Guía para el 1er examen parcial

(Fecha del examen: 3 oct, 2024, 16:30)

1. La gráfica de una función $y(x)$ es una recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$, $(2, 1)$. Calcula $y(0), y'(0), y(1), y'(1)$.

   Sug. Encuentra primero una fórmula explicita para $y(x)$.

2. Para cada una de las siguientes funciones $y(x)$ encuentra

   - su dominio (los valores de x para los cuales $y(x)$ está bien definida);
   - su derivada $y'(x)$;
   - los valores de x para los cuales $y(x)$ es creciente/decreciente;
   - sus mínimos y máximos locales y globales.

   a) $y = x^2 - 2$ b) $y = x^3 + x + 1$ c) $y = \operatorname{sen} x$

   d) $y = \tan x$ e) $y = \sqrt{1 + x^2}$ f) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

   g) $y = x - \log(1 + x^2)$ h) $y = e^{-x^2}$ i) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

   j) $y = 1 - \dfrac{1}{x}$ k) $y = 3^x$ l) (Opcional) $y = x^x$

   Sug. En el último: $x^x = e^{\log(x^x)} = e^{x \log x}$.

3. Encuentra la ecuación de la recta tangente

   a) a la gráfica de $y = x^2 - 2$ en el punto $(1, y(1))$;
   b) a la gráfica de $y = x^2 - 2$ con pendiente $m = 3$.
   c) a la gráfica de $y = x^2 - 2$ y que es paralela a la recta $y = x$.
   d) a la gráfica de $y = x^2 - 2$ que pasa por $(2, 1)$ (hay dos tales rectas);
   e) a la gráfica de $y = x^2 - 2$ en sus puntos de intersección con el eje de x (hay dos tales rectas);
   f) a la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$ en el punto $(1, 1)$;
   g) a la curva $x^2 + x^3 + y^4 = 3$ en el punto $(1, 1)$.

4. Se requiere producir una caja de cartón con un volumen de 10 litros (1 litro = $1000\, cm^3$), con fondo y tapa cuadrados y 4 paredes rectangulares. Las paredes están hechos de cartón que cuesta 10 centavos por cm^2. El fondo y la tapa están hechos de cartón más grueso, que cuesta 15 centavos por cm^2. Encuentra un diseño (ancho y altura) que minimiza el costo del cartón para la producción de la caja y encuentra este costo.

5. Se deja caer un objeto de una altura inicial y_0 (en metros). Su altura y, t segundos depsués, está dada por la fórmula $y = y_0 - 5t^2$.

a) Encuentra la velocidad v (en m/s) y la aceleración a (en m/s^2) del objeto como función de t.

Sug. $v = \dfrac{dy}{dt}$, $a = \dfrac{dv}{dt}$.

b) Encuentra la velocidad v del objeto en función de su altura y. (Nota que $v(y_0) = 0$.)

c) Si $y_0 = 100\,m$, ¿en cuánto tiempo llega al piso ($y = 0$)?

d) ¿Cuál es la velocidad del objeto al llegar al piso?

e) ¿En qué momento tiene la mitad de la velocidad del inciso anterior? ¿Cuál es su altura en este momento?

f) ¿De qué altura y_0 se tiene que dejar caer el objeto para que llegue a piso con una velocidad de 100 kmh?

Nota. $1\,km = 1000\,m$, $1\,hr = 3600\,s$.

6. Se lanza un objeto verticalmente de una altura inicial $y = 0$ con una velocidad inicial v_0. Su altura t segundos después es $y = v_0 t - 5t^2$. Si se lanza con velocidad inicial $v_0 = 1\,m/s$,

   a) ¿Cuánto tiempo después de lanzarse le toma regresar a su lugar inicial de lanzamiento?

   b) ¿Qué velocidad tiene cuando regresa?

   c) ¿Cual es la altura máxima que alcanza?

   d) ¿Cuánto tiempo toma para que su velocidad baje a $0.5\,m/s$?

   e) ¿Con qué velocidad inicial v_0 se tiene que lanzar el objeto para que regrese en 1 segundo? 10 segundos? ¿t segundos?

7. Se lanza un objeto *horizontalmente* de una altura de y_0 metros con una velocidad inicial de v_0 m/s. Las coordenadas (x, y) del objeto, t segundos después, son $x = v_0 t$, $y = y_0 - 5t^2$. Si lanzamos el objeto de una altura de $y_0 = 10\,m$ con una velocidad inicial de $v_0 = 10\,m/s$,

   a) ¿en qué punto pegará al piso?

   b) ¿en qué ángulo?

   c) ¿Con qué velocidad?

   Sug. (a) El punto buscado es $(x(t_0), 0)$ donde t_0 es el momento de llegar al piso, caracterizado por $y(t_0) = 0$. (b) El ángulo buscado, α, satisface $\tan(\alpha) = y'(t_0)/x'(t_0)$. (c) La velocidad en el momento de pegar al piso es $v(t_0) = \sqrt{[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2}$.

8. Encuentra el valor de $a > 0$ para que la parábola $y = x^2 - a$ intersecte el eje de x con un ángulo de 45 grados.

9. Usando la derivada de $y = \sqrt{x}$ en $x = 9$, encuentra una aproximación para $\sqrt{9.2}$. Compara tu respuesta con el valor real.

   Sug. Aproxima la gráfica de esta función por su tangente en $(9, 3)$.

10. En este problema usamos el llamado “método de Newton” para encontrar una serie de aproximaciones para $\sqrt{2}$; es decir, el número $x > 0$ tal que $x^2 = 2$.

    La idea es la siguiente. Primero definimos $y(x) = x^2 - 2$. Así que la meta es encontrar el punto de intersección de la gráfica de $y(x)$ con el eje de x (positivo). Consideramos un número $x_0 > 0$, pensado como una primera aproximación, o “adivinanza”, para $\sqrt{2}$. Sea $y_0 = y(x_0)$. Si $y_0 = 0$ ya acabamos (x_0 es la raíz de 2); si no, hacemos lo sigiuiente:

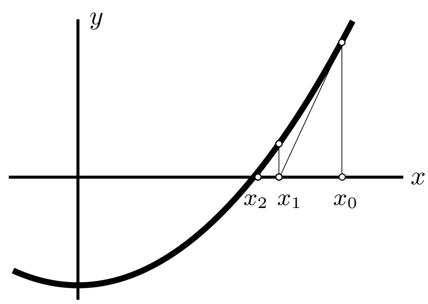
a) Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en el punto (x_0, y_0).

b) Consideramos ahora el punto de intersección de esta tangente con el eje de x, digamos $(x_1, 0)$. Encuentra una fórmula para x_1 en términos de x_0.

Resp. $x_1 = x_0 - \dfrac{y_0}{y_0'} = \dfrac{x_0}{2} + \dfrac{1}{x_0}$.

c) De la misma manera, si $y_1 = y(x_1) = 0$ ya acabamos (x_1 es la raiz de 2); si no, usamos el x_1 para encontrar la siguiente aproximación x_2, y así sucesivamente. Ver el dibujo. Empezando con $x_0 = 2$, encuentra las aproximaciones x_1, x_2, x_3. Compara estos valores con el valor real de $\sqrt{2}$.

Sug. Usa la fórmula recursiva del inciso anterior, $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$.



d) Usa este método para encontrar los valores de $\sqrt{3}$ y $\sqrt[3]{2}$ hasta el 5to punto decimal.

11. (Opcional) Dos curvas son *osculantes* si al escribir a cada una como la gráfica de una funcíon, $y_1(x), y_2(x)$, entonces (i) tienen un punto de intersección, (x_0, y_0), donde $y_0 = y_1(x_0) = y_2(x_0)$, (ii) son tangentes en este punto , $y_1'(x_0) = y_2'(x_0)$, y además (iii) $y_1''(x_0) = y_2''(x_0)$. Encuentra los círculos osculantes a la parábola $y = x^2$ en los puntos con $x_0 = 0, 1, 2$. Dibuja estos 3 círculos junto con la parábola.