Tarea 9 – sugerencias

(Para el 17 oct, 2024, 16:30)

Suponiendo que en los problemas del 1 al 12 cada ecuación define una función derivable de x, encuentre $y'(x)$ por medio de la derivación implícita.

1. $y^2 - x^2 = 1$.

Sug. Tratamos a y a la mano izquierda como una función $y(x)$, tomamos la derivada de los dos lados de la equación, usando la regla de la cadena, y despues depejamos la y'.

$$y^2 - x^2 = 1 \implies 2yy' - 2x = 0 \implies y' = \frac{x}{y}.$$

11. $xy + \operatorname{sen}(xy) = 1 \implies y + xy' + \cos(xy)(y + xy') = 0$. Ahora se despeja la y'.

En los problemas del 13 al 18 encuentre la ecuación de la recta tangente en el punto que se indica.

13. $x^3y + y^3x = 30;\ (1, 3)$.

Sug. Primero se deriva los dos lados, tratando a a y como $y(x)$.

$$3x^2y + x^3y' + 3y^2y'x + y^3 = 0.$$

Luego se despeja la y',

$$y' = -\frac{3x^2y + y^3}{x^3 + 3xy^2}.$$

Luego se sustituye en esa ecuación los valores dados: $x = 1, y = 3$.

En los problemas del 19 al 32 encuentre dy/dx.

23. $y = \sqrt[4]{3x^2 - 4x}$.

Sug. Se puede tomar la derivada con la regla de la cadena pero más fácil es deshacerse de la raíz, escribiendo

$$y^4 = 3x^2 - 4x,$$

después tomar derivadas de ambos lados, tratando la y como $y(x)$.

$$4y^3y' = 6x - 4,$$

se despeja la y',

$$y' = \frac{3x - 2}{2y},$$

y se sustituye la y,

$$y' = \frac{3x - 2}{2\sqrt[4]{3x^2 - 4x}}.$$

35. Dibuje la gráfica de la circunferencia $x^2+4x+y^2+3=0$, y luego encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes que pasan por el origen.

Sug. Llamamos a la circunferencia C. Para poder dibujarlo hay que encontrar su centro y radio. Esto se hace completando cuadrados,

$$(x+2)^2+y^2=1.$$

Luego una recta (no vertical) que pasa por el origen su ecuación es $y=mx$ para alguna m (su pendiente). Es tangente a C si se intersectan en un solo punto. Sus puntos de intersección se encuentra sustituyendo $y=mx$ en la ecuación de C,

$$x^2+4x+(mx)^2+3=0.$$

Esta es una ecuación cuadrática para x. Tiene una sola solucíon si su descriminante se anula:

$$4^2-4(1+m^2)3=0.$$

Esta es una ecuación cuadrática para m. Sus soluciones dan las ecuaciónes de las dos rectas tangentes a C por el origen.

Otra solución. La ecuación de la recta tangente a C en un punto de (a,b) sobre ella es

$$y-b=y'(a)(x-a).$$

La $y'(a)$ se encuentra derivando implicitamente la ecuación de C,

$$y'(a)=-\frac{a+2}{b}.$$

Así que la recta tangente a C en (a,b) es

$$y-b=-\frac{a+2}{b}(x-a).$$

Esta pasa por $(0,0)$ si

$$-b=-\frac{a+2}{b}(-a).$$

Simplificando,

$$(a+1)^2+b^2=1.$$

Ahora hay que resolver esta ecuación junto con la ecuación que dice que (a,b) está en C

$$(x_0+2)^2+y_0^2=1.$$

El método anterior es más eficiente, pero el 2ndo es más general (se aplica para cuaquier curva).

36. La recta normal es perpendicular a la tangente. Si la pendiente de la tangente es m, la pendiente de la normal es $-1/m$.

49. Se puede resolver este problema con pura geometría, sin cálculo (buscar triángulos semejantes, usar pitágoras).