Geometría Analítica en CIMAT

Distancia de un punto a una recta

Tarea opcional 1. Fecha de entrega: jueves 27 de febrero

Considere una recta en el plano que pasa por el origen $\mathcal{L}' = \{ax + by = 0\}$ con la condición $b \neq 0$. Sea $P = (x_1, y_1)$ un punto del plano que no está en $\mathcal{L}$. Queremos calcular la distancia del punto P a la recta $\mathcal{L}'$, que escribiremos como $d(P, \mathcal{L}')$. Si P está en la recta $\mathcal{L}'$ entonces $d(P, \mathcal{L}') = 0$.

1. Sea $\mathcal{L}^{\perp}$ la recta perpendicular a $\mathcal{L}'$ que pasa por el punto P. Justificar que la intersección de las rectas $\mathcal{L}^{\perp}$ y $\mathcal{L}'$ es un único punto que denotaremos por $Q = (x_2, y_2)$. Es decir, $Q = \mathcal{L}^{\perp} \cap \mathcal{L}'$.
2. Demostrar que: $x_2 = \frac{b^2 x_1}{a^2+b^2} - \frac{aby_1}{a^2+b^2}$.
3. Demostrar que: $y_2 = -\frac{abx_1}{a^2+b^2} + \frac{a^2 y_1}{a^2+b^2}$.
4. Demostrar que: $(x_1 - x_2)^2 = \frac{a^2(ax_1+by_1)^2}{(a^2+b^2)^2}$.
5. Demostrar que: $(y_1 - y_2)^2 = \frac{b^2(ax_1+by_1)^2}{(a^2+b^2)^2}$.
6. Justificar porqué la distancia del punto P a la recta $\mathcal{L}'$ es la misma que la distancia entre los puntos P y Q. Es decir,
$$d(P, \mathcal{L}') = d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$
7. Usar los incisos 4) y 5) para demostrar que
$$d(P, \mathcal{L}') = \frac{|ax_1 + by_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{1}$$

Considere ahora una recta en el plano que no pasa por el origen $\mathcal{L} = \{ax + by + c = 0\}$ con $c \neq 0$.

1. Justificar que $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son rectas paralelas.
2. Denotaremos por T a la función del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ que a cada punto (x, y) lo envía a el punto $(x, y) + \left(0, -\frac{c}{b}\right)$. Es decir, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por la regla:
$$T(x, y) = (x, y) + \left(0, -\tfrac{c}{b}\right).$$
La función T es una traslación vertical en el plano y manda rectas en rectas, pueden asumir esto.
3. Justificar que T manda la recta $\mathcal{L}$ en la recta $\mathcal{L}'$, es decir,
$$T(\mathcal{L}) = \mathcal{L}'. \tag{2}$$

4. Como traslaciones son isometrías (preservan la distancia Euclidiana), como se vió en clase, se cumple la primera de las siguientes identidades, la cual pueden asumir:

$$d(P, \mathcal{L}) = d\big(T(P), T(\mathcal{L})\big) = d\big(T(P), \mathcal{L}'\big). \tag{3}$$

   Notar que la última igualdad es por (2).

5. Ver que

$$T(P) = \big(x_1, y_1 + \tfrac{c}{b}\big). \tag{4}$$

6. Finalmente, demostrar usando (3), (4) y (1) la siguiente fórmula:

$$d(P, \mathcal{L}) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$