Tarea núm. 2

(para el 8 feb, 2018)

Resumen de notación introducida en la clase del 1 feb.

1. Dados dos puntos en el plano, $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$, definimos su *suma* $P_0 + P_1$ como el punto con coordenadas $(x_0 + x_1, y_0 + y_1)$:

$$(x_0, y_0) + (x_1, y_1) \stackrel{def}{=} (x_0 + x_1, y_0 + y_1).$$

Por ejemplo,

- $(2, 3) + (4, -1) = (6, 2)$.
- $P + (0, 0) = P$ para cualquier P.

2. Tambien definimos *la multiplicación de un número c por un punto* $P = (x, y)$ como el punto con coordenadas (cx, cy).

$$c(x, y) \stackrel{def}{=} (cx, cy).$$

Por ejemplo,

- $3(2, 3) = (6, 9)$,
- $(2, 3)/2 = \frac{1}{2}(2, 3) = (1, \frac{3}{2})$,
- $-(2, 3) = (-1)(2, 3) = (-2, -3)$,
- $[(2, 3) + (4, 5)]/2 = (3, 4)$.
- $P - P = (0, 0)$ para cualquier punto P.

3. La *norma* $|P|$ del punto P con coordenadas (x, y) es su distancia al origin: $|P| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Por ejemplo,

- $|(2, 3)| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,
- $|(2, 3) - (4, 5)| = |(-2, -2)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, .$

4. Una consecuencia agradable de estas definiciones es que la distancia entre dos puntos es la norma de su diferencia:

$$d_{P_0 P_1} = |P_0 - P_1| = |(x_0 - x_1, y_0 - y_1)| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}.$$

5. Estas operaciones satisfacen las propiedades usuales que satisfacen números: $P_0 + P_1 = P_1 + P_0$, $c(P_0 + P_1) = cP_0 + cP_1$, etc., lo cual es muy cómodo. Otra propiedad importante es

$$|cP| = |c|\,|P|.$$

Esta viene de la propiedad del valor absoluto de números, $|ab| = |a||b|$.

Nota: no hemos definido la multiplicación de dos puntos; solo la suma de dos puntos, y la multiplicación de un número por un punto. (Tampoco hemos definido la suma de un punto con un número.)

Teorema $(P_0 + P_1)/2$ es el punto medio del segmento $\overline{P_0 P_1}$. Más general: Para cada t, con $0 \le t \le 1$, el punto

$$P_t \stackrel{def}{=} (1 - t)P_0 + tP_1$$

es un punto sobre el segmento $\overline{P_0P_1}$ que lo divide en una proporción de $t/(1-t)$. Es decir,

$$\frac{|P_0 - P_t|}{|P_t - P_1|} = \frac{t}{1-t}.$$

Por ejemplo:

- Para $t = 0$ obtenemos de la fórmula el punto P_0 y para $t = 1$ el punto P_1.
- Para $t = 1/2$ obtenemos el punto medio: $P_{1/2} = (P_0 + P_1)/2 = (\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2})$.
- Para $t = 1/3$ obtenemos el punto $P_{1/3} = (2/3)P_0 + (1/3)P_1$, que divide el segmento en una proporción de $1/3 : 2/3 = 1 : 2$.
- Si $P_0 = (2, 3)$, $P_1 = (-2, 4)$, el punto medio es $(P_0 + P_1)/2 = (0, 3.5)$.
- Con los mismos P_0, P_1, el punto sobre el segmento $\overline{P_0P_1}$ que lo divide en proporción de $1 : 2$ es $(2P_0 + P_1)/3 = (2/3, 10/3)$.
- Más general: el punto del segmento $\overline{P_0P_1}$ que lo divide en una proporción $a : b$ es $(bP_0 + aP_1)/(a + b)$.

Demosración de Teorema:

$$|P_0 - P_t| = |P_0 - (1-t)P_0 - tP_1| = |t(P_1 - P_0)| = t|P_1 - P_0|$$

y

$$|P_t - P_1| = |(1-t)P_0 + tP_1 - P_1| = |(1-t)(P_1 - P_0)| = (1-t)|P_1 - P_0|,$$

así que

$$|P_0 - P_t| + |P_t - P_1| = (t + (1-t))|P_1 - P_0| = |P_1 - P_0|,$$

por lo que P_0, P_t, P_1 son colineales. Además,

$$\frac{|P_0 - P_t|}{|P_t - P_1|} = \frac{t|P_0 - P_1|}{(1-t)|P_0 - P_1|} = \frac{t}{1-t}.$$

□

Problemas

1. Sean $P = (2, -1)$, $Q = (1/2, -1/3)$. Calcular los siguientes:

(a) $P - Q$, (b) $|P - Q|$, (c) $|P - Q|^2$, (d) $P/2$, (e) $|P/2|$, (f) $|P|/2$,

(g) $(2P + 3Q)/5$, (h) $|P|/|Q|$, (i) $|-2P|$, (j) $\sqrt{2}P$, (k) $(P + Q)/2$.

2. Usando la notación introducida arriba, resolver los siguientes problemas del libro de Kindle, pp. 9-10: 13abc, 15, 16, 21.

Sugerencia para 16: Sean P_1, P_2, P_3 los vértices (incognitas) del triángulo y M_1, M_2, M_3 los puntos medios (dados). Es decir, $M_1 = (P_2 + P_3)/2,\ M_2 = (P_3 + P_1)/2,\ M_3 = (P_1 + P_2)/2$. Resuelve este sistema de 3 ecuaciones con 3 incognitas *como si fueron números*. Te va a dar expresiones para P_1, P_2, P_3 en términos de M_1, M_2, M_3. Sustituye ahora en estas expresiones los valores dados de M_1, M_2, M_3.

Sugerencia para 21: La fórmula $P_t = (1-t)A + tB$ tiene sentido tambien para $t > 1$ y $t < 0$, dando *todos* los puntos en la recta que pasa por A, B. Así que el problema consiste en encontrar un valor de t tal que $|B - P_t| = 3|A - B|$. Esto da una ecuación para t.

3. Kindle, pp. 10-11: 24ab, 26abc, 27, 31* (opcional).