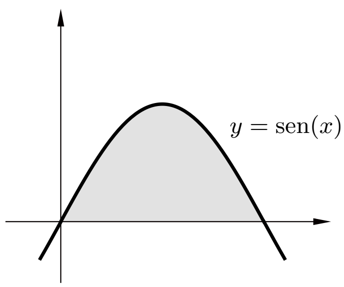
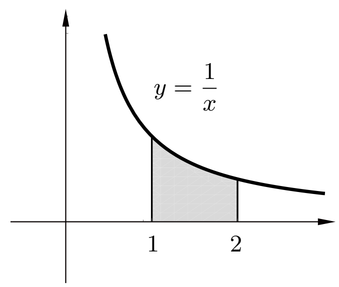
Guia de examen parcial 1

Fecha del examen: 3 mar, 2025

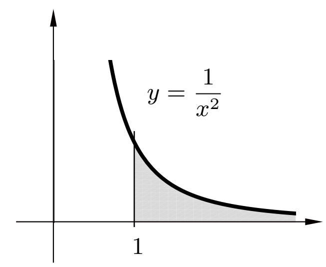
1. En cada uno de los dibujos siguientes, hay que calcular el área sombreado:



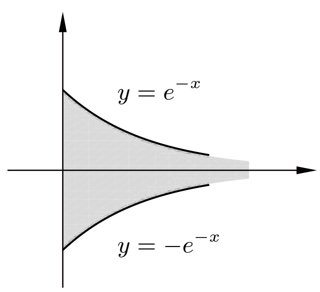
(a)



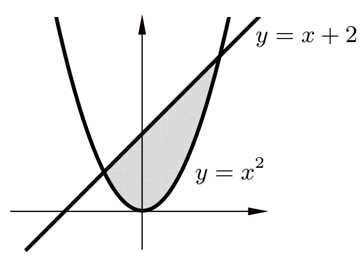
(b)



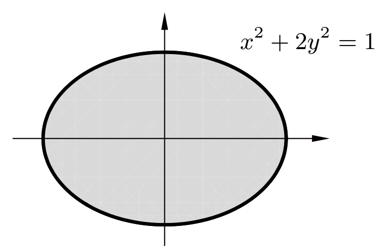
(c)



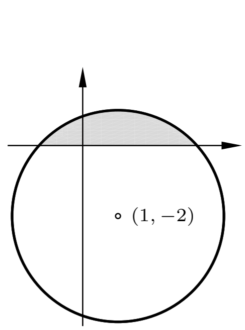
(d)



(e)

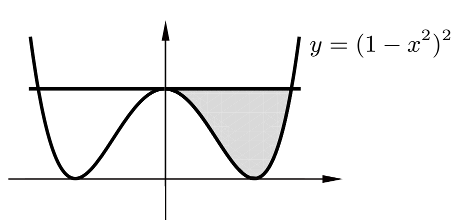


(f)

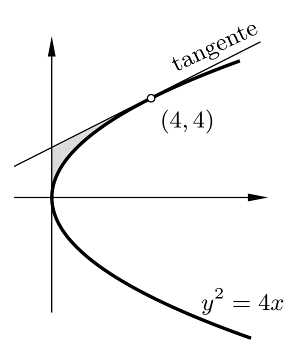


Un círculo de radio 3

(g)



(h)



(i)

2. Calcular:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2-2x+5}dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2-2x-8}dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2-4x+4}dx$ (d) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$

(e) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \sin x dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{3\pi} \sin^2(\theta)d\theta$ (g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\frac{d}{dt}e^{\operatorname{sen} t}\right) dt$ (h) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}dt$

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3(x)dx.$ (j) $\displaystyle\int_0^1 \log(x)dx$ (k) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ (l) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$

3. Una partícula se mueve a lo largo del eje de x. Su posición (en metros), como función del tiempo t (en segundos), está dada por una función $x(t)$. Su velocidad es $v(t) = x'(t)$ y su aceleración es $a(t) = v'(t) = x''(t) = 1 - t^2$. La partícula inicia en $t = 0$ en la posición $x = 0$ con velocidad $x' = 0$.

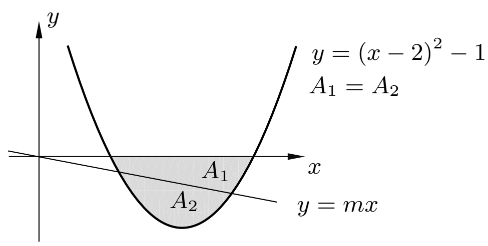
   (a) ¿Donde va a estar 10 segundos después?

   (b) ¿Cuál va a ser su velocidad en este momento?

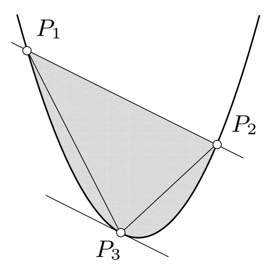
   (c) ¿Regresa a $x = 0$ para algun $t > 0$?

   (d) Dibuja las gráficas de $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$.

4.* Encuentra la recta que pasa por el origen y que divide la parte de la parábola $y = (x-2)^2 - 1$ que se encuentra abajo del eje de x en dos regiones con la misma área.



5.* Demuestra el siguiente teorema de Arquímedes ("la cuadratura de la parábola"): en una parábola se escogen dos puntos P_1, P_2. Luego se escoge un tercer punto, P_3, tal que la tangente a la parábola en P_3 es paralela al segmento P_1P_2. Entonces el área del segmento de la parábola delimitado por P_1, P_2 (el área sombreada en el dibujo) es el $4/3$ del área del triángulo con vértices P_1, P_2, P_3.



Sug. Reubicando los ejes de coordenadas x, y, podemos suponer que la parábola está dada por $y = ax^2$, $a > 0$.