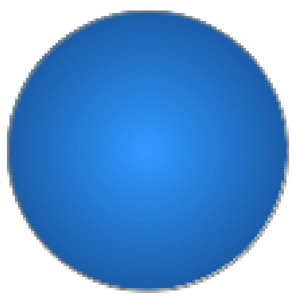
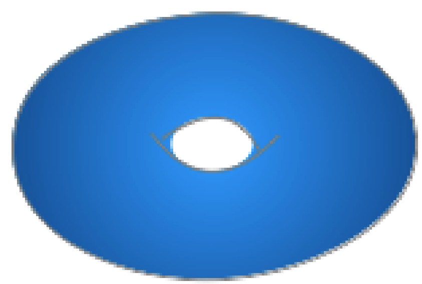
Superficies

Las *2-variedades* (o superficies) son espacios topologicos localmente homeomorfos al plano R^2.

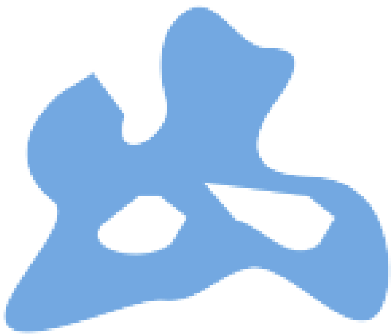
Ejemplos:



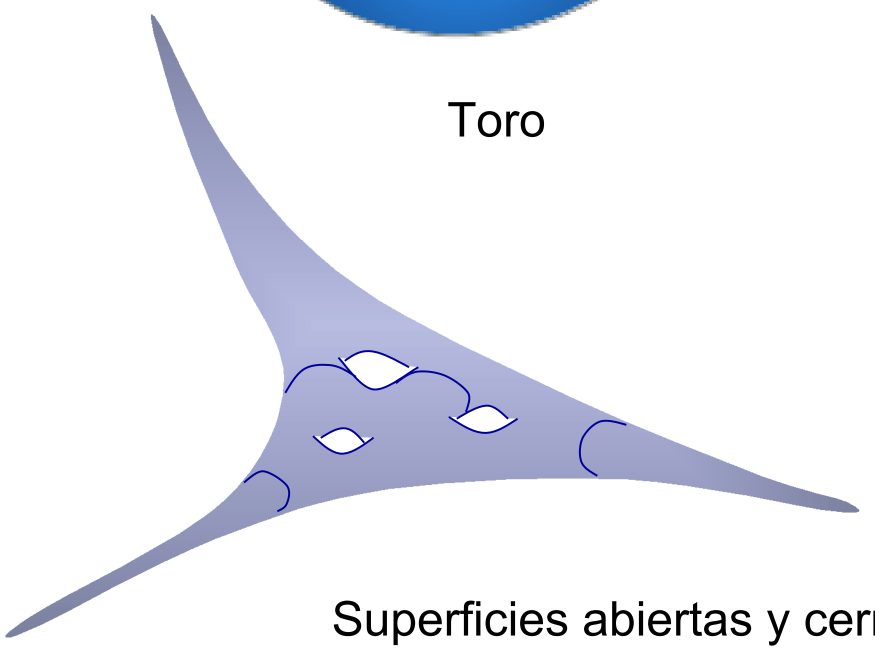
Esfera



Toro



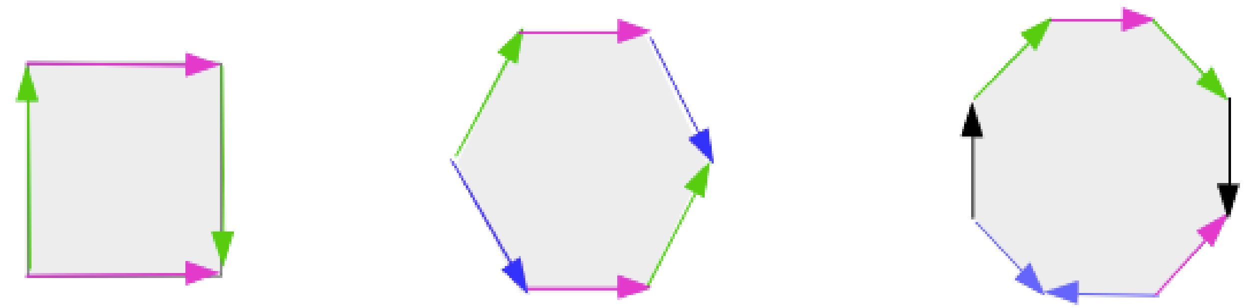
Abierto del plano



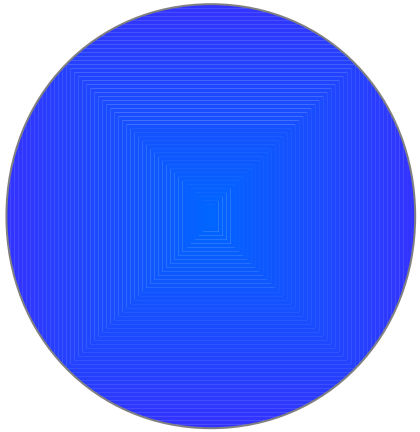
Superficies abiertas y cerradas

Hay muchas maneras de construir superficies

Poligonos con lados identificados por pares:



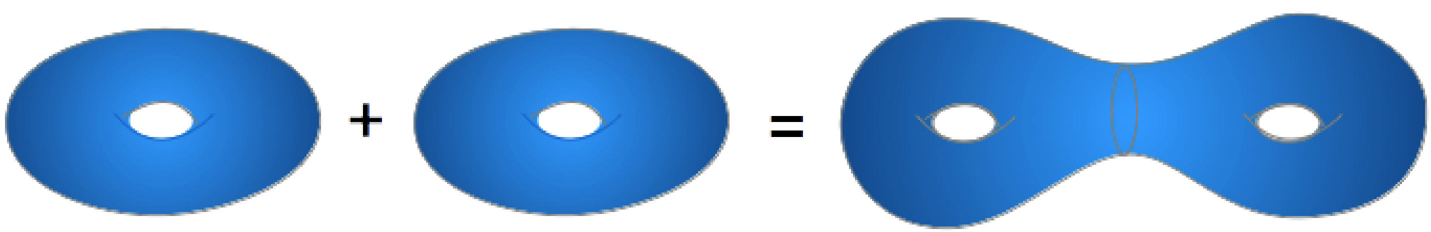
Cocientes:



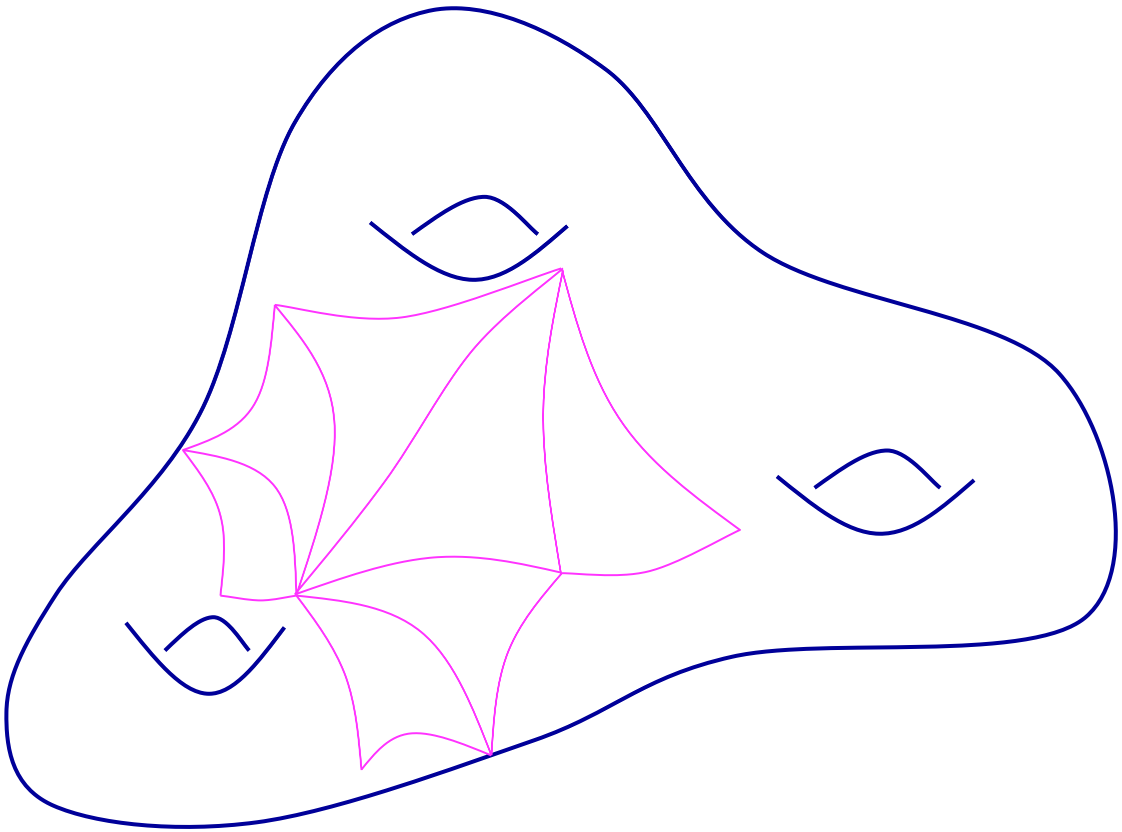
Identificar cada punto de la esfera con su antipoda

Hay muchas maneras de construir superficies

Suma conexa:



Una *triangulacion* de una superficie S es una subdivision de S en triangulos topologicos que se tocan en aristas o en vertices.

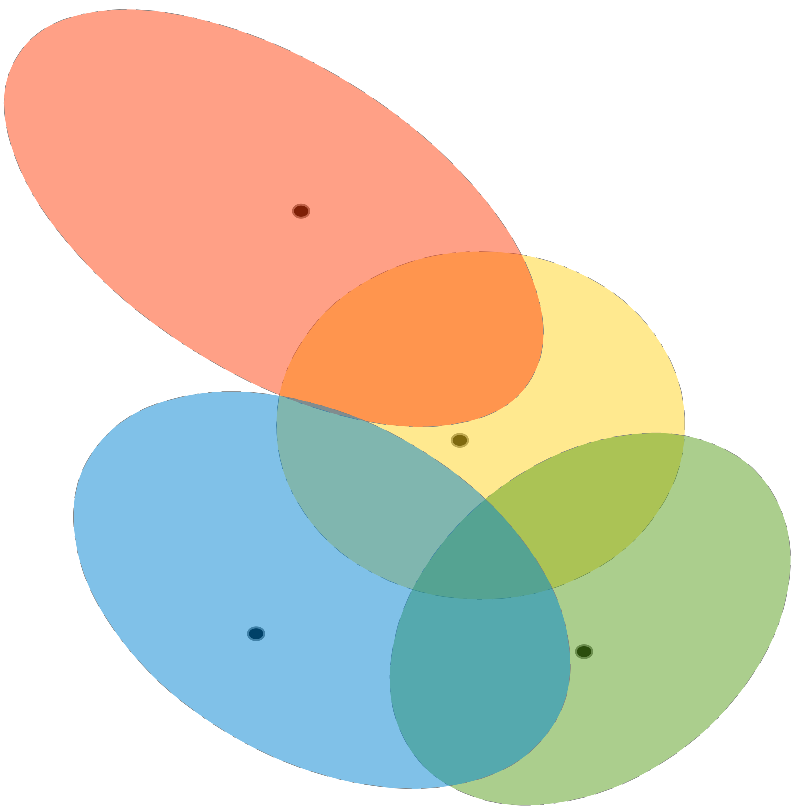


Las superficies triangulables son homeomorfas a superficies poliedricas.

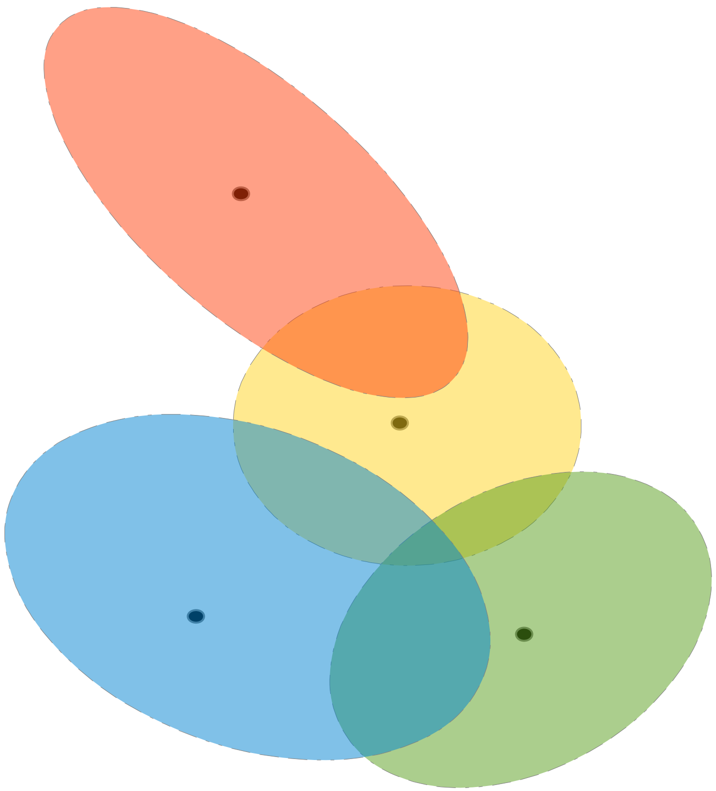
Una *triangulacion* de una superficie S es una subdivision de S en triangulos topologicos que se tocan en aristas o en vertices.

Teorema. Todas las superficies se pueden triangular.

Idea de la demostracion:



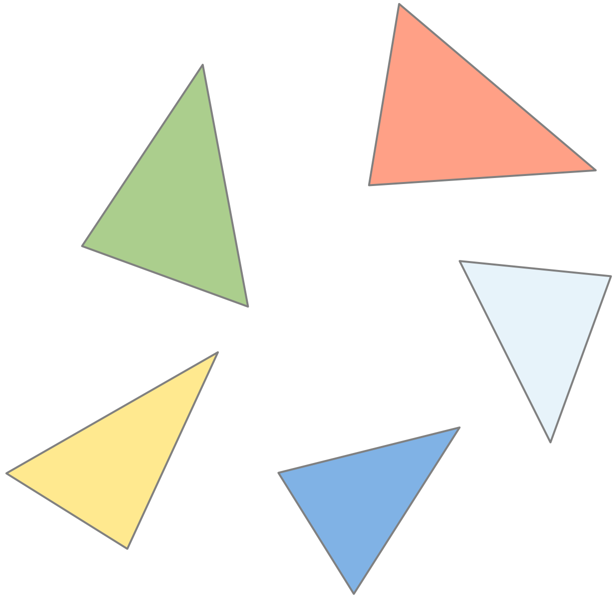
Cada punto de S tiene una vecindad homeomorfa a un disco abierto. Si la superficie es compacta esta cubierta por un numero finito de esos discos.



Dentro de esos discos hay discos cerrados que cubrean a la superficie y cuyos bordes se cruzan en un numero finito de puntos.
Las regiones resultantes son poligonos topologicos, que pueden subdividirse en triangulos.

Todas las superficies se pueden triangular.

Corolario. Existe una cantidad numerable de superficies compactas



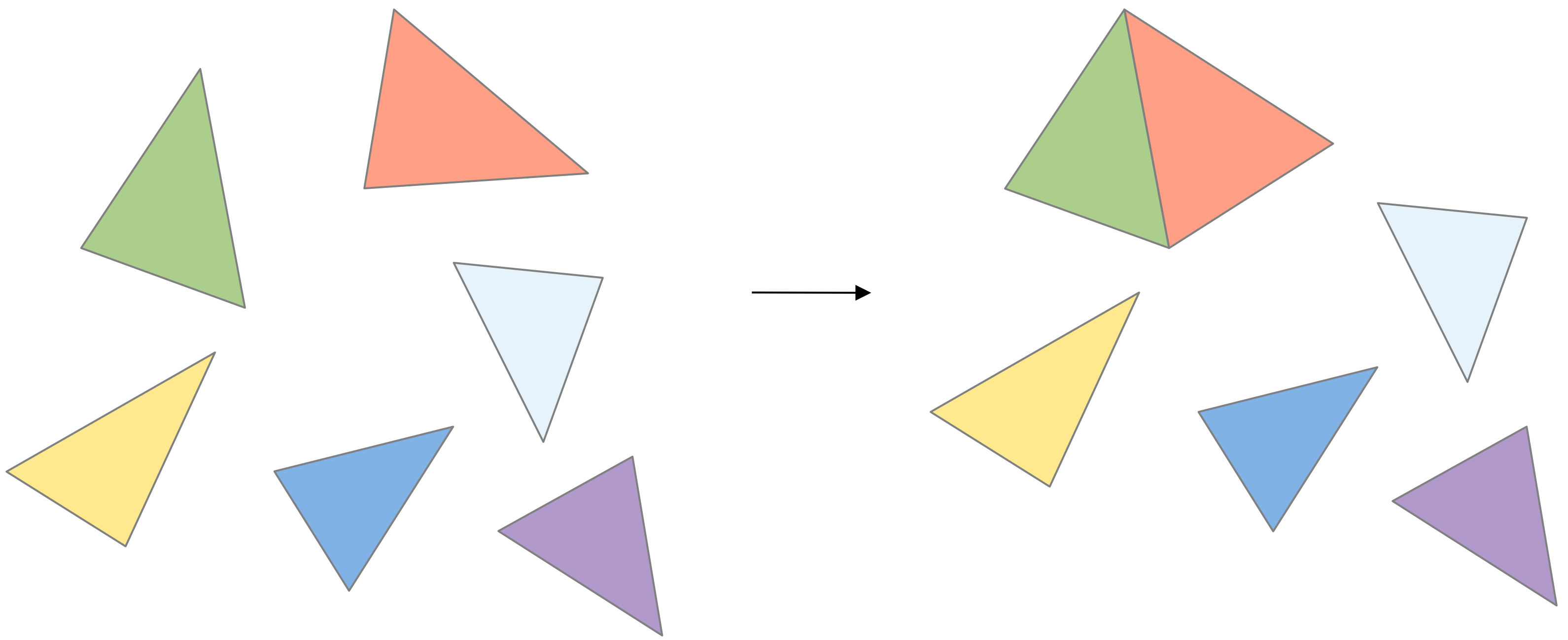
Demostracion. Podemos suponer que los lados de los triangulos estan pegados con funciones lineales, solo hay dos maneras realmente distintas de identificar dos lados.

Corolario. Todas las superficies se pueden encajar en R^5

Dem. Elegir una coleccion de puntos en posicion general en R^5, uno por cada vertice de la triangulacion, y asociar a cada triangulo de M el triangulo en R^5 determinado por los puntos correspondientes a sus vertices. Esto da una funcion continua e inyectiva de M a R^5.

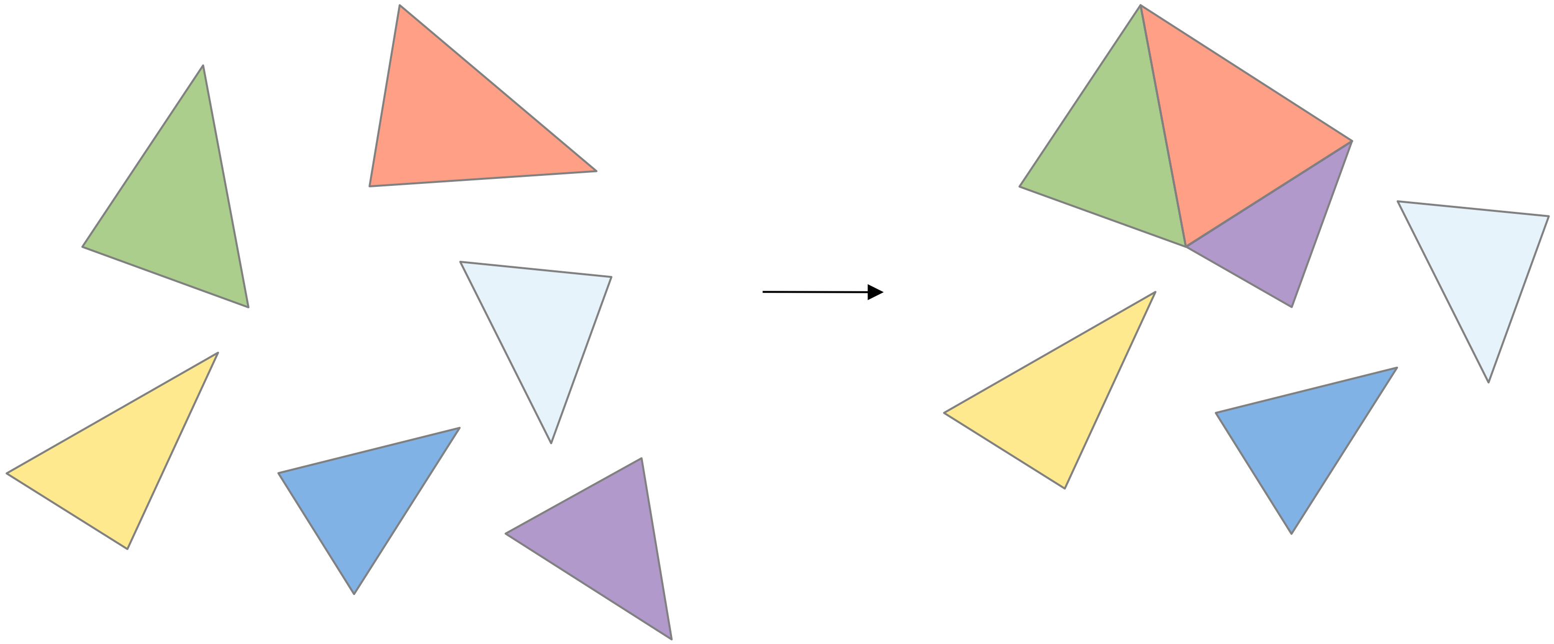
Todas las superficies se pueden triangular.

Corolario. Toda superficie cerrada se puede obtener de un poligono convexo identificando sus lados por pares.



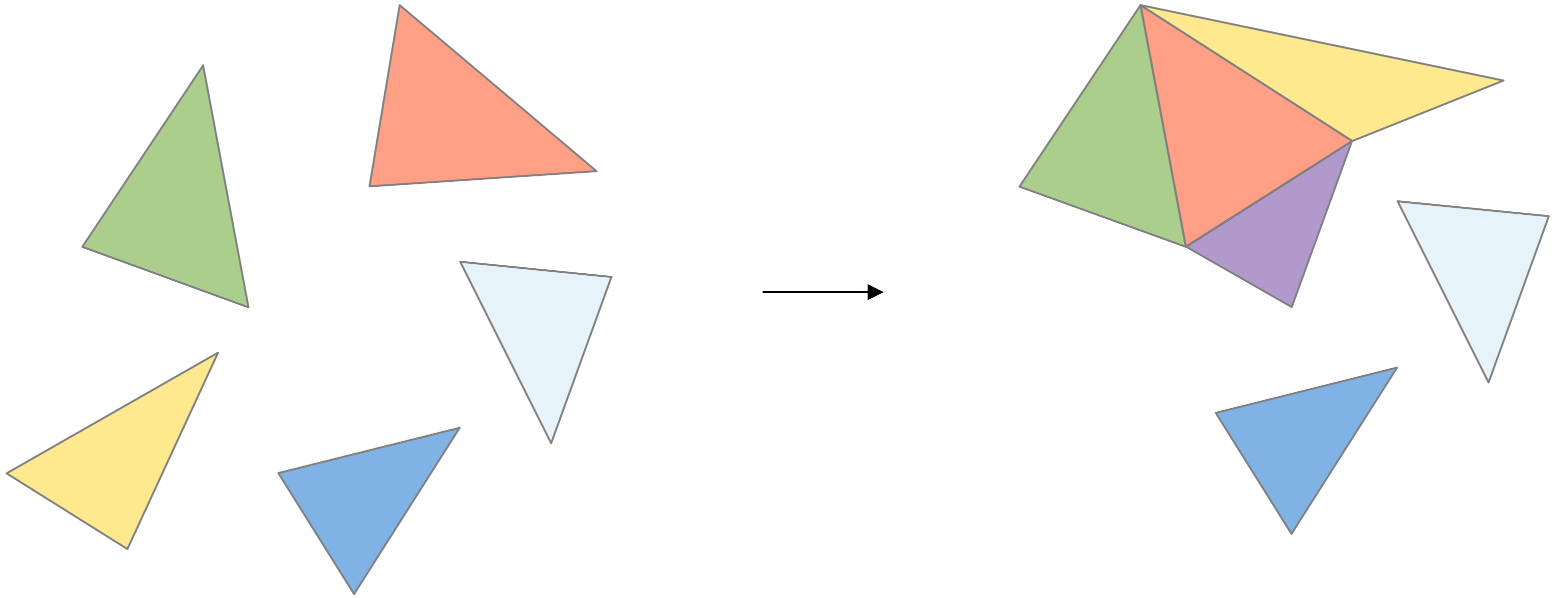
Todas las superficies se pueden triangular.

Corolario. Toda superficie cerrada se puede obtener de un poligono convexo identificando sus lados por pares.



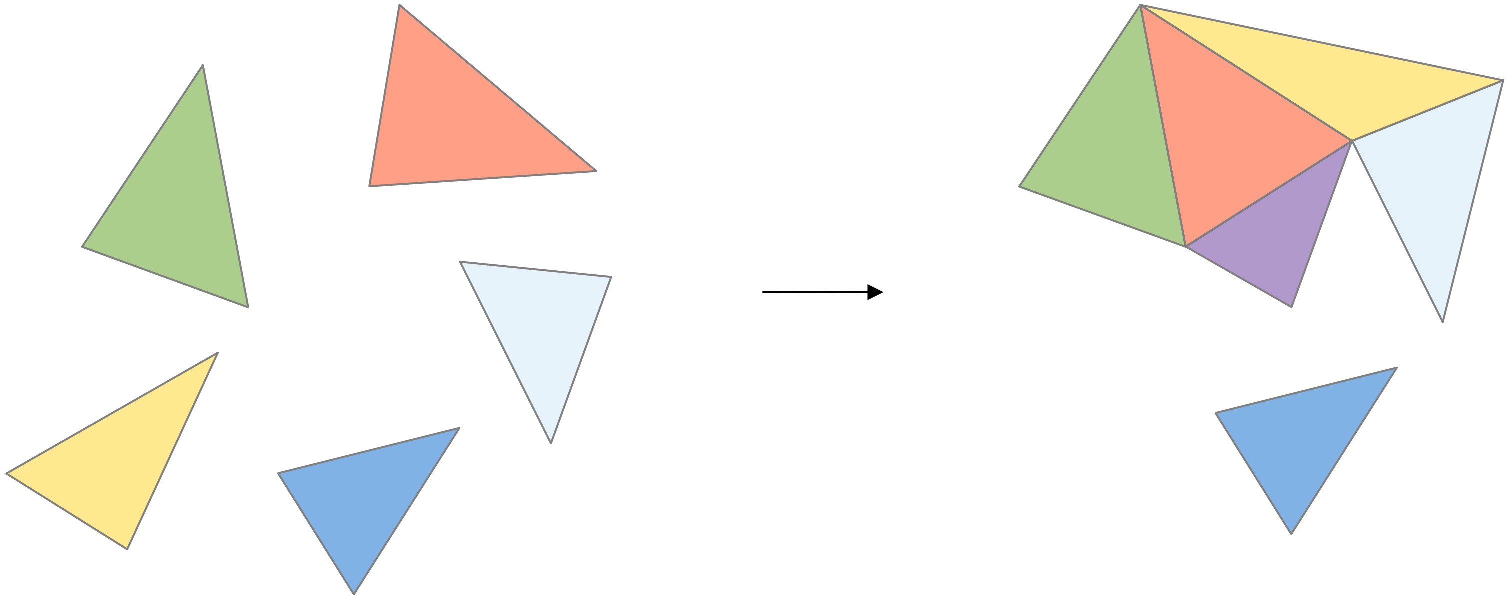
Todas las superficies se pueden triangular.

Corolario. Toda superficie cerrada se puede obtener de un poligono convexo identificando sus lados por pares.



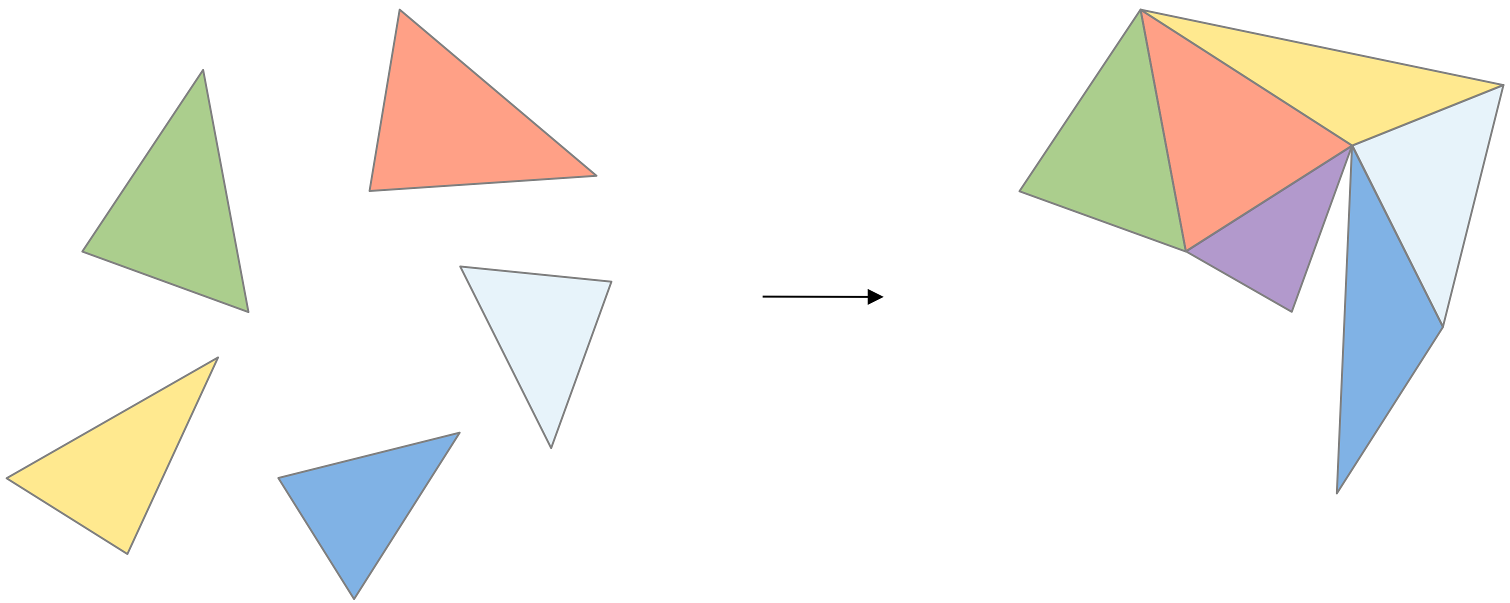
Todas las superficies se pueden triangular.

Corolario. Toda superficie cerrada se puede obtener de un poligono convexo identificando sus lados por pares.



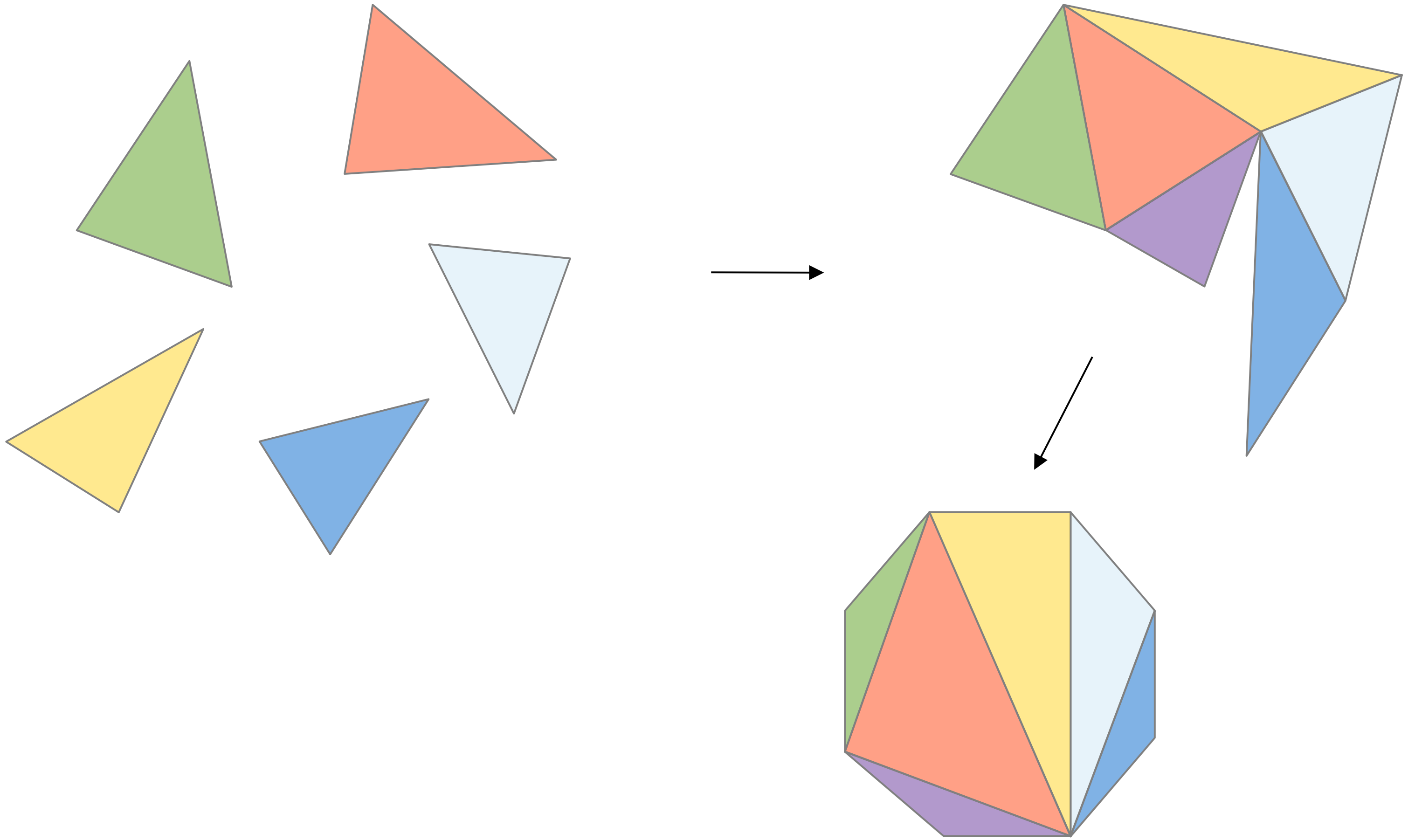
Todas las superficies se pueden triangular.

Corolario. Toda superficie cerrada se puede obtener de un poligono convexo identificando sus lados por pares.



Todas las superficies se pueden triangular.

Corolario. Toda superficie cerrada se puede obtener de un poligono convexo identificando sus lados por pares.



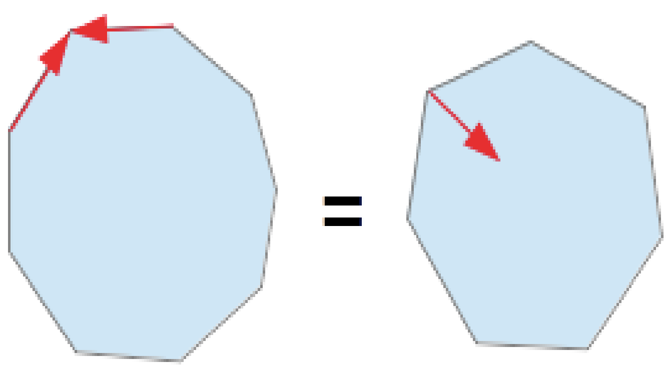
Teorema. Todas las superficies cerradas son esferas o sumas conexas de toros y/o planos proyectivos

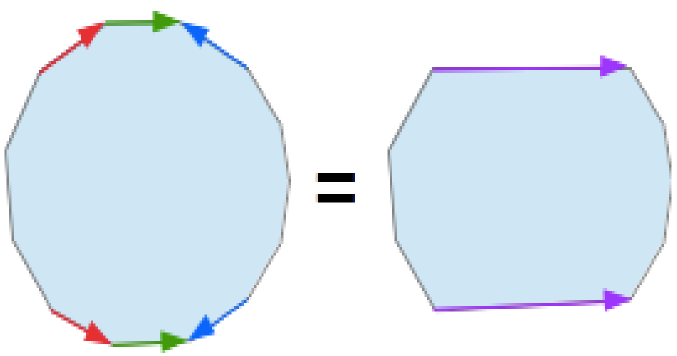
Demostracion:

Hay que ver que cualquier poligono con lados identificados por pares puede recortarse y volverse a pegar para obtener uno que podamos reconocer.

Teorema. Todas las superficies cerradas son esferas o sumas conexas de toros y/o planos proyectivos

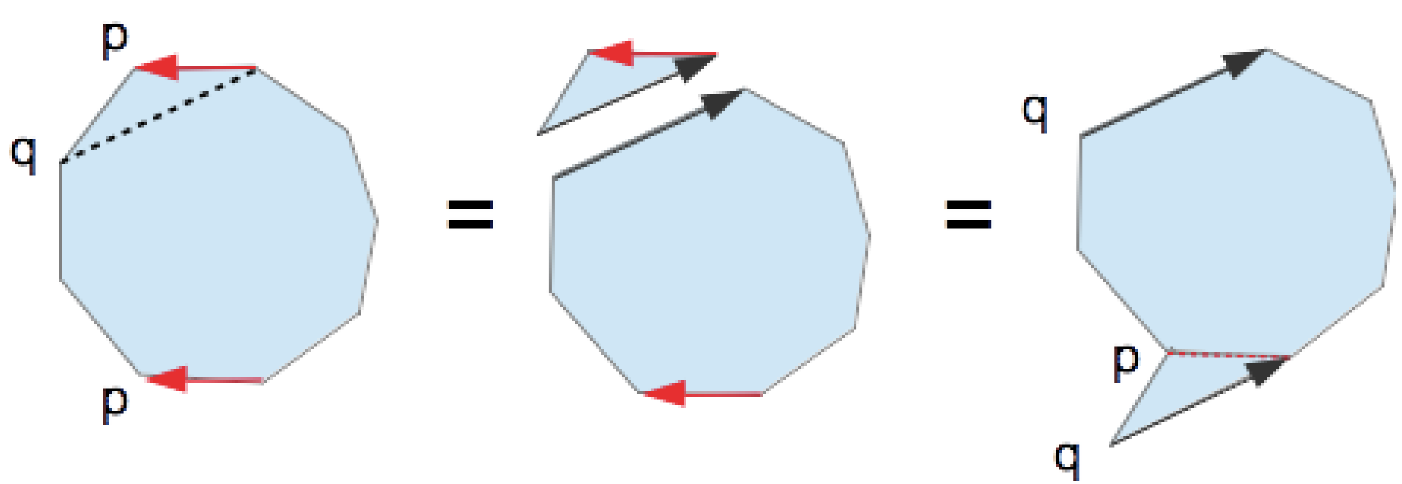
Paso 1: Simplificar el poligono.





Teorema. Todas las superficies cerradas son esferas o sumas conexas de toros y/o planos proyectivos

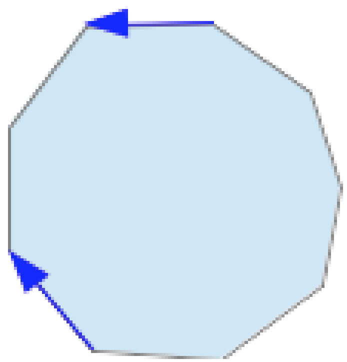
Paso 2: Hacer que todos los vertices esten identificados.



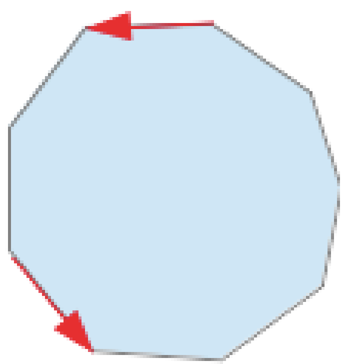
Toda superficie cerrada admite una triangulacion con un solo vertice.

Teorema. Todas las superficies cerradas son esferas o sumas conexas de toros y/o planos proyectivos

Observar que hay dos tipos de apareamientos:



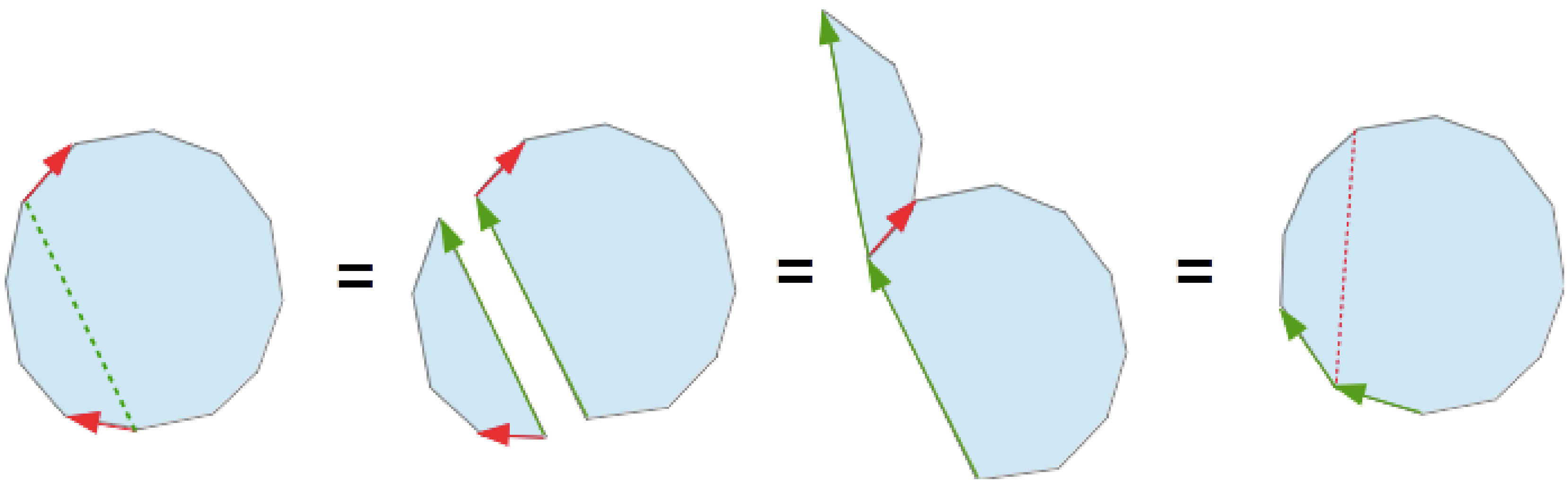
Derechos



Torcidos (banda de Moebius)

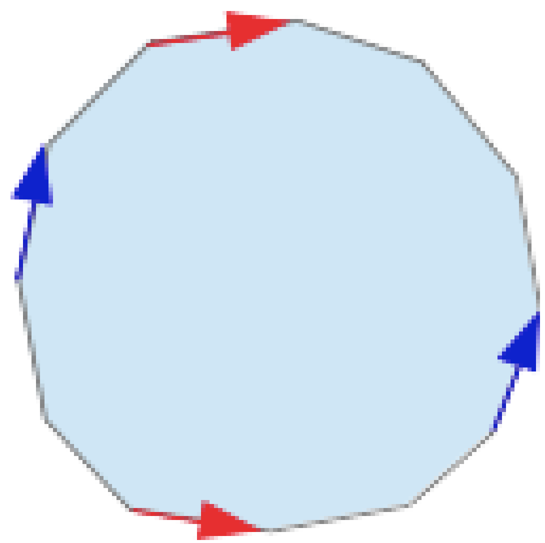
Teorema. Todas las superficies cerradas son esferas o sumas conexas de toros y/o planos proyectivos

Paso 3: Juntar pares de lados torcidos.



Teorema. Todas las superficies cerradas son esferas o sumas conexas de toros y/o planos proyectivos

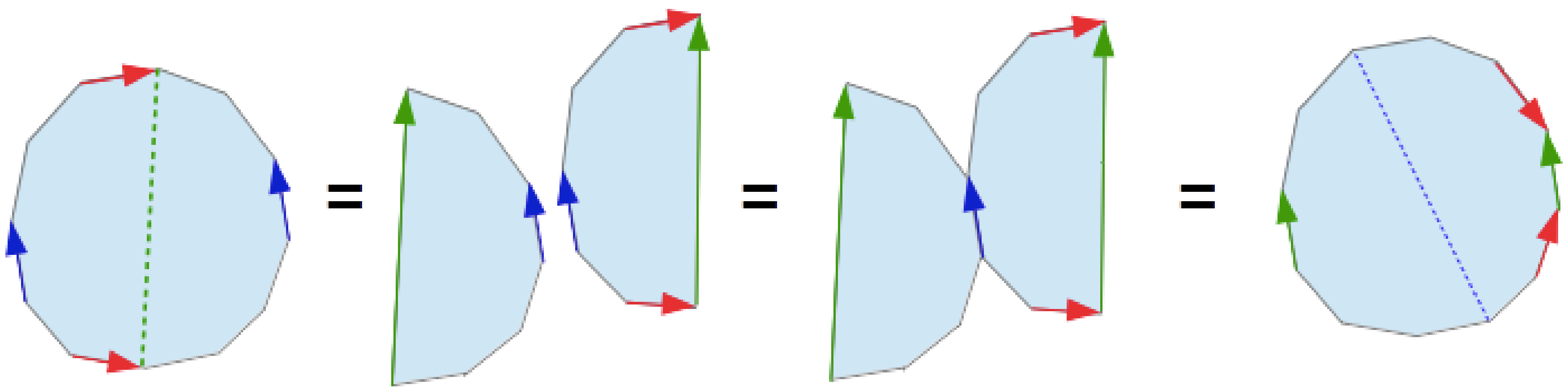
Los pares derechos vienen en pares intercalados.



Si hubiera un par derecho sin otro par intercalado, los vertices de un lado no estarian identificados con los vertices del otro lado

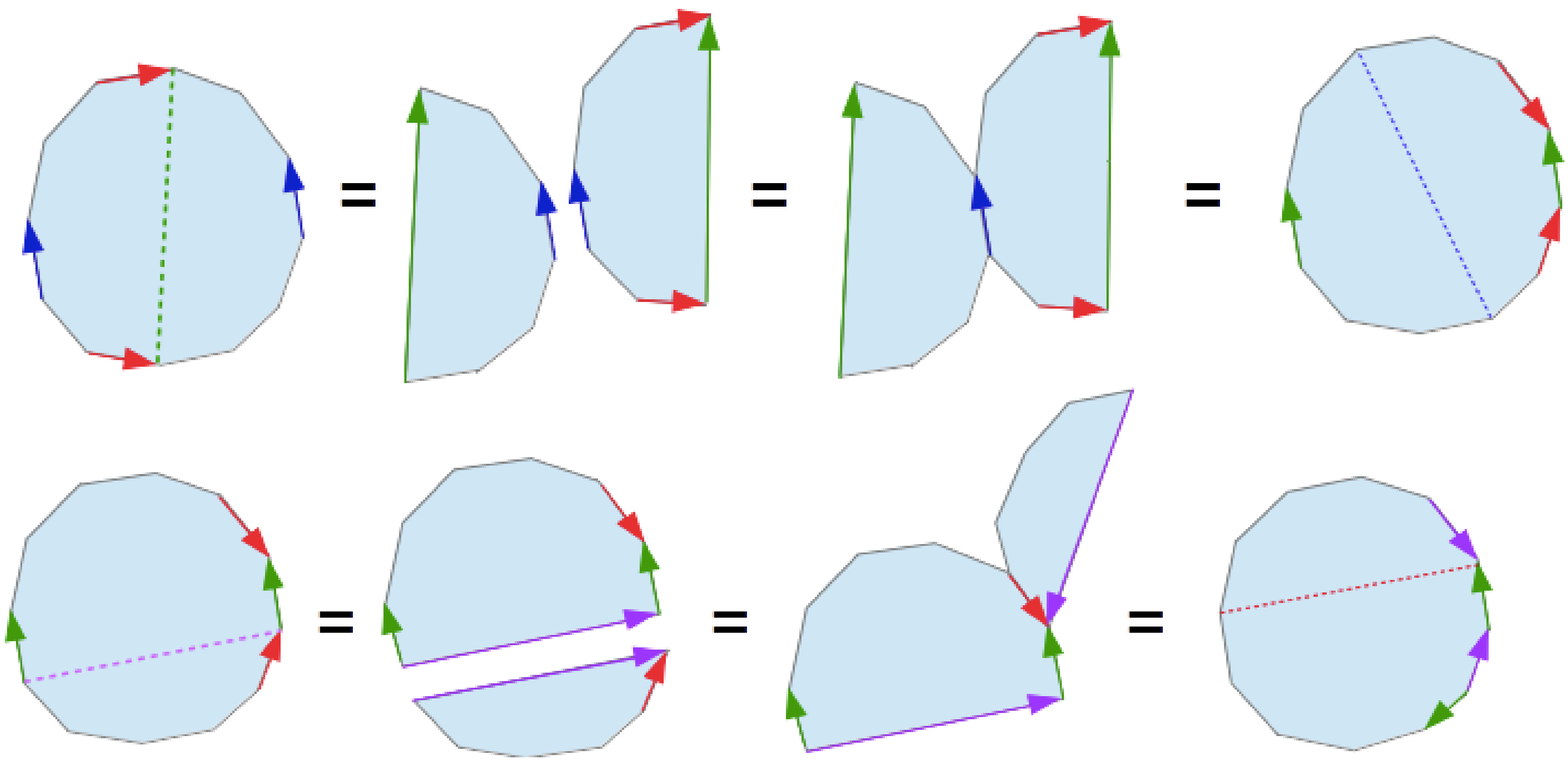
Teorema. Todas las superficies cerradas son esferas o sumas conexas de toros y/o planos proyectivos

Paso 4: Juntar pares de pares.



Teorema. Todas las superficies cerradas son esferas o sumas conexas de toros y/o planos proyectivos

Paso 4: Juntar pares de pares derechos.



Teorema. Todas las superficies cerradas son esferas o sumas conexas de toros y/o planos proyectivos

¿Como podemos saber si todas estas combinaciones de toros y/o planos proyectivos producen superficies distintas?

Teorema. Todas las superficies cerradas son esferas o sumas conexas de toros y/o planos proyectivos

¿Como podemos saber si todas estas combinaciones de toros y/o planos proyectivos producen superficies distintas?

Ejercicio:

$$T^2 + P^2 = 3P^2$$

Teorema. Todas las superficies cerradas son esferas o sumas conexas de toros y/o planos proyectivos

¿Como podemos saber si todas estas combinaciones de toros y/o planos proyectivos producen superficies distintas?

Ejercicio:

$$T^2 + P^2 = 3P^2$$

Corolario: Todas las superficies cerradas son esferas o sumas conexas de toros <u>o</u> planos proyectivos

¿Como podemos saber si todas estas combinaciones de toros o planos proyectivos producen superficies distintas?

Caracteristica de Euler

La *caracteristica de Euler* de una superficie triangulada S es

$\chi(S) = V - A + T$

donde V = # vertices A = # aristas T = # triangulos

Caracteristica de Euler

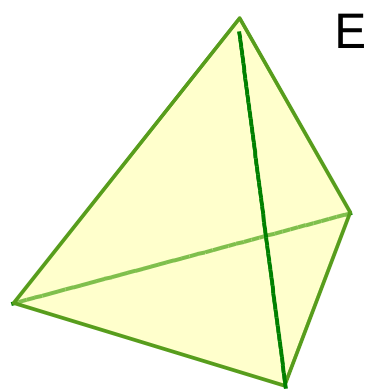
La *caracteristica de Euler* de una superficie triangulada S es

$\chi(S) = V - A + T$

donde V = # vertices A = # aristas T = # triangulos

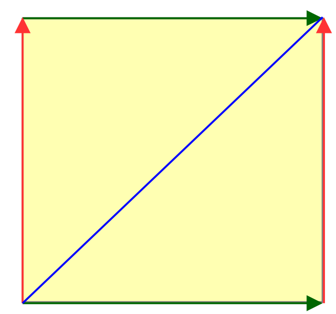
Ejemplos:

Esfera



V – A + T = 4 – 6 + 4 = 2

Toro



V – A + T = 1 – 2 + 3 = 0

Teorema. La caracteristica de Euler de una superficie es independiente de la triangulacion.

Idea de la demostracion:

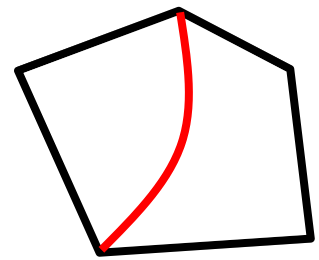
Dibujemos dos triangulaciones de la superficie simultaneamente:

Si las aristas de las dos triangulaciones se intersectan en un numero finito de puntos, su union divide a la superficie en un numero finito de poligonos topologicos que se tocan en aristas. Si no, se puede deformar una de las triangulaciones para que esto ocurra.

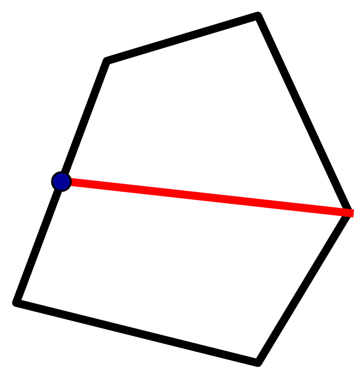
Teorema. La caracteristica de Euler de una superficie es independiente de la triangulacion.

Idea de la demostracion:

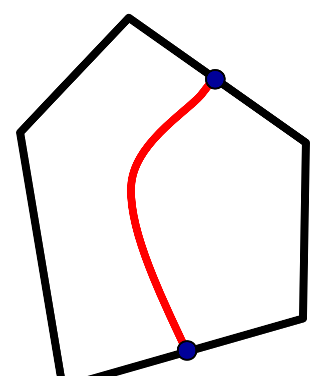
Basta ver que al subdividir un poligono el conteo V – A + T no cambia:



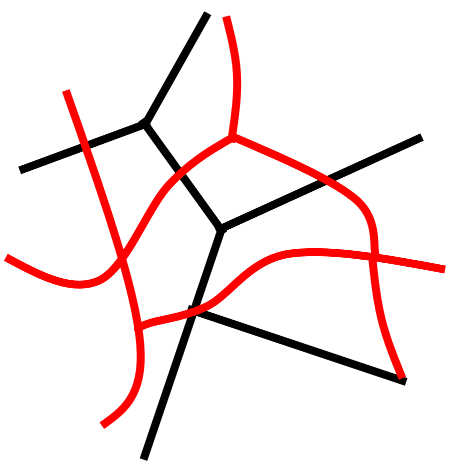
+0
+1
+1



+1
+2
+1



+2
+3
+1



La subdivision se puede ir haciendo una arista a la vez

Caracteristica de Euler

$\chi(S^2) = 2$

$\chi(P^2) = 1$

$\chi(T^2) = 0$

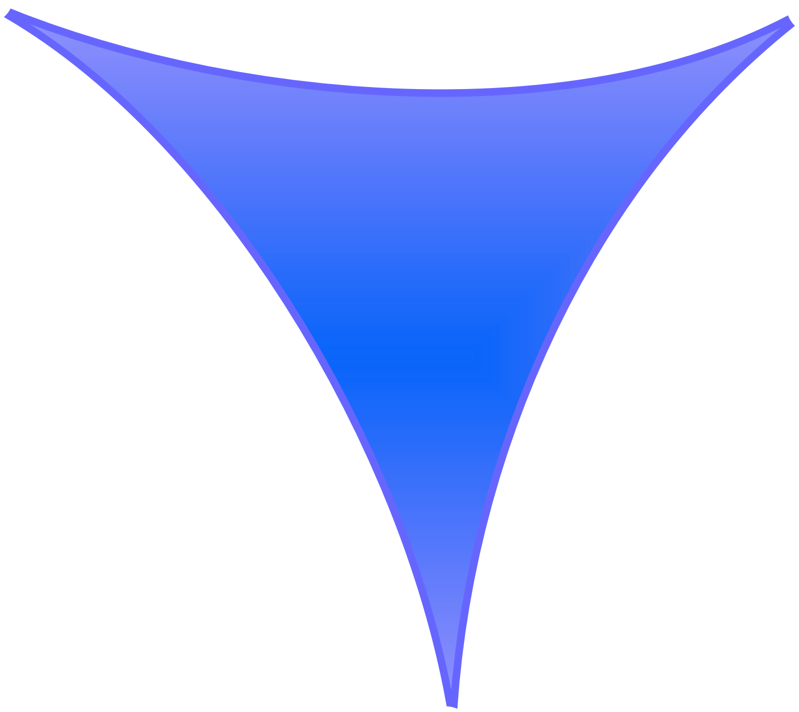
$\chi(F+G) = \chi(F) + \chi(G) – 2$ *por lo tanto:*

$\chi(nT^2) = 2 – n$ $\chi(nP^2) = 1 - n$

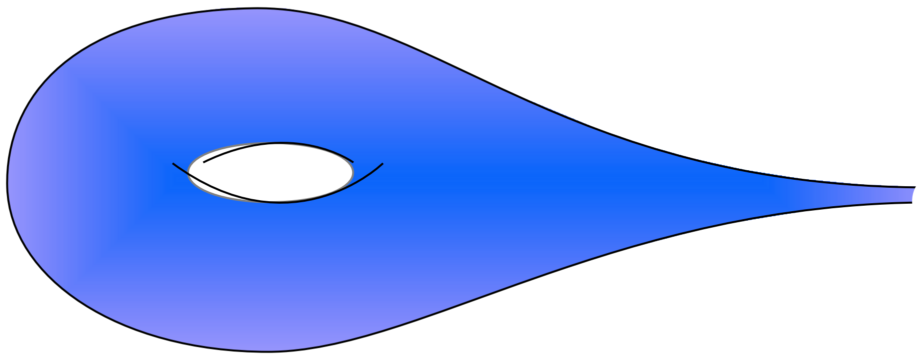
Hay a lo mas 2 superficies cerradas con la misma caracteristica de Euler

Triangulaciones ideales

Algunas superficies abiertas pueden armarse usando un numero finito de triangulos, sin sus vertices:



Una esfera con tres cuspides



Un toro con una cuspide

Estas dos superficies se pueden dividir en 2 *triangulos deales* (triangulos con vertices en el infinito)