La regla de la cadena

Introducción

A veces tenemos que tomar la derivada de una expresión que resulta ser demasiado complicada para poder hacerlo directamente. Por ejemplo,

$$y = \sqrt{1+x^2}.$$

La regla de la cadena permite hacerlo fácilmente. Escojemos un símbolo, digamos u, para la expresión $1+x^2$, y entonces la expresión para la función $y(x)$ se convierte en una "composición" de dos funciones:

$$y(x) = y(u(x)),\ \text{donde } y(u) = \sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}},\ u(x) = 1+x^2.$$

Derivamos cada una de estas dos funciones,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{du}{dx} = 2x,$$

y luego las combinamos con la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Más Ejemplos

(1) $y = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+x^3}$.

Definimos $p = u^{-1},\ q = v^{-1},\ u = 1+x^2,\ v = 1+x^3$, entonces

$$\frac{dp}{du} = -u^{-2},\ \frac{dq}{dv} = -v^{-2},\ \frac{du}{dx} = 2x,\ \frac{dv}{dx} = 3x^2,$$

luego, $y = p+q$, así que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dx} = \frac{dp}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dq}{dv}\frac{dv}{dx} =$$

$$= -u^{-2}2x - v^{-2}3x^2 = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} - \frac{3x^2}{(1+x^3)^2}.$$

(2) $y = \sqrt{\dfrac{a-x^2}{a+x^2}}$.

Definimos $u := \dfrac{p}{q},\ p := a-x^2,\ q := a+x^2$, entonces

$$y = u^{\frac{1}{2}},\ \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}},\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{dx}q - p\frac{dq}{dx}\right) = \frac{-2xp-2xq}{q^2} = \frac{-2x(p+q)}{q^2} = -\frac{4ax}{q^2},$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{-2ax}{q^2\sqrt{u}} = \frac{-2ax}{(a+x^2)^2}\sqrt{\frac{a+x^2}{a-x^2}} = \frac{-2ax}{(a+x^2)\sqrt{a^2-x^4}}.$$

(3) $y = \sqrt{(1+x^3)^2 + (1-x^3)^2}$.

Definimos $u := p^2 + q^2$, $p = 1 + x^3$, $q = 1 - x^3$, entonces

$$y = u^{\frac{1}{2}}, \ \frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}, \ \frac{du}{dx} = 2p\frac{dp}{dx} + 2q\frac{dq}{dx}, \ \frac{dp}{dx} = 3x^2, \ \frac{dq}{dx} = -3x^2,$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \left(2p \cdot 3x^2 - 2q \cdot 3x^2\right) = \frac{6x^5}{\sqrt{(1+x^3)^2 + (1-x^3)^2}}.$$

(4) $y = \sin(t^2)$.

Definimos $u = t^2$, entonces

$$y = \sin u, \ \frac{dy}{du} = \cos u, \ \frac{du}{dt} = 2t,$$

luego

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = (\cos u)(2t) = 2t\cos(t^2).$$

(5) $y = (\sin t)^2$.

Definimos $u = \sin t$, entonces

$$y = u^2, \ \frac{dy}{du} = 2u, \ \frac{du}{dt} = \cos t,$$

luego

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 2u(\cos t) = 2(\sin t)(\cos t) = \operatorname{sen}(2t).$$

(6) $y = [f(t)]^2$, donde $f(t)$ es alguna función (desconocida).

Definimos $u = f(t)$, entonces

$$y = u^2, \ \frac{dy}{du} = 2u, \ \frac{du}{dt} = f'(t),$$

luego

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 2uf'(t) = 2f(t)f'(t).$$

(7) $y = \ln(\sin t)$.

Definimos $u = \sin t$, entonces

$$y = \ln u, \ \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}, \ \frac{du}{dt} = \cos t,$$

luego

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{1}{u}\cos t = \frac{\cos t}{\sin t} = \cot t.$$

Práctica

Encuentra las derivadas $\dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones $y(x)$:

a) $y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}$

b) $y = e^{\operatorname{sen} x}$

c) $y = \tan\sqrt{x}$

d) $y = 2^{\operatorname{sen} x}$

e) $y = 2\pi\left(\cos\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)^2$

f) $y = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^4$

g) $y = (\sin x)^{2024}$

h) $y = e^{-x^2}$

i) $y = \ln\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

j) $y = x\sqrt{x^2+1} - \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

k) $y = (\operatorname{sen}(f(x)))^2 + (\cos(f(x)))^2$, para alguna función (deconocida) $f(x)$.