PROBLEMAS DE TRIGONOMETRÍA

(Traducido del libro de Israel M. Gelfand & Mark Saul, "Trigonometry")

Cap. 6: Las fórmulas de adición

Notas:
*1. Los ejercicios marcados con * están resueltos en el libro.*
2. Los problemas se resuelven sin calculadora, a menos que se indica explicitamente lo contrario.

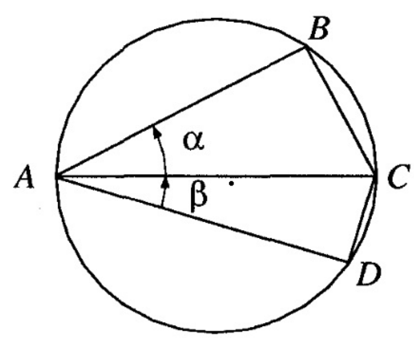
6.1. Completa la siguiente tabla:

α	β	$\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{sen}\beta$	$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta$	$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$
60^0	30^0				
60^0	30^0				
60^0	30^0				

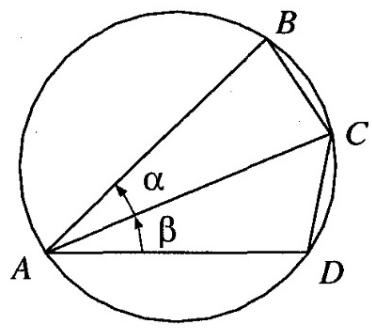
6.2. Nota que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ *no* es igual a $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta$ para los valores de α, β de la tabla. ¿Cuál expresión es más grande en cada caso?

6.3. Verifica cuáles de las siguientes identidades son correctas y cuáles no, usando los ángulos $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$.
(a) $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$.
(b) $\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$.
(b) $\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$.

6.4. (a) El diagrama abajo muestra un círculo con diametro $AC = 1$. Encuentra un segmento en el diagrama cuya longitud es $\operatorname{sen}\alpha$, y otro cuya longitud es $\operatorname{sen}\beta$.



(b) El diagrama abajo muestra el mismo círculo del inciso anterior. El diámetro es todavía 1, pero AC no es un diámetro. Los ángulos α, β son los mismos como en el inciso anterior. Encuentra segmentos en el diagrama cuyas longitudes son $\operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{sen} \beta$.



(c) En cada una de las figuras de incisos (a) y (b) arriba, dibuja un segmento cuya longitud es $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$.

6.5. Recordamos que $\operatorname{sen} 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ y $\operatorname{sen} 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$. Nota que en ambos casos estos valores son mayores que 1/2. ¿Cómo puedes darte cuenta inmediatamente, sin mayores cálculos, que $\sin 45^0 + \operatorname{sen} 60^0$ no puede ser igual a $\operatorname{sen} 105^0$, a pesar que 45+60=105?

6.6. Las fórmulas de adición son

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Verifica estas fórmulas con $\alpha = 60^0$, $\beta = 30^0$.

6.7. Verifica que estas fórmulas son correctas (aunque no sean muy interesantes) cuando $\alpha = 0$ y β un ángulo arbitrario.

Nota: si te olvidas un dia cual fórmula es cuál, puedes rápidamente checar qué sucede cuando $\beta = 0$. La fórmula para $\operatorname{sen}(\alpha + 0)$ debe dar $\operatorname{sen} \alpha$.

6.8. Verifica las fórmulas para $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$ cuando $\alpha + \beta = \pi/2$.

Sugerencia: supones que α, β son ánguos agudos en un triángulo rectángulo.

6.9. Verifica las fórmulas de adición para $\alpha = \beta = \pi/4$.

6.10. Verifica que $\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 1$, usando las fórmulas de adición. Esto es, muestra que $(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta)^2 = 1$.

6.11. Usando las fórmulas de adición, muestra que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta.$$

Esto es, muestra que

$$(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta)(\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) = \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta.$$

6.12. Si $\alpha = \beta = 30^0$, ¿qué valores las fórmulas de adición dan para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ y $\cos(\alpha+\beta)$?

6.13. Muestra que $\operatorname{sen} 75^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ y $\cos 75^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

6.14. Encuentra expresiones similares a los del inciso anterior para $\operatorname{sen} 15^0$ y $\cos 15^0$. Explica las coincidencias en las fórmulas.

6.15. (a) Suponemos que α, β son agudos. ¿ Es posible tener que $\cos(\alpha+\beta) = 0$?

(b) Suponemos que α, β son agudos. ¿ Es posible tener que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = 0$? Recuerda que 0 ni $\pi/2$ se consideran ángulos agudos.

(c) Sabemos que si α y β son agudos, entonces $\operatorname{sen}\alpha, \operatorname{sen}\beta, \cos\alpha, \cos\beta$ son todos positivos. Para ángulos agudos α, β, ¿necesariamente $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ es positivo? ¿necesariamente $\cos(\alpha+\beta)$ es positivo?

Pepito intentó demostrar la identidad

$$\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta).$$

Razonaba así

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta &= (\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)\\ &= \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta).\end{aligned}$$

¿Qué crítica tienes de su rezonamiento?

6.16. Usa calculadora para verificar la identidad del inciso anterior para $\alpha = 30^0$, $\beta = 60^0$. Vas a encontrar que apesar del sospechoso razonamiento de Pepito, la identidad es cierta para estos valores. ¿Será una coincidencia?

6.17. Demuestra que $\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$.

6.18. Demuestra que $\cos^2\beta - \cos^2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$.

6.19. Encuentra el valor de $\sin 18^0 \cos 12^0 + \cos 18^0 \operatorname{sen} 12^0$ sin calculadora.

6.20. (a) Sin calculadora, intenta encontrar el valor de $\sin 183^0 \cos 307^0 + \cos 1113^0 \operatorname{sen} 307^0$.

(b) Ahora usa tu calculadora para verificar el resultado.

(c) ¿Usaste la fórmula de adición para parte (a)? Acuerdate que hemos demistrado la fórmula de adición solamente para ángulo agudos. ¿No ee parece que funcionan para ángulos mayores de 90^0 tambien?

6.21. Simplifica la expresión $\operatorname{sen} 2\alpha \cos\alpha - \cos 2\alpha \operatorname{sen}\alpha$.

6.22. Simplifica la expresión $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\beta + \cos(\alpha+\beta)\cos\beta$.

6.23. Simplifica la expresión

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}.$$

6.24. Demuestra que para cualquier ángulo $\alpha < \pi/4$,

$$\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha).$$

6.25. Demuestra que para cualquier para de ángulo agudos α, β tal que $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$,

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 - \tan\alpha\tan\beta.$$

6.26. Usa la Ley de Cosenos y la figura abajo para derivar la fórmula para $\cos(\alpha + \beta)$.