Primer examen parcial

Lunes 12 de Marzo

Instrucciones: Cada problema vale 30 puntos. El examen se califica sobre 100 puntos.

Problema 1. Describa los espacios de probabilidad de los siguientes experimentos.

a). Lanzamiento de 3 monedas justas

$$\Omega = \{AAA, AAS, ASA, ASS, SAA, SAS, SSA, SSS\},$$

donde cada resultado tiene probabilidad $\frac{1}{8}$.

b). Lanzamiento de 2 dados justos

$$\Omega = \{(i, j)|1 \leq i, j \leq 6\},$$

donde cada resultado tiene probabilidad $\frac{1}{36}$.

Problema 2. Considerar una moneda justa.

a). Describir el espacio de probabilidad asociado al experimento donde se lanza la moneda hasta que salga sol.

El espacio de probabilidad es infinito

$$\Omega = \{S, AS, AAS, AAAS, AAAAS, \dots\} = \{S, AS, A^2S, A^3S, A^4S, \dots\},$$

donde las probablidades de los eventos siguen la sucesión geométrica $P(A^nS) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

b). Describir el espacio de probabilidad del experimento a) condicionado al evento: "salió águila en los primeros dos lanzamientos".

Nuevamente el espacio de probabilidad es infinito, se remueven los resultados que no corresponden al evento B="salió águila en los primeros dos lanzamientos".

$$\Omega|B = \{AAS, AAAS, AAAAS, \dots\} = \{A^2S, A^3S, A^4S, \dots\},$$

donde las probablidades de los eventos siguen la sucesión geométrica $P(A^nS) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $n \geq 2$.

Problema 3. Consideremos un dado (no necesariamente justo), con m caras $c_1, c_2, \dots, c_m$ que salen con probabilidades $p_1, p_2, \dots, p_m$, con $p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1$ y $p_i > 0$.

En cada cara c_i del dado se escribe el numero real x_i para construir una variable aleatoria X. Para cualquier real $r \in \mathbb{R}$ se puede considerar la variable rX, simplemente reescribiendo rx_i en vez de x_i en cada cara.

a). Indique cómo se define la media $E(X)$ y la varianza $Var(X)$ de X.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i, \quad E(X^2) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i, \quad Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

b). Demostrar que $E(rX) = rE(X)$ y que $Var(rX) = r^2 Var(X)$

Primero vemos que

$$E(rX) = \sum_{i=1}^{m} r x_i p_i = r \sum_{i=1}^{m} x_i p_i = rE(X),$$

y de la misma forma

$$E((rX)^2) = \sum_{i=1}^{m} r^2 x_i^2 p_i = r^2 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 p_i = r^2 E(X^2).$$

Combinando ambos obtenemos

$$Var(rX) = E((rX)^2) - (E(rX))^2 = r^2 E(X^2) - (rE(X))^2 = r^2(E(X^2) - (E(X))^2),$$

que es igual a $r^2 Var(X)$.

Problema 4.

a). Calcule el coeficiente de $x^2y^3z^5$ en la expansión de $(x+y+z)^{10}$. El coeficiente $x^2y^3z^5$ en $(x+y+z)^{10}$ es el número de palabras de 10 letras que se pueden formar con dos x's, tres y's y 5 z's. Hemos visto que esto se cuenta con permutaciones con repetición. Es decir se obtiene el coeficiente multinomial

$$\frac{10!}{(2!)(3!)(5!)}$$

b). Demostrar la siguiente identidad de coeficientes binomiales

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

(sugerencia: contar caminos).

El coeficiente binomial $\binom{m+n}{n}$ es igual al numero de palabras que se pueden formar con m letras A y n letras B. Si en vez de letras A y B pensamos en comandos $\uparrow, \rightarrow$, cada palabra se vuelve un camino del puto $(0,0)$ al punto (m,n) en el plano.

En particular, si $m = n$, obtenemos que el número de caminos del $(0,0)$ al (n,n) es $\binom{2n}{n}$.

Por otra parte, cada camino del $(0,0)$ al (n,n) es $\binom{2n}{n}$ cruza a la diagonal (es decir, todo camino pasa, después de n pasos, por un punto de la forma $(i, n-i)$). Todo camino de $(0,0)$ al (n,n) se descompone, para algún i en dos caminos de n pasos: del $(0,0) al (i, n-i)$ y otro del $(i, n-i)$ al (n,n). El número de caminos del $(0,0)$ al (n,n) que pasan por $(i, n-i)$ es entonces $\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}\binom{n}{i}$.

Por tanto el número total de caminos $\binom{2n}{n}$ de $(0,0)$ al (n,n) es igual a la suma de los caminos que pasan por cada punto de la diagonal:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$