Tarea núm. 3

(para entregar el lunes 5 de marzo)

Sobre variables aleatorias

Un concepto importante en probabilidad es el de *variable aleatoria*. Una variable aleatoria es una función que asigna un valor numérico al resultado de un experimento aleatorio.

Por ejemplo, el resultado de lanzar un dado se representa por una variable aleatoria X con posibles valores $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si el dado es justo (no sesgado), cada uno de los 6 valores tiene la misma probabilidad de ocurrir. Escribimos, por ejemplo, $P(X = 1) = \frac{1}{6}$, para denotar que la probabilidad de que X (el resultado de lanzar el dado) dé el valor 1 es 1/6.

El resultado del lanzamiento de una moneda no es una variable aleatoria, pues los posibles "valores" son *cara* o *cruz*, que nos son números. Sin embargo, podemos pintar números, digamos 0 y 1, en las caras de la moneda para definir una variable aleatoria Y (llamada "Bernoulli"). Aquí tenemos que $P(Y = 0) = P(Y = 1) = 1/2$ (suponiendo que la moneda es justa).

A las variables aleatorias se le puede aplicar las operaciones algebraicas usuales. Por ejemplo, si lanzamos un dado y una moneda (de manera independiente), la suma $Z = X + Y$ de las dos variables aleatorias anteriores toma los valores $1, 7$ con probabilidad $1/12$ cada uno y los valores $2, 3, 4, 5, 6$ con probabilidad $1/6$ cada uno.

Media y varianza

Hay dos cantidades importantes que se asigna a cada variable aleatoria X:

- La *media* $E[X]$ es el promedio de los valores de X.

  Por ejemplo:

  - Si X representa el resultado de lanzar un dado justo,
  $$\begin{aligned} E[X] &= 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + \cdots + 6P(X = 6) \\ &= 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots + 6\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= 3.5. \end{aligned}$$
  - Si Y es la variable con valores 0 y 1 que representa el resultado de lanzar una moneda justa,
  $$E[Y] = 0P(Y = 0) + 1P(Y = 1) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = 0.5.$$
  - Para $Z = X + Y$ obtenemos
  $$\begin{aligned} E[Z] &= 1P(Z = 1) + 2P(Z = 2) + \cdots + 6P(Z = 6) + 7P(Z = 7) \\ &= 1\left(\frac{1}{12}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots + 6\left(\frac{1}{6}\right) + 7\left(\frac{1}{12}\right) \\ &= 4. \end{aligned}$$

  Observemos que $E[Z] = E[X + Y] = E[X] + E[Y]$. Esto no es una coincidencia.

- La *varianza* de X se define como $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$.

  Así que para calcular $Var(X)$ primero debemos calcular la media de X^2; es decir, calculamos la media de una nueva variable, que se obtiene al reemplazar los valores de X por sus cuadrados.

  Por ejemplo, para el dado usual, los posibles valores de X^2 son $1, 4, 9, 16, 25, 36$, cada uno con probabilidad $1/6$, por lo que

$$\begin{aligned} E[X^2] &= 1P(X^2 = 1) + 4P(X^2 = 4) + \cdots + 36P(X^2 = 36) \\ &= 1\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 9\left(\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{1}{6}\right) + 25\left(\frac{1}{6}\right) + 36\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{91}{6}. \end{aligned}$$

  Así que

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{91}{6} - (3.5)^2 = \frac{35}{12} \approx 2.92.$$

Los problemas

1. Escriba números distintos sobre las dos caras de una moneda justa de manera que la media sea cero. (Nota: los valores puedes ser negativos).
2. Mismo problema como el problema anterior, pero con una moneda injusta, con una cara que sale con probabilidad $1/3$ y otra cara que sale con probabilidad $2/3$. Calcule la varianza de la variable aleatoria asociada.
3. Escriba números distintos sobre las 6 caras de un dado justo de tal manera que la media sea cero.
4. Calcule la varianza de la variable aleatoria asociada a la moneda del problema 1. ¿Es posible asignar dos valores distintos a las caras de la moneda de tal forma que la varianza sea cero? Explique.
5. Calcule la varianza de $Z = X + Y$ (el tercer ejemplo al que se le calculó la media).
6. Del libro de Spiegel, págs. 33-37: 1.96, 1.122, 1.124, 1.135, 1.147.