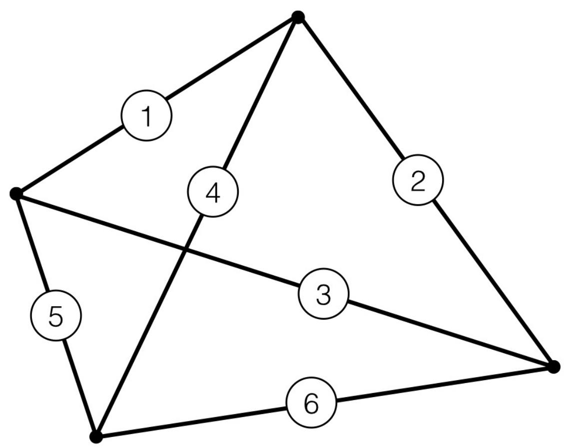
Guia para el examen parcial num. 1

(Fecha del examen: martes, 20 marzo, 2018)

1. *a*) Ordena los segmentos marcados en el dibujo en orden creciente de sus pendientes.



   b) Usa una regla (graduada) para estimar las pendientes.
   c) Usa un transportador para estimar las pendientes.
   d) Compara tus respuestas de los 3 incisos anteriores.

2. Una recta ℓ está dada por la ecuación $3x + 4y = 5$.

   a) ¿Cuáles de los puntos siguientes están en ℓ?

$$(2, 3), \quad (3, -1), \quad (2, 1), \quad (1, 1/2).$$

   b) ¿Para cuáles valores de k el punto $(k^2 - k + 1, k^2 + k - 1)$ está en ℓ?
   c) Encuentra los puntos de intersección de ℓ con los ejes de coordenadas x y y.
   d) Usa el inciso anterior para hacer un dibujo de ℓ.
   e) Encuentra la pendiente de ℓ.
   f) ¿Para qué valor de k la recta $y = kx + 1$ es paralela a ℓ?
   g) ¿Para qué valor de k la recta $y = kx + 1$ es perpendicular a ℓ?
   h) ¿Para qué valor de k la recta $y = kx + 1$ forma un ángulo de 30 grados con ℓ? ¿Puedes responder esta pregunta sin calculadora?
   i) ¿Existen valores de A, B tal que la recta $Ax + By = 6$ coincide con ℓ?
   j) Encuentra la distancia entre los puntos de intersección de ℓ con los ejes de coordenadas.
   k) Encuentra una ecuación para la mediatriz del segmento que conecta los dos puntos de intersección de ℓ con los ejes de coordenadas.
   l) Encuentra la distancia entre ℓ y el origen (el punto $(0, 0)$).
   m) Encuentra una ecuación para la recta que es paralela a ℓ y pasa por el origen.
   n) Encuentra una ecuación para la recta que es perpendicular a ℓ y pasa por el origen.
   ñ) Encuentra los puntos de ℓ cuya distancia al eje de x es 1.
   o) Encuentra los puntos de ℓ cuya distancia a la recta $y = x$ es 1.

p) Encuentra los puntos de interseccion de ℓ con el círculo con centro en el origen con radio 10.
q) Encuentra los puntos de ℓ cuya distancia al punto $(1, 2)$ es 3.
r) Encuentra el radio del círculo centrado en el origen que es tangente a la recta ℓ.

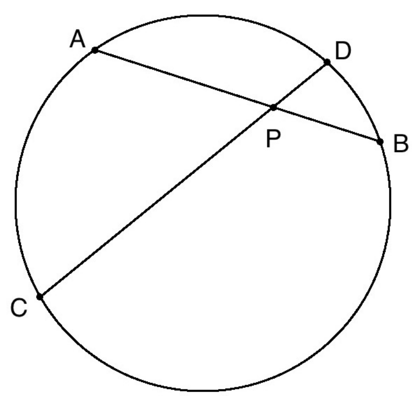
Sugerencia: una manera bonita de hacer este problema es la siguiente (hay otras maneras). El círculo es tangente cuando tiene un solo punto de intersección con ℓ. La ecuación que describe los puntos de intersección es una ecuación cuadrática. Tiene una sola solución cuando su descrminante (la $b^2 - 4ac$) se anula.

3. Encuentra en cada inciso el centro y el radio del círculo que cumple con las condiciones dadas.

Nota: puede haber más que una respuesta a unos de los incisos.
a) Es tangente al eje de x en el origen y de radio 1.
b) Tiene como diametro el segmento que conecta los puntos $(1, 0), (0, 1)$.
c) Pasa por los puntos $(1, 0), (0, 1)$ y es de radio 2.
d) Es tangente a los ejes de coordenadas y de radio 1.
e) Es tangente al eje de x y la recta $y = x$ y es de radio 1.
f) Está inscrito en el triángulo con vértices $(0, 0), (3, 1), (1, 2)$.
g) Pasa por los puntos $(0, 0), (3, 1), (1, 2)$.
h) Su ecuación es $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$.
i) Su ecuación es $2x^2 + 2y^2 + 3x + 4y = 0$.
j) Es el lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancia a $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ es 2.
k) Su centro está sobre la recta $y = 2x$ y a una distancia 2 de la recta $y = 3x$.

4. (Opcional) Demuestra que el incentro (el centro del círculo inscrito) de un triángulo con vértices A, B, C y aristas a, b, c (a en frente de la A etc.) es $(aA + bB + cC)/(a + b + c)$.

5. (Opcional) En la figura, dos cuerdas de un círculo, AB y CD, se intersectan en P. Demuestra que $AP \cdot PB = CP \cdot PD$.



Nota: este ejercicio dice que dado un punto P dentro de un círculo, para toda cuerda AB que pasa por P, el número $AP \cdot PB$ no depende de la cuerda, sino solamente de P. A este número se le llama *la potencia de P con respecto al círculo* y juega un papel importante en geometría. Les recomiendo mirar el artículo de Wikipedia sobre este concepto.