Tarea núm. 4

(para el 16 feb, 2017)

Resumen de notación introducida en la clase de 7 feb.

1. Dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P(x_2, y_2)$ en el plano, definimos su *suma* $P_1 + P_2$ como el punto con coordenadas $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Por ejemplo,
   - $(2, 3) + (4, -1) = (6, 2)$.
   - $P + (0, 0) = P$ para cualquier P.
2. Tambien definimos *la multiplicación de un punto $P(x, y)$ por un número c* como el punto con coordenadas (cx, cy). Tambien, $-P$ se define como $(-1)P$. Por ejemplo,
   - $3(2, 3) = (6, 9)$,
   - $-(2, 3) = (-2, -3)$,
   - $[(2, 3) + (4, 5)]/2 = (3, 4)$.
   - $P - P = (0, 0)$ para cualquier punto $P(x, y)$.
3. La *norma* $\|P\|$ de un punto P con coordenadas (x, y) es su distancia al origin: $\|P\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Una consecuencia agradable de estas definiciones es que la distancia entre dos puntos en la norma de su diferencia:

$$d_{P_1P_2} = \|P_1 - P_2\| = \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Estas operaciones satisfacen las propiedades usuales que satisfacen números: $P + Q = Q + P$, $cP_1 + cP_2 = c(P_1 + P_2)$, etc., lo cual es muy cómodo. Otra propiedad importante es

$$\|cP\| = |c|\|P\|.$$

Esta viene de la propiedad del valor absoluto de números, $|ab| = |a||b|$.

Nota: no definimos la multiplicación de dos puntos; solo la suma de dos puntos, y la multiplicación de un número por un punto.

Problema 1. Calcular lo siguiente:

(a) $P - Q$, $\|P + Q\|$, $P + Q$, $(1/2)P$, $P/3$, $2P + 3Q$, $\|P\|$, $\|-2P\|$, donde $P = (2, -1)$, $Q = (0.5, -0.3)$. (Nota: $P/3$ es una abreviación para $(1/3)P$.)

(b) cP, donde $c = -1$, $P = (a, b)$.

(c) cP, donde $c = \sqrt{2}$, $P = (\sqrt{2}, -1)$.

(d) $(P + Q)/2$, donde $P = (1, 0)$, $Q = (0, 1)$.

Un teorema visto en la clase de 9 de feb: *los puntos sobre la recta que pasa por dos puntos dados P_0, P_1, son de la forma*

$$P_t = (1 - t)P_0 + tP_1,$$

donde t es cualquier número real. Los puntos sobre el segmento que conecta P_0, P_1 se obtienen al restringir t en el rango $0 \leq t \leq 1$. El punto P_t divide el segmento en una razon de $t : 1 - t$.

Por ejemplo,

- Para $t = 0$ obtenemos de la fórmula el punto P_0 y para $t = 1$ el punto P_1.
- Para $t = 1/2$ obtenemos el punto medio $(P_0 + P_1)/2 = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.
- Para $t = 1/3$ obtenemos el punto $(2/3)P_0 + (1/3)P_1$, que divide el segmento en una proporción de $1/3 : 2/3 = 1 : 2$.
- Si $P_0 = (2, 3)$, $P_1 = (-2, 4)$, el punto medio es $(P_0 + P_1)/2 = (0, 3.5)$.
- Con los mismos P_0, P_1, el punto sobre el segmento $\overline{P_0P_1}$ que lo divide en proporción de $1 : 2$ es $(2/3)P_0 + (1/3)P_1 = ((2/3)2 + (1/3)(-2), (2/3)3 + (1/3)4) = (2/3, 10/3)$.
- El baricentro (el punto de intersección de los medianos) de un triángulo con vértices P_1, P_2, P_3 es el punto $M = (P_1 + P_2 + P_3)/3$.

  Demosración: el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ es $(P_1 + P_2)/2$. Luego, $M = (P_1 + P_2 + P_3)/3 = (2/3)[(P_1 + P_2)/2] + (1/3)P_3$, así que, según el teorema arriba, M está sobre la mediana que conecta a P_3 con $(P_1 + P_2)/2$. De la misma manera, demostramos que M está sobre cada una de los otras dos medianas, así que M es el punto de intersession de las medianas. (Nota: hemos demostrado tambien de pasada que M divide cada mediana en una proporción de 1:2).

Problema 2. Usando la notación introducida arriba, resolver los siguientes problemas del libro de Kindle, pág. 9-10: 13abc, 14, 15, 21.

Problema 3. Completar *todos* los problemas de la tarea 2 que no lograste hacer o que no hiciste bien.