

Guía de examen parcial 2

Fecha del examen: 10 abr, 2025

1. En cada inciso dibuje la región indicada en el plano y después encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor de los ejes de x y y .

a) $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x^3$. b) $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x^2$. c) $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 + x^2$.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales con valores iniciales:

a) $y' + 2xy = y, y(0) = 5$ b) $xy' - y = x \ln(x), y(1) = 2$ c) $y' = 3x^2 e^y, y(0) = 1$

Sugerencia para b). Hacer el cambio de variable $y = xz$. Así que $xy' - y = x(z + xz') - xz = x^2 z'$.

3. a) ¿Para qué valores de la constante α la función $y = e^{\alpha x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + y' - 6y = 0$?
b) Sean $y_1(x), y_2(x)$ dos soluciones de la ecuación diferencial del inciso anterior. Demuestra que para cualquier dos constantes c_1, c_2 la función $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ también es una solución.
c) Usa los dos incisos anteriores para encontrar una solución de la ecuación diferencial del 1er inciso con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.
d)* (Opcional) Demuestre que para cualquier dos constantes a, b existe una única solución de la ecuación diferencial del 1er inciso con las condiciones iniciales $y(0) = a, y'(0) = b$, y encuentre esta solución.

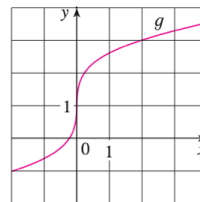
4. El tamaño de una población, como una función del tiempo $P(t)$, se modela mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = 100P \left(1 - \frac{P}{10} \right).$$

- a) ¿Para qué valores de P la población es constante?
b) ¿Para qué valores de P la población es decreciente?
c) ¿Para qué valores de P la población es creciente?
d) Encuentre las soluciones de la ecuación con valores iniciales $P(0) = 5$ y $P(0) = 15$, y dibuje sus gráficas sobre el mismo sistema de ejes.
5. a) Expresa $\cos(2\alpha), \sin(2\alpha)$ en términos de $\cos \alpha, \sin \alpha$.
b) Encuentre (sin calculadora) el coseno y seno de 45 y 30 grados.
c) Use los dos incisos anteriores para encontrar (sin calculadora) el coseno y seno de 22.5 y 15 grados.
6. Sabiendo que $\sin \alpha = 0.2$,
a) ¿Cuáles son los valores posibles de $\sin 2\alpha, \sin(\alpha/2), \cos \alpha, \cos(2\alpha), \cos(\alpha/2)$?
b) Si además sabemos que α es un ángulo agudo, ¿cómo cambian las respuestas del inciso anterior?

7. La gráfica de una función $g(x)$ está dada a la derecha.

- Encuentre el valor de $g(2)$.
- ¿Es g una función inyectiva (uno a uno)?
- Estime el valor de la solución a la ecuación $g(x) = 2$.
- Dibuje la gráfica de la función inversa g^{-1} .



8. Utilice transformaciones para dibujar las gráficas de

- $y = 3 \ln(x - 2)$
- $y = 2 - \sqrt{x}$
- $y = 2 \sin(2x)$

9. Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones, sin usar calculadora.

- $2^{\log_2 3}$
- $\frac{\ln 8}{\ln 2}$
- $\tan(\arccos 0.7)$
- $\log_{10} 4 + \log_{10} 25$
- $e^{\ln(\sqrt{e})}$
- $\arccos(\sin 0.7)$

10. Evalúe las siguientes integrales

- $\int_0^T (x^4 - 8x + 7) dx$
- $\int_0^1 (1 - x)^9 dx$
- $\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2 du$
- $\int_0^2 y^2 \sqrt{1 + y^3} dy$
- $\int_0^1 \sin(3\pi t) dt$
- $\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1 + x^2} dx$
- $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4 \tan t}{2 + \cos t} dt$
- $\int \left(\frac{1 - x}{x} \right)^2 dx$
- $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}} dx$
- $\int \sin(\pi t) \cos(\pi t) dt$
- $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$
- $\int \tan x \ln(\cos x) dx$