cuyos extremos son $\mathbf{S}(0, -1, -4)$ y $\mathbf{T}(-2, 3, 0)$.

21. Obtenga una ecuación del lugar geométrico del tercer vértice de todos los triángulos isósceles cuya base tiene los extremos $\mathbf{S}(3, 1, -2)$ y $\mathbf{T}(-1, 3, 0)$. ¿Cuál es este lugar geométrico?

22. Obtenga una ecuación del lugar geométrico del tercer vértice de todos los triángulos isósceles cuya base tiene los extremos $\mathbf{S}(3, 6, -2)$ y $\mathbf{T}(5, -2, 4)$. ¿Cuál es ese lugar geométrico?

23. Las ecuaciones de las intersecciones del plano $\mathcal{P}$ con el plano xy y el plano yz son $2x - y = 7, z = 0$, y $y + 3z = -7, x = 0$, respectivamente. Obtenga una ecuación de este plano.

24. Las ecuaciones de las intersecciones del plano $\mathcal{P}$ con el plano xy y el plano yz son $x - 4y = 12, z = 0$, y $2y + 5z = -6, x = 0$, respectivamente. Obtenga una ecuación del plano.

25. Obtenga una ecuación del plano que contiene a las rectas que se cortan cuyas ecuaciones son

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{7} \quad \text{y} \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z}{-2}.$$

26. Obtenga una ecuación del plano que contiene a las rectas que se cortan dadas por las ecuaciones

$$\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3} \quad \text{y} \quad \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-5}.$$

27. Demuestre que la recta cuyas ecuaciones simétricas son

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z}{2}$$

es perpendicular al plano con ecuación cartesiana

$$3x-4y+2z=7.$$

28. Demuestre que la recta con ecuaciones paramétricas cartesianas

$$x=-3-2r,\ y=-4-7r, \quad \text{y} \quad z=3r$$

es paralela al plano que tiene como ecuación cartesiana

$$4x-2y-2z=9.$$

* **29.** Demuestre que si $\mathbf{U}(x, y, z)$ representa a un punto en el espacio y $\mathcal{P}$ es un plano que contiene al punto $\mathbf{S}(x_1, y_1, z_1)$, y cuya normal es $\mathbf{n}=(a, b, c)$, entonces una ecuación cartesiana de $\mathcal{P}$ es

$$ax+by+cz+d=0,$$

donde

$$d=-(ax_1+by_1+cz_1).$$

* **30.** Demuestre que un plano con ecuación $ax+by+d=0$ es paralelo al eje z.

* **31.** Obtenga una ecuación del plano que contiene al punto y también a la recta dada por las ecuaciones simétricas

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-3}{2}.$$

* **32.** Obtenga la ecuación del plano que contiene al punto $\mathbf{S}(3, -2, 1)$ y también a la recta cuyas ecuaciones simétricas son

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z}{6}.$$

* **33.** Demuestre que el plano con ecuación vectorial $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=d$, donde $\mathbf{n}=(a, b, c)$ y $\mathbf{r}=(x, y, z)$, queda también definido por la ecuación vectorial $\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}=p$, donde $\mathbf{N}$ es el vector unidad en la dirección de $\mathbf{n}$ y $p=\dfrac{d}{\|\mathbf{n}\|}$. Explique el significado geométrico de p.

* **34.** Sean α, β, y γ los ángulos de dirección del vector **n** que aparece en el Ejercicio 33. Emplee el resultado del Ejercicio 33 para obtener la *forma normal*

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p,$$

de la ecuación de un plano.

* **35.** Demuestre que el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de los puntos $\mathbf{S}(x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2, z_2)$ es un plano.

* **36.** Demuestre que el plano que interseca a los ejes x, y y z en los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, y $(0, 0, c)$, respectivamente, donde a, b y c son distintos de cero, tiene una ecuación de la forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

* **37.** Demuestre que para tres puntos no colineales cualesquiera $\mathbf{Q}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{S}(x_2, y_2, z_2)$, y $\mathbf{T}(x_3, y_3, z_3)$, una ecuación del plano que contiene a **Q, S** y **T** es

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Relaciones entre rectas y planos

9—3 Intersecciones de planos

Se ve, al estudiar geometría, que dos planos dados o son paralelos, o coinciden, o bien se intersecan en una recta. Por ejemplo, en el espacio cartesiano tridimensional, la intersección del plano xy con el plano xz es el eje x. Se hizo notar en la Sección 9 – 2 que planos paralelos (incluyendo los coincidentes) tienen vectores normales paralelos, y de esto se concluye que:

Dos planos cuyos vectores normales no sean paralelos se intersecan en una recta.

Esta recta recibe el nombre de **recta de intersección** de los planos.

Si **v** es un vector de dirección de cualquier recta $\mathcal{L}$ en un plano $\mathcal{P}$, y **n** es un vector normal a $\mathcal{P}$, entonces **v** es perpendicular a **n**. Por lo tanto un vector de dirección **v** de la recta $\mathcal{L}$ de intersección de dos planos no paralelos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ debe ser perpendicular a las normales a ambos planos. (Figura 9 – 4).

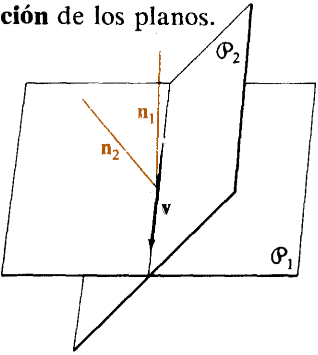


Figura 9—4

Entonces, puesto que el producto vectorial de dos vectores dados es un vector perpendicular a cada uno de los vectores dados:

■ Si $\mathbf{n}_1$ es una normal al plano $\mathcal{P}_1$ y $\mathbf{n}_2$ es una normal al plano $\mathcal{P}_2$, y si $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ se intersecan en una recta $\mathcal{L}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ es un vector de dirección de $\mathcal{L}$.

Si se desea determinar a $\mathcal{L}$, entonces deben obtenerse las coordenadas de al menos un punto **S** sobre $\mathcal{L}$. Puesto que $\mathcal{L}$ esta sobre $\mathcal{P}_1$, y sobre $\mathcal{P}_2$, un punto **S** tal debe estar en ambos planos. El hecho de que toda recta en el espacio debe intersecar al menos a un plano cartesiano se puede emplear para identificar a un punto **S** de $\mathcal{L}$, que esta sobre un plano coordenado. Conociendo las coordenadas de este punto se puede obtener una ecuación de $\mathcal{L}$.

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación paramétrica vectorial de la recta $\mathcal{L}$ de intersección de los planos cuyas ecuaciones cartesianas son $2x + 3y + z = 8$ y $x - 3y - 2z = 1$.

Solución: Por inspección $\mathbf{n}_1 = (2, 3, 1)$ y $\mathbf{n}_2 = (1, -3, -2)$ son vectores normales a los dos planos. Entonces un vector de dirección de la recta $\mathcal{L}$ de intersección es

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 9\mathbf{k} = (-3, 5, -9).$$

como la coordenada z de $\mathbf{v}$ no es cero, $\mathcal{L}$ es no paralela al plano xy, y se puede sustituir a z por 0 en las ecuaciones de los planos para obtener el punto **S** de intersección de $\mathcal{L}$ y el plano xy. Por lo tanto las coordenadas x y y de **S** deben cumplir

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8, \\ x - 3y &= 1. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema simultáneamente se obtiene

$$x = 3 \quad \text{and} \quad y = \tfrac{2}{3}.$$

Por lo tanto $\mathbf{S}(3, \frac{2}{3}, 0)$ es un punto que está en cada uno de los dos planos, y por lo tanto **S** está sobre $\mathcal{L}$. Por consiguiente una ecuación paramétrica vectorial de $\mathcal{L}$ es

$$(x, y, z) = (3, \tfrac{2}{3}, 0) + r(-3, 5, -9), \qquad r \in \mathcal{R}. \qquad (1)$$

Se puede emplear la ecuación vectorial (1) de $\mathcal{L}$ anterior para determinar las ecuaciones paramétricas y simétricas cartesianas de $\mathcal{L}$.

Forma paramétrica: $x = 3 - 3r,\ y = \frac{2}{3} + 5r,\ z = -9r.$

Forma simétrica: $\dfrac{x - 3}{-3} = \dfrac{y - \frac{2}{3}}{5} = \dfrac{z}{-9}.$

En general si $\mathbf{S}(x_1, y_1, z_1)$ es un punto de la recta $\mathcal{L}$ de intersección de dos planos no paralelos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, cuyas normales son $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$,respectivamente, y si $\mathbf{U}(x, y, z)$ representa un punto en el espacio entonces

$$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2), \quad r \in \mathcal{R}$$

es una ecuación paramétrica vectorial de $\mathcal{L}$.

Ejemplo 2. Obtenga una ecuación paramétrica vectorial, una ecuación paramétrica cartesiana, y las ecuaciones simétricas de la recta $\mathcal{L}$ que contiene a $\mathbf{S}(3, -1, 5)$ y que es paralela a la recta de intersección de los planos cuyas ecuaciones son $x - 2y + z = 2$ y $2x + y - z = 6$.

Solución: Por inspección, los vectores $\mathbf{n}_1 = (1, -2, 1)$ y $\mathbf{n}_2 = (2, 1, -1)$, son normales a los planos, de modo que un vector de dirección de la recta $\mathcal{M}$ de intersección es

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = (1, 3, 5).$$

Puesto que $\mathcal{L}$ es paralela a $\mathcal{M}$ y contiene a $\mathbf{S}$, una ecuación paramétrica vectorial de $\mathcal{L}$ es

$$\mathbf{u} = (3, -1, 5) + r(1, 3, 5), \quad r \in \mathcal{R}.$$

Las ecuaciones paramétricas cartesianas son

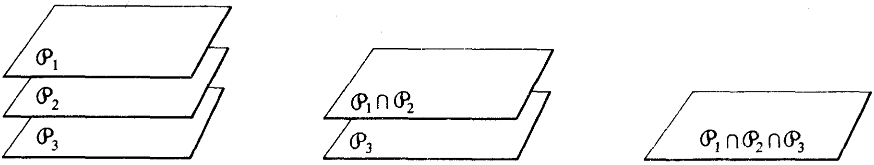
$$x = 3 + r, y = -1 + 3r, z = 5 + 5r;$$

y las ecuaciones simétricas son

$$x - 3 = \frac{y + 1}{3} = \frac{z - 5}{5}.$$

Existen varias relaciones posibles entre las posiciones relativas y las intersecciones comunes de tres planos en el espacio.

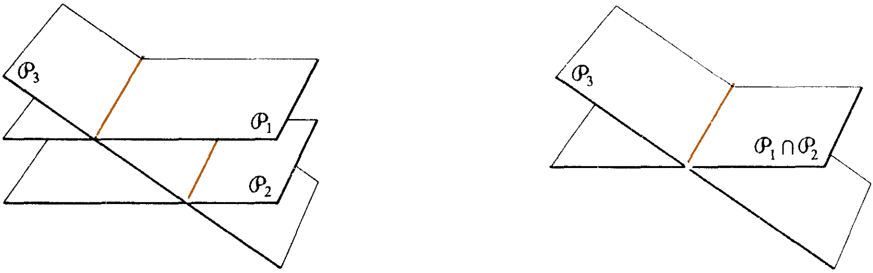
1. Si los tres planos son paralelos (Figura 9–5(a), (b), (c)) entonces no existe una intersección común a menos que los planos coincidan, en cuyo caso la intersección común es todo el plano.



(*a*) (*b*) (*c*)

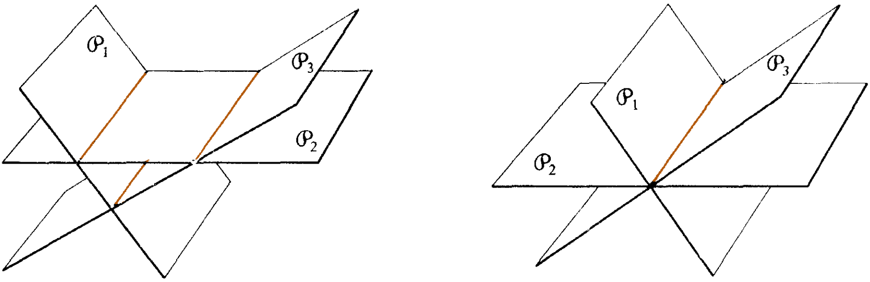
Figura 9—5

2. Si dos, pero no los tres, planos son paralelos (Figura 9—6(a), (b)) entonces no existe una intersección común, a menos que los dos planos paralelos coincidan, en cuyo caso la intersección común es una recta.



(*a*) **Figura 9—6** (*b*)

3. Si no hay ningún par de planos paralelos, pero sus rectas de intersección son paralelas (Figura 9—7(a), (b)) entonces no existe una intersección común, a menos que las rectas de intersección coincidan, en cuyo caso la intersección común es una recta.



(*a*) **Figura 9—7** (*b*)

4. Si no hay ningún par de planos paralelos y sus rectas de intersección no son paralelas, entonces los planos se intersecan en un punto (figura 9—8).

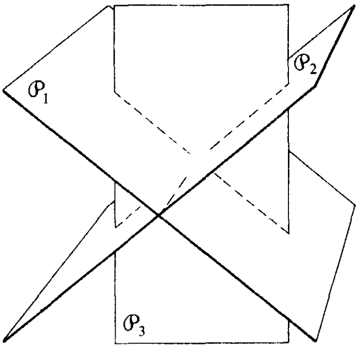


Figura 9—8

Si tres planos se intersecan en un sólo punto, entonces las coordenadas del punto se pueden obtener resolviendo tres ecuaciones lineales simultáneas, que representan a los planos. Si las ecuaciones no tienen una solución única, entonces los planos no se intersecan en un sólo punto.

Ejemplo 3. Obtenga la intersección común de los planos dados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + 4z &= -1, \\ -2x - y + z &= -5, \\ 3x - 2y + 3z &= -4. \end{aligned}$$

Solución: Si se elimina a y de las dos primeras ecuaciones, luego de la primera y tercera ecuaciones se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} -x + 5z &= -6, \\ 5x + 11z &= -6. \end{aligned}$$

Ahora eliminando a x en estas dos ecuaciones se obtiene

$$36z = -36,$$

o bien

$$z = -1.$$

Por sustitución se obtiene que $x = 1$ y $y = 2$. Por lo tanto no puede haber otra solución común que $(x, y, z) = (1, 2, -1)$. Verificando, se obtiene que $(x, y, z) = (1, 2, -1)$ satisface las tres ecuaciones originales. Por lo tanto los planos se intersecan en el punto $S(1, 2, -1)$ solamente.

Obsérvese que el Ejemplo 3 también podría haberse resuelto empleando la Regla de Cramer (véase página 106) puesto que el determinante de los coeficientes

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

no es igual a cero.

A veces, como se menciona anteriormente, la intersección común de tres planos es un plano, o una recta, o $\emptyset$.

Ejemplo 4. Obtenga la intersección común de los planos cuyas ecuaciones son

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0, \\ 2x + y - z &= 3, \\ 4x + 3y + z &= 5. \end{aligned}$$

Solución: Eliminando a z en las primeras dos ecuaciones, y en la segunda y tercera ecuaciones, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 3, \\ 6x + 4y &= 8. \end{aligned}$$

Por inspección estas ecuaciones son inconsistentes. Por lo tanto no hay una terna de valores (x, y, z) que satisfaga las tres ecuaciones simultáneamente, y el conjunto de soluciones es $\emptyset$.

La intersección de un plano $\mathcal{P}$ en el espacio con uno de los planos cartesianos recibe el nombre de **traza** de $\mathcal{P}$ en ese plano cartesiano. Frecuentemente se pueden emplear las trazas de un plano para facilitar el trazado de su gráfica. En la Figura 9–9 se muestra la parte de un plano, con ecuación $2x + 6y + 3z - 12 = 0$, que está en el primer octante.

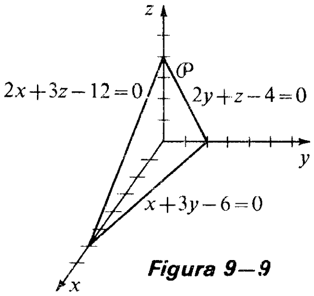


Figura 9–9

Puesto que todos los puntos del plano xy tienen una coordenada z igual a 0, se obtiene la traza del plano $\mathcal{P}$ en el plano xy haciendo $z = 0$ en la ecuación de $\mathcal{P}$. Se obtiene

$$2x + 6y + 3(0) - 12 = 0,$$
$$2x + 6y - 12 = 0,$$

o bien

$$x + 3y - 6 = 0.$$

Análogamente, se obtiene la ecuación de la traza sobre el plano yz haciendo $x = 0$ en la ecuación de $\mathcal{P}$. Se obtiene

$$2y + z - 4 = 0.$$

Finalmente, haciendo $y = 0$ en la ecuación de $\mathcal{P}$, se obtiene la ecuación de la traza xz.

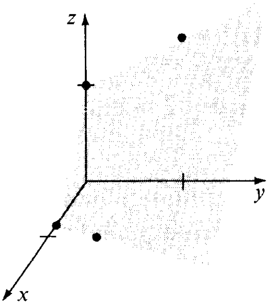
$$2x + 3z - 12 = 0.$$

Ejemplo 5. Trace la gráfica de $5x + 4z - 2y = 4$ en el primer octante.

Solución: Obtenga y trace las gráficas de las trazas del plano en el primer octante.

traza xy: $5x - 2y = 4$
traza xz: $5x + 4z = 4$
traza yz: $4z - 2y = 4$

Indique ahora la parte del plano que está en el primer octante como se muestra en la figura



Las **intersecciones** de un plano con los ejes de coordenadas, es decir, los puntos en donde el plano corta a los ejes, resultan también útiles para trazar la gráfica de un plano. Las intersecciones de un plano con los ejes x, y y z tienen coordenadas de la forma $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, y $(0, 0, c)$, respectivamente. Puesto que estas intersecciones son también los puntos donde las *trazas* cortan a los ejes de coordenadas, se pueden también emplear para trazar las gráficas de las trazas.

Ejercicios 9—3

En los Ejercicios 1—4, obtenga una ecuación parámetrica vectorial de la recta de intersección de los pares de planos cuyas ecuaciones se dan.

1. $x - 2y + z = 0, 3x + y + 2z - 7 = 0$
2. $2x - y + 3z + 1 = 0, 5x + 4y - z - 17 = 0$
3. $2x + 3y - 2 = 0, y - 3z + 4 = 0$
4. $x + 2y - 6 = 0, z = 4$

En los Ejercicios 5—8, obtenga (A) las ecuaciones paramétricas cartesianas y (b) las ecuaciones simétricas cartesianas de la recta de intersección de los pares de planos cuyas ecuaciones se dan.

5. $3x + y - z - 6 = 0, 4x - 2y - 3z + 2 = 0$
6. $2x - 3y + z - 5 = 0, 2x - y + 8z - 3 = 0$
7. $x + y + 3z - 1 = 0, 2x - 3y + z - 7 = 0$
8. $2x + 3y - 2z + 2 = 0, 3x - y + 3z - 19 = 0$

En los Ejercicios 9—14, obtenga la intersección común de los tres planos cuyas ecuaciones se dan.

9. $x + y + z - 6 = 0, 2x + 2y - 3z + 3 = 0, 2x - 3y + 2z - 2 = 0$
10. $2x + 5y + 2z - 1 = 0, x - 4y + 3z - 7 = 0, 5x + 10y - 4z - 5 = 0$
11. $2x - y + 3z - 4 = 0, x + 4y - 5z = 0, 13x - 2y + 13z - 4 = 0$
12. $x + y + 2z - 5 = 0, 2x - y + 3z + 7 = 0, x - 2y + z + 13 = 0$
13. $2x + y + z - 7 = 0, x - 2y + z - 2 = 0, 3x + 4y + z - 12 = 0$
14. $3x + 2y - 2z + 2 = 0, x - y + 2z - 11 = 0, 9x + y + 2z - 20 = 0$

En los Ejercicios 15—20, trace la gráfica del plano cuya ecuación se da en el primer octante.

15. $x + 2y + 3z = 6$
16. $x + 2y = 5$
17. $y + 3z = 6$
18. $y = 4$
19. $x = 3$
20. $x + y - z = 1$

21. Obtenga una ecuación del plano que es paralelo al plano cuyas intersecciones con los ejes x y y z son $3, -1$ y 2 respectivamente, y que pasa por el punto $S(5, -8, 3)$.

22. Obtenga una ecuación del plano que es paralelo al plano cuyas intersecciones con los ejes x, y y z son -1, 3 y 5 respectivamente, y que pasa por el punto $S(0, 1, -1)$.

23. Obtengan las ecuaciones simétricas de la recta que contiene al punto $S(-3, 1, 6)$ y que es paralela a la recta de intersección de los planos cuyas ecuaciones son $3x + 2y - z = 4$ y $x - y + 2z = 6$.

24. Obtenga las ecuaciones simétricas de la recta que contiene al punto $S(-1, 6, 2)$ y que es paralela a la recta de intersección de los planos dados por las ecuaciones $4x - y + 2z = 7$ y $x + 3y + z = 2$.

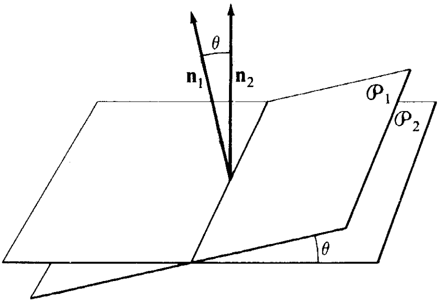
* **25.** Se puede asignar a una recta perpendicular a un plano dos sentidos. Cuando se ha hecho esta asignación el plano está **orientado**. Si la ecuación del plano $ax + by + cz + d = 0$ está dada, entonces se considera que $\mathbf{n} = (a, b, c)$ [y no $-\mathbf{n} = (-a, -b, -c)$] es su vector normal, al menos que se especifique lo contrario. El ángulo diedro θ, $0 \leq m^\circ(\theta) \leq 180$, que forman dos planos orientados se define como el ángulo que forman las normales a los planos (véase el diagrama). Demuestre que para los planos que se cortan cuyas ecuaciones son.

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

y

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



En los Ejercicios 26—30, emplee el resultado del Ejercicio 25 para obtener el coseno del ángulo diedro que forman los planos orientados dadas sus ecuaciones.

* **26.** $4x - 2y + z = 0$ and $2x + 4y - z + 2 = 0$
* **27.** $x - 2y + 2z + 3 = 0$ and $2x - y - 2z - 1 = 0$
* **28.** $4x + 2y - 6z + 3 = 0$ and $2x - y + 3z + 5 = 0$
* **29.** $x + 3y + 4z = 5$ and $z = 0$
* **30.** $2x + 3y + 2z = 3$ and $y = 0$

* **31.** Demuestre que si $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, y $\mathbf{n}_3 = (a_3, b_3, c_3)$, entonces el determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

satisface la ecuación

$$D = \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_3) = (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \cdot \mathbf{n}_3 = (\mathbf{n}_3 \times \mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{n}_2.$$

En los Ejercicios 32 y 33 $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, y $\mathcal{P}_3$ son planos cuyos vectores normales son $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, y $\mathbf{n}_3 = (a_3, b_3, c_3)$, respectivamente.

* **32.** Emplee el resultado del Ejercicio 31 para demostrar que $D = 0$ si y sólo si $\mathcal{P}_1$, es paralelo a la recta de intersección de $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$, o bien $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$ son paralelos entre sí.

* **33.** Emplee el resultado del Ejercicio 31 para demostrar que si ningún par de los planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, y $\mathcal{P}_3$ son paralelos, y si $\mathcal{P}_1$ es paralelo a la intersección de $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$, entonces las tres rectas de intersección de los planos son paralelas.

* **34.** Demuestre que los planos dados por las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0 \end{aligned}$$

son paralelos y distintos si y sólo si existe una constante k tal que $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1,$ pero $d_2 \neq kd_1$.

En los Ejercicios 35—42, para los planos $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, y $\mathcal{P}_3$ representados por las ecuaciones (a), (b) y (c) respectivamente, obtenga las ecuaciones de la intersección de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$, de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_3$, y de $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{P}_3$, y obtenga también las coordenadas de la intersección común de los tres planos.

* **35.** (a) $-2x + y - z + 2 = 0$
(b) $x + y - 2z + 2 = 0$
(c) $2x - y + z + 2 = 0$

* **36.** (a) $2x - y + z + 2 = 0$
(b) $x + 3y - 2z - 3 = 0$
(c) $3x + 2y - z + 1 = 0$

* **37.** (a) $x - y + z + 3 = 0$
(b) $2x - 2y + 2z + 7 = 0$
(c) $-x + y - z - 7 = 0$

* **38.** (a) $x + 2y + 3z = 0$
(b) $2x + 3y + 4z = 0$
(c) $3x + 4y + 4z - 1 = 0$

* **39.** (a) $2x - y + 3z + 4 = 0$
(b) $-2x + y - 3z - 4 = 0$
(c) $8x - 4y + 12z + 16 = 0$

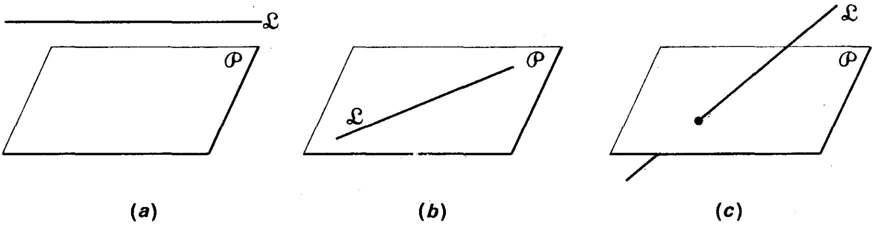
* **40.** (a) $-2x - 6y + 2z - 2 = 0$
(b) $x + 3y - z + 1 = 0$
(c) $x + y - z = 0$

* **41.** (a) $x - y + 3z + 4 = 0$
(b) $2x - 2y + 6z + 8 = 0$
(c) $-3x + 3y - 9z + 12 = 0$

* **42.** (a) $7x - 4y + z + 1 = 0$
(b) $4x - y + 2z - 2 = 0$
(c) $x + 2y + 3z - 5 = 0$

9—4 Intersecciones de rectas y planos

Dados una recta y un plano en el espacio hay tres posibles configuraciones, (Figuras 9—10 (a), (b) y (c)): o bien la recta es paralela al plano pero no lo interseca, o bien es paralela al plano pero está completamente contenido en el plano, o bien interseca al plano en un sólo punto.



(*a*) (*b*) (*c*)

Figura 9—10

Como se vió en la página 315, una recta $\mathcal{L}$ es paralela a un plano $\mathcal{P}$ si y sólo si un vector de dirección de $\mathcal{L}$ es perpendicular a un vector normal a $\mathcal{P}$.

Si $\mathcal{L}$ no es paralela a $\mathcal{P}$, entonces $\mathcal{L}$ interseca a $\mathcal{P}$ en un sólo punto (véase los Ejercicios 25 y 26, página 330). Se pueden emplear las ecuaciones de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$ para obtener las coordenadas de este punto.

Ejemplo 1. Obtenga las coordenadas del punto **S** de intersección del plano cuya ecuación cartesiana es

$$2x + 3y - z = 1$$

y la recta con ecuaciones paramétricas

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

Solución: Obsérvese primero que, de los números directores dados de la recta y de la ecuación dada del plano, se deduce que la recta no es paralela al plano. Es decir

$$(3, 1, 2) \cdot (2, 3, -1) = 6 + 3 - 2 \neq 0.$$

Despeje a x en $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1}$ en función de y para obtener $x = 3y + 7$; Despéjese a z en $\dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{2}$ en función de y para obtener $z = 2y + 6$. Estas ecuaciones expresan la relación que existe entre x y y, y entre z y y para todo punto $\mathbf{U}(x, y, z)$ de la recta. En particular, se cumplen para el punto **S** de intersección de la recta y el plano.

Al sustituir los valores $3y + 7$ y $2y + 6$ de x y z respectivamente en las ecuaciones del plano se obtiene

$$\begin{aligned} 2(3y + 7) + 3y - (2y + 6) &= 1, \\ 6y + 14 + 3y - 2y - 6 &= 1, \\ 7y &= -7, \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Por lo tanto -1 es la coordenada y del punto de intersección requerido. Finalmente sustituyendo a y por -1 en las ecuaciones $x = 3y + 7$ y $z = 2y + 6$, se obtiene $x = 4$ y $z = 4$. Por lo tanto el punto $\mathbf{S}(4, -1, 4)$ es el único punto que está tanto sobre la recta como sobre el plano, y se puede verificar que estas coordenadas satisfacen las ecuaciones dadas. Por consiguiente el punto $\mathbf{S}(4, -1, 4)$ es el único punto de intersección.

En la página 315 se vió que una recta $\mathcal{L}$ es perpendicular a un plano $\mathcal{P}$ si y sólo si un vector de dirección de $\mathcal{L}$ es paralelo a un vector normal a $\mathcal{P}$. Se puede emplear este hecho para obtener la ecuación de algunos planos.

Ejemplo 2. Obtenga una ecuación cartesiana del plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto $\mathbf{Q}(2, -1, 0)$ y que es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $\mathbf{S}(3, -1, 2)$ y $\mathbf{T}(5, 7, -3)$.

Solución: Primero obténgase un vector $\mathbf{v}$ de dirección de la recta que pasa por $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$. Se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= (5, 7, -3) - (3, -1, 2)\\ &= (5 - 3, 7 - (-1), -3 - 2) = (2, 8, -5).\end{aligned}$$

Puesto que el vector $\mathbf{v}$ es normal al plano $\mathcal{P}$, una ecuación cartesiana de $\mathcal{P}$ es de la forma

$$2x + 8y - 5z + d = 0.$$

Entonces puesto que $\mathbf{Q}$ está contenido en $\mathcal{P}$, sus coordenadas deben satisfacer esta ecuación, y se tiene $2(2) + 8(-1) - 5(0) + d = 0$, o sea $d = 4$. Por lo tanto una ecuación cartesiana del plano $\mathcal{P}$ es $2x + 8y - 5z + 4 = 0$.

Ejercicios 9—4

En los Ejercicios 1—6, encuentre las coordenadas del punto **S** de intersección de la recta y el plano cuyas ecuaciones se dan.

1. $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+6}{-1}$; $3x - 2y + 3z + 16 = 0$
2. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{4}$; $x + 4y - z + 5 = 0$
3. $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+8}{-2} = \dfrac{z+6}{-11}$; $3x + y + 2z - 10 = 0$
4. $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-5}{7}$; $2x + 3y - 3z + 3 = 0$
5. $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+4}{2}$; $5x - 2y + 3z + 17 = 0$
6. $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{4}$; $4x + 3y + 3z + 5 = 0$
7. Obtenga una ecuación del plano que contiene al punto $\mathbf{S}(1, 1, 1)$ y que es perpendicular a la recta de intersección de los planos cuyas ecuaciones son $2x - y + z - 5 = 0$ y $x + 2y + 2z - 5 = 0$.
8. Obtenga una ecuación del plano que contiene al punto $\mathbf{S}(2, 1, -4)$ y que es perpendicular a la recta de intersección de los planos dados por las ecuaciones $4x - 3y + 2z - 7 = 0$ y $x + 4y - z - 5 = 0$.
9. Obtenga una ecuación cartesiana del plano que contiene al punto $\mathbf{Q}(3, -3, -4)$ y que es perpendicular a la recta que contiene a los puntos $\mathbf{S}(0, 6, -6)$ y $\mathbf{T}(5, 2, 2)$.

10. Obtenga una ecuación cartesiana del plano que contiene al punto Q$(-4, 0, 3)$ y que es perpendicular a la recta que contiene a los puntos S$(4, 10, -3)$ y T$(4, 14, -8)$.

11. Obtenga una ecuación del plano que contiene a los puntos S$(1, 2, 3)$ y T$(3, -1, 0)$ y que es paralelo a la recta de intersección de los planos cuyas ecuaciones son $x + y + z - 3 = 0$ y $x + 2y - 3z + 5 = 0$.

12. Obtenga una ecuación del plano que contiene a los puntos S$(3, 0, 2)$ y T$(4, 1, -1)$ y que es paralelo a la recta de intersección de los planos dados por las ecuaciones $x - 2y + z - 2 = 0$ y $2x + 3y - 2z - 3 = 0$.

13. Obtenga una ecuación cartesiana del plano que contiene al punto S$(-6, 1, -3)$ y que es perpendicular a la recta cuyos cosenos directores son todos iguales.

14. Obtenga una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta de intersección de los planos con ecuaciones $x + 3y - z = 6$ y $x + y = 4$ y que pasa por el origen.

15. Obtenga una ecuación cartesiana del plano que contiene al punto S$(5, -2, 3)$ y que es paralelo tanto al eje x así como al eje z.

16. Obtenga una ecuación cartesina del plano que contiene al punto S$(-3, 5, 1)$ y que es paralelo tanto al eje y como al eje z.

17. Calcule la longitud del segmento de recta con ecuaciones simétricas $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+7}{-1}$ y que queda acotado por las intersecciones de esta recta como los planos cuyas ecuaciones cartesianas son $3x - 2y + 3z + 16 = 0$ y $3x - 2y + 3z = 0$.

18. Calcule la longitud del segmento de la recta cuyas ecuaciones simétricas son $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{7}$ y que queda acotado por las intersecciones de esta recta con los planos cuyas ecuaciones cartesianas son $2x + 3y - 3z + 5 = 0$ $2x + 3y - 3z - 5 = 0$.

19. Una recta $\mathcal{L}$ que contiene al punto S$(2, -5, 8)$ es perpendicular al plano $\mathcal{P}$ cuya ecuación cartesiana es $x - 2y + 3z - 8 = 0$. Obtenga las coordenadas del punto de intersección de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$.

20. Una recta $\mathcal{L}$ contiene al punto S$(7, 3, -5)$ y es perpendicular al plano $\mathcal{P}$ cuya ecuación cartesiana es $x - y - z - 3 = 0$. Obtenga las coordenadas del punto de intersección de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$.

21. Obtenga las coordenadas del punto de intersección del plano $\mathcal{P}$ cuya ecuación cartesiana es $2x + y + z = 6$ y la recta que pasa por el origen y que es perpendicular a $\mathcal{P}$.

22. Obtenga las coordenadas del punto de intersección del plano $\mathcal{P}$ cuya ecuación cartesiana es $x - 2y - 2z = 3$ y la recta que pasa por el origen y que es perpendicular a $\mathcal{P}$.

* **23.** Demuestre que las coordenadas del punto de intersección del plano $\mathcal{P}$ con ecuación cartesiana $ax + by + cz = d$ y la recta que pasa por el origen y que es perpendicular a $\mathcal{P}$ son.

$$\left(\frac{ad}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{bd}{a^2 + b^2 + c^2}, \frac{cd}{a^2 + b^2 + c^2}\right).$$

* **24.** Emplee el resultado del Ejercicio 23 junto con la fórmula de distancia, para demostrar que la distancia que separa al origen del plano $\mathcal{P}$ con ecuación cartesiana $ax + by + cz = d$ está dada por

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \, .$$

* **25.** Sea $\mathbf{S}(x_1, y_1, z_1)$ un punto de la recta $\mathcal{L}$ con vector de dirección $\mathbf{v} = (a_1, b_1, c_1)$. Las ecuaciones paramétricas cartesianas de $\mathcal{L}$ son

$$x = x_1 + ra_1, y = y_1 + rb_1, z = z_1 + rc_1.$$

Sea $\mathcal{P}$ un plano cuya ecuación cartesiana es $ax + by + cz = d$ y tal que no sea paralelo a $\mathcal{L}$. Demuestre que para cualquier punto de intersección de $\mathcal{L}$ con el plano $\mathcal{P}$, se tiene

$$r = \frac{d - ax_1 - by_1 - cz_1}{aa_1 + bb_1 + cc_1} \, .$$

* **26.** En el Ejercicio 25, demustre que el punto que corresponde al valor dado de r está sobre $\mathcal{P}$.

Fórmulas de distancia

9–5 Distancia de un punto a un plano

De la Ecuación (1) en la página 287, se sigue que para dos vectores **u** y **v** no nulos en $\mathcal{R}^3$, se tiene.

$$\|\mathbf{v}\| \cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|} \, ,$$

donde θ es el ángulo entre **u** y **v**. Como se ha visto (páginas 290 y 291), el número $\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|}$ representa la componente escalar de **v** paralela a **u**. Se ha empleado este hecho para obtener la distancia (perpendicular) que separa a un punto **S** de un plano $\mathcal{P}$ en el espacio, de la misma forma que se obtuvo la distancia que separa a un punto **S** de una recta $\mathcal{L}$ en el plano (página 89). Por lo tanto si **S** es un punto y $\mathcal{P}$ es un plano, si **T** es cualquier punto sobre $\mathcal{P}$, y **n** es un vector normal a $\mathcal{P}$, entonces la distancia que separa a **S** de $\mathcal{P}$ es igual al valor absoluto de la componente escalar de **s** − **t** paralela a **n**. Es decir

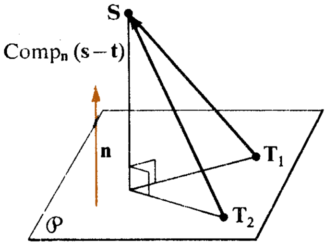


Figura 9—11

$$d(\mathbf{S}, \mathcal{P}) = \frac{|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} \, . \qquad (1)$$

En la Figura 9–11 se ilustra el que $d(\mathbf{S}, \mathcal{P})$ no depende de la elección del punto específico $\mathbf{T}$ sobre $\mathcal{P}$. La componente de $\mathbf{s} - \mathbf{t}$ paralela a $\mathbf{n}$ es la misma para todos los puntos $\mathbf{T}$ sobre $\mathcal{P}$. Es decir para cualesquiera puntos $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ sobre $\mathcal{P}$, se tiene $\mathrm{Comp}_{\mathbf{n}}(\mathbf{s} - \mathbf{t}_1) = \mathrm{Comp}_{\mathbf{n}}(\mathbf{s} - \mathbf{t}_2)$.

Ejemplo 1. Calcule la distancia que separa al punto $\mathbf{S}(3, 2, 4)$ del plano $\mathcal{P}$ con ecuación $4x - 3y + z = 2$.

Solución: Se puede obtener un punto $\mathbf{T}$ sobre $\mathcal{P}$ asignando arbitrariamente dos componentes a $\mathbf{T}$ y sustituyendo estos valores en la ecuación de $\mathcal{P}$ para calcular su tercera componente. Si se sustituye tanto a x como a y en la ecuación dada por 0 se obtiene $z = 2$, así que el punto $\mathbf{T}(0, 0, 2)$ está sobre $\mathcal{P}$. Por lo tanto el vector $\mathbf{s} - \mathbf{t}$ es $(3, 2, 4) - (0, 0, 2) = (3, 2, 2)$. Por inspección de la ecuación de $\mathcal{P}$, una normal a $\mathcal{P}$ es $\mathbf{n} = (4, -3, 1)$. Entonces de la Ecuación (1) se tiene

$$\begin{aligned} d(\mathbf{S}, \mathcal{P}) &= \frac{|(3, 2, 2) \cdot (4, -3, 1)|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|12 - 6 + 2|}{\sqrt{16 + 9 + 1}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{26}}. \end{aligned}$$

Para obtener una expresión cartesiana de $d(\mathbf{S}, \mathcal{P})$, nótese que la ecuación cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ de $\mathcal{P}$ se puede escribir como $(x, y, z) \cdot (a, b, c) + d = 0$; es decir, para cualquier punto $\mathbf{T}$ sobre $\mathcal{P}$, se tiene $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} + d = 0$, o sea $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = -d$. Tomando en cuenta esto, sean (x_1, y_1, z_1) las coordenadas de $\mathbf{S}$ y sustitúyanse estas coordenadas en la Ecuación (1), página 330. Se obtiene

$$\begin{aligned} d(\mathbf{S}, \mathcal{P}) &= \frac{|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} \\ &= \frac{|(x_1, y_1, z_1) \cdot (a, b, c) + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \end{aligned}$$

o bien

■
$$d(\mathbf{S}, \mathcal{P}) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{2}$$

Ejemplo 2. Calcule la distancia que separa al punto $\mathbf{S}(3, -1, 2)$ del plano $\mathcal{P}$ con ecuación $x + 2y - 2z = 6$.

Solución: Empleando la Ecuación (2) se tiene

$$d(\mathbf{S}, \mathcal{P}) = \frac{|1(3) + 2(-1) - 2(2) - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-9|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3.$$

Se ve de la Ecuación (2) que la distancia que separa al origen $\mathbf{O}(0, 0, 0)$ del plano $\mathcal{P}$ con ecuación $ax + by + cz + d = 0$ es simplemente

$$d(\mathbf{O}, \mathcal{P}) = \frac{|a(0) + b(0) + c(0) + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} .$$

Ahora dividiendo el primer y segundo miembros de la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ por $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ o $-\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, se obtiene

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} z + \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

o bien

$$\frac{a}{-\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} x + \frac{b}{-\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} y + \frac{c}{-\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} z + \frac{d}{-\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0, \tag{3}$$

respectivamente. Obsérvese que los coeficientes de x, y y z en las Ecuaciones (3) son un conjunto de cosenos directores de $\mathbf{n} = (a, b, c)$, o de $-\mathbf{n} = (-a, -b, -c)$ respectivamente, y que el valor absoluto del término constante es la distancia que separa al origen del plano $\mathcal{P}$. Esto permite escribir la Ecuación (3) como

■
$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \tag{4}$$

donde $p = \pm \dfrac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ es la distancia *dirigida* del origen al plano $\mathcal{P}$ (y $|p|$ es la distancia del origen a $\mathcal{P}$). La forma (4) recibe el nombre de **forma normal** de la ecuación cartesiana de un plano. Puesto que se pueden elegir ambos signos al determinar p, cada plano que no contenga al origen tiene dos ecuaciones en forma normal.

Se puede emplear la Ecuación (4) como una altenativa a la fórmula de distancia para determinar la distancia que separa a un punto dado de una recta dada.

Ejemplo 3. Para cada uno de los puntos $\mathbf{Q}(1, 2, 6)$, $\mathbf{R}(1, 2, -1)$, $\mathbf{S}(2, 4, -2)$, y $\mathbf{T}(5, 1, -8)$, calcule la distancia que separa al punto del plano $\mathcal{P}$ cuya ecuación cartesiana es $3x - 2y + 6z + 14 = 0$.

Solución: Calcúlese primero la distancia dirigida del origen al plano $\mathcal{P}$. Después obténgase la distancia dirigida del origen al plano que es paralelo a $\mathcal{P}$ y que pasa por el punto dado. Finalmente calcule el valor absoluto de la diferencia de estas dos distintas dirigidas.

En la ecuación de $\mathcal{P}$, se tiene $a = 3$, $b = -2$, and $c = 6$. Por lo tanto $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7$, y se puede escribir la ecuación de $\mathcal{P}$ en forma normal dividiendo entre 7:

$$\tfrac{3}{7}x - \tfrac{2}{7}y + \tfrac{6}{7}z + 2 = 0.$$

Entonces de la Ecuación (4) la distancia dirigida p del origen al plano $\mathcal{P}$ es -2.

La forma normal de la ecuación de un plano paralelo a $\mathcal{P}$ es

$$\tfrac{3}{7}x - \tfrac{2}{7}y + \tfrac{6}{7}z - p = 0.$$

Para el plano paralelo a $\mathcal{P}$ que contiene a $\mathbf{Q}(1, 2, 6)$, se tiene $\frac{3}{7}(1) - \frac{2}{7}(2) + \frac{6}{7}(6) - p = 0$, o sea $p = 5$. Análogamente la distancia dirigida p del origen al plano paralelo a $\mathcal{P}$ que contiene a

$$\begin{aligned} &\mathbf{R} \text{ es } \tfrac{3}{7}(1) - \tfrac{2}{7}(2) + \tfrac{6}{7}(-1) = -1,\\ &\mathbf{S} \text{ es } \tfrac{3}{7}(2) - \tfrac{2}{7}(4) + \tfrac{6}{7}(-2) = -2,\\ &\mathbf{T} \text{ es } \tfrac{3}{7}(5) - \tfrac{2}{7}(1) + \tfrac{6}{7}(-8) = -5. \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} d(\mathbf{Q}, \mathcal{P}) &= |5 - (-2)| = 7,\\ d(\mathbf{R}, \mathcal{P}) &= |-1 - (-2)| = 1,\\ d(\mathbf{S}, \mathcal{P}) &= |-2 - (-2)| = 0,\\ d(\mathbf{T}, \mathcal{P}) &= |-5 - (-2)| = 3. \end{aligned}$$

Ejercicios 9–5

En los Ejercicios 1–6, calcule la distancia que separa al punto dado **S** del plano $\mathcal{P}$ cuya ecuación se da.

1. $\mathbf{S}(2, -1, 4)$; $2x - 2y + z - 3 = 0$

2. $\mathbf{S}(2, 3, 1)$; $4x + 4y - 7z + 14 = 0$

3. $\mathbf{S}(3, -5, 9)$; $3x - 6y + 2z - 8 = 0$

4. $\mathbf{S}(5, -7, -1)$; $x - 2y - 2z + 6 = 0$

5. $\mathbf{S}(2, -1, 7)$; $4x - 8y + z - 5 = 0$

6. $\mathbf{S}(1, -2, 1)$; $14x - 5y - 2z + 4 = 0$

En los Ejercicios 7–12, transforme la ecuación cartesiana dada de un plano a su forma normal, y calcule la distancia del origen al plano.

7. $x - 2y + 2z - 27 = 0$

8. $5x - 4y + 20z + 42 = 0$

9. $7x + 4y - 4z + 45 = 0$

10. $12x - 3y + 4z - 91 = 0$

11. $6x + 3y - 2z - 84 = 0$

12. $5x + 14y + 2z - 150 = 0$

En los Ejercicios 13—18, calcule la distancia que separa a los planos paralelos cuyas ecuaciones se dan.

13. $2x + y - 2z = 12$
$2x + y - 2z = 18$

14. $6x - 2y + 3z = 14$
$6x - 2y + 3z = 35$

15. $x + 8y + 4z = 36$
$x + 8y + 4z = -18$

16. $x - 2y + 2z = -12$
$x - 2y + 2z = 6$

17. $x - 2y + 3z + 6 = 0$
$3x - 6y + 9z - 8 = 0$

18. $-x + y - 6z - 3 = 0$
$2x - 2y + 12z - 11 = 0$

19. Calcule la distancia que separa al plano con ecuación cartesiana $4x - 8y + z = 1$ de la recta cuyas ecuaciones simétricas son $\dfrac{x-2}{15} = \dfrac{y-10}{9} = \dfrac{z-1}{12}$.

20. Calcule la distancia que separa al plano cuya ecuación es $x + 3y - 4z - 2 = 0$ de la recta de intersección de los planos con ecuaciones $x - 2y + 3z = 5$ y $2x + y - z = 3$.

21. Encuentre el lugar geométrico de los puntos del espacio que son equidistantes de los planos cuyas ecuaciones son $2x + 2y - z - 1 = 0$ y $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

22. Encuentre el lugar geométrico de los puntos en el espacio que son equidistantes de los planos cuyas ecuaciones son $2x - y + 2z = 0$ y $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

23. Obtenga una ecuación de un plano $\mathcal{P}$ que es paralelo al plano cuya ecuación es $3x - 2y + 6z = 9$, y que está a 7 unidades de distancia del origen. (Hay dos resultados correctos.)

24. Obtenga una ecuación de un plano $\mathcal{P}$ que es paralelo al plano cuya ecuación es $x - 3y + 5z = 8$ y que está a 3 unidades de distancia del origen. (Hay dos resultados correctos.)

9—6 Distancia de un punto a una recta (Optativo)

La distancia de un punto a una recta en el espacio se define como la longitud del segmento perpendicular a la recta que va de la recta al punto. Para calcular la distancia $d(\mathbf{S}, \mathcal{L})$ del punto **S** a la recta $\mathcal{L}$ cuya ecuación vectorial es

$$\mathbf{u} = \mathbf{t} + r\mathbf{v},\ r \in \mathcal{R},$$

se procede de la siguiente manera.

Obsérvese en la Figura 9—12 que la distancia $d(\mathbf{S}, \mathbf{T})$ de **S** a un punto **T** sobre $\mathcal{L}$ es $\|\mathbf{s} - \mathbf{t}\|$, y que entonces

$$d(\mathbf{S}, \mathcal{L}) = \|\mathbf{s} - \mathbf{t}\| \operatorname{sen} \theta. \qquad (1)$$

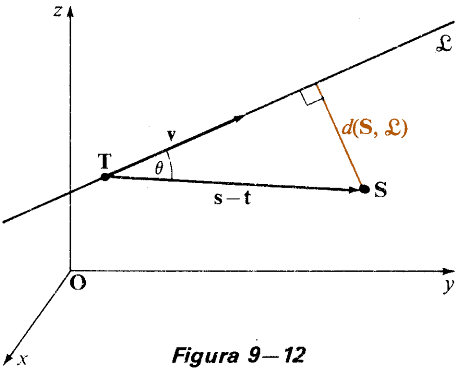


Figura 9—12

Se puede verificar directamente (Ejercicio 35, página 298) que para todos los vectores **u** y **v**

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2. \tag{2}$$

Puesto que $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \cos^2 \theta$, donde θ es el ángulo que forman **u** y **v**, se puede escribir (2) en la forma

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \operatorname{sen}^2 \theta. \end{aligned}$$

Entonces si $\|\mathbf{v}\| \neq 0$,

$$\|\mathbf{u}\| \operatorname{sen} \theta = \frac{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}. \tag{3}$$

Sustituyendo de la Ecuación (3), con $\mathbf{u} = \mathbf{s} - \mathbf{t}$, en la Ecuación (1) se tiene

■ $$d(\mathbf{S}, \mathcal{L}) = \frac{\|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}. \tag{4}$$

Ejemplo Calcule la distancia entre el punto $\mathbf{S}(3, -1, 2)$ y la recta $\mathcal{L}$ cuyas ecuaciones simétricas son

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Solución: Primero, por inspección, un punto de $\mathcal{L}$ es $\mathbf{T}(2, 1, 0)$ y un vector de dirección de $\mathcal{L}$ es $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{s} - \mathbf{t} &= (3, -1, 2) - (2, 1, 0) \\ &= (1, -2, 2), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (\mathbf{s} - \mathbf{t}) \times \mathbf{v} &= (1, -2, 2) \times (1, 2, -1) \\ &= (-2, 3, 4). \end{aligned}$$

Ahora se encuentra que

$$\|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \times \mathbf{v}\| = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$$

y

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}.$$

Finalmente de la Ecuación (4) se tiene

$$d(\mathbf{S}, \mathcal{L}) = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{29}{6}}.$$

Ejercicios 9—6

En los Ejercicios 1—14, calcule la distancia que separa al punto dado S de la recta cuyas ecuaciones se dan.

1. $S(3, 0, 2)$; $x - 1 = y - 1 = z$
2. $S(2, 3, 1)$; $\frac{x}{-1} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z + 1}{2}$
3. $S(7, 6, 5)$; $\frac{x - 1}{6} = \frac{y - 1}{7} = \frac{z - 1}{8}$
4. $S(3, 1, -2)$; $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 1}{2}$
5. $S(11, 2, 4)$; $\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z + 2}{-1}$
6. $S(9, 2, 3)$; $\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 1}{2}$
7. $S(1, -1, 2)$; $\frac{x - 3}{2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 3}{3}$
8. $S(3, -1, -3)$; $\frac{x - 2}{4} = \frac{y + 2}{-2} = \frac{z + 1}{5}$
9. $S(3, 1, 4)$; $\frac{x - 3}{4} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 2}{-3}$
10. $S(-2, 2, 3)$; $\frac{x + 2}{2} = \frac{y - 5}{3} = \frac{z + 2}{-4}$
11. $S(5, -3, 6)$; $\frac{x - 3}{3} = \frac{y + 2}{-4}$ y $z = 4$
12. $S(1, 5, 15)$; $\frac{y + 4}{5} = \frac{z - 3}{12}$ y $x = -3$
13. $S(0, 0, 0)$; $\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z + 3}{-6}$
14. $S(0, 0, 0)$; $\frac{x + 3}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$

* **15.** Sea $\mathcal{L}_1$ una recta en el espacio cuyo vector de dirección es $\mathbf{v}_1$ y que contenga al punto $\mathbf{T}_1$, y sea $\mathcal{L}_2$ una recta **oblicua** (no paralela y que no corte a $\mathcal{L}_1$) a que tenga a $\mathbf{v}_2$ como vector de dirección, y que contenga al punto $\mathbf{T}_2$. Emplee el hecho de que $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ es un vector perpendicular tanto a $\mathcal{L}_1$ como a $\mathcal{L}_2$ para demostrar que la distancia (perpendicular) que separa a $\mathcal{L}_1$ de $\mathcal{L}_2$ es

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \frac{|(\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)|}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|}.$$

En los Ejercicios 16 y 17, emplee el resultado del Ejercicio 15 para calcular la distancia que separa a las rectas con las Ecuaciones simétricas dadas.

* **16.** $\frac{x}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 1}{1}$; $\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z + 1}{-1}$

* **17.** $\frac{x - 1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z - 5}{-1}$; $\frac{x}{2} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 4}{1}$

Resumen del capítulo

1. Una ecuación paramétrica vectorial de la recta $\mathcal{L}$ que contiene a los puntos (distintos) $\mathbf{S}(x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{T}(x_2, y_2, z_2)$, está dada por

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + r(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1);$$

Las ecuaciones paramétricas cartesianas son

$$x = x_1 + r(x_2 - x_1), y = y_1 + r(y_2 - y_1), z = z_1 + r(z_2 - z_1);$$

y si $\mathcal{L}$ no es paralela a un plano cartesiano las ecuaciones simétricas son

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

2. Si $\mathbf{S}$ es un punto de un plano $\mathcal{P}$, y $\mathbf{n}$ es un vector normal a $\mathcal{P}$, entonces un punto $\mathbf{U}$ está sobre $\mathcal{P}$ si y sólo si $(\mathbf{u} - \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} = 0$.
3. La gráfica de la ecuación cartesiana de primer grado $ax + by + cz + d = 0$, donde a, b y c no son los tres cero, es un plano $\mathcal{P}$. El vector $\mathbf{n} = (a, b, c)$ es un vector normal a $\mathcal{P}$. Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ es un vector de dirección de una recta $\mathcal{L}$, entonces $\mathcal{L}$ es paralela a $\mathcal{P}$ si y sólo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, y $\mathcal{L}$ es perpendicular a $\mathcal{P}$ si y sólo si $\mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$. Los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ cuyos vectores normales son $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, respectivamente, son paralelos si y sólo si $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$; Son perpendiculares si y sólo si $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$.
4. Dos planos tales que sus vectores normales no sean paralelos se cortan en una recta. Si $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son los respectivos vectores normales de dos planos que se intersecan en una recta, entonces $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ es un vector de dirección de la recta. La intersección de un plano $\mathcal{P}$ con uno de los planos cartesianos recibe el nombre de **traza** de $\mathcal{P}$ en ese plano cartesiano.
5. Una recta que no sea paralela a un plano lo corta en uno y sólo un punto.
6. La distancia que separa a un punto $\mathbf{S}$ de un plano $\mathcal{P}$ que contiene al punto $\mathbf{T}$ está dada por

$$d(\mathbf{S}, \mathcal{P}) = \frac{|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|},$$

donde $\mathbf{n}$ es un vector normal a $\mathcal{P}$. En forma cartesiana la distancia está dada por

$$d(\mathbf{S}, \mathcal{P}) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

donde las coordenadas de $\mathbf{S}$ son (x_1, y_1, z_1), y una ecuación cartesiana de $\mathcal{P}$ es $ax + by + cz + d = 0$.

7. La **forma normal** de la ecuación de un plano $\mathcal{P}$ con ecuación cartesiana $ax + by + cz + d = 0$ es $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, donde, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ son los cosenos directores de $\mathbf{n} = (a, b, c)$ o de $-\mathbf{n} = (-a, -b, -c)$, y $p = \pm \dfrac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ es la distancia dirigida de $\mathbf{O}$ a $\mathcal{P}$.

8. (Optativo). La distancia que separa a un punto **S** de la recta $\mathcal{L}$ está dada por

$$d(\mathbf{S}, \mathcal{L}) = \frac{\|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|},$$

donde **T** es cualquier punto sobre $\mathcal{L}$ y **v** es un vector de dirección de $\mathcal{L}$.

Ejercicios de repaso del capítulo

1. Obtenga: **(a)** una ecuación paramétrica vectorial, **(b)** una ecuación paramétrica cartesiana, y **(c)** las ecuaciones simétricas de la recta que contiene a los puntos $\mathbf{S}(3, -1, 2)$ y $\mathbf{T}(1, 5, 5)$.

2. Calcule las coordenadas del punto medio del segmento con extremos $\mathbf{S}(5, -3, 7)$ y $\mathbf{T}(3, 5, -3)$.

3. Obtenga una ecuación cartesiana del plano que contiene al punto $\mathbf{S}(3, -1, 5)$ y cuyo vector normal es $\mathbf{n} = (-1, 2, 1)$.

4. Obtenga las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto $\mathbf{S}(-1, 5, 3)$ y que es perpendicular al plano con ecuación cartesiana.

$$x - 2y + z - 3 = 0.$$

5. Obtenga una ecuación paramétrica vectorial de la recta que contiene al origen y que es paralela a la recta de intersección de los planos cuyas ecuaciones cartesianas son $x - 2y + z - 4 = 0$ y $2x + y - z - 3 = 0$.

6. Obtenga las ecuaciones simétricas de la recta de intersección de los planos cuyas ecuaciones cartesianas son $x + y - 2z - 3 = 0$ y $2x - 3y + 2z - 5 = 0$.

7. Encuentre las coordenadas del punto de intersección de la recta con ecuaciones simétricas

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z}{-3}$$

y el plano cuya ecuación cartesiana es $2x - y + z - 4 = 0$.

8. Obtenga una ecuación cartesiana del plano que contiene a $\mathbf{S}(3, 2, -1)$ y que es perpendicular a la recta de intersección de los planos cuyas ecuaciones cartesianas son $x - 2y + z - 3 = 0$ y $x + y + 2 = 0$.

9. Calcule la distancia que separa al punto $\mathbf{S}(1, 2, -1)$ del plano cuya ecuación cartesiana es $3x + 4y - 12z = 3$.

10. Calcule la distancia que separa al origen del plano con ecuación cartesiana $2x - y - 2z - 30 = 0$.

11. (Optativo) Calcule la distancia que separa al punto $\mathbf{S}(2, -1, 1)$ de la recta dada por las ecuaciones simétricas son $x - 2 = y - 2 = z - 1$.

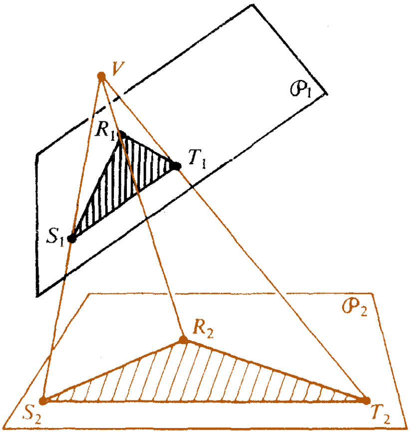
12. (Optativo) Calcule la distancia que separa al origen de la recta cuyas ecuaciones simétricas son $\dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y - 1}{-2} = z + 2$.

Geometría proyectiva

Cuando un artista pinta un paisaje mapea lo que ve, es decir, mapea la imagen que la lente de su ojo enfoca sobre su retina, sobre un lienzo plano. Cuando se ve el resultado, esto es, cuando se forma una imagen del cuadro sobre la retina, se reconoce el paisaje que pintó el artista debido a la invariancia de las propiedades geométricas frente a todas estas transformaciones.

La pintura y la fotografía están basadas en las transformaciones perspectivas. Históricamente la pintura con perspectiva se desarrolló gradualmente, como es fácil ver al pensar en las pinturas de aspecto plano que se ven en los muros de las tumbas egipcias y mayas, y en los bellísimos jarrones griegos. La perspectiva de las imágenes fué investigada a fondo por los grandes artistas como Leonardo da Vinci (1452—1519) y Albrecht Dürer (1471—1528).

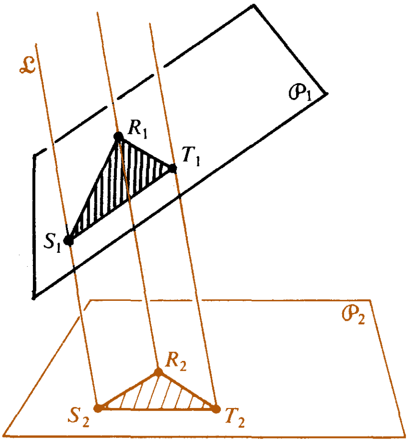
Físicamente una transformación perspectiva plana se puede describir más fácilmente empleando dos planos en lugar de uno solo. Para un punto V en el espacio, que corresponda por ejemplo al ojo del observador, y para dos planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ que no contengan a V considerarse la recta que une a V con cualquier punto S_1 de $\mathcal{P}_1$. El punto S_2 donde esta recta intersecta a $\mathcal{P}_2$ recibe el nombre de *proyección central* de S_1 sobre $\mathcal{P}_2$, con V como centro de proyección, esto se ilustra en la figura anterior. Otro tipo de proyección es la *proyección paralela*, en la cual el mapeo se hace mediante rectas paralelas a una recta dada $\mathcal{L}$, que no sea paralela a $\mathcal{P}_1$ ni a $\mathcal{P}_2$, como se ilustra en la siguiente figura. (página 340)



Proyección central

Cuando se proyecta de esta manera a cada punto de una configuración $\mathcal{C}_1$, tal como el triángulo $S_1T_1R_1$, que está sobre $\mathcal{P}_1$ empleando a V como centro, en proyección paralela a $\mathcal{L}$, en un punto sobre $\mathcal{P}_2$, la configuración resultante $\mathcal{C}_2$ recibe el nombre de proyección central o paralela, respectivamente, de $\mathcal{C}_1$ sobre $\mathcal{P}_2$.

Se puede proyectar ahora $\mathcal{C}_2$ mediante una proyección central o paralela, en una configuración $\mathcal{C}_3$, sobre un plano $\mathcal{P}_3$, obteniéndose un mapeo indirecto de $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_3$, y así sucesivamente.



Proyección paralela

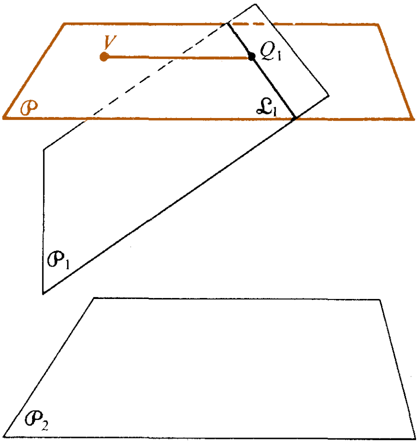
Toda transformación plana que sea o bien una proyección central o una proyección paralela, o que se pueda obtener mediante una sucesión finita de tales transformaciones, recibe el nombre de *transformación proyectiva.* Una sola proyección central o paralela se llama a veces *transformación perspectiva.* La *geometría proyectiva* es el estudio de las propiedades que son invariantes ante transformaciones proyectivas.

Si, en la proyección central mencionada enteriormente, los planos $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ no son paralelos, entonces el plano $\mathcal{P}$ que contiene a V y es paralelo a $\mathcal{P}_2$ interseca a $\mathcal{P}_1$ en una recta $\mathcal{L}_1$, como se muestra en la página 341. Si el punto Q_1 está sobre $\mathcal{L}_1$, entonces la recta VQ_1 es paralela al plano $\mathcal{P}_2$, luego no existe un punto de $\mathcal{P}_2$ sobre el cual se proyecta Q_1.

Análogamente, el plano que contiene a V y es paralelo a $\mathcal{P}_1$ interseca a $\mathcal{P}_2$ en una recta $\mathcal{L}_2$. Si el punto Q_2 está sobre $\mathcal{L}_2$, entonces la recta VQ_2 es paralela al plano $\mathcal{P}_1$, y no existe un punto de $\mathcal{P}_1$ sobre el cual se proyecta Q_2. Por lo tanto en el plano $\mathcal{P}_1$ hay una recta escepcional $\mathcal{L}_1$, y sobre el plano $\mathcal{P}_2$ hay una recta excepcional $\mathcal{L}_2$, cuyos puntos no tienen puntos correspondientes en otro plano.

Puesto que no existe ningún punto sobre $\mathcal{P}_2$ que corresponda al punto Q_1 sobre la recta $\mathcal{L}_1$, parece que ni siquiera la propiedad elemental de ser un punto es invariante bajo transformaciones proyectivas generales. Este defecto se puede eliminar mediante una extensión simple y consistente de los conceptos que se refieren a puntos y rectas. (En geometría, como es bien sabido, un punto y una recta son entes axiomáticos, y no las marcas que se hacen sobre el papel.)

Para un punto Q_1 sobre la recta $\mathcal{L}_1$ en la figura que aparece en la página 341, tómese un punto cercano Q_1' sobre $\mathcal{P}_1$ pero que no este sobre $\mathcal{L}_1$, y en el punto correspondiente Q_2' sobre $\mathcal{P}_2$. Si Q_1' está muy cerca de Q_1, entonces la recta VQ_1' es casi paralela a VQ_1, y Q_2' está en una posición muy lejana sobre la recta VQ_1', en una u otra dirección según Q_1' esté de un lado u otro de la recta $\mathcal{L}_1$ sobre $\mathcal{P}_1$.



Si se piensa en el proceso de límite en el cual Q_1' se acerca arbitrariamente a Q_1, se puede extender los conceptos de punto, recta y plano en el espacio como sigue: Para cada recta $\mathcal{L}$, hay un punto ideal *único en el infinito*, que está sobre todas las rectas paralelas a $\mathcal{L}$ pero sobre ninguna otra recta. Sobre cada plano $\mathcal{P}$ existe una sola recta *ideal en infinito* que contiene a todos los puntos ideales y a todas las rectas ideales, pero que no contiene a otros puntos o rectas.

Con estas extensiones se ve fácilmente, por ejemplo, que existe precisamente una recta que contiene a dos puntos dados del plano (sean o no, estos puntos ideales), que cada par de rectas dadas de un plano (sean ideales o no estas rectas) tienen precisamente un punto en común, y que cada par de planos en el espacio (sean ideales o no estos planos) tienen precisamente una sola recta en común.

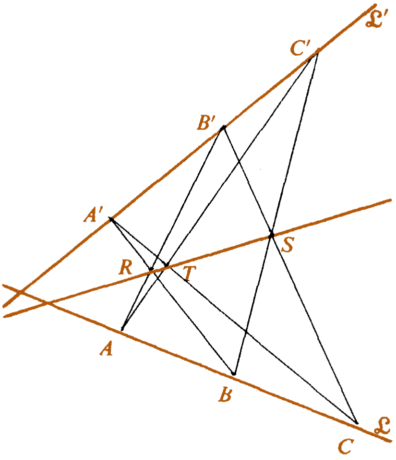
De acuerdo con estas extensiones una transformación proyectiva del plano $\mathcal{P}_1$ en el plano $\mathcal{P}_2$ da origen a una correspondencia biúnivoca entre el conjunto de puntos de $\mathcal{P}_1$ y el conjunto de puntos de $\mathcal{P}_2$. Los puntos se mapean en puntos, las rectas en rectas y el punto de intersección de dos rectas en $\mathcal{P}_1$ se mapea en el punto de intersección de las imágenes de estas rectas en $\mathcal{P}_2$.

Por lo tanto, como se ilustra en las figuras que aparecen en las páginas 339 y 340, la propiedad de ser un triángulo es invariante bajo transformaciones proyectivas, si se supone que cualquiera de los vértices puede resultar ser un punto ideal al infinito. Por otra parte aunque la propiedad de ser un par de triángulos *congruentes* es invariante bajo transformaciones rígidas, esta propiedad no es invariante bajo transformaciones proyectivas.

La geometría proyectiva fue desarrollada por matemáticos franceses durante los siglos XVII y XIX. Se considera generalmente que fue Jean Victor Poncelet (1788—1867) el que inició el desarrollo sistemático de esta disciplina. Durante el invierno de 1813 a 1814 fue prisionero de guerra en Rusia, y sus pensamientos geométricos de esa época fueron publicados en 1822 bajo el título de *"Traité des propiétés projectives des figures" (Tratado sobre las propiedades proyectivas de las figuras).*

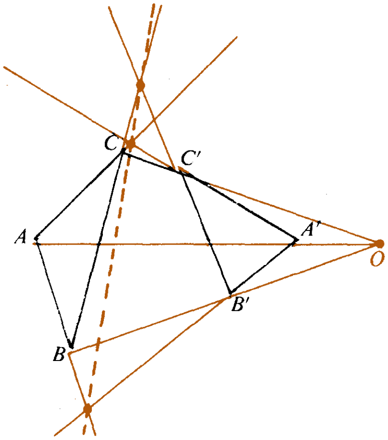
En general, triángulos congruentes no se mapean, en triángulos congruentes bajo transformaciones proyectivas, los teoremas sobre la congruencia de tríangulos no tienen validez en la geometría proyectiva. Pero, para subrayar el contraste, la configuración que requiere el Teorema de Pappus de Alejandría (siglos III y IV A. C.) se mapea en una configuración del mismo tipo, y por lo tanto este teorema si se considera como un teorema de la geometría proyectiva:

> Si los puntos A, B, C y A', B' y C' están sobre las rectas que se cortan $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, respectivamente, y si las rectas AB' y $A'B$ se cortan en el punto R, BC'y $B'C$ en el punto S y, CA' y $C'A$ en el punto T, entonces R, S, y T son colineales.



Por la misma razón el siguiente resultado obtenido por Gérard Desargues (1591—1661) es un teorema de la geometría proyectiva:

> Si en un plano dos triángulos ABC y $A'B'C'$ están situados en forma tal que las rectas que unen a vértices correspondientes son concurrentes en un punto O, entonces las rectas que contienen a los lados correspondientes se intersecan en puntos colineales.



Si la geometría proyectiva se ocupara solamente sobre teoremas relativos a rectas que se cortan y a puntos colineales sería interesante pero no particularmente fructífera. En realidad sus resultados más bellos se refieren a las secciones cónicas.

Considérese la configuración que aparece en la página 166 y que se refiere a las esferas de Dandelin. ¿Resulta claro que la elipse $\mathcal{E}$ que está en el plano $\mathcal{P}$ y la circunferencia $\mathcal{C}_1$ que está en el plano $\mathcal{P}_1$ son proyecciones centrales la una de la otra, con centro de proyección en el vértice V del cono $\mathcal{K}$? Como se verá más adelante en este comentario existen posiciones del plano $\mathcal{P}$ para las cuales la proyección sobre $\mathcal{P}$ de la circunferencia es una parábola o una hipérbola. En general:

> La propiedad de ser una sección cónica es invariante bajo transformaciones proyectivas.

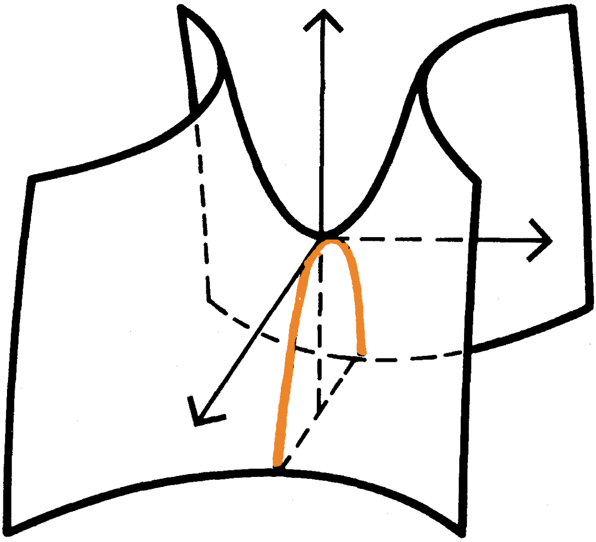
Se recordará que en la página 271, en el comentario sobre transformaciones afines, se menciona que la propiedad de ser una circunferencia o una elipse, la propiedad de ser una parábola, y la propiedad de ser una hipérbola son invariantes bajo transformaciones afines. Las transformaciones afines son en realidad sólo aquellas transformaciones proyectivas para las cuales los puntos ideales en el infinito se mapean en puntos ideales en el infinito.

Uno de los resultados más importantes de la geometría proyectiva, descubierto por el brillante científico Blas Pascal (1623—1662) antes de cumplir los 17 años, es el siguiente teorema:

> Si se inscribe un hexágono en una sección cónica entonces los tres pares de lados opuestos se intersecan en puntos colineales.

Nótese que el Teorema de Pappus (página 342) es un caso particular del teorema de Pascal, en el cual la sección cónica ha degenerado en un par de rectas.

Capítulo 10



En este capítulo se estudiarán superficies tales como el paraboloide hiperbólico, así como sus ecuaciones. Dando por terminado este capítulo con un estudio de las coordenadas cilíndricas y esféricas.

Superficies y Transformaciones de Coordenadas en el Espacio

Superficies

10–1 Esferas

Recuérdese que en geometría se define a la **esfera** como el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que están a una distancia dada (**radio** de la esfera) de un punto dado (**centro** de la esfera). Por lo tanto (Figura 10–1) si el centro es $\mathbf{U}(x, y, z)$ y el radio es r, entonces un punto $\mathbf{C}(x_0, y_0, z_0)$ está sobre la esfera si y sólo si

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{c}\| = r.$$

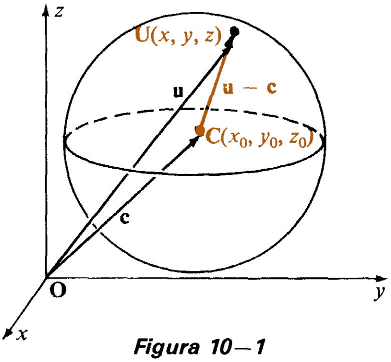


Figura 10–1

Empleando coordenadas cartesianas el punto **U** está sobre la esfera si y sólo si

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r,$$

o en forma equivalente

■
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2. \tag{1}$$

Por consiguiente la Ecuación (1) es una ecuación de la esfera con centro en $\mathbf{C}(x_0, y_0, z_0)$ y radio r.

Ejemplo 1. Obtenga una ecuación de la esfera con centro en $\mathbf{C}(1, -2, 3)$ y radio 4.

Solución: Sustituyendo a x_0, y_0, y z_0, por 1, —2 y 3 respectivamente y a r por 4 en la Ecuación (1) se tiene

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16.$$

Desarrollando los cuadrados en el primer miembro de la Ecuación (1) y ordenando los términos se obtiene

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2) = 0$$

que es la ecuación de la esfera. Esta ecuación es de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0. \qquad (2)$$

Recíprocamente completando cuadrados se puede escribir a una ecuación de la forma (2) como

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k, \qquad (3)$$

donde k es una constante. Si $k > 0$, entonces la Ecuación (3) es una ecuación de una esfera de radio $\sqrt{k}$.. Sin embargo, si $k = 0$ o $k < 0$, entonces la gráfica de la Ecuación (3) es, o bien el punto $\mathbf{C}(x_0, y_0, z_0)$ o el bien $\emptyset$, respectivamente.

Ejemplo 2. Diga cual es la gráfica de cada ecuación.

(a) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 4y - 2z + 10 = 0$
(b) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 4y - 2z + 14 = 0$
(c) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 4y - 2z + 18 = 0$

Solución: Completando cuadrados se obtiene

(a) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = -10 + 9 + 4 + 1 = 4;$
(b) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = -14 + 9 + 4 + 1 = 0;$
(c) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = -18 + 9 + 4 + 1 = -4.$

Los lugares geométricos son:

(a) Una esfera con centro en $\mathbf{C}(-3, -2, 1)$ y radio 2;
(b) el punto $\mathbf{C}(-3, -2, 1)$;
(c) el conjunto vacío $\emptyset$.

Una esfera queda determinada por cuatro puntos no coplanares, por los cuales debe pasar la esfera. Despejando a G, H, I y J de un sistema de ecuaciones lineales, se obtiene una ecuación de la forma (2) correspondiente a una esfera que pasa por los cuatro puntos no coplanares. Se procede entonces tal como se hizo en el Ejemplo 2 para obtener el radio y las coordenadas del centro de la esfera.

Ejemplo 3. Obtenga la ecuación, el radio y las coordenadas del centro de la esfera que pasa por los puntos $\mathbf{Q}(0, 0, 0)$, $\mathbf{R}(0, 0, 2)$, $\mathbf{S}(0, -1, 3)$, y $\mathbf{T}(1, -4, 3)$.

Solución: La esfera tiene una ecuación de la forma (2). Las coordenadas de **Q, R, S** y **T** deben satisfacer esta ecuación y se tiene:

$$0^2 + 0^2 + 0^2 + G(0) + H(0) + I(0) + J = 0$$
$$0^2 + 0^2 + 2^2 + G(0) + H(0) + I(2) + J = 0$$
$$0^2 + (-1)^2 + 3^2 + G(0) + H(-1) + I(3) + J = 0$$
$$1^2 + (-4)^2 + 3^2 + G(1) + H(-4) + I(3) + J = 0$$

o bien

$$\begin{aligned} J &= 0 \\ 2I + J &= -4 \\ -H + 3I + J &= -10 \\ G - 4H + 3I + J &= -26 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, es decir, despejando a G, H, I y J se obtiene $G = -4$, $H = 4$, $I = -2$, $J = 0$. Por lo tanto una ecuación de la esfera es $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z = 0$. Completando cuadrados se obtiene

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9 = 3^2.$$

Por consiguiente el radio es 3 y las coordenadas del centro son $(2, -2, 1)$

Existe un solo plano $\mathcal{P}$, tangente a la esfera $\mathcal{S}$ que pase por un punto **T** dado de $\mathcal{S}$. Se puede emplear el hecho de que el vector **v** que va del centro **C** de $\mathcal{S}$ a **T** es perpendicular a $\mathcal{P}$ (Figura 10–2) para obtener una ecuación de $\mathcal{P}$. Así pues, si las coordenadas de **T** son (x_1, y_1, z_1), y una ecuación de $\mathcal{S}$

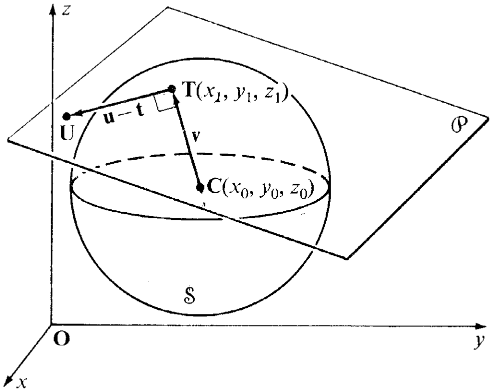


Figura 10–2

es $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, entonces $\mathbf{v} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ es el vector que va del centro a **T**. Puesto que $\mathcal{P}$ contiene a **T** y es perpendicular a **v**, un punto $\mathbf{U}(x, y, z)$ está sobre $\mathcal{P}$ si y sólo si

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{t}) = 0,$$

es decir, si y sólo si

■ $$(x_1 - x_0)(x - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_1) + (z_1 - z_0)(z - z_1) = 0. \quad (4)$$

Entonces la Ecuación (4) es una ecuación del plano tangente $\mathcal{P}$.

Otra forma de la ecuación del plano tangente $\mathcal{P}$ se puede obtener de la siguiente manera. Puesto que **T** está sobre $\mathcal{S}$, se tiene

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = r^2.$$

Sumando miembro a miembro esta ecuación con la Ecuación (4) se obtiene

$$(x_1 - x_0)(x - x_1 + x_1 - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_1 + y_1 - y_0) \\ + (z_1 - z_0)(z - z_1 + z_1 - z_0) = r^2,$$

o bien

■ $$(x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) + (z_1 - z_0)(z - z_0) = r^2. \quad (5)$$

Puesto que los pasos algebraicos son reversibles,la Ecuación (5) es también una ecuación del plano tangente $\mathcal{P}$.

Ejemplo 4. Obtenga una ecuación del plano tangente $\mathcal{P}$ a la esfera $\mathcal{S}$ cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

en el punto **T**(1, −2, 2) de $\mathcal{S}$.

Solución: Obsérvese primero **T** está sobre $\mathcal{S}$ ya que $1^2 + (-2)^2 + 2^2 = 9$. El centro de $\mathcal{S}$ es el origen, de modo que $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. Sustituya a x_0, y_0, y z_0, por cero respectivamente y a x_1, y_1, y z_1, por 1, —2, y 2 respectivamente, así como, a r^2 por 9 entonces la Ecuación (5) queda como

$$x - 2y + 2z = 9$$

que es una ecuación de $\mathcal{P}$.

Ejercicios 10—1

En los Ejercicios 1—8,obtenga una ecuación de la esfera dado su centro **C** y su radio **r**.

1. $C(5, 0, -7)$; $r = 2$
2. $C(-2, 0, 3)$; $r = 4$
3. $C(0, 0, -1)$; $r = 5$
4. $C(-2, 0, 0)$; $r = 3$
5. $C(-1, -2, 2)$; $r = 7$
6. $C(3, -4, -3)$; $r = 6$
7. $C(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{2})$; $r = \frac{1}{4}$
8. $C(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$; $r = \frac{1}{5}$

En los Ejercicios 9—16,diga cual es la gráfica de la ecuación dada por:

9. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 5 = 0$
10. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y - 4z + 8 = 0$
11. $x^2 + y^2 + z^2 + x + 3y = 0$
12. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + z = 0$

13. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 29 = 0$

14. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z + 6 = 0$

15. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z + 7 = 0$

16. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 3y - 2z + 7 = 0$

En los Ejercicios 17—24,obtenga una ecuación , las coordenadas del centro y el radio, de la esfera que pasa por los puntos **Q, R, S** y **T** cuyas coordenadas se dan.

17. $\mathbf{Q}(0, 0, 0)$, $\mathbf{R}(1, 0, 0)$, $\mathbf{S}(0, 1, 0)$, $\mathbf{T}(0, 0, 1)$

18. $\mathbf{Q}(0, 0, 0)$, $\mathbf{R}(1, 1, 0)$, $\mathbf{S}(1, 0, 1)$, $\mathbf{T}(0, 1, 1)$

19. $\mathbf{Q}(1, 1, 1)$, $\mathbf{R}(1, 1, -1)$, $\mathbf{S}(1, -1, 1)$, $\mathbf{T}(-1, 1, 1)$

20. $\mathbf{Q}(1, 1, 1)$, $\mathbf{R}(1, -1, -1)$, $\mathbf{S}(-1, 1, -1)$, $\mathbf{T}(-1, -1, 1)$

21. $\mathbf{Q}(2, 0, 5)$, $\mathbf{R}(0, 0, 1)$, $\mathbf{S}(3, -1, 5)$, $\mathbf{T}(-1, -4, 2)$

22. $\mathbf{Q}(-5, -4, 1)$, $\mathbf{R}(3, 4, -5)$, $\mathbf{S}(0, 0, 4)$, $\mathbf{T}(0, 8, 0)$

23. $\mathbf{Q}(2, 1, -3)$, $\mathbf{R}(1, 2, 0)$, $\mathbf{S}(0, 2, -2)$, $\mathbf{T}(0, 0, 3)$

24. $\mathbf{Q}(5, -3, 7)$, $\mathbf{R}(2, 0, 1)$, $\mathbf{S}(0, -2, 0)$, $\mathbf{T}(-2, 1, 2)$

En los Ejercicios 25—32,obtenga una ecuación del plano $\mathcal{P}$ que es tangente en el punto **T** a la esfera $\mathcal{S}$ con ecuación dada.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$; $\mathbf{T}(6, 2, -3)$

26. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; $\mathbf{T}(-12, 3, 4)$

27. $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 121$; $\mathbf{T}(-5, 4, 2)$

28. $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = 25$; $\mathbf{T}(3, 1, -7)$

29. $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 10$; $\mathbf{T}(-3, -3, 4)$

30. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = 11$; $\mathbf{T}(0, 0, 0)$

31. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 15 = 0$; $\mathbf{T}(3, 0, 2)$

32. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4z + 3 = 0$; $\mathbf{T}(0, -2, 1)$

* **33.** Demuestre que el plano tangente $\mathcal{P}$ a la esfera $\mathcal{S}$ cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

en el punto $\mathbf{T}(x_1, y_1, z_1)$ de $\mathcal{S}$ tiene por ecuación

$$x_1x + y_1y + z_1z + \frac{G}{2}(x + x_1) + \frac{H}{2}(y + y_1) + \frac{I}{2}(z + z_1) + J = 0.$$

* **34.** Demuestre que la esfera que pasa por los puntos no coplanares $\mathbf{Q}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{R}(x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{S}(x_3, y_3, z_3)$, y $\mathbf{T}(x_4, y_4, z_4)$ tiene una ecuación de la forma

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En los Ejercicios 35 y 36, diga cual es la gráfica de la ecuación que se obtiene al sustituir las coordenadas de los puntos dados en la ecuación que aparece en el Ejercicio 34. Si la gráfica es una esfera obtenga su radio y las coordenadas de su centro.

* **35.** **Q**(0, 0, 0), **R**(1, 0, 0), **S**(2, 1, 3), **T**(5, 2, 6)
* **36.** **Q**(0, 0, 0), **R**(0, 1, 0), **S**(4, 0, 2), **T**(−1, 2, 3)

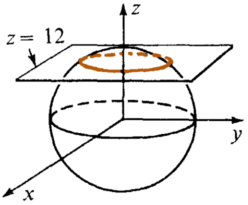
En los Ejercicios 37 y 38, diga si los cinco puntos dados están o no sobre una esfera.

* **37.** **Q**(0, 0, 0), **R**(2, −4, 6), **S**(3, −1, 0), **T**(4, −3, 1), **K**(−2, −1, 5)
* **38.** **Q**(0, 0, 0), **R**(5, 5, 0), **S**(−1, 0, −1), **T**(1, 1, 1), **K**(4, 6, −6)

En los Ejercicios 39—42, diga cual es la intersección de las gráficas de las ecuaciones que se dan.

Ejemplo. $x^2 + y^2 + z^2 - 169 = 0;\ z - 12 = 0$

Solución: Resuélvanse las dos ecuaciones simultaneamente haciendo z igual a 12 en la primera ecuación. Se obtiene $x^2 + y^2 - 25 = 0$. Por lo tanto, la intersección es una circunferencia con centro en **C**(0, 0, 12) y de radio 5, que está en el plano $z = 12$.



* **39.** $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0;\ y - 3 = 0$
* **40.** $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0;\ x^2 + y^2 + (z - 2)^2 - 16 = 0$
* **41.** $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0;\ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - 16 = 0$
* **42.** $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0;\ x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - 9 = 0$

10—2 Cilindros y superficies de revolución

Resultan familiares algunas superficies físicas en el espacio tales como latas y cohetes (Figura 10−3. Tales superficies reciben el nombre de *cilindros*, y se dice que son superficies *cilíndricas*. En geometría analítica un cilindro, o una superficie cilíndrica, se puede definir como sigue: Imagínese un plano $\mathcal{P}$ y una recta $\mathcal{L}$ que no sea paralela a $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{L}$ se mueve en tal forma que un punto **T** de $\mathcal{L}$ recorra una trayectoria $\mathcal{C}$ en $\mathcal{P}$ permaneciendo constante la dirección de $\mathcal{L}$ entocnes $\mathcal{S}$, barre un cilindro como se indica en la Figura 10−4. Se dice que $\mathcal{S}$ es un **cilindro**, o una **superficie cilíndrica**. Se dice que la curva $\mathcal{C}$ en $\mathcal{P}$ es la **directriz** del cilindro; la recta $\mathcal{L}$ y todas las demás rectas que están en la superficie y que son paralelas a $\mathcal{L}$ reciben el nombre de **elementos**, o **generadores**, de la superficie.

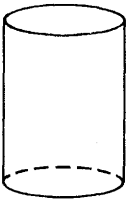
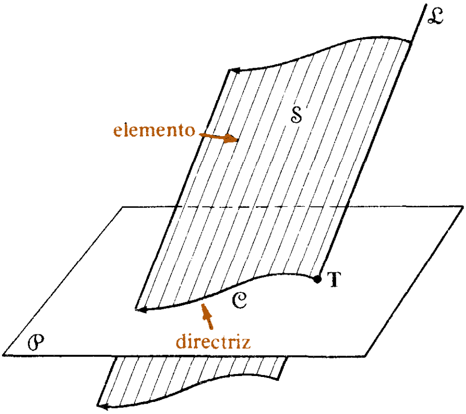


Figura 10—3

Nótese que en geometría analítica se considera que un cilindro se extiende indefinidamente en ambos sentidos de un elemento. La Figura 10–4 muestra solamente una parte de un cilindro.

Figura 10—4



Si para cada punto de una superficie existe una recta que pasa por dicho punto y que está contenida completamente en la superficie, entonces se dice que la superficie es **reglada**, y se dice que las rectas son las **rectas de la superficie**. Por lo tanto un cilindro es una superficie reglada, cuyos elementos son las reglas.

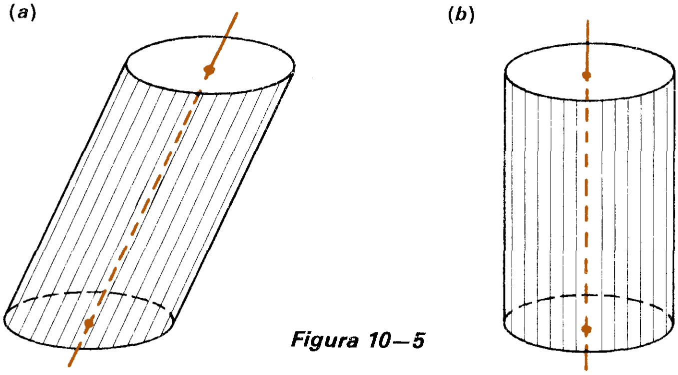


Figura 10—5

Se clasifica a los cilindros según la naturaleza de sus directrices. Por ejemplo si la directriz es una circunferencia, entonces el cilindro es un **cilindro circular** [Figura 10 – 5(a)]. La recta que es paralela a un elemento y contiene al centro de la circunferencia se le llama **eje** del cilindro. Si los elementos de un cilindro circular son perpendiculares al plano de la circunferencia se dice que el cilindro es un **cilindro circular recto** [Figura 10 – 5(b)]. Nótese que se puede considerar que un plano es un cilindro cuya directriz es una recta.

Se puede considerar que una ecuación cartesiana en dos variables es la ecuación de un cilindro cuyos elementos sean paralelos al eje de coordenadas correspondiente a la variable que no aparezca en la ecuación. Por ejemplo $3x^2 + 4y^2 = 12$ es una ecuación de un cilindro elíptico que tiene a una elipse en el plano xy como directriz, y cuyos elementos son paralelos al eje z.

La intersección de cualquier superficie con un plano cartesiano se llama *traza* de la superficie en ese plano cartesiano. Como se vio en la Sección 9—3, y como se ilustra en el Ejemplo 1 siguiente, las trazas resultan frecuentemente útiles al dibujar gráficas de superficies.

Ejemplo 1. Trace un esquema de la parte del cilindro cuya ecuación es $3x^2 + 4y^2 = 12$ que está en el primer octante.

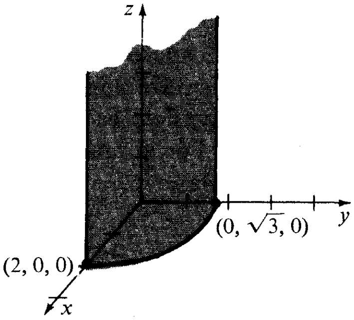
Solución: Como se mencionó anteriormente, puesto que la variable z no aparece en la ecuación, los elementos del cilindro son paralelos al eje z. Se obtiene una ecuación de la traza en el plano xy haciendo $z = 0$ en la ecuación original; en este caso z no aparece en la ecuación original de modo que la ecuación de la traza es simplemente $3x^2 + 4y^2 = 12$.

Para obtener la ecuación de la traza en el plano xz se hace $y = 0$ en la ecuación original obteniéndose

$$3x^2 = 12,$$
$$x^2 = 4,$$
$$x = 2 \quad \text{ó} \quad x = -2.$$

Para obtener una ecuación de la traza en el plano yz se hace $x = 0$ de donde

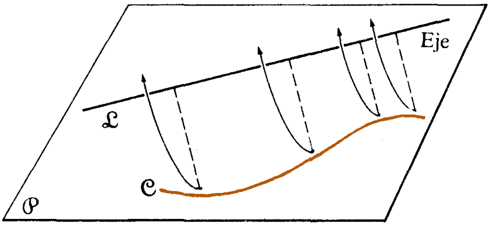
$$4y^2 = 12,$$
$$y^2 = 3,$$
$$y = \sqrt{3} \quad \text{ó} \quad y = -\sqrt{3}.$$



Se trazan ahora esquemas de las trazas que acotan a la gráfica del cilindro en el primer octante, y se indica la superficie como se muestra en la figura anterior.

Otro tipo de superficie que se puede pensar está formada por el movimiento de un conjunto de puntos que es el siguiente: Si se hace girar a una curva plana $\mathcal{C}$ alrededor de una recta $\mathcal{L}$ que está en su plano, de modo que cada punto de la curva describa una circunferencia, entonces la superficie resultante recibe el nombre de **superficie de revolución.** La curva plana $\mathcal{C}$ es la **curva generadora** de la superficie, y la recta alrededor de la cual se hace girar la curva es el **eje de giro** (Figura 10–6).

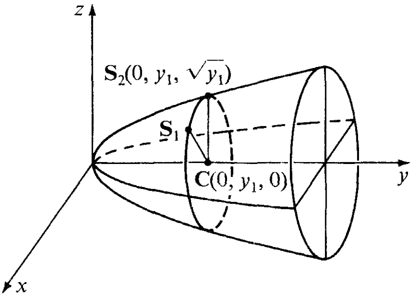
Figura 10—6



En este libro se considerarán solo superficie de revolución que tenga a uno de los ejes de coordenadas como eje de giro. El siguiente ejemplo ilustra como se obtiene una ecuación de dichas superficies.

Ejemplo 2. Obtenga una ecuación de la superficie de revolución generada por la rotación del arco parabólico cuya ecuación es $z = \sqrt{y}$ alrededor del eje y.

Solución: Elíjase cualquier punto $\mathbf{S}_1$ sobre la superficie, como se muestra, y considérese la sección transversal que está en el plano perpendicular al eje y, y que contiene a este punto. Sea $\mathbf{C}$ el centro de esta sección transversal y sea $\mathbf{S}_2$ el punto de la sección que está sobre la curva generadora. Si las coordenadas de $\mathbf{S}_1$ son (x_1, y_1, z_1), entonces las coordenadas de $\mathbf{C}$ son $(0, y_1, 0)$ y la distancia $\overline{\mathbf{CS}_1}$ es $\sqrt{x_1^2 + z_1^2}$. Puesto que $\mathbf{S}_2$ está sobre el arco parabólico de ecuación $z = \sqrt{y}$, las coordenadas de $\mathbf{S}_2$ son $(0, y_1, \sqrt{y_1})$. Por lo tanto, la longitud de $\overline{\mathbf{CS}_2}$ es $\sqrt{y_1}$. Como $\overline{\mathbf{CS}_1}$ y $\overline{\mathbf{CS}_2}$ tienen la misma longitud, por ser segmentos radiales de la misma circunferencia, se tiene



$$\sqrt{y_1} = \sqrt{x_1^2 + z_1^2}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación se obtiene

$$y_1 = x_1^2 + z_1^2.$$

Como $\mathbf{S}_1$ es cualquier punto de la superficie se puede escribir que

$$y = x^2 + z^2 \tag{1}$$

es una ecuación satisfecha por todos los puntos del lugar geométrico. Recíprocamente, como todos los pasos algebraicos son reversibles cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan la Ecuación (1) está sobre el lugar geométrico. Por lo tanto, la Ecuación (1) es una ecuación de la superficie.

Se puede emplear el método descrito en el Ejemplo 2 para obtener una ecuación de cualquier superficie de revolución generada por la rotación de una curva que está en uno de los planos cartesianos alrededor de uno de los ejes de coordenadas. Resumiendo estos resultados de la siguiente manera:

■ Para obtener una ecuación de una superficie de revolución generada por la rotación de una curva dada $\mathcal{C}$ que esté sobre un plano cartesiano alrededor de un eje de coordenadas dado, sustitúyase, en la ecuación de $\mathcal{C}$, si el eje de revolución es:

El eje x:
a y ó z, el que aparezca en la ecuación, por $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$;

El eje y:
a x ó z, el que aparezca en la ecuación, por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$;

El eje z:
a x ó y, el que aparezca en la ecuación, por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejemplo 3. Obtenga una ecuación de la superficie generada por la rotación de la elipse cuya ecuación es $x^2 + 4y^2 = 1$ alrededor del eje x.

Solución: Sustitúyase a y por $x^2 + 4y^2 = 1$, en la ecuación de la curva generadora $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ para obtener

$$x^2 + 4(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 = 1,$$

o bien

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1,$$

que es la ecuación requerida.

Ejercicios 10—2

En los Ejercicios 1—6, trace la parte que esté en el primer octante del cilindro cuya ecuación en $\mathbb{R}^3$ se da.

1. $y^2 + z^2 = 4$
2. $x^2 + z^2 = 16$
3. $y = x^2$
4. $x^2 - z^2 = 4$
5. $4y^2 + 9z^2 = 36$
6. $z = x^2 + 1$

En los Ejercicios 7—14, obtenga una ecuación de la superficie que se obtiene haciendo girar la curva cuya ecuación se da alrededor del eje que se indica.

7. $x^2 + 2y^2 = 1$; el eje x
8. $x^2 + 2y^2 = 1$; el eje y
9. $2x^2 - z^2 = 1$; el eje x
10. $2x^2 - z^2 = 1$; el eje z
11. $y^2 + x - 4 = 0$; el eje x
12. $x^2 - 2y + 3 = 0$; el eje y
13. $x^2 - 4x + y^2 - 21 = 0$; el eje x
14. $x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$; el eje x

15. Obtenga una ecuación de la curva que es intersección de la superficie mencionada en el Ejercicio 3 con el plano que tiene por ecuación $y = 4$.

16. Determine una ecuación de la intersección de la superficie del Ejercicio 4 con el plano cuya ecuación es $z = 3$..

17. Obtenga una ecuación de la intersección de la superficie que se menciona en el Ejercicio 7 con el plano cuya ecuación es $x = 0$.

18. Obtenga una ecuación de la intersección de la superficie que se menciona en el Ejercicio 8 con el plano xz.

10–3 Superficies cuadráticas

En capítulos anteriores se vio que en el plano la gráfica de una ecuación cartesiana en dos variables de primer grado es una recta, y que la gráfica de una ecuación de segundo grado en dos variables es una sección cónica (que puede ser una sección cónica degenerada). En el Capítulo 9 se vio que en el espacio la gráfica de una ecuación cartesiana de primer grado en tres variables es un plano, y que para describir a una recta en el espacio empleando coordenadas cartesianas se usan dos ecuaciones de primer grado cuyas gráficas (planos) tienen a la recta deseada como intersección.

Parece razonable preguntarse cuales son las gráficas en el espacio de una ecuación cartesiana de segundo grado en tres variables

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

donde los coeficientes son constantes reales, y A, B, C, D, E y F no son todos cero. Es de esperarse que la gráfica de una ecuación tal tenga alguna relación con las secciones cónicas. Para ver esto considérese la intersección de un plano $\mathcal{P}$, paralelo a uno de los planos cartesianos, y la gráfica de una ecuación de segundo grado en x, y, y z. Sobre $\mathcal{P}$ una de las variables es constante. Cuando se sustituye a esa variable por el valor de esa constante en la ecuación de segundo grado en x, y, y z, se obtiene una ecuación de a lo sumo, segundo grado en las otras dos variables. Por lo tanto, la intersección es normalmente una cónica.

Por ejemplo, para la intersección de la gráfica de la ecuación

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 3z - 5 = 0$$

con el plano $z = 4$, se tiene

$$x^2 + 2y^2 + 4^2 - 3(4) - 5 = 0,$$
$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0.$$

La intersección es por lo tanto una elipse. (La intersección de $\mathcal{P}$ y la gráfica de una ecuación de segundo grado en x, y y z, puede ser $\mathcal{P}$ mismo. Este es el caso por ejemplo, cuando la ecuación es $x^2 = 0$ y $\mathcal{P}$ es el plano yz.)

Se dice que la gráfica de una ecuación cartesiana de segundo grado en tres variables es una **superficie cuadrática.** En esta sección se estudiarán los tipos generales de superficies cuadráticas. Se darán sus ecuaciones en términos de ejes apropiadamente escogidos y de constantes positivas a, b y c. Los ejes se eligirán para que no haya términos en xy, xz o yz en las ecuaciones (Véase la Sección 10—4.)

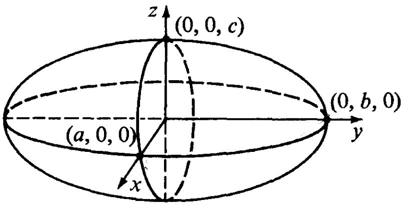
1. **Elipsoide** (Figura 10 – 7):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

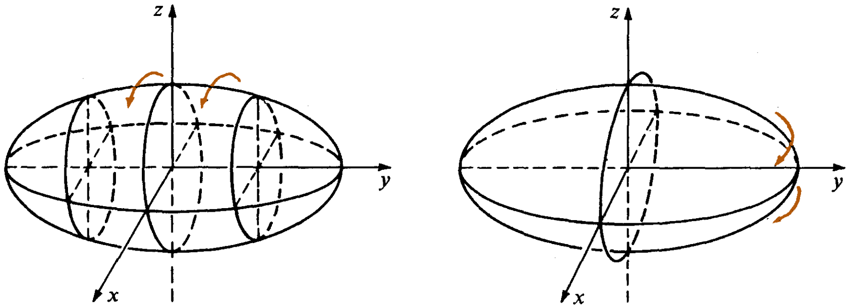
Las intersecciones con los ejes x, y, y z son respectivamente $\pm a$, $\pm b$, y $\pm c$. La intersección (traza) de esta superficie con cada uno de los planos coordenados es una elipse o una circunferencia.

Si dos de los números a, b ó c son iguales, entonces la superficie es un **esferoide**. Si los tres números son iguales entonces la superficie es una esfera.

Figura 10—7



Un esferoide es una superficie de revolución que se obtiene al hacer girar una elipse alrededor de uno de sus ejes. Es un **esferoide prolático**, como una pelota de football americano, si su eje de giro es el eje mayor de la elipse. [Figura 10 – 8 (a)]. Y es un **esferoide oblático**, como una perilla, si el eje de giro es el eje menor de la elipse [Figura 10 – 8 (b)].



(*a*) (*b*)

Figura 10—8

2. **Hiperboloide de una rama.** (Figura 10 – 9):

■

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La superficie tiene secciones transversales en planos paralelos al plano xy que son elipses, o si $a = b$, son circunferencias. Las secciones transversales en planos paralelos a los otros planos cartesianos son hipérbolas. Si $a = b$, se puede pensar que la superficie es generada por la rotación de una hipérbola alrededor de la recta que contiene a su eje conjugado. La expresión "de una rama" se refiere a que la superficie es conexa, o que es de un solo pedazo.

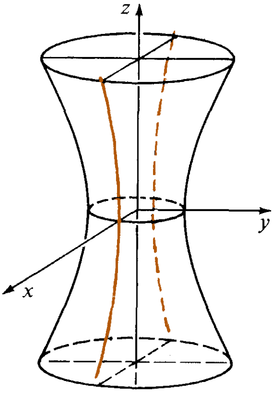


Figura 10—9

Quizás sea sorpresivo el que por cada punto de un hiperboloide de una rama pasan dos rectas que están totalmente contenidas en la superficie (Véase la página 359 y los Ejercicios 19 – 24, páginas 364 – 365.) Como ya se ha mencionado estas rectas son **reglas**, y por lo tanto un hiperboloide de una rama es una superficie **doblemente reglada**.

3. **Hiperboloide de dos ramas** (Figura 10 – 10):

■

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \text{ó} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

La sección transversal de esta superficie en un plano paralelo al plano xy es una elipse, o una circunferencia si $z^2 > c^2$, o un punto si $z^2 = c^2$ y es el conjunto vacío si $z^2 < c^2$. Las secciones transversales en planos paralelos a los otros planos cartesianos son hipérbolas. Si $a = b$, se puede pensar que la superficie se genera haciendo girar a una hipérbola alrededor de su eje principal. Se dice que este hiperboloide es de dos ramas puesto que la superficie consta de dos conjuntos conexos pero que no se conectan el uno con el otro.

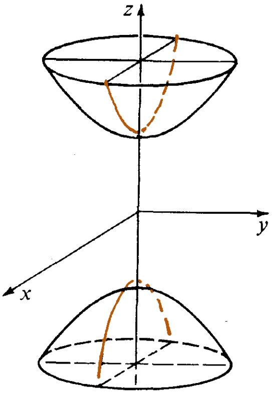


Figura 10—10

4. **Cono elíptico** (Figura 10 – 11):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Esta superficie tiene secciones transversales en planos paralelos, y por encima o debajo de, el plano *xy* que son elipses, o si $a = b$, son circunferencias; en el plano *xy* la elipse o circunferencia se reduce a un punto. Las secciones transversales en planos paralelos, pero no coincidentes, a los otros planos cartesianos son hipérbolas. Para los planos cartesianos, las hipérbolas se reducen a pares de rectas que se intersecan. La recta que une cada punto de un cono elíptico con el origen está totalmente contenida en la superficie del cono y por lo tanto el cono elíptico es una superficie reglada.

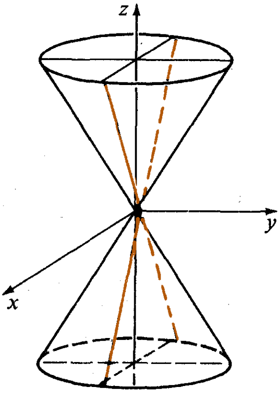


Figura 10—11

Se puede pensar que un cono elíptico es una forma degenerada de un hiperboloide de una o dos ramas. Está relacionado con estos hiperboloides de la misma forma que las asíntotas de una hipérbola están relacionadas con la hipérbola. Se dice que la gráfica de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

es el **cono asintótico** del hiperboloide de una rama

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

y también del hiperboloide de dos ramas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Los elipsoides, hiperboloides de una rama, hiperboloides de dos ramas y los conos elípticos son **superficies cuadráticas centrales**. En las representaciones ordinarias dadas anteriormente las superficies cuadráticas tienen su **centro** en el origen.

5. **Paraboloide elíptico** (Figura 10 – 12:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Para esta superficie una sección transversal en un plano paralelo a, pero encima de, el plano *xy* es una elipse, o, si $a = b$, es una circunferencia. La sección transversal en el plano *xy* es simplemente el origen. Las secciones transversales en planos paralelos a otros dos planos cartesianos son parábolas. Si $a = b$, se puede pensar que la superficie se genera haciendo girar a una parábola alrededor de su eje.

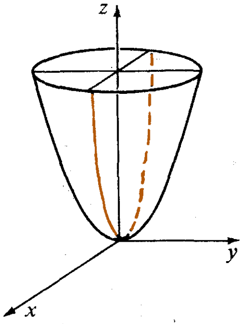
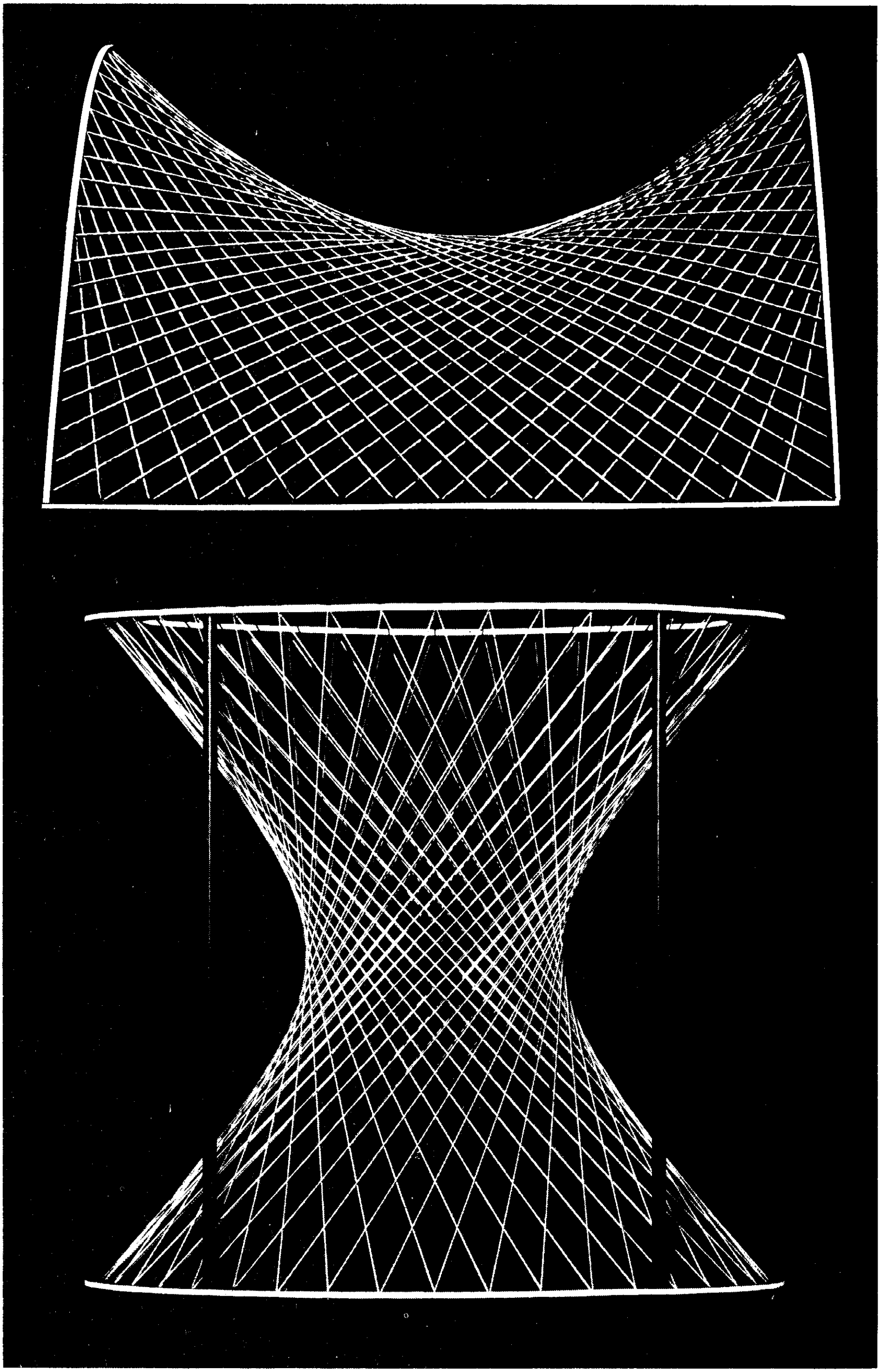


Figura 10—12



Las maquetas de un paraboloide hiperbólico (arriba) y de un hiperboloide de una rama (abajo), que están hechas con hilos, muestran que ambas superficies son superficies doblemente regladas.

6. **Paraboloide hiperbólico** (Figura 10 – 13):

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

A veces se dice que un paraboloide hiperbólico es una superficie en forma de una silla de montar, puesto que en efecto se parece a uno de estos objetos en que las secciones transversales que son parábolas tienen orientaciones opuestas; la sección (traza) sobre el plano yz se abre hacia arriba, y la sección (traza) sobre el plano xy se abre hacia abajo. La traza de esta superficie en el plano xy es un par de rectas que pasan por el origen, pero cualquier otra sección transversal en el plano paralelo al xy es una hipérbola. Si el plano está por encima del plano xy la sección transversal es una hipérbola con eje principal paralelo al eje y. Si el plano está por debajo del plano xy la sección transversal es una hipérbola con eje principal paralelo al eje x.

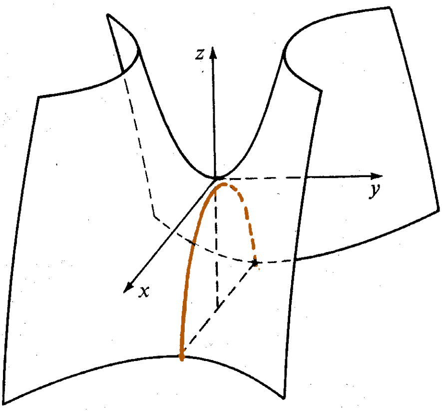


Figura 10—13

Tal como para el hiperboloide de una rama, el paraboloide hiperbólico es una superficie doblemente reglada (véase la página 359 y los Ejercicios 25—28, página 365).

Los paraboloides elípticos y los paraboloides hiperbólicos son **superficies cuadráticas no centrales**. En las representaciones ordinarias dadas anteriormente toda superficie cuadrática no central tiene su **vértice** en el origen.

Claramente en todas las ecuaciones anteriores de superficies cuadráticas se pueden intercambiar a, x, y, y z por sus negativos. Por ejemplo la gráfica de

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es un hiperboloide de dos ramas, y la gráfica de

$$-x = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$$

es un paraboloide elíptico.

Tal como en el caso de las secciones cónicas existen superficies cuadráticas degeneradas. Para la gráfica de

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0, \tag{1}$$

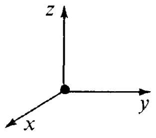
donde A, B y C no son todos cero, existen las siguientes gráficas degeneradas (además del cono elíptico):

1. Ningún punto, si A, B y C tienen todos el mismo signo (uno o dos de esos números pueden ser cero), y J tiene el mismo signo (y es diferente de cero). Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 0$ tiene a $\emptyset$ como gráfica.

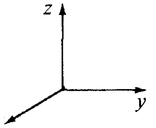
2. Un punto, el origen, si A, B y C tienen todos el mismo signo y $J = 0$. Por ejemplo, la gráfica de

   $$3x^2 + 2y^2 + z^2 = 0$$

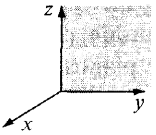
   es el origen.



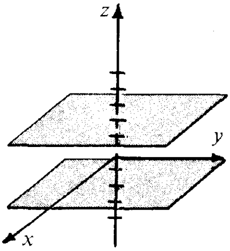
3. Una recta, uno de los ejes de coordenadas, si dos de los números A, B ó C tienen el mismo signo y el otro coeficiente y la constante J son cero. Por ejemplo, la gráfica de $y^2 + z^2 = 0$ es el eje x.



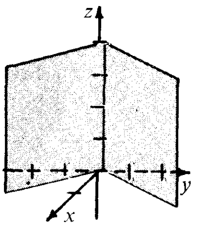
4. Un plano, uno de los planos cartesianos, si dos de los números A, B ó C son cero y la constante J cero. Por ejemplo, la gráfica de $x^2 = 0$ es el plano yz.



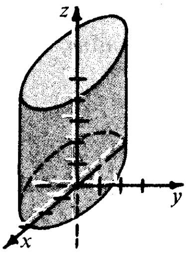
5. Un par de planos paralelos a uno de los planos cartesianos si dos de los números A, B ó C son cero y el otro coeficiente y la constante J tienen signos opuestos. Por ejemplo, la gráfica de $z^2 - 4 = 0$ es el par de planos cuyas ecuaciones son $z = 2$ y $z = -2$.



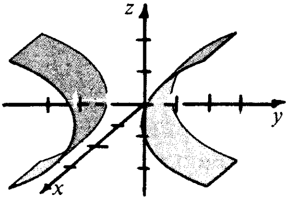
6. Un par de planos que se intersecan en un eje de coordenadas si uno de los números A, B ó C es cero, los otros dos tienen signos opuestos, y $J = 0$. Por ejemplo, la gráfica de $4x^2 - y^2 = 0$ es el par de planos cuyas ecuaciones $2x + y = 0$ y $2x - y = 0$.



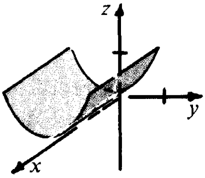
7. Un cilindro elíptico o circular si uno de los números A, B ó C es cero, los otros dos tienen el mismo signo, y J tiene el signo opuesto. Por ejemplo, la gráfica de $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ es un cilindro elíptico con elementos paralelos al eje z.



8. Un cilindro hiperbólico si uno de los números A, B ó C es 0, si los otros dos tienen signos opuestos y $J \neq 0$. Por ejemplo, la gráfica de $y^2 - 2z^2 - 1 = 0$ es un cilindro hiperbólico con elementos paralelos al eje x.



Existe un tipo de superficie cuadrática degenerada que no se puede representar mediante una ecuación de la forma (1), a saber, el cilindro parabólico. Por ejemplo, la gráfica de $z = y^2$ es un cilindro parabólico con elementos paralelos al eje x.



Como se ilustra en el Ejemplo 1 de la página 352, al trazar un esquema de una superficie se pueden emplear las trazas de la superficie en los planos coordenados, y las secciones transversales de la superficie en planos paralelos a los planos coordenados, como base del esquema final.

Ejemplo. Sea $\mathcal{S}$ la superficie con ecuación $4z = x^2 + y^2$.

(a) Diga cual es la gráfica de $\mathcal{S}$.

(b) Obtenga las ecuaciones de las trazas de $\mathcal{S}$ en los planos coordenados e identifique la gráfica de cada traza.

(c) Obtenga las ecuaciones de las secciones transversales de $\mathcal{S}$ en los planos cuyas ecuaciones son $z = 1$ y $z = 4$, e identifique la gráfica de cada sección transversal.

(d) Trace un esquema de la superficie $\mathcal{S}$.

Solución: **(a)** Comparando la ecuación dada con la ecuación ordinaria de las superficies cuadráticas se ve que dado que la ecuación se puede escribir en forma equivalente como

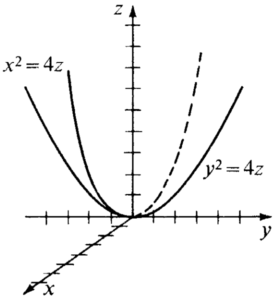
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

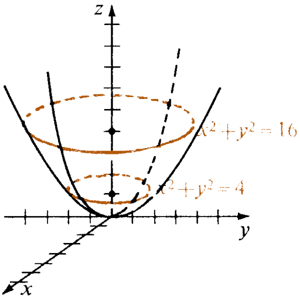
donde $a = b = 2$, la gráfica es un paraboloide elíptico. (Puesto que los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales, es también una superficie de revolución.)

(b) Las ecuaciones y los nombres de las trazas son los siguientes:

en el plano xz, $x^2 = 4z$, una parábola;
en el plano yz, $y^2 = 4z$, una parábola;
en el plano xy, $x^2 + y^2 = 0$, el origen.

En las siguientes figuras se muestran las gráficas de estas trazas.





(c) Las ecuaciones y los nombres de las secciones transversales son los siguientes:

en el plano $z = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, una circunferencia;
en el plano $z = 4$, $x^2 + y^2 = 16$, una circunferencia;

(d) Trazando las gráficas de las secciones transversales se obtiene el esquema que se muestra a la derecha de la figura anterior.

Ejercicios 10—3

En los Ejercicios 1—8:

a. Identifique la gráfica de la ecuación dada.
b. Obtenga las ecuaciones de las trazas (si existen) en los planos coordenados.
c. Obtenga las ecuaciones de las secciones transversales (si existen) en los planos cuyas ecuaciones son $x = 4$, $y = 4$, y $z = 4$.
d. Trace un esquema de la superficie.

1. $9x^2 + 4z^2 = 36y$

2. $4y^2 + 4z^2 - x^2 = 0$

3. $9x^2 - y^2 = 4z$

4. $2y^2 + 4z^2 = x^2$

5. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

6. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$

7. $\frac{-x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$

8. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 0$

En los Ejercicios 9—16,complete los cuadrados en x, y, y z, como se hizo en la Sección 10—1. Identifique la superficie.

9. $x^2 - y^2 - z^2 + 4x - 8y + 2z - 17 = 0$
10. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8 = 0$
11. $2x^2 + y^2 - 4z^2 + 4z - 6y - 2 = 0$
12. $y^2 - x^2 - 4z^2 = 2x + 8z$
13. $x^2 - 4y^2 + 2x - z + 8y - 3 = 0$
14. $x^2 + z^2 + 2x + \frac{3}{2}y + 2z - 3 = 0$
15. $x^2 + z^2 - 4x - y - 5 = 0$
16. $x^2 - z^2 - y^2 - 4x + 4z - 1 = 0$

17. Obtenga una ecuación del lugar geométrico del punto que se mueve de manera que su distancia al punto cuyas coordenadas son $(0, c, 0)$ es igual a su distancia al plano xz. Identifique ese lugar geométrico.

18. Obtenga una ecuación del lugar geométrico del punto que se mueve en forma tal que la suma de sus distancias a los puntos cuyas coordenadas son $(-c, 0, 0)$ y $(c, 0, 0)$ sea una constante positiva k. Identifique ese lugar geométrico.

En los Ejercicios 19—24,esboce una demostración de la afirmación hecha en el texto de que un hiperboloide de una rama es una superficie doblemente reglada.

* **19.** Demuestre que si el punto $\mathrm{U}(x_0, y_0, z_0)$, con $x_0 \neq -a$, está sobre el hiperboloide de una rama

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{1}$$

entonces existe un solo valor real r para el cual

$$\frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} = r\left(1 + \frac{x_0}{a}\right) \quad \text{y} \quad r\left(\frac{y_0}{b} - \frac{z_0}{c}\right) = 1 - \frac{x_0}{a}. \tag{2}$$

[*Sugerencia*: Escriba la Ecuación (1) en la forma

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

Despeje a r en la primera de las Ecuaciones (2) y demuestre que puesto que U está sobre el hiperboloide este valor de r también satisface la segunda de las Ecuaciones (2).]

* **20.** Demuestre que para cada valor fijo del parámetro r, si $\mathrm{U}(x_0, y_0, z_0)$ está sobre la recta de intersección de los planos cuyas ecuaciones son

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = r\left(1 + \frac{x}{a}\right) \quad \text{y} \quad r\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{x}{a}, \tag{3}$$

entonces $\mathbf{U}$ está también sobre el hiperboloide de una rama representado por la Ecuación (1).

* **21.** Demuestre que la recta de intersección de los planos dados por las ecuaciones son

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \qquad \text{y} \qquad 1 + \frac{x}{a} = 0 \tag{4}$$

está sobre el hiperboloide de una rama representado por la Ecuación (1).

*** 22.** Repita el Ejercicio 19 con

$$\frac{y_0}{b} - \frac{z_0}{c} = r\left(1 + \frac{x_0}{a}\right) \qquad \text{y} \qquad r\left(\frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c}\right) = 1 - \frac{x_0}{a}$$

en lugar de las Ecuaciones (2).

*** 23.** Repita el Ejercicio 20 con

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = r\left(1 + \frac{x}{a}\right) \qquad \text{y} \qquad r\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{x}{a}$$

en lugar de las Ecuaciones (3).

*** 24.** Repita el Ejercicio 21 con

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \qquad \text{y} \qquad 1 + \frac{x}{a} = 0$$

en lugar de las Ecuaciones (4).

En los Ejercicios 25—28, esboce una demostración del hecho de que un paraboloide hiperbólico es una superficie doblemente reglada.

*** 25.** Demuestre que si el punto $\mathrm{U}(x_0, y_0, z_0)$ está sobre el paraboloide hipérbolico

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = z, \tag{5}$$

entonces existe un solo número real r para el cual

$$\frac{y_0}{b} + \frac{x_0}{a} = r \qquad \text{y} \qquad r\left(\frac{y_0}{b} - \frac{x_0}{a}\right) = z_0. \tag{6}$$

[*Sugerencia:* Factorice el primer miembro de la Ecuación (5).]

*** 26.** Demuestre que para cada valor fijo del parámetro r, si $\mathrm{U}(x_0, y_0, z_0)$ está sobre la recta de intersección de los planos cuyas ecuaciones son

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = r \qquad \text{y} \qquad r\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right) = z, \tag{7}$$

entonces **U** está también sobre el paraboloide hiperbólico representado por la Ecuación (5) del Ejercicio 25.

*** 27.** Repita el Ejercicio 25 con

$$\frac{y_0}{b} - \frac{x_0}{a} = r \qquad \text{y} \qquad r\left(\frac{y_0}{b} + \frac{x_0}{a}\right) = z_0$$

en lugar de las Ecuaciones (6).

*** 28.** Repita el Ejercicio 26 con

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} = r \qquad \text{y} \qquad r\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right) = z$$

en lugar de las Ecuaciones (7).

Transformaciones de coordenadas. Otros sistemas de coordenadas

10–4 Traslaciones y rotaciones de ejes

En la Sección 10—1 se vió que una ecuación de la forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2, \qquad r > 0, \tag{1}$$

representa una esfera con centro en $\mathbf{C}(x_0, y_0, z_0)$ y radio r. Efectuando las sustituciones

$$\begin{aligned} x' &= x - x_0, \\ y' &= y - y_0, \\ z' &= z - z_0, \end{aligned} \tag{2}$$

se puede escribir la Ecuación (1) en la forma

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2. \tag{3}$$

Las Ecuaciones (2), o sus equivalentes

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0, \\ y &= y' + y_0, \\ z &= z' + z_0, \end{aligned} \tag{4}$$

son las ecuaciones de una *traslación de ejes* (Figura 10–14). Se puede pensar que los ejes x', y' y z' resultan de la traslación de los ejes x, y, y z, manteniendo a estos últimos paralelos a sus orientaciones originales hasta que el origen coincida con el punto cuyas coordenadas originales son (x_0, y_0, z_0). Las Ecuaciones (1) y (3) representan ambas a la esfera que se muestra en la Figura 10–14, pero la Ecuación (3) es más sencilla y representa a la esfera con centro en el origen del sistema de coordenadas $x'y'z'$.

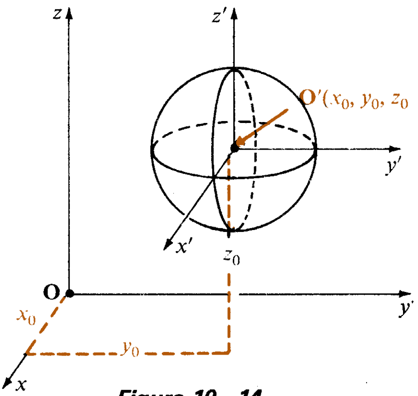


Figura 10–14

Análogamente mediante una traslación de ejes se puede transformar cualquier ecuación de segundo grado en x, y, y z en la cual no aparecen términos en xy, xz o yz es una de las formas más sencillas que se estudiaron en la Sección 10—3.

Ejemplo 1. Transforme, mediante una traslación de ejes, las ecuaciones dadas para que sus gráficas tengan su centro (si la gráfica es un elipsoide o hiperboloide) o su vértice (si la gráfica es un paraboloide) en el origen del nuevo sistema de coordenadas. Identifique la gráfica y obtenga las coordenadas x, y, y z de su centro o vértice.

(a) $36x^2 + 9y^2 - 4z^2 + 18y + 16z - 43 = 0$

(b) $y^2 + 5z^2 - 5x - 6y + 10z - 1 = 0$

Solución: **(a)** Agrupando términos, factorizando constantes, completando cuadrados y simplificando:

$$\begin{aligned} &36x^2 + 9(y^2 + 2y) - 4(z^2 - 4z) = 43, \\ &36x^2 + 9(y^2 + 2y + 1) - 4(z^2 - 4z + 4) = 43 + 9 - 16, \\ &36x^2 + 9(y + 1)^2 - 4(z - 2)^2 = 36. \end{aligned}$$

Ahora haciendo $x' = x$, $y' = y + 1$, $z' = z - 2$, y escribiendo la ecuación en su forma ordinaria:

$$\frac{x'^2}{1^2} + \frac{y'^2}{2^2} - \frac{z'^2}{3^2} = 1.$$

Esta es la ecuación de un hiperboloide de una rama (véase la página 357). Las coordenadas de su centro son $(x', y', z') = (0, 0, 0)$. Por lo tanto, puesto que $x = x'$, $y = y' - 1$, y $z = z' + 2$, las coordenadas xyz del centro son $(0, -1, 2)$.

(b) Agrupando términos, factorizando constantes, completando cuadrados y simplificando:

$$\begin{aligned} &(y^2 - 6y) + 5(z^2 + 2z) = 5x + 1, \\ &(y^2 - 6y + 9) + 5(z^2 + 2z + 1) = 5x + 1 + 9 + 5, \\ &(y - 3)^2 + 5(z + 1)^2 = 5x + 15 = 5(x + 3). \end{aligned}$$

Haciendo $x' = x + 3$, $y' = y - 3$, y $z' = z + 1$, y escribiendo la ecuación en su forma ordinaria.

$$\frac{y'^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{z'^2}{1^2} = x'.$$

Esta es una ecuación de un paraboloide elíptico (véase la página 358). Las coordenadas del vértice son $(x', y', z') = (0, 0, 0)$. En consecuencia, debido a que $x = x' - 3$, $y = y' + 3$, y $z = z' - 1$, las coordenadas xyz del vértice son $(-3, 3, -1)$.

Tal como en el caso de los ejes cartesianos en el plano, es frecuente rotar los ejes cartesianos en el espacio. Este procedimiento se puede emplear, en particular, para simplificar una ecuación de segundo grado en x, y, y z que contenga términos en xy, xz y yz. Se *puede* hacer la rotación de un golpe (Ejercicio 13, página 369), pero también se puede lograr siempre mediante una sucesión de a lo sumo tres rotaciones en los planos cartesianos, procedimiento que ya se ha mencionado.

Ejemplo 2. Identifique la gráfica de la ecuación

$$x^2 - yz - y + 1 = 0.$$

Solución: Para eliminar el término en yz (véase la Sección 5—3) sea

$$y = y' \cos\phi - z' \operatorname{sen}\phi,$$
$$z = y' \operatorname{sen}\phi + z' \cos\phi,$$

y

$$x = x'.$$

Entonces la ecuación dada se puede escribir en forma equivalente

$$x'^2 - (y' \cos\phi - z' \operatorname{sen}\phi)(y' \operatorname{sen}\phi + z' \cos\phi) - (y' \cos\phi - z' \operatorname{sen}\phi) + 1 = 0.$$

El coeficiente B' del término en $y'z'$ está dado por

$$B' = \operatorname{sen}^2\phi - \cos^2\phi;$$

$B' = 0$ si

$$m^\circ(\phi) = 45, \quad \cos\phi = \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$$

Sustituyendo estos valores de sen ϕ y cos ϕ, se obtiene

$$x'^2 - \left(\frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 0,$$

$$x'^2 - \frac{y'^2}{2} + \frac{z'^2}{2} - \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{2}} + 1 = 0.$$

Agrupando términos, factorizando y completando cuadrados se llega

$$x'^2 - \tfrac{1}{2}(y'^2 + \sqrt{2}y' + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(z'^2 + \sqrt{2}z' + \tfrac{1}{2}) + 1 = 0 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4},$$

$$x'^2 - \tfrac{1}{2}\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(z' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 = 0.$$

Se puede simplificar la ecuación aún más mediante una traslación de ejes: Sea $x' = x''$, $y' + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = y''$, y $z' + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = z''$. Haciendo estas sustituciones y escribiendo la ecuación en forma ordinaria, se obtiene

$$\frac{y''^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{z''^2}{(\sqrt{2})^2} - \frac{x''^2}{1^2} = 1.$$

Esta es la ecuación de un hiperboloide de dos ramas (véase la página 357).

Ejercicios 10—4

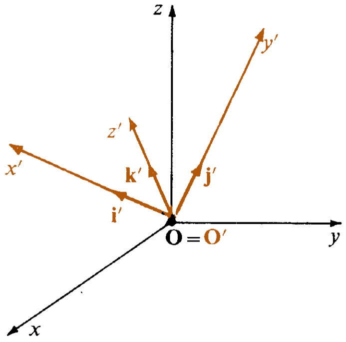
En los Ejercicios 1—8, transforme la ecuación dada mediante una traslación de ejes para que la gráfica de la ecuación tenga su centro o su vértice en el origen del nuevo sistema de coordenadas. Identifique la gráfica y obtenga las coordenadas de su centro o vértice.

1. $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 4x + 18y + 20 = 0$
2. $4x^2 - y^2 + 9z^2 - 2y + 54z + 44 = 0$
3. $2x^2 - 3y^2 - z^2 - 4x - 12y + 4z - 19 = 0$
4. $5x^2 + 4y^2 - 10x + 16y - 4z + 20 = 0$
5. $3x^2 - z^2 + 12x + 3y + 2z + 9 = 0$
6. $2x^2 + y^2 + 6z^2 - 2x - 2y + 18z + 9 = 0$
7. $9x^2 - 4y^2 - 8y - 5z - 14 = 0$
8. $x^2 + y^2 - 3z^3 - 8x + 6y + 12z + 13 = 0$

En los Ejercicios 9—12, emplee una rotación de los ejes, y si es necesario una traslación de ejes, para identificar la gráfica de las ecuaciones dadas.

9. $xy + z^2 - 3z + 1 = 0$
10. $x^2 - yz + 4x - 3 = 0$
11. $\frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + 2xy - 3z^2 + 4 = 0$
* **12.** $xz + y - 4 = 0$

* **13.** Supóngase que se tienen dos sistemas derechos de coordenadas cartesianas en el espacio, un sistema xyz y otro sistema $x'y'z'$ que tienen el mismo origen, como se muestra en el siguiente diagrama. Sean $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, los ángulos de dirección del eje x' (con respecto a los ejes x, y, y z), sean $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, los ángulos de dirección del eje y', y sean $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ los ángulos de dirección del eje z'.



Demuestre que si un punto **S** tiene coordenadas (x, y, z) con respecto al sistema xyz y (x', y', z') con respecto al sistema $x'y'z'$, entonces

$$x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1,$$
$$y' = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2,$$
$$z' = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3.$$

Sugerencia: Sean $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ y $\mathbf{k}'$ los vectores unidad en las direcciones de los rayos positivos de los ejes x', y' y z' respectivamente, y sea $\mathbf{s}$ el vector (x, y, z) con respecto al sistema xyz y (x', y', z') con respecto al sistema $x'y'z'$. Entonces, se tiene, por ejemplo,

$$\begin{aligned} x' = \operatorname{Comp}_{\mathbf{i}'} \mathbf{s} &= \operatorname{Comp}_{\mathbf{i}'} (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}) \\ &= x \operatorname{Comp}_{\mathbf{i}'} \mathbf{i} + y \operatorname{Comp}_{\mathbf{i}'} \mathbf{j} + z \operatorname{Comp}_{\mathbf{i}'} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

* **14.** Demuestre que en la notación del Ejercicio 13, página 369, se tiene

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3, \\ y &= x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3, \\ z &= x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3. \end{aligned}$$

* **15.** Transforme la ecuación

$$10x^2 + 13y^2 + 13z^2 - 4xy - 4xz + 8yz - 36 = 0$$

al sistema de coordenadas $x'y'z'$, donde los cosenos directores de $x'y'z'$ son $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$, $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ respectivamente. Identifique la gráfica.

10–5 Coordenadas cilíndricas y esféricas

Se vio en el Capítulo 7 que en el plano a veces resultan más útiles las coordenadas polares que las coordenadas cartesianas. En el espacio hay también otros sistemas de coordenadas. Uno de estos es el *sistema de coordenadas cilíndricas.*

Para establecer un sistema de coordenadas cilíndricas en el espacio considérese un plano $\mathcal{P}$ y una recta $\mathcal{L}$ perpendicular a $\mathcal{P}$ en el punto **O** de $\mathcal{P}$ (Figura 10 – 15). Empleando a **O** como polo establezcase un sistema de coordenadas polares en $\mathcal{P}$ (como se hizo en el Capítulo 7) y divídase a $\mathcal{L}$ en segmentos numerados con **O** como origen (este segmento es el eje z).

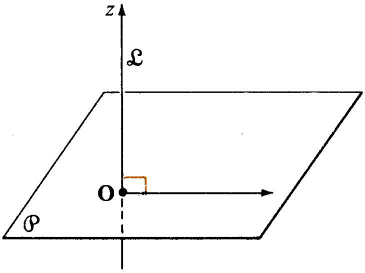


Figura 10—15

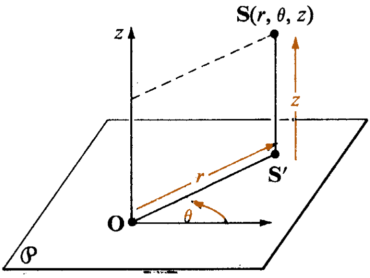


Figura 10—16

De este modo, como se muestra en la Figura 10 – 16, a cualquier punto **S** del espacio se puede asignar una terna ordenada $(r, m(\theta), z)$, o más brevemente (r, θ, z), de números, donde z es la distancia dirigida perpendicular al plano de coordenadas polares que separa al punto **S** de este plano. Las coordenadas

(r, θ, z) son las **coordenadas cilíndricas** de **S**. Debido a que las coordenadas polares de un punto en el plano $\mathcal{P}$ no son únicas, un sistema de coordenadas cilíndricas *no* asigna coordenadas únicas a los puntos del espacio. Se emplea el término "cilíndricas" debido a que para cada constante positiva c la gráfica de $r = c$ es un cilindro recto de radio c y cuyo eje es el eje z (Figura 10 – 17).

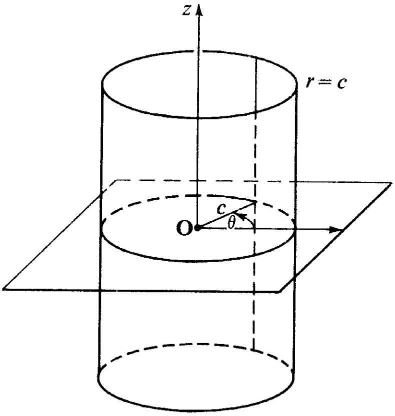


Figura 10–17

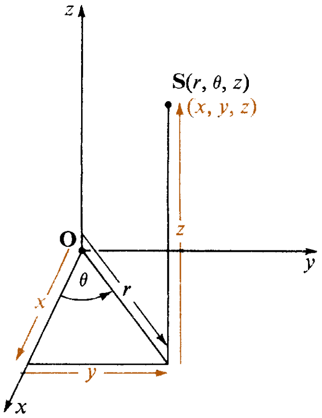


Figura 10–18

Orientando un sistema de coordenadas cilíndricas en forma tal que el eje polar corresponda a la parte positiva del eje x de un sistema de coordenadas cartesianas, el eje z sea el mismo para ambos sistemas, y el segmento $r > 0$, $m°(\theta) = 90$, $z = 0$ corresponda a la parte positiva del eje y (Figura 10 – 18), se puede encontrar una relación entre las coordenadas cartesianas y cilíndricas de cada punto del espacio. (Nótese que el sentido positivo de rotación es el mismo en el plano coordenado polar y en el plano xy.) Como se sugiere en la Figura 10 – 18, para $x^2 + y^2 \neq 0$, se tiene

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}; \ \cos\theta = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}};$$
$$z = z. \tag{1}$$

También, sea o no $r = 0$,

$$x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta, \text{ y } z = z. \tag{2}$$

Ejemplo 1. Obtenga las coordenadas cilíndricas del punto **S** dado por las coordenadas cartesianas $(\sqrt{3}, -1, 3)$.

Solución: De las Ecuaciones (1), empleando $x = \sqrt{3}$, $y = -1$, y $z = 3$, se tiene

$$r = \pm\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

Supóngase que se elige (arbitrariamente) $r = 2$. Entonces

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ y sen } \theta = -\tfrac{1}{2}, \text{ de modo que } m^{R}(\theta) = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,$$

donde el entero k es arbitrario. Supóngase que se elige $k = 0$; puesto que $z = 3$, las coordenadas cilíndricas de **S** son $\left(2, \frac{11\pi}{6}, 3\right)$.

Ejemplo 2. Obtenga una ecuación en coordenadas cilíndricas que tenga la misma gráfica que la ecuación cartesiana

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 0.$$

Solución: Empleando la Ecuación (2) se sustituye a r^2 por $x^2 + y^2$ para obtener

$$r^2 - 4z^2 = 0.$$

Entonces $r = 2z$ o bien $r = -2z$. Puesto que las gráficas de estas dos ecuaciones son idénticas, se puede seleccionar arbitrariamente a $r = 2z$.

Otro sistema de coordenadas en el espacio que resulta útil es el *sistema de coordenadas esféricas.* Del Capítulo 8 se sabe que en el espacio un vector geométrico en posición ordinaria queda determinado por su longitud y sus ángulos de dirección. Por lo tanto se puede ubicar a un punto **S** en el espacio especificando la longitud y los ángulos de dirección del vector que va del origen **O**, en un sistema de coordenadas cartesiano al punto **S**. Sin embargo, puesto que los ángulos de dirección no son independientes (véase la página 283) es más sencillo ubicar a **S** mediante dos ángulos solamente. Esto es lo que se hace, por ejemplo, para ubicar a un punto sobre la superficie de la Tierra mediante su longitud y su latitud.

Considérese la proyección de **S′**, sobre el plano xy, de un punto **S**, como se muestra en la Figura 10–19. Por definición, **S′** es el punto de intersección del plano xy y la recta que pasa por **S** y es perpendicular a ese plano. Las coordenadas polares de **S′** en el plano xy son $(r, m(\theta))$, ó (r, θ), como se indica.

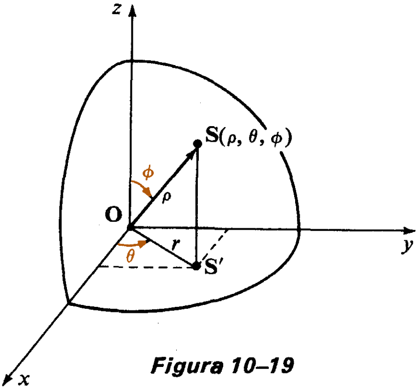


Figura 10–19

Si ρ es la distancia que separa al origen **O** del punto **S** (la longitud del vector $\overrightarrow{OS}$) y ϕ es el ángulo que forma la parte positiva del eje z con el segmento $\overline{OS}$, entonces $(\rho, m(\theta), m(\phi))$, ó (ρ, θ, ϕ), es la terna ordenada asignada a **S**. Se dice que (ρ, θ, ϕ) son las **coordenadas esféricas** de **S**. Se emplea el término "esféricas" porque en un sistema de coordenadas esféricas la gráfica de la ecuación, $\rho = c, c > 0$, es una esfera con centro en el origen y radio c. Tal como en el caso de las coordenadas cilíndricas, las coordenadas esféricas de un punto *no* son únicas. Sin embargo, se puede lograr que las coordenadas esféricas de todos los puntos que no estén sobre el eje z sean únicas restringiendo los valores de ρ, θ, y ϕ. Esto se acostumbra hacer de la siguiente manera:

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Se dice que θ es la **longitud** de **s** y que ϕ es su **colatitud**.

La Figura 10 – 19 sugiere que la relación dada por las Ecuaciones (3), a continuación, existe entre las coordenadas cartesianas y esféricas de un punto. Nótese primero que el ángulo entre $\overrightarrow{\mathbf{OS}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{OS}}'$, en la Figura 10 – 19, es $90 - \phi$, de modo que se tiene $r = \rho \operatorname{sen} \phi$, donde $r \geq 0$ debido a la restricción impuesta sobre ρ y ϕ. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \\ y &= r \operatorname{sen} \theta = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \\ z &= \rho \cos \phi. \end{aligned} \tag{3}$$

También,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

y, si $x^2 + y^2 \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \cos \phi &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \operatorname{sen} \phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Ejemplo 3. Obtenga una ecuación cartesiana que tenga la misma gráfica que la ecuación en coordenadas esféricas

$$\rho = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta.$$

Solución: Empleando las Ecuaciones (4) se tiene, al sustituirlas en la ecuación dada,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Entonces, simplificando, se obtiene que una ecuación cartesiana de la gráfica es

$$x^2 + y^2 + z^2 = ax,$$

o bien
$$x^2 + y^2 + z^2 - ax = 0.$$

Nótese que ésta es una ecuación de la esfera con centro en $\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ y radio $\frac{a}{2}$.

Ejercicios 10—5

En los Ejercicios 1—8, obtenga las coordenadas cilíndricas y esféricas del punto cuyas coordenadas cartesianas se dan.

1. $(1, 1, 1)$

2. $(2, 1, 1)$

3. $(-2, \sqrt{3}, 2)$

4. $(\sqrt{5}, 2, 4)$

5. $(3, 4, 5)$

6. $(3, 3, -4)$

7. $(\sqrt{3}, -2, -1)$

8. $(-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

En los Ejercicios 9—12, obtenga las coordenadas cartesianas del punto dado en coordenadas cilíndricas.

9. $\left(4, \frac{\pi}{2}, 1\right)$

10. $\left(-3, \frac{\pi}{3}, 4\right)$

11. $\left(-3, \frac{\pi}{4}, -5\right)$

12. $\left(2, -\frac{\pi}{2}, 3\right)$

En los Ejercicios 13—16, obtenga las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas esféricas se dan.

13. $\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$

14. $\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

15. $\left(5, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$

16. $\left(3, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right)$

En los Ejercicios 17—20, obtenga una ecuación cartesiana de la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas se da.

17. $r^2 = 4 - z^2$

18. $r = 2$

19. $r = 9 \cos \theta$

20. $r^2 - z^2 = -4$

En los Ejercicios 21—24, obtenga una ecuación de la superficie dada su ecuación en coordenadas esféricas.

21. $\rho = 2$

22. $\rho = 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta$

23. $\rho = 4 \operatorname{sen} \phi$

24. $\rho \cos \phi = 4$

En los Ejercicios 25—36, obtenga una ecuación en (a) coordenadas cilíndricas y (b) coordenadas esféricas, de la superficie dada.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

26. $x^2 + y^2 - 4z^2 = 16$

27. $x^2 + y^2 + 9z^2 = 36$

28. $x^2 + y^2 = 9z$

29. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

30. $y = 3$

31. $x = 4z^2$

32. $y = 2x^2 + z$

33. Una esfera con centro en el origen y radio k.
34. Un cilindro circular recto cuyo eje sea el eje z y de radio k.
35. Un plano paralelo al plano xy y que esté a 4 unidades de distancia por encima de él.
36. Un plano paralelo al plano yz y que interseca al eje x en $x = 4$.

10–6 Inversiones con respecto a circunferencias y esferas

Considérese cualquier circunferencia dada $\mathcal{C}$, cuya ecuación sea

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

en el plano xy, y sea $\mathbf{P}(x, y)$ cualquier punto del plano distinto a $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ (Figura 10 – 20). Entonces el punto $\mathbf{P}'(x', y')$ es el *inverso* de $\mathbf{P}$ con respecto a $\mathcal{C}$ siempre y cuando:

a. $\mathbf{P}'$ esté sobre el segmento, de modo que $\mathbf{P}_0$ sea el punto inicial y que pase por $\mathbf{P}$.

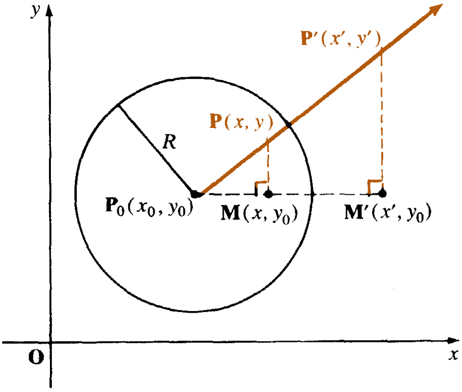


Figura 10-20

b. $d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}) \cdot d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}') = R^2$.

Nótese que de esta definición se sigue que si $\mathbf{P}'$ es el inverso de $\mathbf{P}$ con respecto a $\mathcal{C}$, entonces $\mathbf{P}$ es el inverso de $\mathbf{P}'$ con respecto a $\mathcal{C}$. Nótese también, que de (**b**),se sigue que si $d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}) < R$ entonces $d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}') > R$; es decir, si $\mathbf{P}$ está dentro de $\mathcal{C}$ entonces $\mathbf{P}'$ está fuera de $\mathcal{C}$. Si $\mathbf{P}$ está sobre $\mathcal{C}$, entonces $\mathbf{P}$ es su propio inverso con respecto a $\mathcal{C}$.

De la Figura 10 – 20 se ve que, puesto que $\mathbf{P}_0\mathbf{MP}$ y $\mathbf{P}_0\mathbf{M}'\mathbf{P}'$ son triángulos semejantes,

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}')}{d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P})} \quad \text{y} \quad \frac{y' - y_0}{y - y_0} = \frac{d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}')}{d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P})}.$$

Pero

$$\frac{d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}')}{d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P})} = \frac{d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}) \cdot d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}')}{[d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P})]^2} = \frac{R^2}{r^2},$$

donde

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

así que

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{R^2}{r^2} \quad \text{y} \quad \frac{y' - y_0}{y - y_0} = \frac{\mathrm{R}^2}{r^2},$$

o bien

$$x' = x_0 + \frac{R^2}{r^2}(x - x_0) \quad \text{y} \quad y' = y_0 + \frac{R^2}{r^2}(y - y_0). \tag{1}$$

Ejemplo 1. Obtenga el inverso del punto **P**(3, 7) con respecto a la circunferencia dada por la ecuación $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Solución: Se tiene $(x_0, y_0) = (2, 4)$, $R^2 = 25$, $(x, y) = (3, 7)$ y $r^2 = (3 - 3)^2 + (7 - 4)^2 = 10$. De (1) se obtiene

$$x' = 2 + \frac{25}{10}(3 - 2) = 4.5, \quad y' = 4 + \frac{25}{10}(7 - 4) = 11.5.$$

$\therefore$ el punto inverso es **P′**(4.5, 11.5).

Si **P′** es el inverso de **P** con respecto a $\mathcal{C}$, se puede decir también que **P** se *mapea* en **P′** bajo la *inversión* con respecto a $\mathcal{C}$. Para un conjunto $\mathcal{S}$ de puntos **P** del plano, el mapeo $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ bajo la inversión con respecto a $\mathcal{C}$ es el conjunto de puntos **P′** en los que se mapean los puntos **P** de $\mathcal{S}$ bajo la inversión. Obsérvese que bajo una inversión de cada punto **P** del plano tiene un mapeo único *excepto* el *centro de inversión* $\mathbf{P}_0$. Para que el mapeo del plano en sí mismo sea biunívoco se acostumbra pensar en un solo "punto al infinito" $\mathbf{P}_\infty$, que corresponde a $\mathbf{P}_0$.

Ejemplo 2. Si $\mathcal{C}$ es la circunferencia con ecuación $x^2 + (y - 1)^2 = 2$, $\mathcal{K}$ es la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y **P**(x, y) está sobre $\mathcal{K}$ obtenga el mapeo **P′**(x', y') de **P**(x, y) bajo la inversión con respecto a $\mathcal{C}$.

Solución: Se tiene $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $R^2 = 2$, y, puesto que $x^2 + y^2 = 1$, $r^2 = x^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 = 2(1 - y)$.
Por lo tanto, debido a (1), para todo **P**(x, y) excepto $\mathbf{P}_0(0, 1)$ sobre $\mathcal{K}$,

$$x' = \frac{2x}{2(1 - y)} = \frac{x}{1 - y}, \qquad y' = 1 + \frac{2(y - 1)}{2(1 - y)} = 0.$$

$$\therefore\ \mathbf{P}'(x', y') = \mathbf{P}'\left(\frac{x}{1 - y}, 0\right).$$

El punto $\mathbf{P}_0(0, 1)$ sobre $\mathcal{K}$ se mapea en $\mathbf{P}_\infty$.

Del Ejemplo 2 se tiene que $y' = 0$, mapeando todo $\mathcal{K}$ sobre el eje x'. De la figura 10-21, pensando que **P**(x, y) recorre la circunferencia $\mathcal{K}$, entonces el mapeo de $\mathcal{K}$ sobre el eje x es biunívoco.

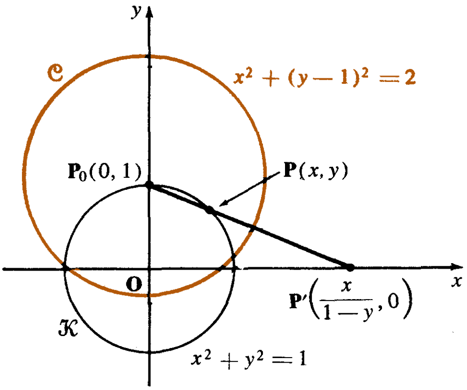


Figura 10-21

La inversión del espacio con respecto a una esfera es análoga a la inversión del plano con relación a una circunferencia para una esfera dada $\mathcal{S}$, por la ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

y para cualquier punto $\mathbf{P}(x, y, z)$ distinto a $\mathbf{P}_0(x_0, y_0, z_0)$, el punto $\mathbf{P}'(x', y', z')$ es el inverso de $\mathbf{P}$ con respecto a $\mathcal{S}$ si se cumplen las condiciones **(a)** y **(b)** mencionadas en la página 375. Véase la Figura 10 - 22.

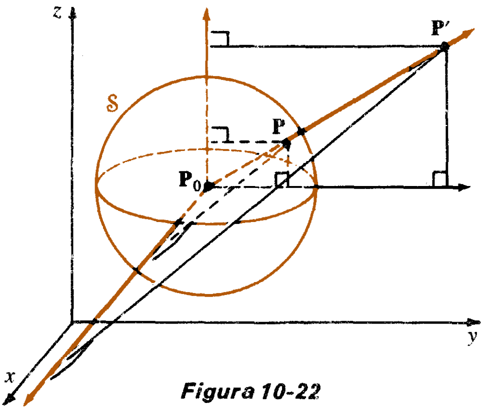


Figura 10-22

Construyendo los segmentos perpendiculares a $\mathbf{P}$ y $\mathbf{P}'$ que pasan por $\mathbf{P}_0$ y que sean paralelos a los ejes de coordenadas, y empleando triángulos semejantes, se ve que

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{y - y_0} = \frac{z' - z_0}{z - z_0} = \frac{d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P}')}{d(\mathbf{P}_0, \mathbf{P})} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{r'^2}{R^2},$$

y entonces

$$x' = x_0 + \frac{R^2}{r^2}(x - x_0), \quad y' = y_0 + \frac{R^2}{r^2}(y - y_0), \quad z' = z_0 + \frac{R^2}{r^2}(z - z_0)$$

donde $$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Ejercicios 10—6

En los Ejercicios 1—8, obtenga el inverso del punto dado con respecto a la circunferencia o esfera cuya ecuación se da.

1. $(3, 0);\ x^2 + y^2 = 1$

2. $(0, 2);\ x^2 + y^2 = 8$

3. $(4, 1);\ (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$

4. $(-3, -2);\ (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

5. $(2, 1);\ (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$

6. $(4, -2);\ x^2 + (y + 5)^2 = 5$

7. $(0, 1, 2);\ x^2 + y^2 + z^2 = 9$

8. $(1, -2, 3);\ x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$

En los Ejercicios 9—12, la primera ecuación representa a una circunferencia o esfera de inversión, y las coordenadas de **P** satisfacen la segunda ecuación. Calcule las coordenadas del punto inverso **P′** en función de las coordenadas de **P**.

9. $x^2 + (y - 1)^2 = 1;\ x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

10. $x^2 + y^2 = 25;\ x + 2y = 4$

11. $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 2;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$

12. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1;\ z = 0$

Resumen del capítulo

1. Una ecuación de la **esfera** con centro en $\mathbf{C}(x_0, y_0, z_0)$ y radio r es
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$
2. Completando cuadrados se puede escribir una ecuación de la forma
$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{1}$$
en la forma $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = k$.
El lugar geométrico es una esfera, un punto o θ según sea $k > 0$, $k = 0$, ó $k < 0$.
3. Se puede obtener una ecuación de la esfera que pasa por cuatro puntos no colineales dados, sustituyendo las coordenadas de dichos puntos en la Ecuación (1) anterior y despejando G, H, I y J en el sistema resultante de cuatro ecuaciones lineales.
4. Para obtener una ecuación de un plano tangente a una esfera dada en un punto dado de la esfera, se toma en cuenta que el plano es perpendicular al vector que va del centro de la esfera al punto de contacto.
5. La superficie que barre una recta $\mathcal{L}$ la cual se mueve en forma tal que un punto **T** de $\mathcal{L}$ traza una curva $\mathcal{C}$ en un plano $\mathcal{P}$ permaneciendo $\mathcal{L}$ siempre paralela a su posición original, recibe el nombre de **cilindro**. Se dice que la curva $\mathcal{C}$ es la **directriz** del cilindro. La recta $\mathcal{L}$ y todas las demás rectas paralelas a $\mathcal{L}$ reciben el nombre de **elementos** o **generadores** de la superficie.
6. Si una curva $\mathcal{C}$ que esté sobre un plano $\mathcal{P}$ se hace girar alrededor de una recta $\mathcal{L}$ en $\mathcal{P}$ de modo que cada punto $\mathcal{C}$ de la curva describa una circunferencia alrededor de $\mathcal{L}$, entonces se dice que la superficie barrida es una **superficie de revolución**. Dado que la curva $\mathcal{C}$ es la **curva generadora,** y que $\mathcal{L}$ es el **eje de giro**.
7. La gráfica en el espacio de una ecuación cartesiana de segundo grado en tres variables es una **superficie cuadrática**.
8. Las superficies cuadráticas centrales son elipsoides (incluyendo esferas y esferoides), hiperboloides de una rama, hiperboloides de dos ramas y conos elípticos. En su representación ordinaria, una superficie tal tiene su centro en el origen.
9. Las superficies cuadráticas no centrales son paraboloides elípticos y paraboloides hiperbólicos. En su representación ordinaria, una superficie cuadrática no central tiene sus vértices en el origen.
10. Los cilindros, hiperboloides de una rama, conos elípticos y paraboloides hiperbólicos son **superficies regladas**.
11. Así como existen secciones cónicas degeneradas, también existen superficies cuadráticas degeneradas. (Véase las páginas 361—362).
12. Las ecuaciones de una traslación de ejes en el espacio son:
$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0.$$
$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0.$$

13. Una rotación de ejes en el espacio se puede llevar a cabo mediante una sucesión de, a lo sumo tres rotaciones en los planos cartesianos.

14. La relación que existe entre las coordenadas cartesianas (x, y, z), si $x^2 + y^2 \neq 0$ y las **coordenadas cilíndricas** está dada por las ecuaciones

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}, \cos\theta = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}, \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}, z = z;$$

y por las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$.

15. La relación que exsiste entre las coordenadas cartesianas (x, y, z) y las **coordenadas esféricas** (ρ, θ, ϕ) está dada por las ecuaciones $x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\phi$; y para $x^2 + y^2 \neq 0$, por las ecuaciones $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \operatorname{sen}\phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Ejercicios de repaso del capítulo

1. Obtenga el centro y el radio de la esfera dado por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y = 0.$$

2. Obtenga el centro y el radio de la esfera que pasa por los puntos **Q**(0, 0, 0), **R**(2, 0, 0), **S**(0, 3, 0), y **T**(0, 0, 4).

3. Obtenga una ecuación del plano que es tangente a la esfera $\mathcal{S}$ cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ en el punto $(0, 0, 2)$ que está sobre $\mathcal{S}$.

4. Trace un esquema de la parte del cilindro con ecuación

$$x^2 + y^2 = 9.$$

que está en el primer octante.

5. Obtenga una ecuación de la superficie que se obtiene al hacer girar a la curva con ecuación $4x^2 + y^2 = 16$ alrededor del eje y.

6. Diga cual es la gráfica de $x^2 + 4y^2 = z$ y trace un esquema de la superficie.

7. ¿Para qué valor de J será un punto la gráfica de $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$?

8. Identifique la gráfica de $x^2 - 2y^2 - z^2 - 2x - 12y - 4z - 24 = 0$ y encuentre las coordenadas de su centro.

9. Identifique la gráfica de $x^2 + 2y^2 + 8y - z + 10 = 0$ y encuentre las coordenadas de su vértice.

10. Identifique la gráfica de $x^2 + yz - 2y - 2 = 0$.

11. Obtenga las coordenadas cilíndricas y esféricas del punto cuyas coordenadas cartesianas son $(1, -1, -1)$.

12. Obtenga una ecuación cartesiana de la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $r^2 + z^2 = 9$.

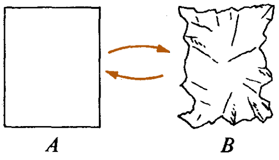
Topología

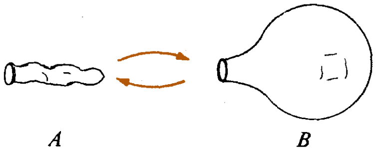
En su primera conferencia como profesor de matemáticas en la Universidad de Erlangen, el matemático alemán Christian Félix Klein (1849—1925) hizo una proposición notable. Si se han leído los comentarios que aparecen al final de los capítulos anteriores de este libro, quizás se aprecie mejor el significado de esta proposición. A saber, sugirió clasificar las diversas ramas de la geometría según los grupos de transformaciones bajo las cuales los varios teoremas acerca de las figuras geométricas siguen siendo válidos.

Esta sugerencia fue la fuerza dominante en los estudios geométricos durante casi cincuenta años, hasta que los problemas de la teoría de la relatividad condujeron a un cambio en el énfasis geométrico hacia la naturaleza misma del espacio. Aún ahora esta sugerencia tiene una gran influencia en el pensamiento geométrico.

En el "programa de Erlangen [o Erlanger, (*adj.*)]" una geometría es un sistema de definiciones y teoremas que permanecen invariantes ante un grupo dado de transformaciones. En los comentarios anteriores de este libro se presentaron varias geometrías. Se vió que la geometría métrica es la geometría de las transformaciones rígidas y que la geometría euclidiana incluye a la geometría métrica, pero se preocupa también en parte de los invariantes bajo transformaciones de semejanza. Se vio además que las transformaciones rígidas y de semejanza son casos especiales de las transformaciones afines de la geometría afin, y que las transformaciones afines a su vez son casos especiales de las transformaciones proyectivas de la geometría proyectiva.

¿Existen transformaciones aún más generales bajo las cuales permanece válido un conjunto importante de definiciones y teoremas? Si se arruga una hoja de papel o se infle un globo se efectúa una transformación del objeto inicial *A* al objeto transformado *B* que es





1. biunívoca

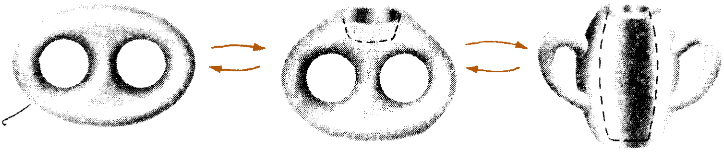
y

2. Continua de *A* a *B*
y de *B* a *A*.

Se dice que tales transformaciones son *transformaciones topológicas*, y la *topología* es la geometría de los invariantes topológicos.

Los objetos *A* y *B* mencionados anteriormente son figuras *topológicamente equivalentes* en el espacio. ¿Es claro que una dona con dos agujeros y la vasija con dos mangos que aparecen a continuación, son topológicamente equivalentes?

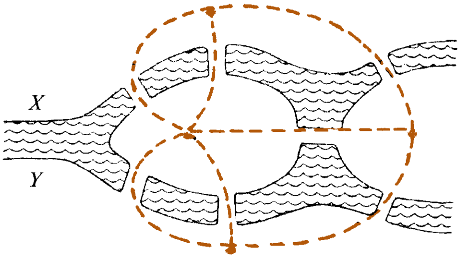
De los ejemplos anteriores se ve porqué a veces se dice que la topología es la "geometría de hule".



Nótese que el romper una hoja de papel no es efectuar una transformación continua puesto que puntos que estén tan cerca como se quiera no se mapean en puntos que estén arbitrariamente cerca el uno del otro. Nótese también que el pegar una hoja de papel de modo que se considere que dos puntos se mapean en uno no es un proceso biunívoco. Por lo tanto el rasgar y el pegar hojas de papel no son transformaciones topológicas.

No se prestó mucha atención a problemas topológicos antes de la mitad del siglo XIX, y en realidad casi todos los avances topológicos han ocurrido en este siglo.

Uno de los primeros problemas topológicos que se estudiaron se refería a los siete puentes que cruzan el rio Pregel en la ciudad de Königsberg en Prusia Occidental. La pregunta es si es posible que un burgés, en una caminata vespertina, puede pasar exactamente una vez sobre cada uno de los siete puentes. Se ve que este es un problema topológico puesto que no se refiere al tamaño o forma de los objetos, sino a su ordenamiento relativo a los demás. El problema podría plantearse de la misma manera si se empleara un plano de la ciudad que estuviera fuertemente deformado.



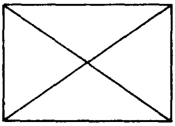
El problema de los puentes fue resuelto por primera vez por el gran y versátil matemático suizo Leonhard Euler (1707—1783) en 1736. Eligiendo un punto que represente a cada uno de los trozos de terreno involucrados, se puede imaginar un paseo sobre cada puente como un segmento curvo que una dos de los puntos. Para una red tal de puntos (*nodos*) y segmentos (*arcos*) se puede decir que un nodo es *par* si está sobre un número par de arcos y que es *impar* si está sobre un número impar de arcos. Debido a que cada arco tiene dos extremos no puede existir un número impar de nodos impares. Euler demostró que:

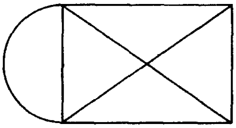
1. Si cada nodo es par, entonces la caminata es posible y se puede realizar empezando y terminando en el mismo punto.
2. Si exactamente dos nodos son impares, entonces la caminata propuesta es posible pero no puede realizarse empezando y terminando en el mismo punto.
3. Si hay más de dos nodos impares la camitana es imposible.

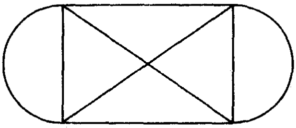
Puesto que los cuatro nodos en el problema de los puentes de Königsberg son impares la caminata es imposible para la configuración dada.

Si existiera un octavo puente, de X a Y en la figura (tal como sucede hoy en día) entonces ¿podría un burgés llevar a cabo la caminata propuesta? Si es así, ¿podría empezar y terminar su paseo en su casa? Se puede obtener la respuesta aplicando los criterios de Euler dados en esta página.

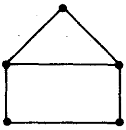
Para cada una de las siguientes figuras, ¿es posible obtener una copia mediante un trazo continuo y que no pase dos veces por el mismo punto? Se pueden aplicar los criterios de Euler para ver que para una de las figuras es posible, empezando y terminando en el mismo punto; para otra es posible, pero no empezando y terminando en el mismo punto; y que para la figura restante es imposible.

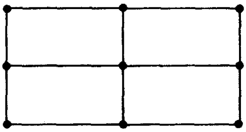


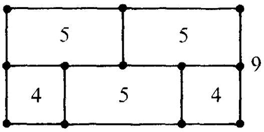




Para cada una de las siguientes mallas ¿es posible trazar una curva continua y que no pase dos veces por el mismo punto, que corte a cada arco (*entre* nodos) exactamente una vez? Para obtener la respuesta se puede construir una malla auxiliar y aplicar a esta los criterios de Euler. No es en realidad necesario construir la malla auxiliar. Basta con contar los arcos que están en la frontera de cada región (incluyendo la región *externa*) y aplicar los criterios par e impar de Euler a estos números. Se muestran como un ejemplo estos números en la tercera malla.

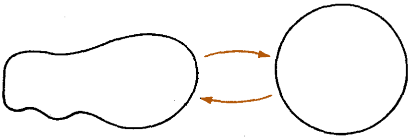




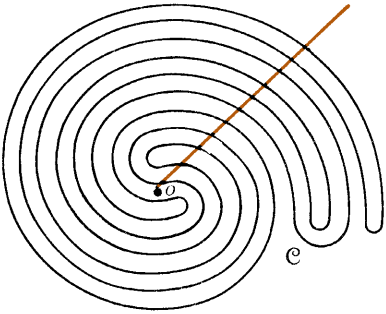


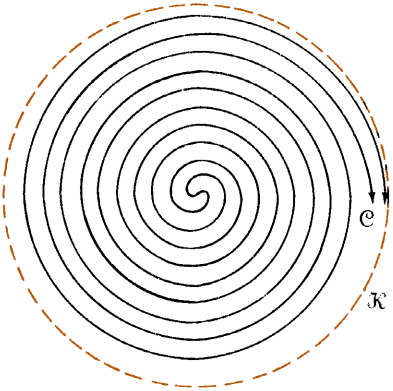
En topología, las demostraciones de hechos "intuitivamente obvios" son a veces sorprendentemente difíciles. En los ejemplos anteriores se han mencionado regiones y sus fronteras. Cada frontera es una curva simple cerrada, es decir, es topológicamente equivalente a una circunferencia. El *Teorema de Jordan sobre curvas* (Camille Jordan, francés, 1838—1922) nos dice que toda curva simple cerrada en el plano lo divide exactamente en tres conjuntos: la curva misma y dos regiones, una dentro de la curva y la otra fuera. La demostración que dio Jordan de su teorema fue larga, difícil y equivocada.

En la figura que aparece a continuación a la izquierda ¿está el punto **O** dentro o fuera de la curva simple cerrada $\mathcal{C}$? Si está dentro, el segmento de color cortará a $\mathcal{C}$ un número impar de veces; de lo contrario está fuera.



Aunque es sorprendente, el plano puede ser dividido en más partes mediante un arco (es decir, mediante un conjunto topológicamente equivalente al conjunto de puntos de la recta cuyas abscisas cumplan la condición $0 < x < 1$) que mediante una curva simple cerrada. En la figura que aparece a la derecha anteriormente el arco abierto $\mathcal{C}$ divide al plano exactamente en

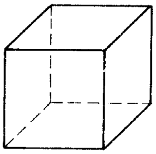




cuatro conjuntos: la curva $\mathcal{C}$, dos regiones dentro de la circunferencia $\mathcal{K}$ a la cual tiene $\mathcal{C}$ y la región que consta de la unión de $\mathcal{K}$ y su exterior.

Otro resultado topológico inicial es la importantísima fórmula que relaciona el número V de vértices, el número E de aristas y el número F de caras de un poliedro simple:

$$V - E + F = 2.$$



Por ejemplo, para el cubo se tiene

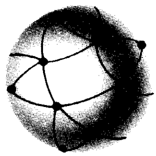
$$V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2.$$

Descartes obtuvo esta fórmula en 1640 y Euler la demostró en 1752. Se conoce con el nombre de *Fórmula de Euler para poliedros*. Este resultado no depende de que las aristas de un poliedro sean rectas o de que las caras estén sobre planos. Es también válido por ejemplo para una malla de puntos conectados sobre la superficie de una esfera. Se puede demostrar empezando con una malla que consista de un sólo punto, o nodo, sobre la esfera. Para este caso se tiene

$$V - E + F = 1 - 0 + 1 = 2,$$

que es lo que se deseaba demostrar. Se puede ahora seguir por inducción hasta llegar a cualquier malla conexa uniendo arcos y nodos nuevos y observando que en cada paso posible tanto $V + F$ como E aumentan de la misma manera.

Tal como se sugiere en la siguiente figura, se puede añadir un asa a la esfera, quitando dos caras de la malla que está sobre la esfera y sustituyéndolas por un asa que tenga tres aristas, tres caras nuevas sin agujeros y ningún vértice nuevo.



Por lo tanto $V - E + F$ disminuye en 2 unidades debido a este proceso, y entonces para una malla conexa sobre una esfera se tiene

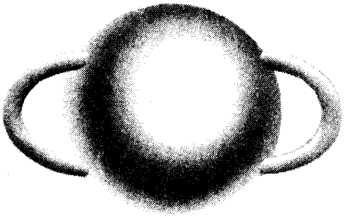
$$V - E + F = 2 - 2 = 0.$$

En general, para una esfera con p asas se tiene

$$V - E + F = 2 - 2p.$$

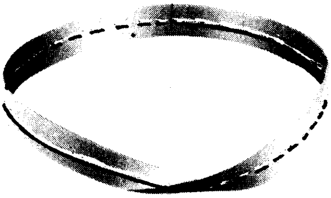
Se dice que p es el *género* de la superficie.

Puesto que las figuras que aparecen en la página **381** son topológicamente equivalentes a una esfera de dos asas, éstas superficies son de género 2.



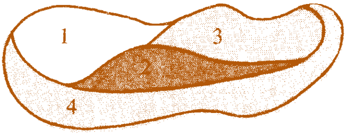
Las superficies que se han considerado hasta ahora son superficies con *dos caras*. Un insecto que se arrastrara por una de las caras jamás se encontraría con otro insecto que estuviera en la otra cara. Los insectos solo podrían encontrarse en uno de los extremos de la superficie en cuestión.

El matemático alemán August Ferdinand Möbius (1790—1868) notó que existen superficies que tienen *una sola* cara, e investigó algunas de sus propiedades. Una superficie tal es la botella de Klein, que se muestra en la siguiente figura a la izquierda, que a veces se emplea como trampa para moscas. A su derecha aparece la entretenida banda de Möbius. Se puede construir una banda de Möbius tomando una tira rectangular de papel y torciéndola media vuelta, pegando los extremos en esa posición. Se pueden hacer experimentos con una banda de Möbius, cortándola a todo lo largo de una recta que sea paralela a su extremo y que esté a la mitad o a la tercera



parte de su ancho. Pueden también efectuarse experimentos con bandas que se hayan construido torciendo más veces una tira.

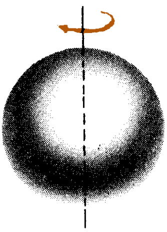
En el mapa imaginario que se muestra a continuación cada uno de los cuatro países tiene una frontera, en forma de arco, en común con cada uno de los otros países. Entonces si se da a las regiones que tienen fronteras comunes colores distintos, se requieren cuatro colores para dibujar este mapa.

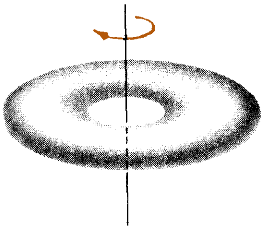


Se puede enunciar muy simplemente el famoso *problema de los cuatro colores*, que nunca ha sido resuelto: obtenga el menor número de colores que serán suficientes para *todos los posibles* mapas en dos dimensiones. Este problema fué planteado por Möbius en 1840. Se sabe ahora que cinco colores bastan, y como se ve en el ejemplo anterior en algunos casos se requieren al menos cuatro colores. Sin embargo no se ha encontrado la solución a este problema todavía.

Se puede considerar que un sólido esférico se mapea topológicamente en sí mismo, si se le gira un ángulo de 30°, por ejemplo, alrededor de un eje polar (véase el diagrama que aparece a la izquierda a continuación). En este mapeo ningún punto fuera del eje polar se mapea en sí mismo. ¿Existe un mapeo topológico de un sólido esférico en sí mismo para el cual *cada* punto se mapee en un punto distinto a sí mismo? La contestación es no. No existen necesariamente *muchos* puntos fijos, como sucede en el ejemplo anterior, pero para cada mapeo topológico de un sólido esférico en sí mismo existe *al menos un* punto que se mapea en sí mismo.

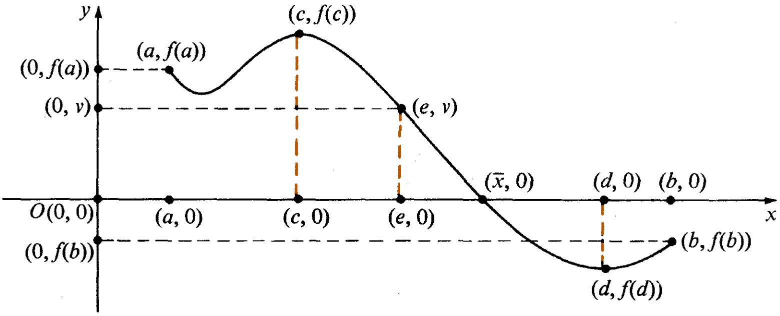
Puesto que toda superficie de dos costados $\mathcal{S}$ de género $p = 0$ acota a un sólido $\mathcal{V}$ que es topológicamente equivalente a un sólido esférico, se sigue que para todo mapeo topológico de $\mathcal{V}$ en sí mismo existe al menos un punto que se mapea en sí mismo.





Se dice que un resultado como el que se ha mencionado es un *teorema de punto fijo*. Como se sugiere en la figura que aparece a la derecha anteriormente no hay un teorema de punto fijo equivalente para mapeos topológicos del sólido toroidal, es decir, del sólido $\mathcal{V}$ acotado por una superficie de dos costados de género $p = 1$, en sí mismo.

Se emplean resultados topológicos en muchas otras ramas de las matemáticas. Supóngase, por ejemplo, que la función f definida por $y = f(x)$, es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$. Se puede entonces demostrar, mediante la topología de conjuntos de puntos, que:



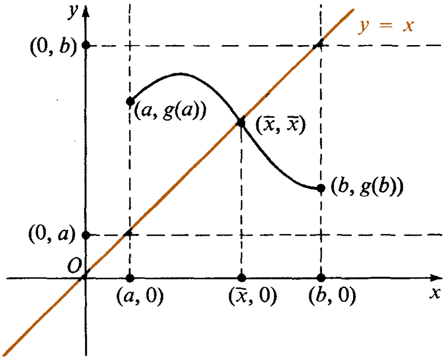
1. Existe al menos un valor c, $a \leq c \leq b$, en el cual $f(x)$ toma un valor máximo, y al menos un valor d, $a \leq d \leq b$, en el cual $f(x)$ toma un valor mínimo.
2. Para todo valor v entre $f(a)$ y $f(b)$, existe al menos un valor e, $a \leq e \leq b$, para el cual $f(e) = v$.

Obsérvese que los resultados mencionados relativos a la función f son *teoremas de existencia*. Los valores precisos de c, d y e no se determinan. Se asegura solamente que *existen* tales valores. Aunque no se den los valores precisos, los resultados son de gran importancia teórica.

En particular el segundo de estos resultados permite afirmar que si $f(a)$ y $f(b)$ tiene signos opuestos entonces:

3. Existe un valor $\bar{x}$ entre a y b para el cual $f(\bar{x}) = 0$.

Este último resultado se puede emplear para demostrar otro interesante teorema de punto fijo. Supóngase que la función g, definida por $y = g(x)$



es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$. Supóngase también que se tiene $a \leq g(x) \leq b$ en este intervalo. Entonces g mapea al intervalo $a \leq x \leq b$ *en sí mismo* (aunque no necesariamente topológicamente, puesto que el mapeo puede no ser biunívoco). El teorema afirma que debe existir algún valor $\bar{x}$, $a \leq \bar{x} \leq b$, que se mapee en sí mismo, es decir, para el cual $g(\bar{x}) = \bar{x}$. Para demostrar esto debe considerarse la función f definida por $f(x) = g(x) - x$. Quizás el lector pueda descubrir los detalles de la demostración.

Antiguamente se llamaba a la topología; *análisis situs* (análisis de los lugares, o de las posiciones). En 1895 el matemático universalista francés Jules Henri Poincaré (1854—1912) escribió un largo trabajo de investigación titulado *"Análisis situs"*, y continuó después escribiendo más trabajos al respecto. Subrayó la importancia topológica fundamental de la fórmula de Euler y el significado básico topológico del trabajo hecho en la segunda mitad del siglo XIX por Möbius, Jordan y Klein, que ya se han mencionado, así como de matemáticos alemanes tales como Carl Friedrich Gauss (1777—1855), Johann Benedict Listing (1808—1882), Georg Friedrich Barnhard Riemann (1826—1866), y Karl Theodor Wilhelm Weiertrass (1815—1897). El trabajo de Poincaré estableció firmemente a la topología como una rama independiente de las matemáticas, y esta rama se ha estudiado sistemáticamente desde el inicio de este siglo.

El matemático estadunidense Oswald Veblen (1880—1960) observó y participó en una gran parte del desarrollo reciente de la geometría. Sus amplios trabajos contribuyeron sustancialmente a los fundamentos de la geometría, a la geometría proyectiva, a la topología, a la geometría diferencial y a la teoría de relatividad sucesivamente. Dio en 1905 la primera demostración válida del teorema de Jordan sobre curvas (página 382). Aún más importante que su investigación personal y sus trabajos didácticos, fue su buen juicio, su dedicación al desarrollo de las matemáticas y su ayuda y comprensión a otros matemáticos.

Oswald Veblen

Tabla 1 Cuadrados y Raices cuadradas

N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$	N	N^2	$\sqrt{N}$	$\sqrt{10N}$
1.0	1.00	1.000	3.162	**5.5**	30.25	2.345	7.416
1.1	1.21	1.049	3.317	**5.6**	31.36	2.366	7.483
1.2	1.44	1.095	3.464	**5.7**	32.49	2.387	7.550
1.3	1.69	1.140	3.606	**5.8**	33.64	2.408	7.616
1.4	1.96	1.183	3.742	**5.9**	34.81	2.429	7.681
1.5	2.25	1.225	3.873	**6.0**	36.00	2.449	7.746
1.6	2.56	1.265	4.000	**6.1**	37.21	2.470	7.810
1.7	2.89	1.304	4.123	**6.2**	38.44	2.490	7.874
1.8	3.24	1.342	4.243	**6.3**	39.69	2.510	7.937
1.9	3.61	1.378	4.359	**6.4**	40.96	2.530	8.000
2.0	4.00	1.414	4.472	**6.5**	42.25	2.550	8.062
2.1	4.41	1.449	4.583	**6.6**	43.56	2.569	8.124
2.2	4.84	1.483	4.690	**6.7**	44.89	2.588	8.185
2.3	5.29	1.517	4.796	**6.8**	46.24	2.608	8.246
2.4	5.76	1.549	4.899	**6.9**	47.61	2.627	8.307
2.5	6.25	1.581	5.000	**7.0**	49.00	2.646	8.367
2.6	6.76	1.612	5.099	**7.1**	50.41	2.665	8.426
2.7	7.29	1.643	5.196	**7.2**	51.84	2.683	8.485
2.8	7.84	1.673	5.292	**7.3**	53.29	2.702	8.544
2.9	8.41	1.703	5.385	**7.4**	54.76	2.720	8.602
3.0	9.00	1.732	5.477	**7.5**	56.25	2.739	8.660
3.1	9.61	1.761	5.568	**7.6**	57.76	2.757	8.718
3.2	10.24	1.789	5.657	**7.7**	59.29	2.775	8.775
3.3	10.89	1.817	5.745	**7.8**	60.84	2.793	8.832
3.4	11.56	1.844	5.831	**7.9**	62.41	2.811	8.888
3.5	12.25	1.871	5.916	**8.0**	64.00	2.828	8.944
3.6	12.96	1.897	6.000	**8.1**	65.61	2.846	9.000
3.7	13.69	1.924	6.083	**8.2**	67.24	2.864	9.055
3.8	14.44	1.949	6.164	**8.3**	68.89	2.881	9.110
3.9	15.21	1.975	6.245	**8.4**	70.56	2.898	9.165
4.0	16.00	2.000	6.325	**8.5**	72.25	2.915	9.220
4.1	16.81	2.025	6.403	**8.6**	73.96	2.933	9.274
4.2	17.64	2.049	6.481	**8.7**	75.69	2.950	9.327
4.3	18.49	2.074	6.557	**8.8**	77.44	2.966	9.381
4.4	19.36	2.098	6.633	**8.9**	79.21	2.983	9.434
4.5	20.25	2.121	6.708	**9.0**	81.00	3.000	9.487
4.6	21.16	2.145	6.782	**9.1**	82.81	3.017	9.539
4.7	22.09	2.168	6.856	**9.2**	84.64	3.033	9.592
4.8	23.04	2.191	6.928	**9.3**	86.49	3.050	9.644
4.9	24.01	2.214	7.000	**9.4**	88.36	3.066	9.695
5.0	25.00	2.236	7.071	**9.5**	90.25	3.082	9.747
5.1	26.01	2.258	7.141	**9.6**	92.16	3.098	9.798
5.2	27.04	2.280	7.211	**9.7**	94.09	3.114	9.849
5.3	28.09	2.302	7.280	**9.8**	96.04	3.130	9.899
5.4	29.16	2.324	7.348	**9.9**	98.01	3.146	9.950
5.5	30.25	2.345	7.416	**10**	100.00	3.162	10.000

Tabla 2 Valores de las funciones trigonométricas

Angulo	*Sen*	*Cos*	*Tan*	*Cot*	*Sec*	*Csc*	
0° 00′	.0000	1.0000	.0000	- - - -	1.000	- - - -	**90° 00′**
10′	.0029	1.0000	.0029	343.8	1.000	343.8	**50′**
20′	.0058	1.0000	.0058	171.9	1.000	171.9	**40′**
30′	.0087	1.0000	.0087	114.6	1.000	114.6	**30′**
40′	.0116	.9999	.0116	85.94	1.000	85.95	**20′**
50′	.0145	.9999	.0145	68.75	1.000	68.76	**10′**
1° 00′	.0175	.9998	.0175	57.29	1.000	57.30	**89° 00′**
10′	.0204	.9998	.0204	49.10	1.000	49.11	**50′**
20′	.0233	.9997	.0233	42.96	1.000	42.98	**40′**
30′	.0262	.9997	.0262	38.19	1.000	38.20	**30′**
40′	.0291	.9996	.0291	34.37	1.000	34.38	**20′**
50′	.0320	.9995	.0320	31.24	1.001	31.26	**10′**
2° 00′	.0349	.9994	.0349	28.64	1.001	28.65	**88° 00′**
10′	.0378	.9993	.0378	26.43	1.001	26.45	**50′**
20′	.0407	.9992	.0407	24.54	1.001	24.56	**40′**
30′	.0436	.9990	.0437	22.90	1.001	22.93	**30′**
40′	.0465	.9989	.0466	21.47	1.001	21.49	**20′**
50′	.0494	.9988	.0495	20.21	1.001	20.23	**10′**
3° 00′	.0523	.9986	.0524	19.08	1.001	19.11	**87° 00′**
10′	.0552	.9985	.0553	18.07	1.002	18.10	**50′**
20′	.0581	.9983	.0582	17.17	1.002	17.20	**40′**
30′	.0610	.9981	.0612	16.35	1.002	16.38	**30′**
40′	.0640	.9980	.0641	15.60	1.002	15.64	**20′**
50′	.0669	.9978	.0670	14.92	1.002	14.96	**10′**
4° 00′	.0698	.9976	.0699	14.30	1.002	14.34	**86° 00′**
10′	.0727	.9974	.0729	13.73	1.003	13.76	**50′**
20′	.0756	.9971	.0758	13.20	1.003	13.23	**40′**
30′	.0785	.9969	.0787	12.71	1.003	12.75	**30′**
40′	.0814	.9967	.0816	12.25	1.003	12.29	**20′**
50′	.0843	.9964	.0846	11.83	1.004	11.87	**10′**
5° 00′	.0872	.9962	.0875	11.43	1.004	11.47	**85° 00′**
10′	.0901	.9959	.0904	11.06	1.004	11.10	**50′**
20′	.0929	.9957	.0934	10.71	1.004	10.76	**40′**
30′	.0958	.9954	.0963	10.39	1.005	10.43	**30′**
40′	.0987	.9951	.0992	10.08	1.005	10.13	**20′**
50′	.1016	.9948	.1022	9.788	1.005	9.839	**10′**
6° 00′	.1045	.9945	.1051	9.514	1.006	9.567	**84° 00′**
10′	.1074	.9942	.1080	9.255	1.006	9.309	**50′**
20′	.1103	.9939	.1110	9.010	1.006	9.065	**40′**
30′	.1132	.9936	.1139	8.777	1.006	8.834	**30′**
40′	.1161	.9932	.1169	8.556	1.007	8.614	**20′**
50′	.1190	.9929	.1198	8.345	1.007	8.405	**10′**
7° 00′	.1219	.9925	.1228	8.144	1.008	8.206	**83° 00′**
10′	.1248	.9922	.1257	7.953	1.008	8.016	**50′**
20′	.1276	.9918	.1287	7.770	1.008	7.834	**40′**
30′	.1305	.9914	.1317	7.596	1.009	7.661	**30′**
40′	.1334	.9911	.1346	7.429	1.009	7.496	**20′**
50′	.1363	.9907	.1376	7.269	1.009	7.337	**10′**
8° 00′	.1392	.9903	.1405	7.115	1.010	7.185	**82° 00′**
10′	.1421	.9899	.1435	6.968	1.010	7.040	**50′**
20′	.1449	.9894	.1465	6.827	1.011	6.900	**40′**
30′	.1478	.9890	.1495	6.691	1.011	6.765	**30′**
40′	.1507	.9886	.1524	6.561	1.012	6.636	**20′**
50′	.1536	.9881	.1554	6.435	1.012	6.512	**10′**
9° 00′	.1564	.9877	.1584	6.314	1.012	6.392	**81° 00′**
	Cos	*Sen*	*Cot*	*Tan*	*Csc*	*Sec*	*Angulo*

Tabla 2 Valores de las funciones trigonométricas

Angulo	Sen	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc	
9° 00′	.1564	.9877	.1584	6.314	1.012	6.392	**81° 00′**
10′	.1593	.9872	.1614	6.197	1.013	6.277	**50′**
20′	.1622	.9868	.1644	6.084	1.013	6.166	**40′**
30′	.1650	.9863	.1673	5.976	1.014	6.059	**30′**
40′	.1679	.9858	.1703	5.871	1.014	5.955	**20′**
50′	.1708	.9853	.1733	5.769	1.015	5.855	**10′**
10° 00′	.1736	.9848	.1763	5.671	1.015	5.759	**80° 00′**
10′	.1765	.9843	.1793	5.576	1.016	5.665	**50′**
20′	.1794	.9838	.1823	5.485	1.016	5.575	**40′**
30′	.1822	.9833	.1853	5.396	1.017	5.487	**30′**
40′	.1851	.9827	.1883	5.309	1.018	5.403	**20′**
50′	.1880	.9822	.1914	5.226	1.018	5.320	**10′**
11° 00′	.1908	.9816	.1944	5.145	1.019	5.241	**79° 00′**
10′	.1937	.9811	.1974	5.066	1.019	5.164	**50′**
20′	.1965	.9805	.2004	4.989	1.020	5.089	**40′**
30′	.1994	.9799	.2035	4.915	1.020	5.016	**30′**
40′	.2022	.9793	.2065	4.843	1.021	4.945	**20′**
50′	.2051	.9787	.2095	4.773	1.022	4.876	**10′**
12° 00′	.2079	.9781	.2126	4.705	1.022	4.810	**78° 00′**
10′	.2108	.9775	.2156	4.638	1.023	4.745	**50′**
20′	.2136	.9769	.2186	4.574	1.024	4.682	**40′**
30′	.2164	.9763	.2217	4.511	1.024	4.620	**30′**
40′	.2193	.9757	.2247	4.449	1.025	4.560	**20′**
50′	.2221	.9750	.2278	4.390	1.026	4.502	**10′**
13° 00′	.2250	.9744	.2309	4.331	1.026	4.445	**77° 00′**
10′	.2278	.9737	.2339	4.275	1.027	4.390	**50′**
20′	.2306	.9730	.2370	4.219	1.028	4.336	**40′**
30′	.2334	.9724	.2401	4.165	1.028	4.284	**30′**
40′	.2363	.9717	.2432	4.113	1.029	4.232	**20′**
50′	.2391	.9710	.2462	4.061	1.030	4.182	**10′**
14° 00′	.2419	.9703	.2493	4.011	1.031	4.134	**76° 00′**
10′	.2447	.9696	.2524	3.962	1.031	4.086	**50′**
20′	.2476	.9689	.2555	3.914	1.032	4.039	**40′**
30′	.2504	.9681	.2586	3.867	1.033	3.994	**30′**
40′	.2532	.9674	.2617	3.821	1.034	3.950	**20′**
50′	.2560	.9667	.2648	3.776	1.034	3.906	**10′**
15° 00′	.2588	.9659	.2679	3.732	1.035	3.864	**75° 00′**
10′	.2616	.9652	.2711	3.689	1.036	3.822	**50′**
20′	.2644	.9644	.2742	3.647	1.037	3.782	**40′**
30′	.2672	.9636	.2773	3.606	1.038	3.742	**30′**
40′	.2700	.9628	.2805	3.566	1.039	3.703	**20′**
50′	.2728	.9621	.2836	3.526	1.039	3.665	**10′**
16° 00′	.2756	.9613	.2867	3.487	1.040	3.628	**74° 00′**
10′	.2784	.9605	.2899	3.450	1.041	3.592	**50′**
20′	.2812	.9596	.2931	3.412	1.042	3.556	**40′**
30′	.2840	.9588	.2962	3.376	1.043	3.521	**30′**
40′	.2868	.9580	.2994	3.340	1.044	3.487	**20′**
50′	.2896	.9572	.3026	3.305	1.045	3.453	**10′**
17° 00′	.2924	.9563	.3057	3.271	1.046	3.420	**73° 00′**
10′	.2952	.9555	.3089	3.237	1.047	3.388	**50′**
20′	.2979	.9546	.3121	3.204	1.048	3.356	**40′**
30′	.3007	.9537	.3153	3.172	1.049	3.326	**30′**
40′	.3035	.9528	.3185	3.140	1.049	3.295	**20′**
50′	.3062	.9520	.3217	3.108	1.050	3.265	**10′**
18° 00′	.3090	.9511	.3249	3.078	1.051	3.236	**72° 00′**
	Cos	Sen	Cot	Tan	Csc	Sec	Angulo

Tabla 2 Valores de las funciones trigonométricas

Angulo	*Sen*	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc	
18° 00′	.3090	.9511	.3249	3.078	1.051	3.236	**72° 00′**
10′	.3118	.9502	.3281	3.047	1.052	3.207	**50′**
20′	.3145	.9492	.3314	3.018	1.053	3.179	**40′**
30′	.3173	.9483	.3346	2.989	1.054	3.152	**30′**
40′	.3201	.9474	.3378	2.960	1.056	3.124	**20′**
50′	.3228	.9465	.3411	2.932	1.057	3.098	**10′**
19° 00′	.3256	.9455	.3443	2.904	1.058	3.072	**71° 00′**
10′	.3283	.9446	.3476	2.877	1.059	3.046	**50′**
20′	.3311	.9436	.3508	2.850	1.060	3.021	**40′**
30′	.3338	.9426	.3541	2.824	1.061	2.996	**30′**
40′	.3365	.9417	.3574	2.798	1.062	2.971	**20′**
50′	.3393	.9407	.3607	2.773	1.063	2.947	**10′**
20° 00′	.3420	.9397	.3640	2.747	1.064	2.924	**70° 00′**
10′	.3448	.9387	.3673	2.723	1.065	2.901	**50′**
20′	.3475	.9377	.3706	2.699	1.066	2.878	**40′**
30′	.3502	.9367	.3739	2.675	1.068	2.855	**30′**
40′	.3529	.9356	.3772	2.651	1.069	2.833	**20′**
50′	.3557	.9346	.3805	2.628	1.070	2.812	**10′**
21° 00′	.3584	.9336	.3839	2.605	1.071	2.790	**69° 00′**
10′	.3611	.9325	.3872	2.583	1.072	2.769	**50′**
20′	.3638	.9315	.3906	2.560	1.074	2.749	**40′**
30′	.3665	.9304	.3939	2.539	1.075	2.729	**30′**
40′	.3692	.9293	.3973	2.517	1.076	2.709	**20′**
50′	.3719	.9283	.4006	2.496	1.077	2.689	**10′**
22° 00′	.3746	.9272	.4040	2.475	1.079	2.669	**68° 00′**
10′	.3773	.9261	.4074	2.455	1.080	2.650	**50′**
20′	.3800	.9250	.4108	2.434	1.081	2.632	**40′**
30′	.3827	.9239	.4142	2.414	1.082	2.613	**30′**
40′	.3854	.9228	.4176	2.394	1.084	2.595	**20′**
50′	.3881	.9216	.4210	2.375	1.085	2.577	**10′**
23° 00′	.3907	.9205	.4245	2.356	1.086	2.559	**67° 00′**
10′	.3934	.9194	.4279	2.337	1.088	2.542	**50′**
20′	.3961	.9182	.4314	2.318	1.089	.2525	**40′**
30′	.3987	.9171	.4348	2.300	1.090	.2508	**30′**
40′	.4014	.9159	.4383	2.282	1.092	.2491	**20′**
50′	.4041	.9147	.4417	2.264	1.093	.2475	**10′**
24° 00′	.4067	.9135	.4452	2.246	1.095	2.459	**66° 00′**
10′	.4094	.9124	.4487	2.229	1.096	2.443	**50′**
20′	.4120	.9112	.4522	2.211	1.097	2.427	**40′**
30′	.4147	.9100	.4557	2.194	1.099	2.411	**30′**
40′	.4173	.9088	.4592	2.177	1.100	2.396	**20′**
50′	.4200	.9075	.4628	2.161	1.102	2.381	**10′**
25° 00′	.4226	.9063	.4663	2.145	1.103	2.366	**65° 00′**
10′	.4253	.9051	.4699	2.128	1.105	2.352	**50′**
20′	.4279	.9038	.4734	2.112	1.106	2.337	**40′**
30′	.4305	.9026	.4770	2.097	1.108	2.323	**30′**
40′	.4331	.9013	.4806	2.081	1.109	2.309	**20′**
50′	.4358	.9001	.4841	2.066	1.111	2.295	**10′**
26° 00′	.4384	.8988	.4877	2.050	1.113	2.281	**64° 00′**
10′	.4410	.8975	.4913	2.035	1.114	2.268	**50′**
20′	.4436	.8962	.4950	2.020	1.116	2.254	**40′**
30′	.4462	.8949	.4986	2.006	1.117	2.241	**30′**
40′	.4488	.8936	.5022	1.991	1.119	2.228	**20′**
50′	.4514	.8923	.5059	1.977	1.121	2.215	**10′**
27° 00′	.4540	.8910	.5095	1.963	1.122	2.203	**63° 00′**
	Cos	*Sen*	Cot	Tan	Csc	Sec	*Angulo*

Tabla 2 Valores de las funciones trigonométricas

Angulo	*Sen*	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc	
27° 00'	.4540	.8910	.5095	1.963	1.122	2.203	**63° 00'**
10'	.4566	.8897	.5132	1.949	1.124	2.190	**50'**
20'	.4592	.8884	.5169	1.935	1.126	2.178	**40'**
30'	.4617	.8870	.5206	1.921	1.127	2.166	**30'**
40'	.4643	.8857	.5243	1.907	1.129	2.154	**20'**
50'	.4669	.8843	.5280	1.894	1.131	2.142	**10'**
28° 00'	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	**62° 00'**
10'	.4720	.8816	.5354	1.868	1.134	2.118	**50'**
20'	.4746	.8802	.5392	1.855	1.136	2.107	**40'**
30'	.4772	.8788	.5430	1.842	1.138	2.096	**30'**
40'	.4797	.8774	.5467	1.829	1.140	2.085	**20'**
50'	.4823	.8760	.5505	1.816	1.142	2.074	**10'**
29° 00'	.4848	.8746	.5543	1.804	1.143	2.063	**61° 00'**
10'	.4874	.8732	.5581	1.792	1.145	2.052	**50'**
20'	.4899	.8718	.5619	1.780	1.147	2.041	**40'**
30'	.4924	.8704	.5658	1.767	1.149	2.031	**30'**
40'	.4950	.8689	.5696	1.756	1.151	2.020	**20'**
50'	.4975	.8675	.5735	1.744	1.153	2.010	**10'**
30° 00'	.5000	.8660	.5774	1.732	1.155	2.000	**60° 00'**
10'	.5025	.8646	.5812	1.720	1.157	1.990	**50'**
20'	.5050	.8631	.5851	1.709	1.159	1.980	**40'**
30'	.5075	.8616	.5890	1.698	1.161	1.970	**30'**
40'	.5100	.8601	.5930	1.686	1.163	1.961	**20'**
50'	.5125	.8587	.5969	1.675	1.165	1.951	**10'**
31° 00'	.5150	.8572	.6009	1.664	1.167	1.942	**59° 00'**
10'	.5175	.8557	.6048	1.653	1.169	1.932	**50'**
20'	.5200	.8542	.6088	1.643	1.171	1.923	**40'**
30'	.5225	.8526	.6128	1.632	1.173	1.914	**30'**
40'	.5250	.8511	.6168	1.621	1.175	1.905	**20'**
50'	.5275	.8496	.6208	1.611	1.177	1.896	**10'**
32° 00'	.5299	.8480	.6249	1.600	1.179	1.887	**58° 00'**
10'	.5324	.8465	.6289	1.590	1.181	1.878	**50'**
20'	.5348	.8450	.6330	1.580	1.184	1.870	**40'**
30'	.5373	.8434	.6371	1.570	1.186	1.861	**30'**
40'	.5398	.8418	.6412	1.560	1.188	1.853	**20'**
50'	.5422	.8403	.6453	1.550	1.190	1.844	**10'**
33° 00'	.5446	.8387	.6494	1.540	1.192	1.836	**57° 00'**
10'	.5471	.8371	.6536	1.530	1.195	1.828	**50'**
20'	.5495	.8355	.6577	1.520	1.197	1.820	**40'**
30'	.5519	.8339	.6619	1.511	1.199	1.812	**30'**
40'	.5544	.8323	.6661	1.501	1.202	1.804	**20'**
50'	.5568	.8307	.6703	1.492	1.204	1.796	**10'**
34° 00'	.5592	.8290	.6745	1.483	1.206	1.788	**56° 00'**
10'	.5616	.8274	.6787	1.473	1.209	1.781	**50'**
20'	.5640	.8258	.6830	1.464	1.211	1.773	**40'**
30'	.5664	.8241	.6873	1.455	1.213	1.766	**30'**
40'	.5688	.8225	.6916	1.446	1.216	1.758	**20'**
50'	.5712	.8208	.6959	1.437	1.218	1.751	**10'**
35° 00'	.5736	.8192	.7002	1.428	1.221	1.743	**55° 00'**
10'	.5760	.8175	.7046	1.419	1.223	1.736	**50'**
20'	.5783	.8158	.7089	1.411	1.226	1.729	**40'**
30'	.5807	.8141	.7133	1.402	1.228	1.722	**30'**
40'	.5831	.8124	.7177	1.393	1.231	1.715	**20'**
50'	.5854	.8107	.7221	1.385	1.233	1.708	**10'**
36° 00'	.5878	.8090	.7265	1.376	1.236	1.701	**54° 00'**
	Cos	*Sen*	Cot	Tan	Csc	Sec	*Angulo*

Tabla 2 Valores de las funciones trigonométricas

Angulo	*Sen*	Cos	Tan	Cot	Sec	Csc	
36° 00′	.5878	.8090	.7265	1.376	1.236	1.701	**54° 00′**
10′	.5901	.8073	.7310	1.368	1.239	1.695	**50′**
20′	.5925	.8056	.7355	1.360	1.241	1.688	**40′**
30′	.5948	.8039	.7400	1.351	1.244	1.681	**30′**
40′	.5972	.8021	.7445	1.343	1.247	1.675	**20′**
50′	.5995	.8004	.7490	1.335	1.249	1.668	**10′**
37° 00′	.6018	.7986	.7536	1.327	1.252	1.662	**53° 00′**
10′	.6041	.7969	.7581	1.319	1.255	1.655	**50′**
20′	.6065	.7951	.7627	1.311	1.258	1.649	**40′**
30′	.6088	.7934	.7673	1.303	1.260	1.643	**30′**
40′	.6111	.7916	.7720	1.295	1.263	1.636	**20′**
50′	.6134	.7898	.7766	1.288	1.266	1.630	**10′**
38° 00′	.6157	.7880	.7813	1.280	1.269	1.624	**52° 00′**
10′	.6180	.7862	.7860	1.272	1.272	1.618	**50′**
20′	.6202	.7844	.7907	1.265	1.275	1.612	**40′**
30′	.6225	.7826	.7954	1.257	1.278	1.606	**30′**
40′	.6248	.7808	.8002	1.250	1.281	1.601	**20′**
50′	.6271	.7790	.8050	1.242	1.284	1.595	**10′**
39° 00′	.6293	.7771	.8098	1.235	1.287	1.589	**51° 00′**
10′	.6316	.7753	.8146	1.228	1.290	1.583	**50′**
20′	.6338	.7735	.8195	1.220	1.293	1.578	**40′**
30′	.6361	.7716	.8243	1.213	1.296	1.572	**30′**
40′	.6383	.7698	.8292	1.206	1.299	1.567	**20′**
50′	.6406	.7679	.8342	1.199	1.302	1.561	**10′**
40° 00′	.6428	.7660	.8391	1.192	1.305	1.556	**50° 00′**
10′	.6450	.7642	.8441	1.185	1.309	1.550	**50′**
20′	.6472	.7623	.8491	1.178	1.312	1.545	**40′**
30′	.6494	.7604	.8541	1.171	1.315	1.540	**30′**
40′	.6517	.7585	.8591	1.164	1.318	1.535	**20′**
50′	.6539	.7566	.8642	1.157	1.322	1.529	**10′**
41° 00′	.6561	.7547	.8693	1.150	1.325	1.524	**49° 00′**
10′	.6583	.7528	.8744	1.144	1.328	1.519	**50′**
20′	.6604	.7509	.8796	1.137	1.332	1.514	**40′**
30′	.6626	.7490	.8847	1.130	1.335	1.509	**30′**
40′	.6648	.7470	.8899	1.124	1.339	1.504	**20′**
50′	.6670	.7451	.8952	1.117	1.342	1.499	**10′**
42° 00′	.6691	.7431	.9004	1.111	1.346	1.494	**48° 00′**
10′	.6713	.7412	.9057	1.104	1.349	1.490	**50′**
20′	.6734	.7392	.9110	1.098	1.353	1.485	**40′**
30′	.6756	.7373	.9163	1.091	1.356	1.480	**30′**
40′	.6777	.7353	.9217	1.085	1.360	1.476	**20′**
50′	.6799	.7333	.9271	1.079	1.364	1.471	**10′**
43° 00′	.6820	.7314	.9325	1.072	1.367	1.466	**47° 00′**
10′	.6841	.7294	.9380	1.066	1.371	1.462	**50′**
20′	.6862	.7274	.9435	1.060	1.375	1.457	**40′**
30′	.6884	.7254	.9490	1.054	1.379	1.453	**30′**
40′	.6905	.7234	.9545	1.048	1.382	1.448	**20′**
50′	.6926	.7214	.9601	1.042	1.386	1.444	**10′**
44° 00′	.6947	.7193	.9657	1.036	1.390	1.440	**46° 00′**
10′	.6967	.7173	.9713	1.030	1.394	1.435	**50′**
20′	.6988	.7153	.9770	1.024	1.398	1.431	**40′**
30′	.7009	.7133	.9827	1.018	1.402	1.427	**30′**
40′	.7030	.7112	.9884	1.012	1.406	1.423	**20′**
50′	.7050	.7092	.9942	1.006	1.410	1.418	**10′**
45° 00′	.7071	.7071	1.000	1.000	1.414	1.414	**45° 00′**
	Cos	*Sen*	Cot	Tan	Csc	Sec	*Angulo*

Propiedades de los números reales

En la siguiente lista a, b y c representan números reales

Propiedades de igualdad

Reflexiva	Para todo número real a, $a = a$.
Simétrica	Si $a = b$, entonces $b = a$.
Transitiva	Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Propiedades de orden

Axioma de comparación	Una y sólo una de las siguientes afirmaciones es válida: $a < b, a = b, a > b.$
Propiedad transitiva	Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Propiedades de la adición y de la multiplicación

	Adición	*Multiplicación*
Cerradura	$a + b$ es un número real único	ab es un número real único
Conmutatividad	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Asociatividad	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Identidad	0 es el único número real que satisface $0 + a = a$ y $a + 0 = a$.	1 es el único número real que satisface $1(a) = a$ y $a(1) = a$.
Inversos	Para cada número real a, existe un sólo número real $-a$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$	Para cada número real $a \neq 0$, existe un sólo número real $\frac{1}{a}$ tal que $a\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}(a) = 1.$
Distributividad	$a(b + c) = ab + ac$ y $(b + c)a = ba + ca$	

Sustitución	Si cambia el símbolo mediante el cual se identifica a un número real en una expresión matemática no cambia el significado de la expresión.
Complemento	Todo subconjunto no vacío del conjunto $\mathcal{R}$ de números reales que tiene una cota superior en $\mathcal{R}$ tiene una cota superior mínima en $\mathcal{R}$.

Identidades Trigonométricas

Para toda x y y para las cuales ambos miembros de las igualdades están definidos se tiene:

1. $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

2. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

3. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

4. $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

5. $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

6. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

7. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

8. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

9. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

10. $\cos(-x) = \cos x$

11. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

12. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

13. $\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos x)}$

14. $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$

15. $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

16. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

17. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

18. $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos x)}$

19. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

20. $\tan(-x) = -\tan x$

21. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

22. $\tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

23. $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$

24. $\operatorname{sen}(\pi \pm x) = \mp \operatorname{sen} x$

25. $\tan(\pi \pm x) = \pm\tan x$

Resumen de fórmulas

Página

Distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ **y** $B(x_2, y_2)$

$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ **3**

Operaciones en $\mathcal{R}^2$ **con los vectores** $\mathbf{u}, \mathbf{v} = (x, y), \mathbf{v}_1 = (x_1, y_1), \mathbf{v}_2 = (x_2, y_2)$

(Con excepción de las fórmulas indicadas con un asterisco se pueden aplicar a vectores tridimensionales)

$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ (adición de vectores) **8**

$-\mathbf{v} = -(x, y) = (-x, -y)$ (negativo de un vector) **10**

$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ (diferencia de vectores) **10**

$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (magnitud de un vector) **13**

$^*\text{sen}\ \theta = \frac{y}{\|\mathbf{v}\|}$, $\cos\theta = \frac{x}{\|\mathbf{v}\|}$ (ángulo de dirección del vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) **14**

$r\mathbf{v} = r(x, y) = (rx, ry), r \in \mathcal{R}$ (producto de un escalar por un vector) **20**

$\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} = r\mathbf{v}$ **21**

Si $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2$ (producto interno, escalar o punto de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$) **27**

$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ si y sólo si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ **27**

*Si $\mathbf{v} = (x, y)$, entonces $\mathbf{v}_\mathbf{p} = (-y, x)$ **27**

$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|}$ (ángulo α que forman los vectores $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$) **31**

$^*\mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{u}_\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}_\mathbf{p}$, donde $\|\mathbf{u}\| = 1$ (descomposición de $\mathbf{v}$ en componentes) **35**

Ecuaciones de la recta en el plano

$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{t} - \mathbf{s}), r \in \mathcal{R}$ **49**

(ecuación paramétrica vectorial ordinaria de la recta que pasa por **S** y **T**)

$x = x_1 + r(x_2 - x_1), y = y_1 + r(y_2 - y_1), r \in \mathcal{R}$ **51**

(ecuaciones paramétricas cartesianas de la recta que pasa por $S(x_1, y_1)$ y $T(x_2, y_2)$)

$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r\mathbf{v}$ (ecuación paramétrica vectorial ordinaria de la recta que pasa por **S** y es paralela a **v**) **53**

$m = \dfrac{k}{h}$ (pendiente m de la recta cuyo vector de dirección es (h, k), $h \neq 0$) **59**

$\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2$ si y sólo si $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$, o bien, si una recta es vertical (pendiente no definida) y la otra es horizontal (pendiente 0) **62**

$Ax + By + C = 0$ (ecuación cartesiana, o escalar, ordinaria) **65**

$y - y_1 = m(x - x_1)$ (forma de punto y pendiente) **70**

$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, $x_1 \neq x_2$ (forma de punto y pendiente que pasa por dos puntos dados) **70**

$y = mx + b$ (forma de ordenada y abscisa al origen) **74**

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, $a \neq 0, b \neq 0$ (intersecciones con los ejes) **75**

$\dfrac{x - x_1}{h} = \dfrac{y - y_1}{k}$, $h \neq 0$, $k \neq 0$ (forma simétrica, (h, k) es un vector de dirección) **77**

$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha - p = 0$ (forma normal) **91**

o bien

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0$$ **92**

Distancia de un punto $\mathbf{S}(x_1, y_1)$ a una recta $\mathcal{L}$: $Ax + By + C = 0$

$d(\mathbf{S}, \mathcal{L}) = \dfrac{|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v_p}|}{\|\mathbf{v_p}\|}$ **T** sobre $\mathcal{L}$, $\mathbf{v} \parallel \mathcal{L}$ **89**

o bien

$$d(\mathbf{S}, \mathcal{L}) = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$ **94**

Determinantes

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$ **104**

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$ **104**

Ecuaciones ordinarias de las secciones cónicas

$$\left.\begin{array}{l}(x-h)^2+(y-k)^2=r^2\\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0\end{array}\right\}\text{circunferencia}\qquad\begin{array}{r}\mathbf{125}\\ \mathbf{126}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}x^2=4py\\ y^2=4px\end{array}\right\}\text{parábola}\qquad\mathbf{131}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\[2ex] \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1\end{array}\right\}\text{elipse}\qquad\begin{array}{r}\mathbf{140}\\[2ex] \mathbf{141}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\[2ex] \dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1\end{array}\right\}\text{hipérbola}\qquad\begin{array}{r}\mathbf{146}\\[2ex] \mathbf{147}\end{array}$$

Traslación de ejes en el plano

$x = x' + h$ y $y = y' + k$ **171**

$x' = x - h$ y $y' = y - k$ **171**

Tablas de las ecuaciones de las secciones cónicas **174, 177**

Rotación de ejes

$x' = x \cos \phi + y \operatorname{sen} \phi$ y $y' = -x \operatorname{sen} \phi + y \cos \phi$ **181**

$x = x' \cos \phi - y' \operatorname{sen} \phi$ y $y = x' \operatorname{sen} \phi + y' \cos \phi$ **181**

$\tan 2\phi = \dfrac{B}{A - C}$ **188**

Ecuaciones de la recta que es tangente a la gráfica de $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 0$ en el origen

$Dx + Ey = 0$, D y E no son ambos cero **193**

Coordenadas polares

$x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$ **246**

$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \theta = \dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}$ **246**

$d = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2r_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$

(distancia entre dos puntos cuyas coordenadas son (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2)) **250**

Ecuaciones polares de las secciones cónicas

$r = \dfrac{ep}{1 \pm \cos\theta}$ (foco en el polo, directriz ⊥ al eje polar) **261**

$r = \dfrac{ep}{1 \pm \operatorname{sen}\theta}$ (foco en el polo, directriz || al eje polar) **261**

Distancia entre los puntos $\mathrm{S}(x_1, y_1, z_1)$ y $\mathrm{T}(x_2, y_2, z_2)$ en el espacio

$d(\mathbf{S}, \mathbf{T}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ **276**

Cosenos directores del vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\cos\alpha = \dfrac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}$, $\cos\beta = \dfrac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}$, $\cos\gamma = \dfrac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$, donde $\|\mathbf{v}\| \neq \mathbf{0}$ **283**

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ **283**

Producto vectorial de los vectores $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix}$$ **294**

Ecuaciones de la recta en el espacio

$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{t} - \mathbf{s}),\ r \in \mathcal{R}$ (ecuación paramétrica vectorial ordinaria de la recta que pasa por **S** y **T**) **307**

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + r(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ **309**

(ecuación paramétrica vectorial de la recta que pasa por $\mathrm{S}(x_1, y_1, z_1)$ y $\mathrm{T}(x_2, y_2, z_2)$)

$x = x_1 + r(x_2 - x_1),\ y = y_1 + r(y_2 - y_1),\ z = z_1 + r(z_2 - z_1)$ **309**

(ecuación paramétrica cartesiana de la recta que pasa por $\mathrm{S}(x_1, y_1, z_1)$ y $\mathrm{T}(x_2, y_2, z_2)$)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$ **309**

(ecuación simétrica de la recta que pasa por $\mathrm{S}(x_1, y_1, z_1)$ y $\mathrm{T}(x_2, y_2, z_2)$)

Ecuaciones de planos en el espacio

$ax + by + cz + d = 0$ (ecuación cartesiana) **314**

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ (forma normal) **332**

$\mathbf{u} = \mathbf{s} + r(\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2),\ r \in \mathcal{R}$ (ecuación paramétrica vectorial de la recta de intersección de los planos cuyos vectores normales son $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, **S** está sobre la recta de intersección) **320**

Distancia de un punto $S(x_1, y_1, z_1)$ a un plano $\mathcal{P}: ax + by + cz + d = 0$

$(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$

$$d(S, \mathcal{P}) = \frac{|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}, \quad \mathbf{T} \text{ sobre } \mathcal{P}, \quad \mathbf{n} \perp \mathcal{P}, \quad \|\mathbf{n}\| \neq 0$$ **330**

o bien

$$d(S, \mathcal{P}) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$ **331**

Distancia de un punto S a la recta $\mathcal{L}$ en el espacio

$$d(S, \mathcal{L}) = \frac{\|(\mathbf{s} - \mathbf{t}) \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad \mathbf{T} \text{ sobre } \mathcal{L}, \quad \mathbf{v} \parallel \mathcal{L}$$ **335**

Esfera con centro $C(x_0, y_0, z_0)$, y radio *r*.

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ (ecuación cartesiana) **345**

Ecuación vectorial del plano tangente a una esfera en el punto T.

$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{t}) = 0$, $\mathbf{v}$ es el radio vector del centro de la esfera **T**. **347**

Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ **356**

Hiperboloide de una rama

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$ **357**

Hiperboloide de dos ramas

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$ **357**

Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$ **358**

Paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$ **358**

Paraboloide hiperbólico

$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ **360**

Traslación de ejes en el espacio

$x' = x - x_0, y' = y - y_0, z' = z - z_0$ **366**

$x = x' + x_0, y = y' + y_0, z = z' + z_0$ **366**

Coordenadas cilíndricas

$x = r \cos\theta, y = r \operatorname{sen}\theta, z = z$ **371**

$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}},$ **371**
$z = z$

Coordenadas esféricas

$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$ **373**
$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$
$z = \rho \cos\phi$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{sen}\phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Inversiones con respecto a circunferencias **375**

$$x' = x_0 + \frac{R^2}{r^2}(x - x_0), \quad y' = y_0 + \frac{R^2}{r^2}(y - y_0)$$

Inversiones con respecto a esferas **377**

$$x' = x_0 + \frac{R^2}{r^2}(x = x_0), \quad y' = y_0 + \frac{R^2}{r^2}(y - y_0),$$

$$z' = z_0 + \frac{R^2}{r^2}(z - z_0)$$

Indice

Resultados de los ejercicios impares

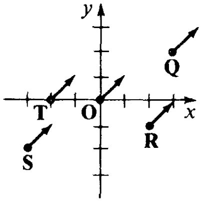
Ejercicios 1—1, página 4

1. -4 **3.** 1 **5.** $x = 1, y = 1$ **7.** 3

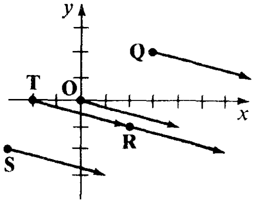
9. $3\sqrt{2}$ **11.** 4 **13.** $\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}$ **25.** (3, 4)

Ejercicios 1—2, páginas 7—8

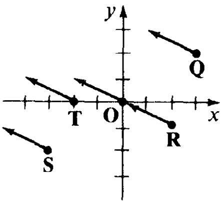
1.



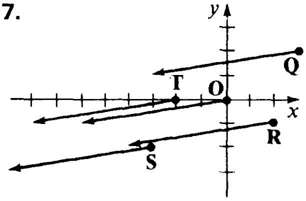
3.



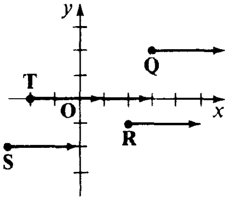
5.



7.



9.



11. **(a)** (1, 6)
(b) (4, 8)
(c) (5, 5)
(d) (−2, 13)
(e) (−5, 1)

13. **(a)** (−3, 5) **(b)** (0, 7) **(c)** (1, 4) **(d)** (−6, 12) **(e)** (−9, 0)
15. **(a)** (7, −8) **(b)** (10, −6) **(c)** (11, −9) **(d)** (4, −1) **(e)** (1, −13)
17. **(a)** (−3, −4) **(b)** (0, −2) **(c)** (1, −5) **(d)** (−6, 3) **(e)** (−9, −9)
19. **(a)** (−2, 0) **(b)** (1, 2) **(c)** (2, −1) **(d)** (−5, 7) **(e)** (−8, −5)
21. (4, 2) **23.** (−5, 3) **25.** (−15, −9) **27.** (6, 0)
29. $(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$ **31.** $(\frac{11}{2}, 3)$ **33.** (7, −10)

Ejercicios 1—3, páginas 12—13

1. (6, −2) **3.** (−1, 6) **5.** (5, −3)
7. (4, 3) **9.** (2, −4) **11.** (6, 1)
13. (−4, 2) **15.** (−2, 5) **17.** (1, −4)

Ejercicios 1—4, páginas 18—20

1. $3\sqrt{2}$; 45° **3.** 2; 30° **5.** 5; 126°50′
7. 2; 180° **9.** 10; 223°10′ **11.** 5; 53°10′
13. $2\sqrt{5}$; 26°30′ **15.** $3\sqrt{2}$; 45° **17.** (4.35, 2.5)
19. (0, 6) **21.** (1, −1.73) **23.** (−6.06, −3.5)

25. (a) 3, (b) $-\frac{16}{3}$ **27.** (a) $-\frac{9}{2}$, (b) 2 **29.** (a) $\frac{6}{5}$, (b) $-\frac{10}{3}$

31. $\left(\frac{15\sqrt{58}}{58}, \frac{35\sqrt{58}}{58}\right)$ **33.** $\left(-\frac{6\sqrt{29}}{29}, \frac{15\sqrt{29}}{29}\right)$ **35.** $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

Ejercicios 1—5, Páginas 25—26

1. $(7, -1)$

3. $(-1, -3)$

5. $5\sqrt{2}$

7. $4\sqrt{29} - 4$

9. $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

11. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

13. $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

15. sí

17. no

19. sí

21. 2(cos 30°, sen 30°)

23. $\sqrt{34}$ (cos 301°, sen 301°)

25. $\sqrt{53}$ (cos 254°, sen 254°)

27. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

29. $\left(-\frac{7}{\sqrt{58}}, \frac{3}{\sqrt{58}}\right)$

31. $(0, 1)$

33. $\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$

Ejercicios 1—6, páginas 29—30

1. -1 **3.** 0 **5.** $-\sqrt{2} + 15$

7. 16 **9.** $\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ **11.** $\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

13. $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ **15.** $(0, -1)$ **17.** $-\frac{5}{3}$

19. 6 **21.** 3 **23.** $-\frac{3}{2}$

25. $4\sqrt{3}$ **27.** 0 **29.** $6\sqrt{3}$

Ejercicios 1—7, página 33

1. perpendiculares **3.** paralelos **5.** oblícuos, $m^\circ(\alpha) \doteq 143$

7. oblícuos, $m^\circ(\alpha) = 30$ **9.** perpendiculares **11.** oblícuos, $m^\circ(\alpha) \doteq 25$

13. $m^\circ(\angle A) = 60, m^\circ(\angle B) = 60, m^\circ(\angle C) = 60$

15. $m^\circ(\angle A) = 90, m^\circ(\angle B) \doteq 53, m^\circ(\angle C) \doteq 37$

Ejercicios 1—8, páginas 39—40

1. (a) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{2}}\mathbf{u} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_\mathbf{p}$ (c) $\frac{11}{25}\mathbf{t} + \frac{2}{25}\mathbf{t}_\mathbf{p}$

3. (a) $-\mathbf{i}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_\mathbf{p}$ (c) $-\frac{3}{25}\mathbf{t} + \frac{4}{25}\mathbf{t}_\mathbf{p}$

5. (a) $-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ (b) $-\frac{7}{\sqrt{2}}\mathbf{u} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_\mathbf{p}$ (c) $-\mathbf{t}$

7. (a) $5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ (b) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u} - \dfrac{11}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_\mathbf{p}$ (c) $-\frac{9}{25}\mathbf{t} - \frac{38}{25}\mathbf{t}_\mathbf{p}$

9. $90°$

11. $120°$

13. $(-\frac{3}{13}, -\frac{2}{13})$; $\dfrac{-1}{\sqrt{13}}$

15. $(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$; $\dfrac{-2}{\sqrt{5}}$

17. 0

19. $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

21. $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Ejercicios de repaso del capítulo 1, página 42

1. $x = 3,\ y = 3$

3. $(2, 1)$

5. norma $= 2$; $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

7. -6

9. $\frac{26}{5}\mathbf{u} + \frac{7}{5}\mathbf{u}_\mathbf{p}$

Ejercicios 2–1, páginas 51–52

1. $\mathbf{u} = (2, 1) + r(-2, -1)$; $x = 2 - 2r,\ y = 1 - r$
3. $\mathbf{u} = (4, -2) + r(0, 5)$; $x = 4,\ y = -2 + 5r$
5. $\mathbf{u} = (-7, 2) + r(4, -3)$; $x = -7 + 4r,\ y = 2 - 3r$
7. $\mathbf{u} = (-6, -3) + r(2, 1)$; $x = -6 + 2r,\ y = -3 + r$
9. $\mathbf{u} = (a, b) + r(b - a, a - b)$; $x = a + r(b - a)$; $y = b + r(a - b)$
11. (a) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (b) $(-1, 1), (2, 0)$
13. (a) $(0, \frac{5}{2})$ (b) $(-1, 0), (1, 5)$
15. (a) $(-4, 2)$ (b) $(-6, 1), (-2, 3)$
17. (a) $(\frac{1}{2}, 4)$ (b) $(-\frac{2}{3}, 5), (\frac{5}{3}, 3)$
19. $\mathbf{v} = (2, 5) + r(4, -6),\ 0 \leq r \leq 1$
21. $\mathbf{v} = (-2, 4) + r(1, 3),\ 0 \leq r \leq 1$

Ejercicios 2–2, páginas 56–57

1. $\mathbf{u} = (3, 2) + r(1, 1)$; $x = 3 + r,\ y = 2 + r$
3. $\mathbf{u} = (4, -3) + r(-1, 2)$; $x = 4 - r,\ y = -3 + 2r$
5. $\mathbf{u} = (-2, 4) + r(-1, 2)$; $x = -2 - r,\ y = 4 - 2r$
7. $\mathbf{u} = (-6, -4) + r(-3, -2)$; $x = -6 - 3r,\ y = -4 - 2r$
9. sí
11. no
13. sí
15. no
17. $\mathbf{u} = (2, 3) + r(3, 4)$
19. $\mathbf{u} = (3, -1) + r(5, 2)$
21. $\mathbf{u} = (-6, 2) + r(3, 1)$
23. $\mathbf{u} = (-1, -1) + r(-2, 7)$
25. sí
27. sí
29. no
31. $\mathrm{U}_1(7, 1), \mathrm{U}_2(1, -5)$
33. $\mathrm{U}_1(15, 40), \mathrm{U}_2(-5, -8)$

Ejercicios 2–3, páginas 62–63

1. $m = -\frac{1}{9}$; $\mathbf{u} = (5, 1) + r(1, -\frac{1}{9})$
3. $m = -1$; $\mathbf{u} = (3, -4) + r(1, -1)$

5. $m = 0$; $\mathbf{u} = (2, -3) + r(1, 0)$

7. $m = -4$; $\mathbf{u} = (-2, -3) + r(1, -4)$

9. $\mathbf{u} = (3, -4) + r(1, 2)$ **11.** $\mathbf{u} = (0, -5) + r(1, 0)$

13. $\mathbf{u} = (-2, -3) + r(1, \frac{2}{3})$ **15.** $\mathbf{u} = (1, 0) + r(0, 1)$

17. paralelos **19.** paralelos

21. perpendiculares **23.** colineales

25. no colineales **27.** no colineales

29. **(a)** $\mathbf{u} = (-2, 1) + r(2, -1)$ **(b)** $\mathbf{u} = (-2, 1) + r(1, 2)$

31. **(a)** $\mathbf{u} = (3, 4) + r(5, -2)$ **(b)** $\mathbf{u} = (3, 4) + r(2, 5)$

33. **(a)** $\mathbf{u} = (0, 4) + r(-3, 3)$ **(b)** $\mathbf{u} = (0, 4) + r(-3, -3)$

35. **(a)** $\mathbf{u} = (-2, -3) + r(5, 6)$ **(b)** $\mathbf{u} = (-2, -3) + r(-6, 5)$

37. paralelos **39.** perpendiculares **41.** oblícuos

43. $\mathbf{u} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + r(c, d)$

Ejercicios 2–4, páginas 67–69

1. $3x + 5y - 22 = 0$ **3.** $x - 7y - 9 = 0$ **5.** $-x - 2y - 1 = 0$

7. $x + y + 4 = 0$ **9.** $2x + 5y - 41 = 0$ **11.** $x + 2y - 6 = 0$

13. $y + 5 = 0$ **15.** paralelos **17.** perpendiculares

19. paralelos

21. **(a)** $5x + 2y - 11 = 0$ **(b)** $2x - 5y + 13 = 0$

23. **(a)** $7x + 5y - 11 = 0$ **(b)** $5x - 7y - 29 = 0$

25. **(a)** $-6x + 5y - 46 = 0$ **(b)** $5x + 6y + 18 = 0$

27. **(a)** $2x + y + 3 = 0$ **(b)** $x - 2y - 1 = 0$

29. $x + y - 8 = 0$

31. $4x + 3y - 1 = 0$

33. $y + 1 = 0$

Ejercicios 2–5, páginas 72–73

1. $2x - y + 1 = 0$ **3.** $x + y + 1 = 0$

5. $3x + y - 2 = 0$ **7.** $x - 2y - 1 = 0$

9. $3x + 5y + 24 = 0$ **11.** $3x + 2y - 13 = 0$

13. $2x + y = 0$ **15.** $4x + 13y - 2 = 0$

17. $5x + 2y + 7 = 0$ **19.** $y + 3 = 0$

21. $x - 3 = 0$

23. $x - 2y = 0$; $3x + y = 0$; $2x + 3y - 14 = 0$

25. $x - y + 4 = 0$; $x + y - 10 = 0$; $y - 3 = 0$

27. $5x + 4y - 14 = 0$; $4x - y = 0$; $x + 5y - 14 = 0$

29. $x + 3y - 16 = 0$; $x - 3y + 10 = 0$; $x - 3 = 0$

31. $2x + y - 2 = 0$; $3x - 2y = 0$; $x - 3y + 2 = 0$

33. $x - y + 4 = 0$; $x - 3 = 0$; $x + y - 10 = 0$

35. $10x + y - 26 = 0$; $x + 4y - 13 = 0$; $8x - 7y = 0$

37. $(3, -4)$, $(-3, 4)$, $(7, 8)$

39. $3x - 4y + 11 = 0$; $x + 3y - 9 = 0$; $5x + 2y - 7 = 0$

Ejercicios 2–6, páginas 76–77

1. $2x - y + 5 = 0$
3. $4x - y - 4 = 0$
5. $2x - 3y = 0$
7. $4x + 5y - 20 = 0$
9. $m = \frac{3}{4};\ b = 2$
11. $m = -\frac{5}{4};\ b = 4$
13. $m = \frac{7}{2};\ b = -2$
15. $m = 0;\ b = -2$
17. $3x + 2y - 6 = 0$
19. $2x - 3y + 6 = 0$
21. $2x - 7y - 14 = 0$
23. $2x + y + 2 = 0$
25. $a = 4, b = 3$
27. $a = -3, b = 5$
29. $a = -2, b = 5$
31. $a = -\frac{8}{3}, b = \frac{8}{5}$
33. $15x + 2y = 0$
35. $22x + 6y - 33 = 0$
37. $x - y + 2 = 0$
39. $x + 3y - 6 = 0$
41. $a = 1$

Ejercicios 2–7, página 80

1. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-4};\ m^\circ(\theta) \doteq 117$
3. $\frac{x-5}{2} = \frac{y-9}{11};\ m^\circ(\theta) \doteq 80$
5. $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-4}{7};\ m^\circ(\theta) \doteq 106$
7. $\frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{-4};\ m^\circ(\theta) \doteq 117$
9. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+3}{-6};\ m^\circ(\theta) \doteq 63$
11. $x + 2 = \frac{y+3}{2};\ m^\circ(\theta) \doteq 63$
13. $x = \frac{y-4}{2}$
15. $\frac{x}{-5} = \frac{y-2}{2}$
17. $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-\frac{5}{3}}{2}$
19. $\frac{x-1}{7} = \frac{y-\frac{5}{7}}{2}$
21. $\sqrt{3}x - y + (3 + 5\sqrt{3}) = 0$
23. $3x + \sqrt{3}y + (2\sqrt{3} - 9) = 0$

Ejercicios de repaso del capítulo 2, página 82

1. $\mathbf{u} = (3, -2) + r(-4, 7);\ x = 3 - 4r,\ y = -2 + 7r$
3. $\mathbf{u} = (5, -1) + r(3, 1)$
5. $\mathbf{u} = (2, -5) + r(-3, 2)$
7. $-3x + y + 13 = 0$
9. $m = 2;\ b = \frac{7}{2}$

Ejercicios 3–1, páginas 95–97

1. $\frac{5}{\sqrt{5}}$
3. $\frac{10}{\sqrt{2}}$
5. $\frac{11}{\sqrt{13}}$
7. $\frac{7}{\sqrt{5}}$
9. $\frac{3}{\sqrt{5}}$
11. $\frac{54}{5\sqrt{2}}$
13. 11
15. $\frac{36}{\sqrt{41}}$
17. $\frac{33}{\sqrt{65}}$
19. $\frac{62}{13}$
21. $\frac{33}{\sqrt{65}}, \frac{33}{\sqrt{65}}, \frac{11}{\sqrt{2}}$
23. $\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{37}}, 1$
25. $\frac{33}{2}$
27. 4
29. $\frac{7}{\sqrt{10}}$
31. $k = \frac{1}{3}$ or $k = 2$
33. $x - y + 4 = 0$ y $x + y = 0$
35. $4y - 3 = 0$ y $4x + 1 = 0$

37. $x - 8y + 10 = 0, 9x - 2y + 10 = 0, 10x + 11y - 4 = 0$
39. $3x - 4y + 35 = 0$ y $3x - 4y - 15 = 0$
41. $\left|\dfrac{b^2 + a^2 - ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

Ejercicios 3—2, páginas 101—103

1. $(1, 2)$
3. $(1, -1)$
5. $(-1, -1)$
7. $(-2, 3)$
9. las rectas coinciden
11. $(4, 1)$
13. $(4, 1)$
15. $\emptyset$
17. $(-2, 3)$
19. las rectas coinciden
21. $(4, 1)$
23. $(4, 1)$
25. $\emptyset$
27. $(1, 2), (2, 0),$ y $(7, 4)$
29. $(-1, -1), (1, 5),$ y $(2, 3)$
31. $12x - 15y - 8 = 0$
33. $x - 3y - 2 = 0$
35. $x - y - 9 = 0$
37. $x + 7y - 17 = 0, x - y + 1 = 0$

Ejercicios 3—3, páginas 107—109

1. -26
3. 0
5. 0
7. 1
9. $a + b$
11. $a^2 + b^2$
13. 0
15. 0
17. -19
19. -19
21. $(2, 1)$
23. $(-2, 1, 3)$
25. $x - y - 3 = 0$
29. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$

Ejercicios de repaso del capítulo 3, página 115

1. $\frac{6}{13}$
3. $(2, 4)$
5. $(\frac{27}{26}, \frac{15}{26})$
7. 66
9. 9

Ejercicios 4—1, páginas 123—124

1. $4x + 6y - 41 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 16 = 0$
5. $x^2 + y^2 = 9$
7. $xy + 2x + y - 14 = 0 \quad (x \neq 1, x \neq 3)$
9. $2x^2 + x - 3y + 5 = 0 \quad (x \neq -1, x \neq 2)$
11. $y^2 - 12x + 36 = 0$
13. $x^2 + y^2 + 6x - 18y + 2xy - 15 = 0$
15. $3x^2 - 48x + 4y^2 = 0$
17. $16x^2 + 25y^2 = 400$
19. $x^2 - 2y = 0$
21. $y = \frac{9}{4}x^2$

Ejercicios 4—2, páginas 128—129

1. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$
3. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$
5. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$
7. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$
9. $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 49$
11. $(x + 7)^2 + (y + 8)^2 = 100$
13. $(x + \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = 5^2$
15. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$
17. $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 144 = 0$
19. $4x - 3y = 0$
21. $x - 2y = 0$
23. $x + 3 = 0$
25. $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
27. $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = \frac{81}{2}$

29. $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = \frac{16}{5}$

31. $(x + 6)^2 + (y + 2)^2 = 26$

33. $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$

35. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$

37. $(x + 7)^2 + (y - 7)^2 = 45$ o bien $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 45$

Ejercicios 4—3, páginas 133—136

1. $x^2 = 12y$; directriz $y = -3$

3. $y^2 = 8x$; directriz $x = -2$

5. $y^2 = -4x$; directriz $x = 1$

7. $x^2 = -20y$; directriz $y = 5$

9. foco $(0, 2)$; directriz $y = -2$

11. foco $(2, 0)$; directriz $x = -2$

13. $y^2 = 8x$

15. $x^2 = y$

17. $y^2 - 4y - 8x + 28 = 0$

19. $x^2 - 8x + 12y + 40 = 0$

21. $y^2 - 14x + 63 = 0$

23. $y = 2x^2 + 3x + 1$

25. $y = -x^2 + x + 3$

27. $y = 3x^2 - 5$

33. $x^2 + y^2 - 5py = 0$

Problemas de aplicación 4—3, página 136

1. 75 m por encima del suelo

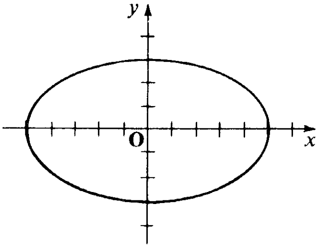
3. 48 cm

5. 160 m

Ejercicios 4—4, páginas 141—143

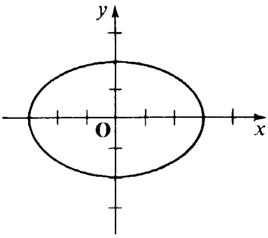
1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

eje mayor = 10
eje menor = 6



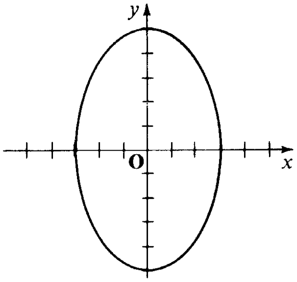
3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

eje mayor = 6
eje menor = 4



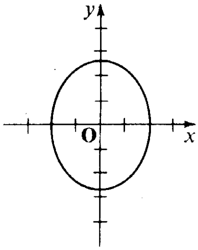
5. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

eje mayor = 10
eje menor = 6



7. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{7} = 1$

eje mayor = $2\sqrt{7}$
eje menor = 4

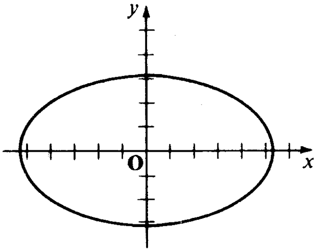


9. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; $\mathbf{F}_1(-4, 0), \mathbf{F}_2(4, 0)$

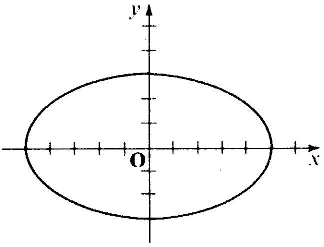
11. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{13} = 1$; $\mathbf{F}_1(0, 2), \mathbf{F}_2(0, -2)$

13. $V_1(-3, 0), V_2(3, 0);\ F_1(-\sqrt{5}, 0), F_2(\sqrt{5}, 0)$
15. $V_1(0, 8), V_2(0, -8);\ F_1(0, 2\sqrt{15}), F_2(0, -2\sqrt{15})$
17. $V_1(-3, 0), V_2(3, 0);\ F_1(-2\sqrt{2}, 0), F_2(2\sqrt{2}, 0)$
19. $V_1(0, \sqrt{7}), V_2(0, -\sqrt{7});\ F_1(0, 2), F_2(0, -2)$

21. $\frac{x^2}{28} + \frac{3y^2}{28} = 1$



23. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$



25. $5x^2 + 9y^2 - 72y + 99 = 0$

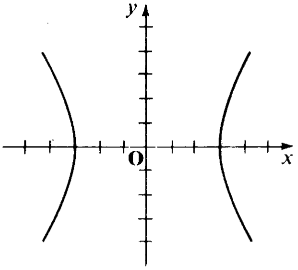
27. $4x^2 + 3y^2 - 48x + 132 = 0$

Problemas de aplicación 4—4, página 144

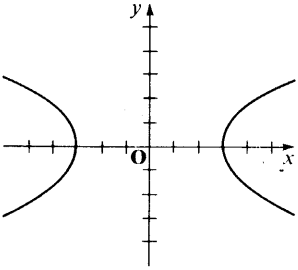
3. 5 000 000 Km

Ejercicios 4—5, páginas 150—153

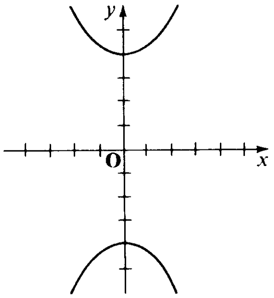
1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$



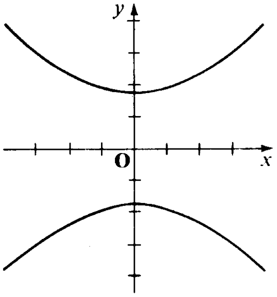
3. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$



5. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$



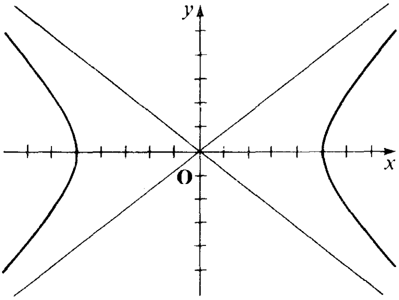
7. $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} = 1$



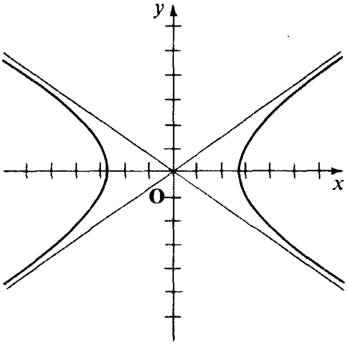
9. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

11. $\frac{y^2}{169} - \frac{x^2}{25} = 1$

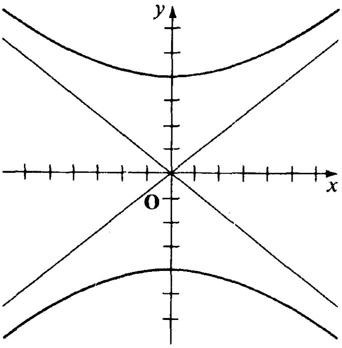
13. $\mathbf{V}_1(-5, 0), \mathbf{V}_2(5, 0)$;
$\mathbf{F}_1(-\sqrt{41}, 0), \mathbf{F}_2(\sqrt{41}, 0)$;
$y = \pm\frac{4}{5}x$



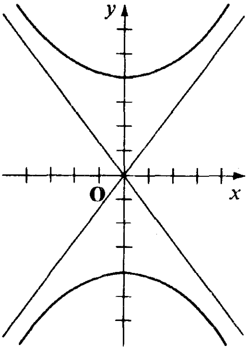
15. $\mathbf{V}_1(-2\sqrt{2}, 0), \mathbf{V}_2(2\sqrt{2}, 0)$;
$\mathbf{F}_1(-2\sqrt{3}, 0), \mathbf{F}_2(2\sqrt{3}, 0)$;
$y = \pm\frac{x}{\sqrt{2}}$



17. $\mathbf{V}_1(0, 4), \mathbf{V}_2(0, -4)$;
$\mathbf{F}_1(0, \sqrt{41}), \mathbf{F}_2(0, -\sqrt{41})$;
$y = \pm\frac{4}{5}x$



19. $\mathbf{V}_1(0, 4), \mathbf{V}_2(0, -4)$;
$\mathbf{F}_1(0, 5), \mathbf{F}_2(0, -5)$;
$y = \pm\frac{4}{3}x$



21. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

23. $2x^2 - 3y^2 = 5$

25. $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{9} = 1$

27. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{108} = 1$

35. $8x^2 - y^2 + 2y - 9 = 0$

37. $3x^2 - y^2 + 2y - 13 = 0$

Ejercicios 4–6, páginas 158–160

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

3. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

5. $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{200} = 1$

7. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

9. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{13} = 1$

11. $\frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{\frac{45}{2}} = 1$

13. $\sqrt{2}$ **15.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **19.** $e = \sqrt{1 + m^2}$

23. $\frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{\frac{125}{4}} = 1$ **25.** $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

27. $x = \pm 8\sqrt{5}$

Ejercicios de repaso del capítulo 4, páginas 162—163

1. $x + 2y - 2 = 0$ **3.** $xy - 13x + 8y - 8 = 0$

5. $C(3, -4)$; $r = \sqrt{13}$ **7.** $(x-4)^2 + (y+3)^2 = \frac{49}{2}$

9. $x^2 + 16y + 16 = 0$ **11.** $y^2 - 6y - 16x - 23 = 0$

13. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

15. $F_1(0, -4)$, $F_2(0, 4)$; $V_1(0, -5)$, $V_2(0, 5)$

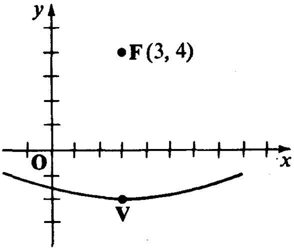
17. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ **19.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

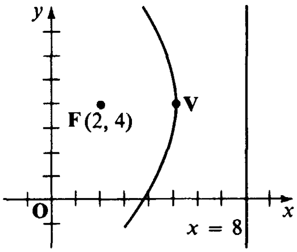
21. $\frac{(x-2)^2}{\frac{400}{9}} + \frac{y^2}{\frac{175}{9}} = 1$ **23.** $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{84} = 1$

Ejercicios 5—1, páginas 177—180

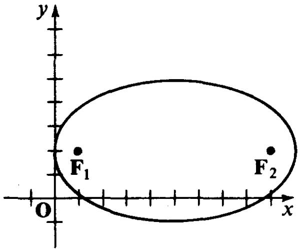
1. $x' - 4y'^2 - 16y' - 10 = 0$ **3.** $x'^2 + 4y'^2 - 36 = 0$ **5.** $x'^2 + 2y'^2 = 0$

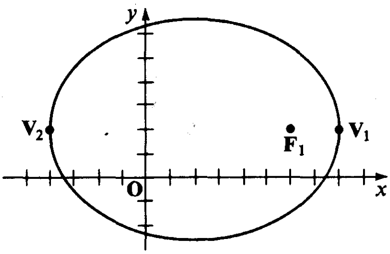
7. $x^2 - 6x - 24y - 39 = 0$ **9.** $y^2 - 8y + 12x - 44 = 0$



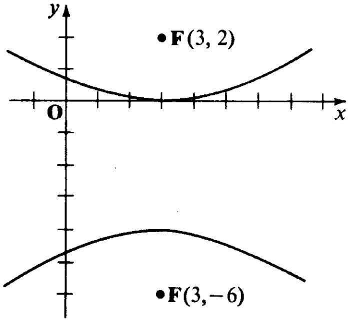


11. $9x^2 - 90x + 25y^2 - 100y + 100 = 0$ **13.** $5x^2 - 20x + 9y^2 - 36y - 124 = 0$

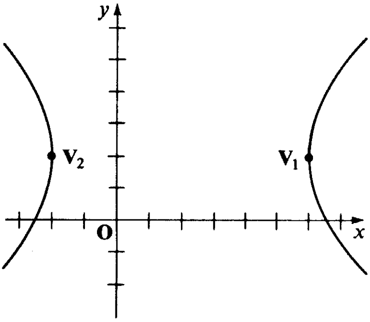




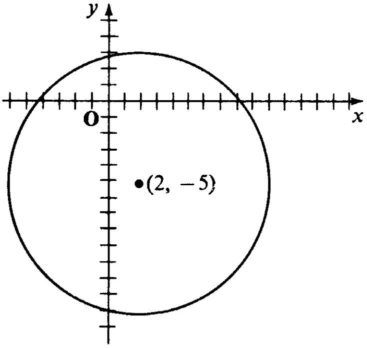
15. $3y^2 + 12y - x^2 + 6x - 9 = 0$



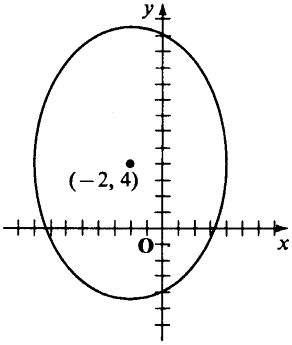
17. $24x^2 - 96x - 25y^2 + 100y - 388 = 0$



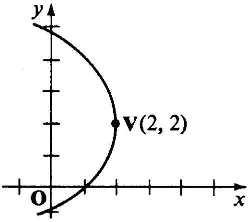
19. $x'^2 + y'^2 = 65$, circunferencia

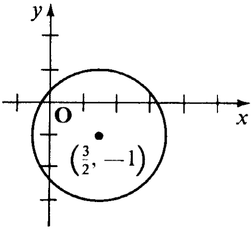


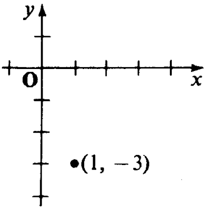
21. $\frac{x'^2}{36} + \frac{y'^2}{72} = 1$, elipse



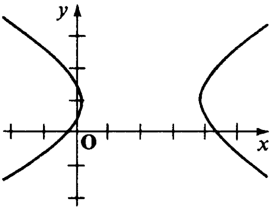
23. $y'^2 = -4x'$, parábola **25.** $x'^2 + y'^2 = 4$, circunferencia **27.** $x'^2 + y'^2 = 0$, punto



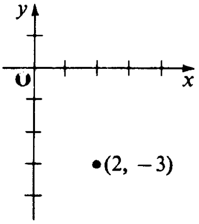




29. $\frac{2x'^2}{7} - \frac{9y'^2}{14} = 1$, hipérbola

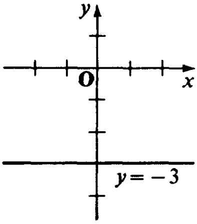


31.



33. ∅

35.



37. $x'y' + 38 = 0$

Ejercicios 5—2, páginas 184—186

1. $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

3. $(1 - 2\sqrt{3}, -2 - \sqrt{3})$

5. $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{9}{\sqrt{2}}\right)$

7. $-5y' + 10 = 0$

9. $4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0$

11. $7x'^2 + y'^2 - 14 = 0$

13. $x'^2 + y'^2 = 25$

15. $-5x'^2 + 20y'^2 + 50x' - 45 = 0$

17. $y' = \frac{4}{5}\sqrt{5}, y' = -\frac{4}{5}\sqrt{5}$

19. $3x' - y' = 6, 3x' - y' = -6$

21. $x' = -\frac{\sqrt{10}}{5}, x' = \frac{\sqrt{10}}{5}$

Ejercicios 5—3, páginas 191—192

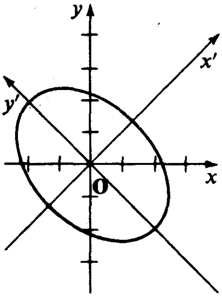
1. $\operatorname{sen} \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $\operatorname{sen} \phi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}, \cos\phi = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

5. $\operatorname{sen} \phi = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos\phi = \frac{3}{\sqrt{10}}$

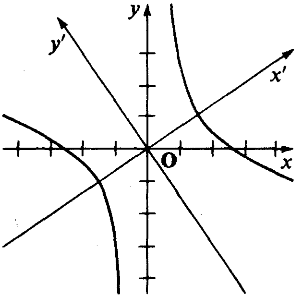
7. elíptico

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{8} = 1$$

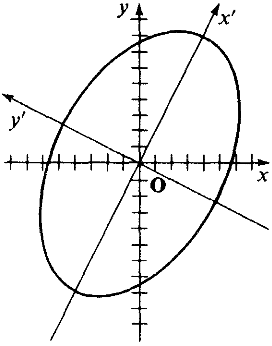


9. hiperbólico

$$\frac{x'^2}{3} - \frac{y'^2}{5} = 1$$



11. elíptico, $\frac{x'^2}{80} + \frac{y'^2}{30} = 1$



13. $4x''^2 - y''^2 = 0$

15. $\frac{y''^2}{4} - \frac{x''^2}{12} = 1$

17. $2x''^2 - 3\sqrt{2}y'' + \frac{19}{4} = 0$

Ejercicios 5–4, página 195

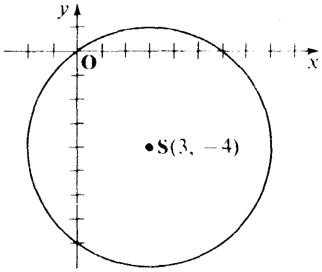
1. $-3x + 4y = 0$
3. $x - 2y = 0$
5. $2x - 3y = 0$
7. $5x + 2y = 0$
9. $2x - y - 1 = 0$
11. $2x + y + 5 = 0$
13. $2x + 3y + 12 = 0$
15. $2x + 3y + 5 = 0$
17. $x + y - 4 = 0$
19. $x - 4 = 0$
21. $x + y + 2 = 0$
23. $8x - 5y - 1 = 0$
25. $13x + 21y - 55 = 0$
27. $15x - 17y - 47 = 0$

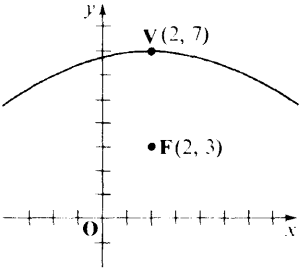
Ejercicios 5–5, páginas 201–202

1. $4x - y = 0, 4x + y = 0$
3. $x - 6y = 0, x + 6y = 0$
5. $x + 2y - 3 = 0$
7. No hay ninguna recta que pase por **S** y que sea tangente a la curva.
9. $x - y + 4 = 0, x - y - 4 = 0$
11. $x - y - 1 = 0$
13. $6x - 3y + 2 = 0$
15. $2x - 3y = 0, 4x - 6y - 25 = 0$
17. $2x - y + 5 = 0, 2x + y - 5 = 0$
19. $x - 2y + 2\sqrt{2} = 0, x - 2y - 2\sqrt{2} = 0$

Ejercicios de repaso del capítulo 5, páginas 204–205

1. $4x'^2 - 9y'^2 - 60 = 0$
3. $x'^2 + 3y' - 5 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$
7. $x^2 - 4x + 16y - 108 = 0$





9. $\left(\frac{5\sqrt{3}-3}{2}, \frac{-5-3\sqrt{3}}{2}\right)$ **11.** $17x'^2 + 4y'^2 = 884$

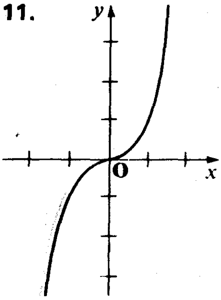
13. (a) hiperbólico (b) hiperbólico (c) hiperbólico

15. $13x - 24y = 0$ **17.** $x - y = 0, x + 3y = 0$

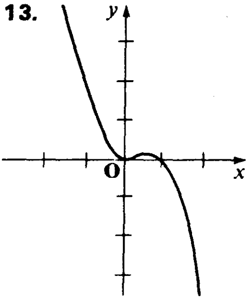
Ejercicios 6—1, página 219

1. *d* **3.** *a* ó *f* **5.** *b* ó *e* **7.** *a* **9.** *c*

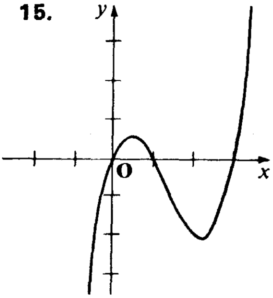
11.



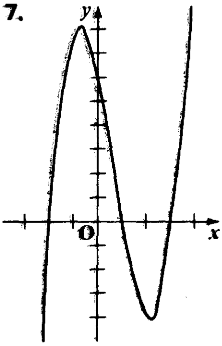
13.



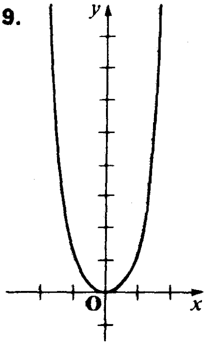
15.



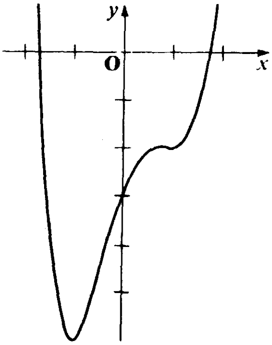
17.



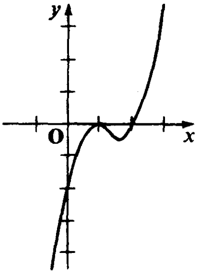
19.



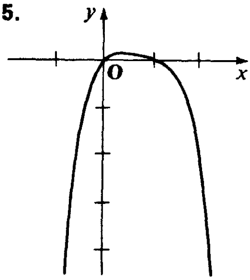
21.



23.



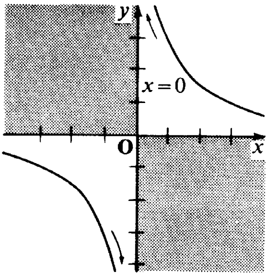
25.



Ejercicios 6—2, página 223

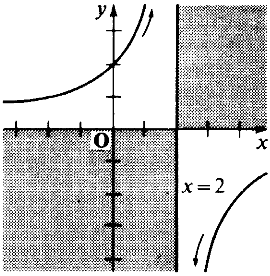
1. **(a)** $x = 0$

(b)



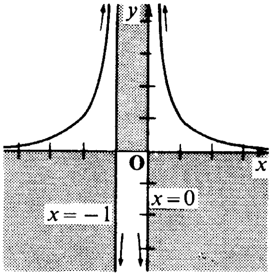
3. **(a)** $x = 2$

(b)



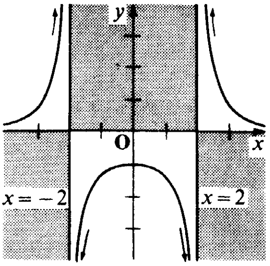
5. **(a)** $x = 0, x = -1$

(b)



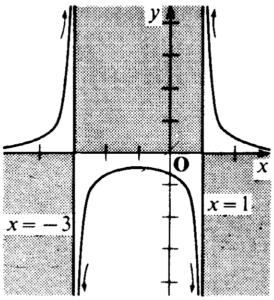
7. **(a)** $x = 2, x = -2$

(b)



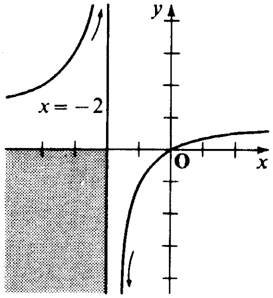
9. **(a)** $x = 1, x = -3$

(b)



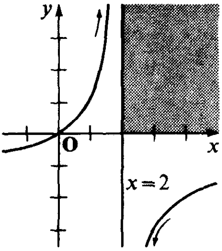
11. **(a)** $x = -2$

(b)



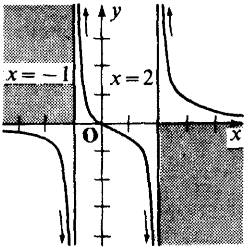
13. **(a)** $x = 2$

(b)



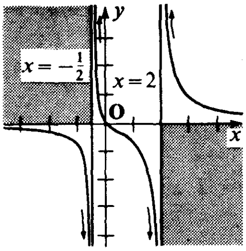
15. **(a)** $x = -1, x = 2$

(b)



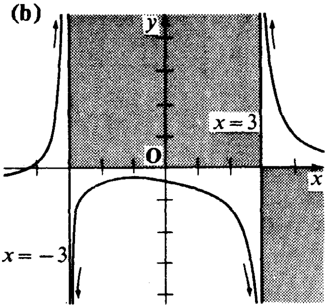
17. **(a)** $x = -\frac{1}{2}, x = 2$

(b)



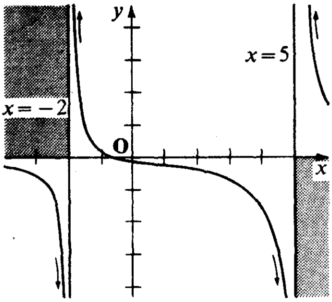
19. **(a)** $x = -3, x = 3$

(b)



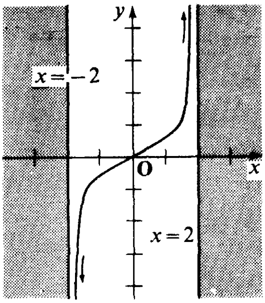
21. **(a)** $x = -2, x = 5$

(b)



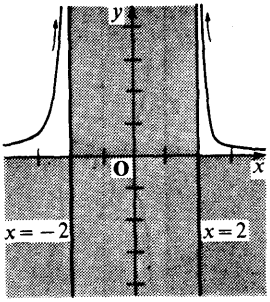
23. **(a)** $x = -2, x = 2$

(b)



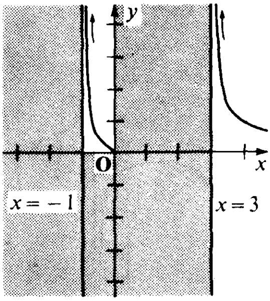
25. **(a)** $x = -2, x = 2$

(b)



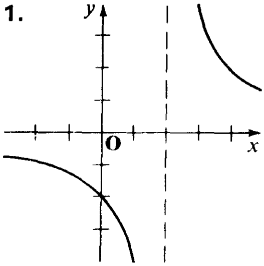
27. **(a)** $x = -1, x = 3$

(b)

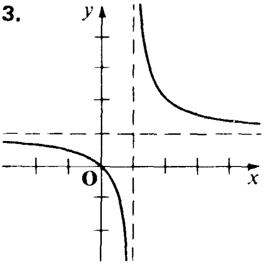


Ejercicios 6—3, páginas 228

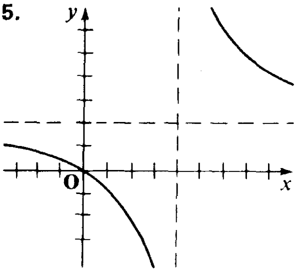
1.



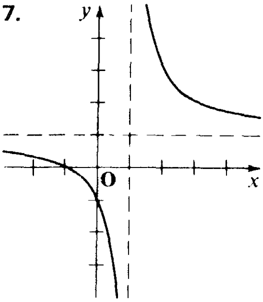
3.



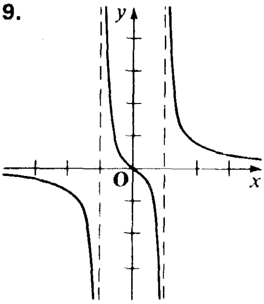
5.



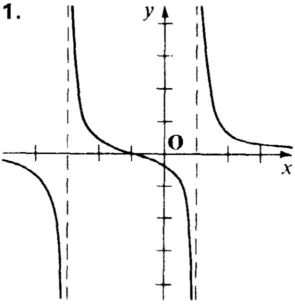
7.



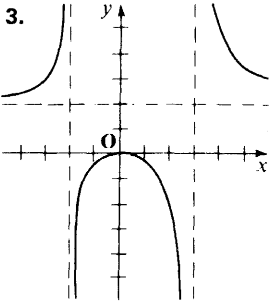
9.



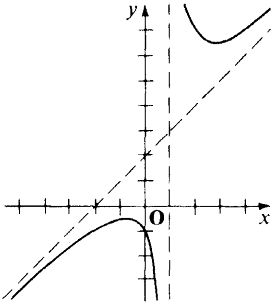
11.



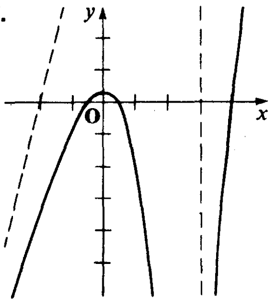
13.



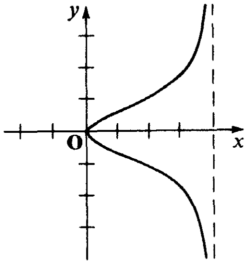
15.



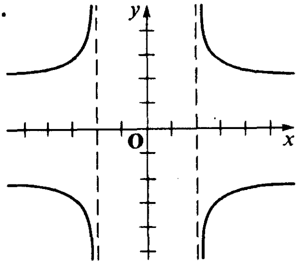
17.



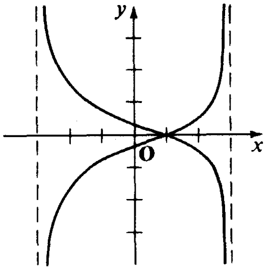
19.



21.

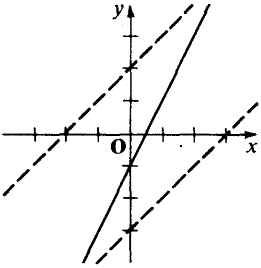


23.

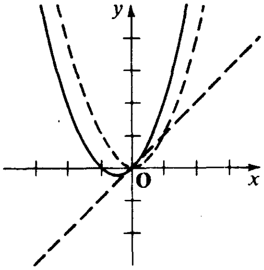


Ejercicios 6–4, página 230

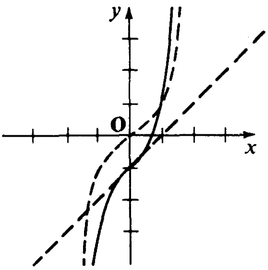
1.



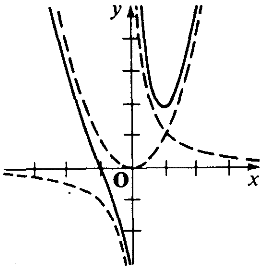
3.



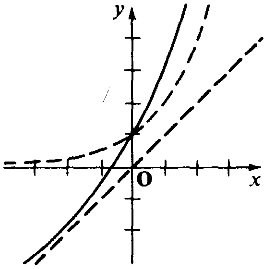
5.



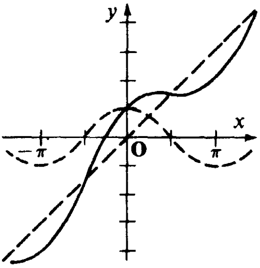
7.



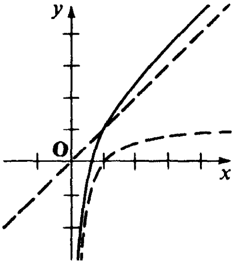
9.



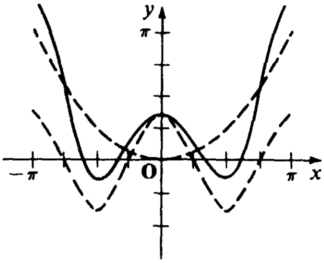
11.



13.

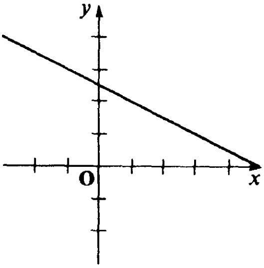


15.

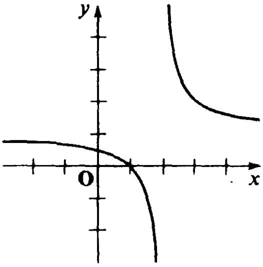


Ejercicios 6—5, páginas 234—235

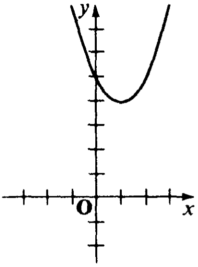
1.



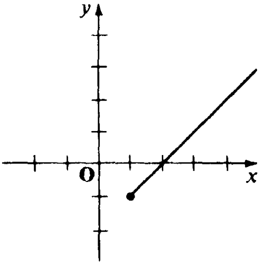
3.



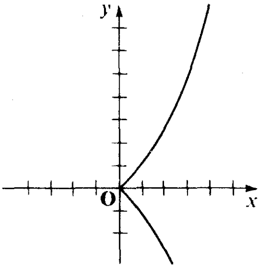
5.



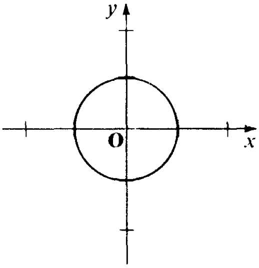
7.



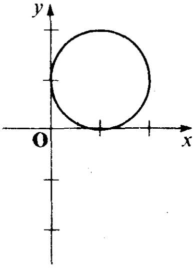
9.



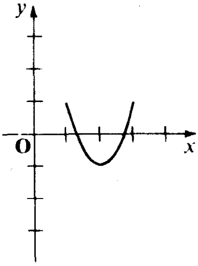
11.



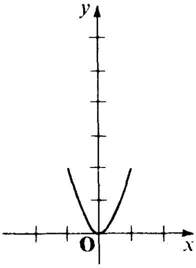
13.



15.



17.



19. $y = x + 6$ **21.** $y = x^2 + 2x + 3$ **23.** $x^2 - xy + 1 = 0$

25. $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y = 0$ **27.** $x^2 + y^2 = 9$, lo mismo

29. $y = 1 - 2x^2$, no **31.** $x^2 + y^2 = 1$, lo mismo

33. $y + 1 = 2(x - 1)^2$, no **35.** $x = \dfrac{6}{2 + r}$, $y = \dfrac{6r}{2 + r}$; no

37. $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{1 + r^2}}$, $y = \pm\dfrac{3r}{\sqrt{1 + r^2}}$; lo mismo

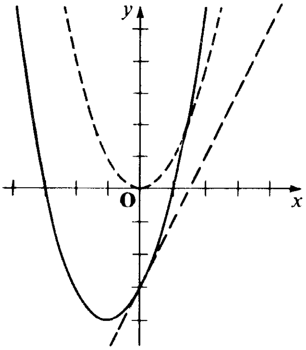
39. $x = \dfrac{2(1 + r)}{1 + r^2}$, $y = \dfrac{2r(1 + r)}{1 + r^2}$; lo mismo

41. $x = \dfrac{3r}{1 + r^3}$, $y = \dfrac{3r^2}{1 + r^3}$; no

Ejercicios de repaso del capítulo 6, página 237

1. 6, 4, 2, ó 0 **3.** $x = 3$, $x = -1$

5.



7. $y = x^2 - 4x + 3$

Ejercicios 7—1, página 248

1. por ejemplo, (3,385°), (3, −335°), (−3, 205°)

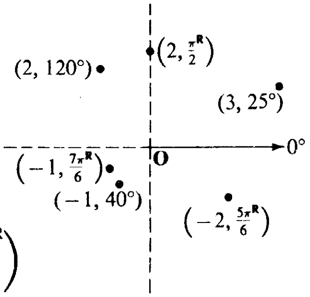
3. por ejemplo, (2, 480°), (2, −240°), (−2, 300°)

5. por ejemplo, $\left(2, \frac{5\pi}{2}^{R}\right), \left(2, -\frac{3\pi}{2}^{R}\right), \left(-2, \frac{3\pi}{2}^{R}\right)$

7. por ejemplo, $\left(1, \frac{19\pi}{6}^{R}\right), \left(1, \frac{-5\pi}{6}^{R}\right), \left(-1, \frac{13\pi}{6}^{R}\right)$

9. por ejemplo, (−1, 400°), (−1, −320°), (1, 220°)

11. por ejemplo, $\left(-2, \frac{17\pi}{6}^{R}\right), \left(-2, \frac{-7\pi}{6}^{R}\right), \left(2, \frac{11\pi}{6}^{R}\right)$



13. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

15. (0, 6)

17. (−3, 0)

19. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

21. $(-\sqrt{3}, 1)$

23. $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

25. $(2\sqrt{3}, 300°), (-2\sqrt{3}, 120°)$

27. (5, 90°), (−5, 270°)

29. $(3\sqrt{2}, 315°), (-3\sqrt{2}, 135°)$

31. (8, 240°), (−8, 60°)

33. (4, 270°), (−4, 90°)

35. $(2\sqrt{2}, 315°), (-2\sqrt{2}, 135°)$

Ejercicios 7—2, página 250

1. $r = 5$

3. $r = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}$

5. $r = \frac{4}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

7. $r = \pm\sqrt{\frac{5}{3 + \operatorname{sen}^2\theta}}$

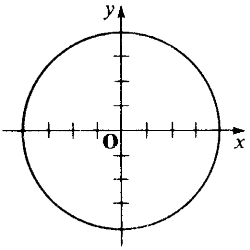
9. $r = \pm\frac{4}{\sqrt{\cos 2\theta}}$

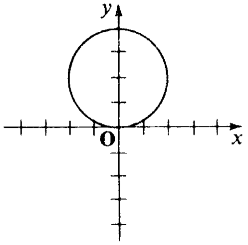
11. $r = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}}$

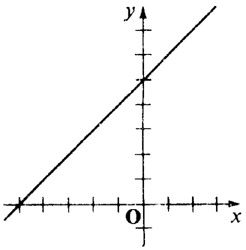
13. $x^2 + y^2 = 16$

15. $x^2 + y^2 - 4y = 0$

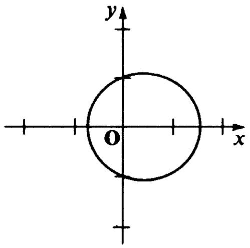
17. $y - x = 5$



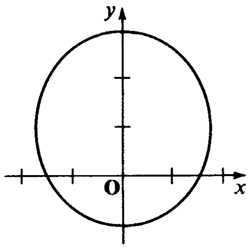




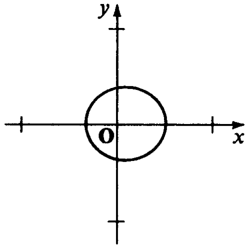
19. $8x^2 + 9y^2 - 6x - 9 = 0$



21. $3y^2 - 6y + 4x^2 = 9$

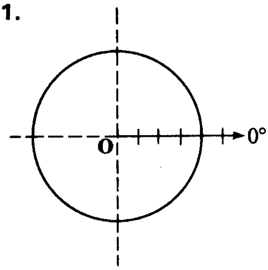


23. $24x^2 + 25y^2 - 4x - 4 = 0$

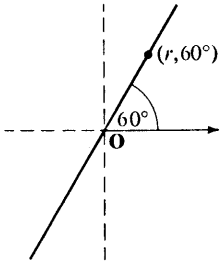


Ejercicios 7—3, página 256

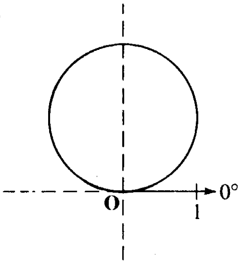
1.



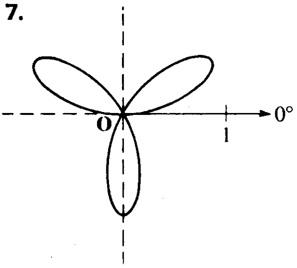
3.



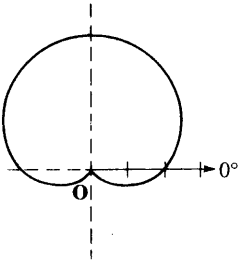
5.



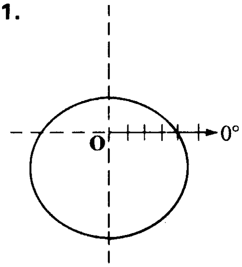
7.



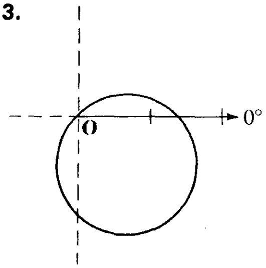
9.



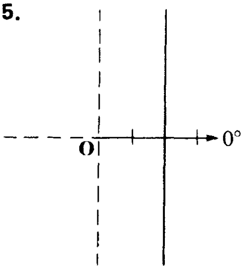
11.



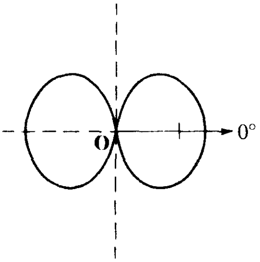
13.



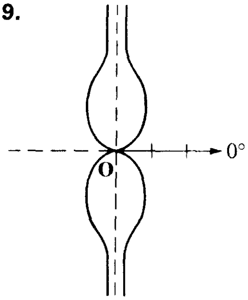
15.



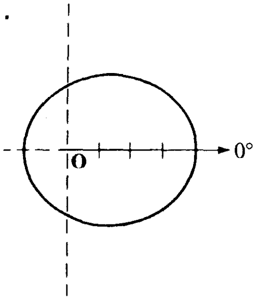
17.



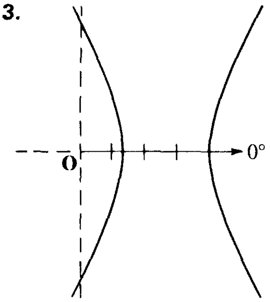
19.



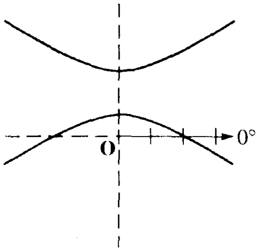
21.



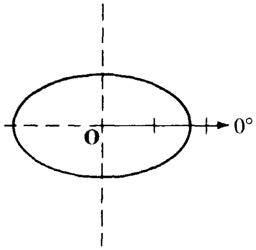
23.



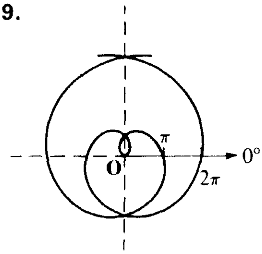
25.



27.



29.



Ejercicios 7—4, página 258

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 45°\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 225°\right)$

3. $(\frac{1}{2}, 60°), (\frac{1}{2}, 300°)$

5. (1, 45°), (1, 225°)

7. (1, 90°)

9. (4, 60°), (4, 300°)

11. (4, 90°), (4, 270°)

13. (6, 30°), (6, 150°)

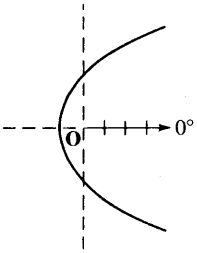
15. (1, 90°), (2, 30°), (2, 150°)

17. (−1, 180°), gráficamente también (0, 0°)

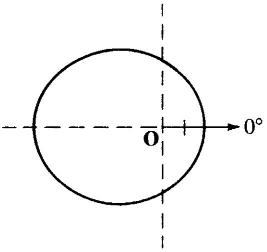
19. $\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}, 22°30'\right), \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}, 112°30'\right)$; gráficamente también (0, 0°)

Ejercicios 7—5, páginas 261—262

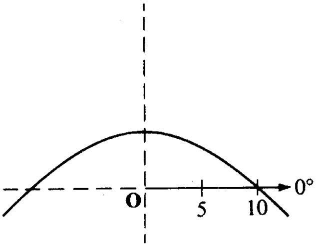
1. parábola; $x = -2$



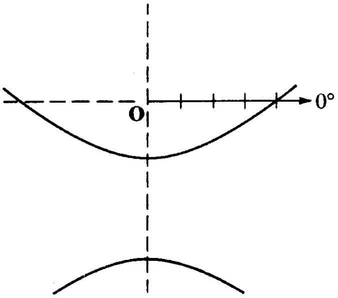
3. elipse; $x = 6$



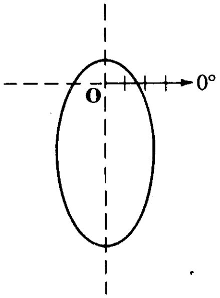
5. parábola; $y = 10$



7. hipérbola; $y = -\frac{16}{5}$



9. elipse; $y = 2$



11. $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$

13. $r = \dfrac{18}{4 - 3\,\mathrm{sen}\,\theta}$

15. $r = \dfrac{8}{1 - 2\cos\theta}$

Ejercicios 7—6, páginas 265—266

1. $r = \cos\theta$

3. $r = \dfrac{b}{2 + \mathrm{sen}\,\theta}$

5. $r = \dfrac{-3}{1 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$

7. $r = a\cos\theta + k$

9. $r = a\,\mathrm{sen}^2\,\theta$

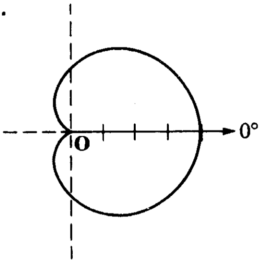
11. $r = a\cos\theta(1 - \cos\theta)$

Ejercicios de repaso del capítulo 7, página 267

1. $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

3. $r\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 4\cos\theta = 0$

5.

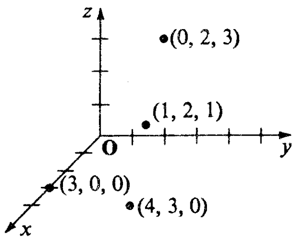


7. (1, 90°)

9. $y = -6$

Ejercicios 8—1, páginas 277—278

1,3,5,7.



9. $z = 0$

11. $y = 0$

13. $y = 0$ y $z = 0$

15. $y = 4; z = 4$

17. $x = -3, y = 6, z = 2$

19. $x = 0; y = 0; z = -3$

21. 3

23. 7

25. 9

27. 3

33. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 20 = 0$

35. $25x^2 + 9y^2 + 25z^2 - 225 = 0$

Ejercicios 8—2, páginas 280—281

1. (a) $(2, 4, -2)$ (b) $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (c) $2\sqrt{6}$

3. (a) $(5, -5, -5)$ (b) $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ (c) $5\sqrt{3}$

5. (a) $(6, 6, 6)$ (b) $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ (c) $6\sqrt{3}$

7. (a) $(-5, 1, -2)$ (b) $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (c) $\sqrt{30}$

9. $(-9, 3, -6)$ **11.** $(2, 3, -2)$ **13.** $(2, -8, 8)$ **15.** $(\frac{1}{2}, -\frac{15}{2}, 7)$

17. -1 **19.** 66 **21.** -37 **23.** $\frac{19}{6}$

Ejercicios 8—3, página 286

1. $\cos\alpha = -\frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}$

3. $\cos\alpha = \frac{5}{13}, \cos\beta = 0, \cos\gamma = \frac{12}{13}$

5. $\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\beta = -\frac{5}{6}, \cos\gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

7. $\cos\alpha = \frac{12}{13}, \cos\beta = -\frac{3}{13}, \cos\gamma = \frac{4}{13}$

9. $(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7})$

11. $(-\frac{6}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{2}{7})$

13. $\left(-\dfrac{7}{5\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{5\sqrt{3}}\right)$

15. $\cos\gamma = \pm\frac{9}{11}$

17. $\left(\dfrac{8}{\sqrt{30}}, \dfrac{16}{\sqrt{30}}, \dfrac{40}{\sqrt{30}}\right)$ **19.** $(\frac{3}{14}, \frac{3}{7}, \frac{1}{7})$ **21.** $(3\sqrt{14}, 2\sqrt{14}, -\sqrt{14})$

23. $\left(-\dfrac{8}{\sqrt{30}}, -\dfrac{16}{\sqrt{30}}, -\dfrac{40}{\sqrt{30}}\right)$ **25.** $(-\frac{3}{14}, -\frac{3}{7}, -\frac{1}{7})$

27. $(-3\sqrt{14}, -2\sqrt{14}, \sqrt{14})$

29. paralelos **31.** $m^\circ(\alpha) = 0$ or 180 **33.** $m^\circ(\beta) = 60$ or 120

Ejercicios 8—4, páginas 291—292

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **3.** $-\frac{1}{2}$ **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** paralelos

9. perpendiculares

11. perpendiculares

13. $z = 0$

15. $y = 10$

17. $x = -3$

19. $\frac{7}{3}$

21. -4

23. $\dfrac{3}{\sqrt{14}}$

Ejercicios 8—5, páginas 297—298

1. $(-2, 10, -6)$

3. $(0, -4, -4)$

5. $(-15, -2, 10)$

7. $(1, -17, -7)$

9. $(2b - a, -a - b, 3)$

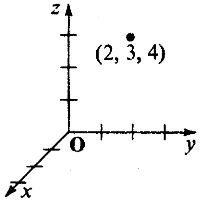
11. $(2, -10, 6)$

23. $a = \frac{5}{3}, b = \frac{1}{3}$

27. $\sqrt{230}$

Ejercicios de repaso del capítulo 8, página 300

1.



3. $2\sqrt{3}$

5. -3

7. $\left(\dfrac{5}{\sqrt{6}}, -\dfrac{5}{\sqrt{6}}, \dfrac{10}{\sqrt{6}}\right)$

9. $y = -\frac{1}{2}$

11. $(-7, 7, -14)$

Ejercicios 9—1, páginas 311—312

1. $\mathbf{u} = (-1, 5, 7) + r(-3, -4, -4);$
$\left(-\dfrac{3}{\sqrt{41}}, -\dfrac{4}{\sqrt{41}}, -\dfrac{4}{\sqrt{41}}\right), \left(\dfrac{3}{\sqrt{41}}, \dfrac{4}{\sqrt{41}}, \dfrac{4}{\sqrt{41}}\right)$

3. $\mathbf{u} = (1, -2, -3) + r(1, -1, 5);$
$\left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{3\sqrt{3}}, \dfrac{5}{3\sqrt{3}}\right), \left(-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}, \dfrac{1}{3\sqrt{3}}, -\dfrac{5}{3\sqrt{3}}\right)$

5. $\mathbf{u} = (2, -3, 4) + r(3, 5, -5);$
$\left(\dfrac{3}{\sqrt{59}}, \dfrac{5}{\sqrt{59}}, -\dfrac{5}{\sqrt{59}}\right), \left(-\dfrac{3}{\sqrt{59}}, -\dfrac{5}{\sqrt{59}}, \dfrac{5}{\sqrt{59}}\right)$

7. $(3, 4, 2)$

9. $(-3, 5, 3), (0, 9, 1)$

11. $(1, 3, -2), (3, 4, -5), (5, 5, -8)$

13. $\frac{19}{21}$

15. $\frac{8}{117}$

17. 0

19. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+1}{4}$

21. $x = y = z$

23. $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-4}{-2}$

25. $\dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-6}$

27. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{2}; z = -4$

29. $x = 5; y = -1$

31. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z+2}{-6}$

33. $x + 2 = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z+1}{-1}$

35. $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{6}$

37. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{2}; z = -7$

39. $x = 6; y = -1$

Ejercicios 9—2, páginas 316—318

1. $-x + 3y + 5z - 20 = 0$

3. $3x + 4y - 5z + 2 = 0$

5. $x = 0$

7. $3x + 2y + 6z - 23 = 0$

9. $5x - 4y + 3z - 15 = 0$

11. $11x - 17y - 13z + 3 = 0$

13. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-4}{2}$

15. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{2}$

17. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$

19. $x - 4y + 3z + 1 = 0$

21. $-2x + y + z + 1 = 0$, excluyendo el punto $(1, 2, -1)$

23. $2x - y - 3z - 7 = 0$

25. $43x + 3y - 14z - 34 = 0$

31. $-18x + 4y + 17z - 25 = 0$

Ejercicios 9—3, páginas 324—326

1. $\mathbf{u} = (2, 1, 0) + r(-5, 1, 7)$

3. $\mathbf{u} = (1, 0, \frac{4}{3}) + r(-9, 6, 2)$

5. **(a)** $x = 1 - r, y = 3 + r, z = -2r$ **(b)** $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{2}$

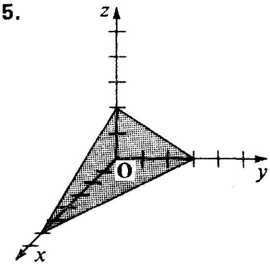
7. **(a)** $x = 2 + 2r, y = -1 + r, z = -r$ **(b)** $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$

9. punto $(1, 2, 3)$

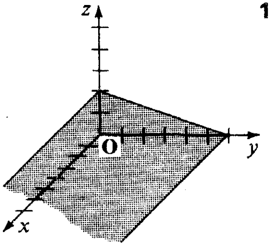
11. $\emptyset$

13. recta, $\frac{x-5}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{5}$

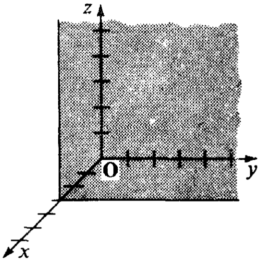
15.



17.



19.



21. $2x - 6y + 3z - 67 = 0$

23. $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{-7} = \frac{z-6}{-5}$

27. 0

29. $\frac{4}{\sqrt{26}}$

35. $\mathbf{u} = (0, -2, 0) + r(-1, -5, -3)$; $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$;
$\mathbf{u} = (0, 6, 4) + r(-1, -5, -3)$; $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$

37. $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$; $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$; $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$; $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$

39. $2x - y + 3z + 4 = 0$; $2x - y + 3z + 4 = 0$; $2x - y + 3z + 4 = 0$;
$2x - y + 3z + 4 = 0$

41. $x - y + 3z + 4 = 0$; $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$; $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$; $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$

Ejercicios 9—4, páginas 328—330

1. $(-1, 2, -3)$

3. $(2, -6, 5)$

5. $(1, 11, 0)$

7. $-4x - 3y + 5z + 2 = 0$

9. $5x - 4y + 8z + 5 = 0$

11. $9x + 13y - 7z - 14 = 0$

13. $x + y + z + 8 = 0$

15. $y = -2$

17. $8\sqrt{3}$

19. $(0, -1, 2)$

21. $(2, 1, 1)$

Ejercicios 9—5, páginas 333—334

1. $\frac{7}{3}$
3. 7
5. 2
7. $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 9 = 0; 9$
9. $\frac{7}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{4}{9}z + 5 = 0; 5$
11. $\frac{6}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{2}{7}z - 12 = 0; 12$
13. 2
15. 6
17. $\dfrac{26}{3\sqrt{14}}$
19. 8 **21.** $x + 4y - 3z - 2 = 0$ o $3x + z = 0$
23. $3x - 2y + 6z + 49 = 0; 3x - 2y + 6z - 49 = 0$

Ejercicios 9—6, página 337

1. $\sqrt{6}$ **3.** $\dfrac{12\sqrt{894}}{149}$ **5.** $\dfrac{13\sqrt{6}}{3}$ **7.** $2\sqrt{6}$
9. $\sqrt{13}$ **11.** $\sqrt{5}$ **13.** $\dfrac{\sqrt{10}}{7}$ **17.** $\dfrac{11\sqrt{19}}{57}$

Ejercicios de repaso del capítulo 9, página 338

1. (a) $(x, y, z) = (3, -1, 2) + r(-2, 6, 3)$
(b) $x = 3 - 2r, y = -1 + 6r, z = 2 + 3r$
(c) $\dfrac{x - 3}{-2} = \dfrac{y + 1}{6} = \dfrac{z - 2}{3}$
3. $-x + 2y + z = 0$ **5.** $(x, y, z) = r(1, 3, 5)$
7. $(16, 10, -18)$ **9.** $\frac{20}{13}$ **11.** $\sqrt{6}$

Ejercicios 10—1, páginas 348—350

1. $(x - 5)^2 + y^2 + (z + 7)^2 = 4$ **3.** $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 25$
5. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 49$
7. $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{2}{3})^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{16}$
9. esfera, centro $(1, -2, -3)$, $r = 3$ **11.** esfera, centro $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 0)$, $r = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$
13. punto $(4, 3, -2)$ **15.** $\emptyset$
17. $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$, $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
19. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $C(0, 0, 0)$, $r = \sqrt{3}$
21. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$, $C(1, -2, 3)$, $r = 3$

23. $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{15}x + \frac{13}{3}y + \frac{23}{3}z = \frac{68}{5}$, C$(\frac{1}{30}, -\frac{13}{6}, -\frac{23}{30})$, $r = \sqrt{\frac{1133}{60}}$

25. $6x + 2y - 3z = 49$ **27.** $-9x + 6y + 2z = 73$

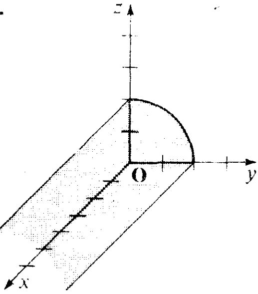
29. $-x + 3z = 15$ **31.** $4x - 2y + z = 14$

35. plano, $3y + z = 0$ **37.** no está sobre la esfera

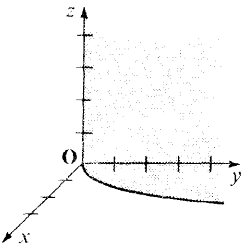
39. circunferencia en el plano $y = 3, r = 4$, C$(0, 3, 0)$ **41.** punto $(0, 0, 5)$

Ejercicios 10—2, páginas 354—355

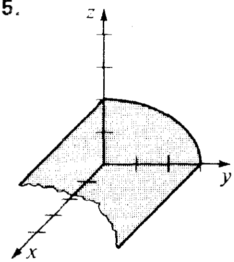
1.



3.



5.



7. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$ **13.** $x^2 - 4x + y^2 + z^2 = 21$

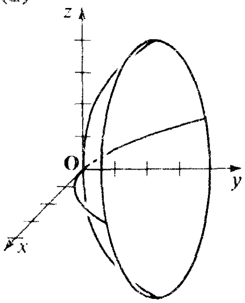
9. $2x^2 - y^2 - z^2 = 1$ **15.** $x = 2, y = 4, z = r; x = -2, y = 4, z = r$

11. $x + y^2 + z^2 = 4$ **17.** $2y^2 + 2z^2 = 1$

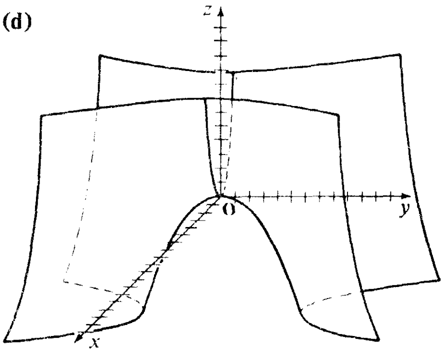
Ejercicios 10—3, páginas 363—365

1. **(a)** paraboloide elíptico **(b)** plano xz: $9x^2 + 4z^2 = 0$, plano xy: $x^2 = 4y$, yz-plano: $z^2 = 9y$ **(c)** para $x = 4$: $z^2 - 9y + 9 = 0$; para $y = 4$: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{z^2}{36} = 1$; para $z = 4$: $9x^2 + 64 = 36y$

1. **(d)**



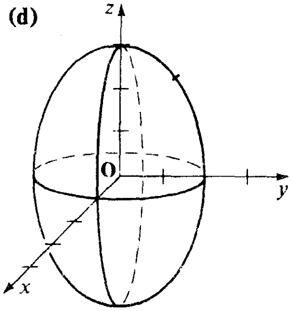
3. **(d)**



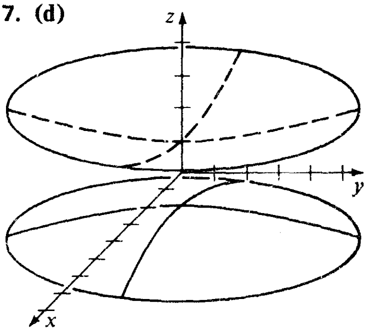
3. **(a)** paraboloide hiperbólico **(b)** plano xz: $9x^2 = 4z$, plano xy: $9x^2 = y^2$, yz-plano: $y^2 = -4z$ **(c)** para $x = 4$: $y^2 - 144 = -4z$; para $y = 4$: $9x^2 - 16 = 4z$; para $z = 4$: $9x^2 - y^2 = 16$

5. **(a)** elipsoide **(b)** plano xz: $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{z^2}{9} = 1$; plano xy: $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, plano yz: $\dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ **(c)** para $x = 4$: $\emptyset$; para $y = 4$: $\emptyset$; para $z = 4$: $\emptyset$.

5. (d)



7. (d)



7. (a) hiperboloide de dos ramas

(b) para el plano xz: $\frac{z^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$, para el plano xy: $\emptyset$, para el plano yz: $\frac{z^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1$

(c) para $x = 4$: $\frac{z^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 5$; para $y = 4$: $\frac{z^2}{1} - \frac{x^2}{4} = \frac{25}{9}$; para $z = 4$: $\frac{x^2}{60} + \frac{y^2}{135} = 1.$

9. $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{4} - \frac{(z-1)^2}{4} = 1$, hiperboloide de dos ramas

11. $\frac{x^2}{5} + \frac{(y-3)^2}{10} - \frac{(z-\frac{1}{2})^2}{\frac{5}{2}} = 1$, hiperboloide de dos ramas

13. $z = (x+1)^2 - \frac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}}$, paraboloide hiperbólico

15. $(x-2)^2 + z^2 = y + 9$, paraboloide elíptico

17. $\frac{x^2}{2c} + \frac{z^2}{2c} = y + \frac{c}{2}$, paraboloide elíptico

Ejercicios 10—4, páginas 369—370

1. $x'^2 + 3y'^2 + 4z'^2 = 11$, elipsoide, C(2, −3, 0)

3. $2x'^2 - 3y'^2 - z'^2 = 5$, hiperboloide de dos ramas, C(1, −2, 2)

5. $3x'^2 - z'^2 = -3y'$, paraboloide hiperbólico V$(-2, 1, \frac{2}{3})$

7. $9x'^2 - 4y'^2 = 5z'$, paraboloide hiperbólico V(0, −1, −2)

9. hiperboloide de una rama **11.** hiperboloide de una rama

15. esferoide

Ejercicios 10—5, páginas 374—375

1. $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1\right)$; $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{4}, \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

3. $\left(\sqrt{7}, \cos^{-1} - \frac{2}{\sqrt{7}}, 2\right)$; $\left(\sqrt{11}, \cos^{-1} - \frac{2}{\sqrt{7}}, \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{11}}\right)$

5. $(5, \cos^{-1}\frac{3}{5}, 5)$; $\left(5\sqrt{2}, \cos^{-1}\frac{3}{5}, \frac{\pi}{4}\right)$

7. $\left(\sqrt{7}, \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, -1\right)$; $\left(2\sqrt{2}, \cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \cos^{-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

9. $(0, 4, 1)$ **11.** $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}, -5\right)$ **13.** $(0, 1, \sqrt{3})$

15. $\left(0, -\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ **17.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ **19.** $x^2 + y^2 = 9x$

21. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ **23.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4\sqrt{x^2 + y^2}$

25. (a) $r^2 + z^2 = 9$ (b) $\rho = 9$

27. (a) $r^2 + 9z^2 = 36$ (b) $\rho^2(1 + 8 \cos^2 \phi) = 36$

29. (a) $r^2 + z^2 - 2r \cos \theta = 0$ (b) $\rho(\rho - 2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta) = 0$

31. (a) $r \cos \theta = 4z^2$ (b) $4\rho^2 \cos^2 \phi - \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = 0$

33. (a) $r^2 + z^2 = k^2$ (b) $\rho = k$ **35.** (a) $z = 4$ (b) $\rho \cos \phi = 4$

Ejercicios 10—6, página 377

1. $(\frac{1}{3}, 0)$ **3.** $(4, 1)$ **5.** $(3, -1)$ **7.** $(0, 1\frac{4}{5}, 3\frac{3}{5})$

9. $\left(\frac{x}{1-y}, 0\right)$ **11.** $\left(\frac{x}{z+1}, \frac{y}{z+1}, 0\right)$

Ejercicios de repaso del capítulo 10, página 379

1. $C(4, -3, 0)$; $r = 5$ **3.** $-x + 2y + 2z = 4$

5. $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ **7.** $J = 0$

9. paraboloide elíptico, $V(0, -2, 2)$

11. $\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, -1\right)$; $\left(\sqrt{3}, \frac{7\pi}{4}, \cos^{-1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Esta obra se terminó de imprimir en mayo de 1985
en los talleres de Lito Offset Estilo, S.A.
Calle Avena No. 201, Col. Granjas México, C.P. 08400
México, D.F.

La edición consta de 3,000 ejemplares más
sobrantes para reposición.