

# Nudos y Ovillos

Mario Eudave Muñoz

Instituto de Matemáticas, UNAM, y CIMAT

Escuela de Nudos y 3-variedades  
CIMAT

Guanajuato, diciembre 2014

## Introducción a la Teoría de Nudos

Un nudo es un encaje del círculo  $S^1$  en el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$  (o en  $S^3$ , la esfera unitaria en  $R^4$ , que es la compactificación por un punto de  $R^3$ ).

Para evitar complicaciones, suponemos que el encaje del círculo es lineal por pedazos (o diferenciable). O sea, suponemos que el círculo en  $\mathbb{R}^3$  está hecho de un número finito de segmentos de recta.

Un enlace es una colección finita de círculos ajenos en  $\mathbb{R}^3$ , o sea varios nudos al mismo tiempo. Un enlace de una componente es entonces un nudo.

Decimos que dos nudos o enlaces son equivalentes si podemos transformar uno en el otro por medio de una sucesión finita de movidas triangulares, como en la siguiente figura, donde se supone que el interior del triángulo  $\Delta$  no toca al nudo.



Con un poco de trabajo se puede probar lo siguiente:

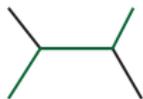
**Teorema.** *Dos nudos o enlaces  $K$  y  $K'$  son equivalentes si y solo si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que preserva la orientación de  $\mathbb{R}^3$ , tal que  $h(K) = K'$ .*

En general es complicado trabajar con nudos y enlaces en el espacio, para simplificar el problema, consideramos proyecciones de enlaces en un plano. Sea  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow P$  una proyección ortogonal en un plano  $P$ . Por ejemplo, si  $P$  es el plano con coordenadas  $(x, y, 0)$ , entonces  $p$  está definida por  $p(x, y, z) = (x, y, 0)$ .

La imagen del nudo o enlace  $p(K)$  es entonces una curva en el plano con autointersecciones. Decimos que la proyección es regular si los únicos puntos múltiples son puntos dobles transversos, como en la figura. No es difícil ver que todo enlace tiene una proyección regular.



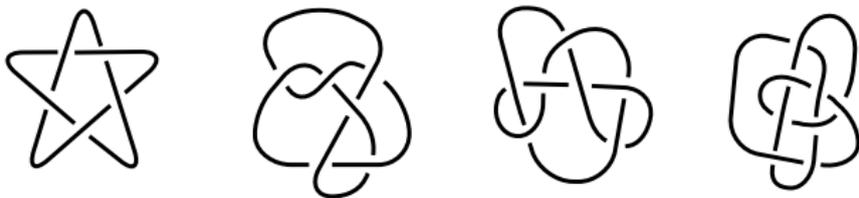
permitido



prohibido



A partir de una proyección regular podemos recuperar al nudo si sabemos que arco del nudo pasa por arriba y cual por abajo. Un diagrama de un nudo o enlace, entonces consta de una o más curvas en el plano que se intersectan transversalmente en puntos dobles, y donde se señala que arco pasa por arriba y cual por abajo. A partir del diagrama se recupera de manera única al nudo o enlace.

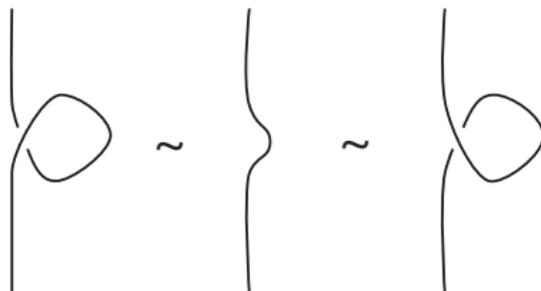


Diagramas de nudos

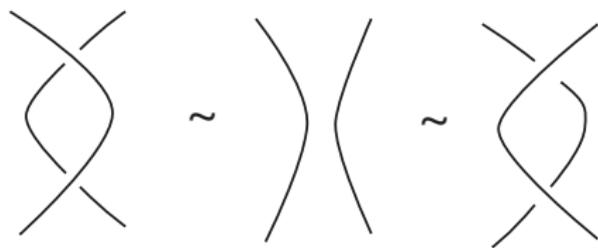
Es difícil emplear las movidas triangulares en un diagrama, por lo que introducimos las siguientes movidas.

**Movidas de Reidemeister.** Estas son una colección de cambios que se pueden hacer a un diagrama de manera local, que cambian al diagrama pero no al enlace que representan. Son las siguientes:

Movida I



## Movida II



## Movida III



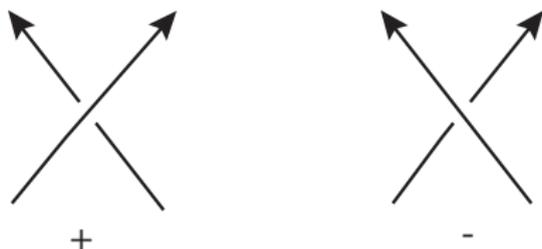
Lo que señalan los dibujos es que en la región donde se hizo el cambio no pasa ningún otro arco del nudo.

**Teorema.** *Dos diagramas  $D_1$  y  $D_2$  representan al mismo nudo o enlace, si y solo si es posible ir de  $D_1$  a  $D_2$  por una sucesión finita de movidas de Reidemeister e isotopías del plano.*

Para probarlo, solo hay que ver que una movida de Reidemeister se puede hacer con varias movidas triangulares, y al revés, que una movida triangular, al proyectarla al plano, se puede factorizar en muchas movidas de Reidemeister.

El invariante más sencillo que se puede definir es el número de enlace entre dos nudos. Sea  $L = k_1 \cup k_2$  un enlace de dos componentes orientadas, o sea a cada componente le damos una dirección que la señalamos con una flecha.

En un diagrama hay dos tipos de cruces, a uno lo llamamos positivo y a otro negativo, según la convención de la figura.



Entonces, si  $c_i$  es un cruce, definimos  $\sigma(c_i) = 1$  si el cruce es positivo y  $\sigma(c_i) = -1$  si el cruce es negativo.

Definimos el número de enlace de  $L$ , o  $lk(k_1, k_2)$  como

$$lk(k_1, k_2) = \frac{1}{2} \sum \sigma(c_i)$$

donde la suma se toma sobre todos entre  $k_1$  y  $k_2$ , o sea no contamos a los autocruces.

No es difícil probar lo siguiente:

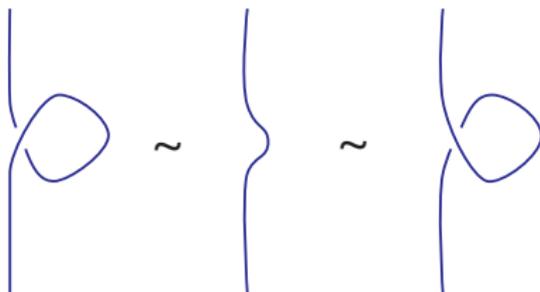
**Proposición.** *Si  $L = k_1 \cup k_2$  es un enlace orientado de dos componentes, entonces  $lk(k_1, k_2)$  es invariante bajo las movidas de Reidemeister, y es por lo tanto un invariante de  $L$ .*

Un invariante sencillo de nudos son las 3-coloraciones.

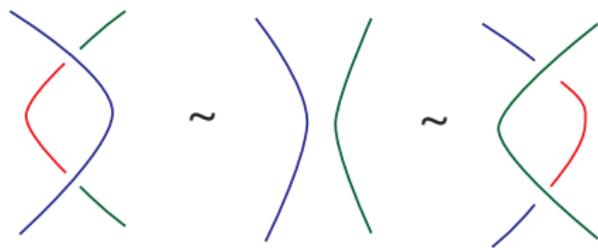
Consideremos un conjunto de tres colores, digamos  $\{\textit{verde}, \textit{azul}, \textit{rojo}\}$ . Decimos que un diagrama es 3-coloreable si a cada arco del diagrama lo podemos colorear con uno de los colores, de modo que se cumple lo siguiente:

- a) En cada cruce aparecen los tres colores o solo uno.
- b) Se usa más de un color.

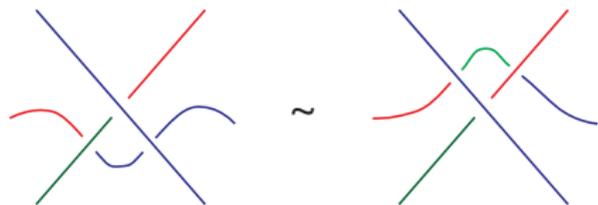
No es difícil ver que la propiedad de ser 3-coloreable se preserva bajo las movidas de Reidemeister, como se muestra en las siguientes figuras.



Invariante bajo la movida I



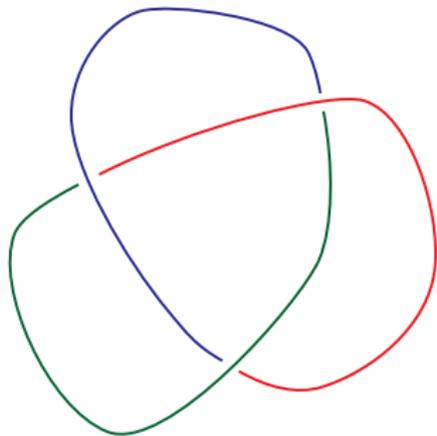
Invariante bajo la movida II



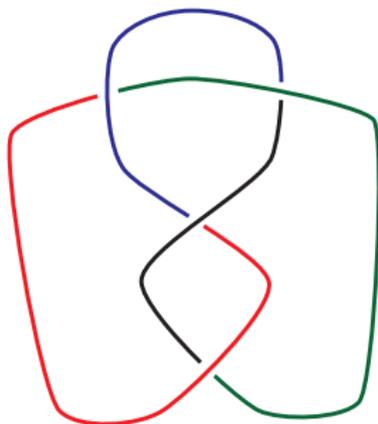
Invariante bajo la movida III

Nótese que el nudo trivial no es 3-coloreable, pues tiene un diagrama con un solo arco, pero que un enlace trivial de dos o más componentes si es 3-coloreable, pues podemos colorear un diagrama sin cruces con dos colores distintos.

El siguiente ejemplo muestra que el nudo trébol es 3-coloreable.



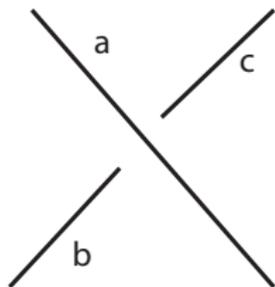
No es difícil que el nudo ocho no es 3-coloreable.



En la siguiente transparencia generalizamos las 3-coloraciones a  $n$ -coloraciones. No es difícil ver que la definición dada allá para 3-coloraciones, coincide con la que dimos primero.

## $n$ -coloraciones

Sea  $D$  un diagrama de un enlace  $L$  y  $n > 1$  un número entero. Una  $n$ -coloración es una asignación de un color a cada arco del diagrama, o sea un elemento del conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ , de modo que se satisfaga la siguiente relación:



$$2a = b + c \pmod{n}$$

**Observación.** Si tenemos una  $n$ -coloración y sumamos un valor  $x$  al valor asignado a cada arco, obtenemos una nueva  $n$ -coloración.

Si  $2a = b + c \pmod n$ ,  
entonces  $2(a + x) = (b + x) + (c + x) \pmod n$

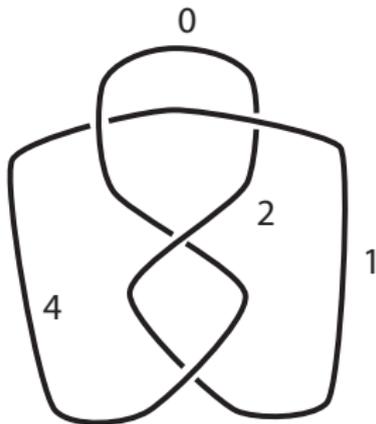
**Corolario.** Podemos suponer que siempre hay un 0 en nuestra coloración en un arco elegido.

**Definición.** Decimos que una  $n$ -coloración es esencial si el conjunto de colores usados genera a  $\mathbb{Z}_n$  como un grupo abeliano bajo la suma.

**Teorema.** *La propiedad de tener una  $n$ -coloración esencial se preserva bajo movidas de Reidemeister, y por lo tanto es un invariante de nudos y enlaces.*

*Demostración.* Solo hay que ver como modificamos una coloración después de hacer movidas de Reidemeister.

**Ejemplo.** El nudo ocho solo tiene coloraciones esenciales para  $n = 5$ .



Sea  $X$  un espacio topológico arcoconexo tal que  $X = X_1 \cup X_2$ , donde  $X_1$  y  $X_2$  son abiertos arcoconexos y  $X_0 = X_1 \cap X_2$  también es arcoconexo. Sea  $*$  un punto base que se encuentra en  $X_0$ .

Supóngase que:

$$\pi_1(X_1, *) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_s \rangle,$$

$$\pi_1(X_2, *) = \langle y_1, \dots, y_m \mid t_1, \dots, t_k \rangle,$$

$$\pi_1(X_0, *) = \langle z_1, \dots, z_p \mid u_1, \dots, u_q \rangle.$$

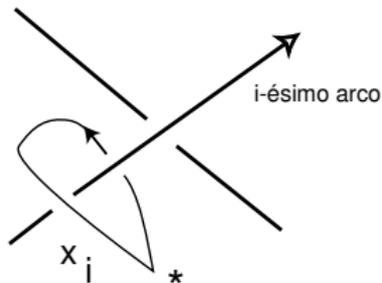
Sea  $\varphi_i : \pi_1(X_0) \rightarrow \pi_1(X_i)$  ( $i = 1, 2$ ), el mapeo inducido por la inclusión de  $X_0$  en  $X_1$  o  $X_2$ . Sean  $a_i = \varphi_1(z_i)\varphi_2(z_i)^{-1}$  ( $i = 1, \dots, p$ ), entonces cada  $a_i$  es una palabra en los símbolos  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ .

## Teorema de Seifert-Van Kampen.

$$\pi_1(X, *) = \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \mid r_1, \dots, r_s, t_1, \dots, t_k, a_1, \dots, a_p \rangle,$$

*o sea, una presentación para  $\pi_1(X)$  está dada por los generadores de  $X_1$ , los generadores de  $X_2$ , las relaciones de  $X_1$ , las relaciones de  $X_2$ , más una relación por cada generador de  $\pi_1(X_0)$ , donde se igualan la imagen de cada generador  $z_i$  en  $\pi_1(X_1)$  con su imagen en  $\pi_1(X_2)$ .*

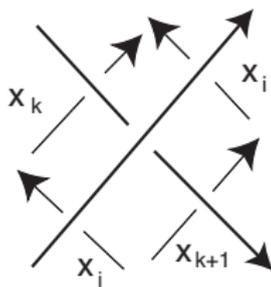
Sea  $L$  un enlace orientado con una proyección regular que tiene  $n$  arcos. Sea  $*$  un punto base que se encuentra arriba del diagrama. Sea  $x_i$  un lazo orientado basado en  $*$  y que se enlaza con el  $i$ -ésimo arco del diagrama y tiene número de enlace 1 con  $L$ , como en la figura.



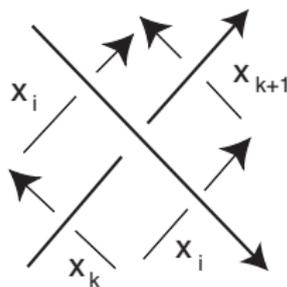
Usando el Teorema de Seifert-Van Kampen, se prueba que  $\pi_1(S^3 - L, *)$  está generado por  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , y tiene una presentación dada por:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$$

donde hay una relación  $r_i$  por cada cruce del diagrama, que esta dada como sigue



$$x_i x_k x_i^{-1} x_{k+1}^{-1} = 1$$



$$x_k x_i x_{k+1}^{-1} x_i^{-1} = 1$$

**Ejercicio.** Calcular el grupo fundamental del complemento del nudo trébol y del nudo ocho.

Se puede probar que cualesquiera dos generadores  $x_i$ 's de una misma componente de  $L$  son conjugados. De este resultado se sigue que  $H_1(S^3 - L) \cong Z^n$ .

Nótese que si  $K$  es un nudo, entonces  $K$  no tiene  $n$ -coloraciones esenciales para  $n$  par.

Sea  $n$  impar. El grupo dihedral  $D_n$  de  $2n$  elementos es el grupo de simetrías de un  $n$ -gono regular. Tiene una presentación  $\langle x, y | x^n = 1, y^2 = 1, yxyx = 1 \rangle$ .

**Teorema.** *Sea  $K$  un nudo. Entonces  $K$  tiene una  $n$ -coloración esencial si y solo si existe un epimorfismo  $\phi : \pi_1(S^3 - K) \rightarrow D_n$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $D_n = \langle x, y \mid x^n = 1, y^2 = 1, yxyx = 1 \rangle$ .

$D_n$  consta de  $2n$  elementos,  
 $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, y, yx, yx^2, \dots, yx^{n-1}\}$ .

Los elementos  $yx^r$  son de orden 2.

Supóngase que  $D$  es un diagrama con una  $n$ -coloración, tal que el arco  $x_i$  tiene color  $a_i$ .

Definimos  $\phi : \pi_1(S^3 - K) \rightarrow D_n$  por  $\phi(x_i) = yx^{a_i}$ .

Para ver que es un homomorfismo, basta probar que  $\phi(r_i) = 1$  para cada relación  $r_i$  del grupo del nudo.

$$\text{Ahora } \phi(r_i) = \phi(x_i x_k x_i^{-1} x_{k+1}^{-1})$$

$$= yx^{a_i} yx^{a_k} yx^{a_i} yx^{a_{k+1}}$$

$$\text{pues } (yx^a)^{-1} = yx^a$$

$$= x^{-a_i} y^2 x^{a_k} x^{-a_i} y^2 x^{a_{k+1}}$$

$$\text{pues } yx = yx^{-1}$$

$$= x^{-a_i} x^{a_k} x^{-a_i} x^{a_{k+1}}$$

$$= x^{-2a_i + a_k + a_{k+1}} = x^{sn} = 1 \quad \text{por la relación de la coloración}$$

Además, si una colección de  $\{a_i, a_j, \dots\}$  genera a  $\mathbb{Z}_n$ , entonces  $\{y, yx^{a_i}, yx^{a_j}, \dots\}$  genera a  $D_n$ . Esto demuestra que  $\phi$  es un epimorfismo.

Supóngase ahora que hay un epimorfismo  $\phi : \pi_1(S^3 - K) \rightarrow D_n$ .

Si la imagen de un generador  $x_i$  de  $\pi_1(S^3 - K)$  es de la forma  $x^a$ , entonces la imagen de cualquier  $x_j$  también será de la forma  $x^b$ , porque los generadores  $x_i$ 's son conjugados y porque  $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$  es un subgrupo normal de  $D_n$ . Pero entonces  $\phi$  no es un epimorfismo.

Concluimos que la imagen de un  $x_i$  es de la forma  $yx^{a_i}$ . Entonces coloreamos al arco  $x_i$  con el color  $a_i$ .

Haciendo cuentas como arriba, llegamos a que los colores en cada cruce cumplen con la condición requerida.

Esto completa la demostración.

## Superficies de Seifert

Sea  $L$  un nudo o enlace. Una superficie de Seifert para  $L$  es una superficie  $S$ , compacta, orientable, sin componentes cerradas, encajada en  $\mathbb{R}^3$ , tal que  $\partial S = L$ .

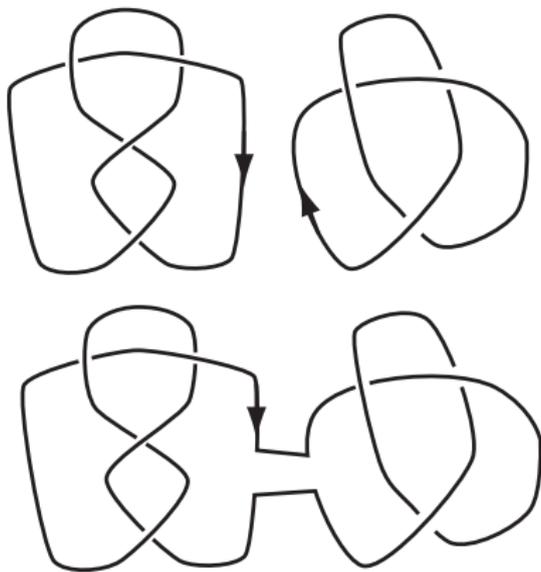
**Teorema.** *Todo enlace tiene superficies de Seifert.*

Definimos el género de  $L$ ,  $g(L)$ , como

$$g(L) = \min\{g(S) : \text{donde } S \text{ es superficie de Seifert para } L\}$$

**Teorema.** Sea  $K$  un nudo.  $K$  es el nudo trivial si y solo si  $g(K) = 0$ .

Si  $K_1$  y  $K_2$  son nudos orientados, definimos la suma conexa  $K_1 \# K_2$ , que es otro nudo, como sigue.



**Teorema.** Sean  $K_1$  y  $K_2$  nudos. Entonces  
 $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$ .

**Corolario.** Si  $K$  es un nudo con  $g(K) = 1$  entonces  $K$  es primo.

**Teorema.** Todo nudo  $K$  se expresa como suma finita de nudos primos

*Pregunta.* ¿ Que pasa con la suma conexa de enlaces ?

## Ovillos racionales

Un ovillo es una pareja  $(B, t)$  que consiste de una 3-bola  $B$  junto con dos arcos  $t$  propiamente encajados en  $B$ , es decir  $t \cap \partial B = \partial t$ .

Dos ovillos  $(B_1, t_1)$ ,  $(B_2, t_2)$  son equivalentes si existe un homomorfismo  $h : B_1 \rightarrow B_2$  tal que  $h(t_1) = t_2$ .

Sea  $B$  una 3-bola fija. Dos ovillos  $(B, t_1)$ ,  $(B, t_2)$  son iguales si existe un homomorfismo  $h : B_1 \rightarrow B_2$  tal que  $h(t_1) = t_2$  y tal que  $h|_{\partial B} = id$ .

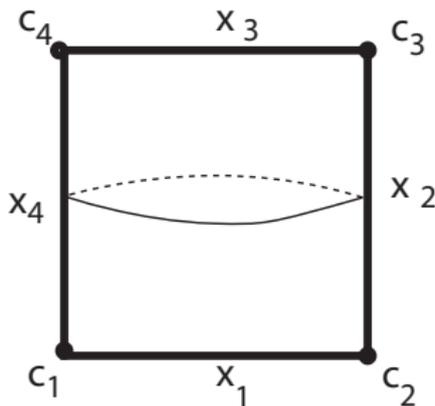
Consideremos el ovillo  $(D^2 \times I, \{x, y\})$ , donde  $D^2$  es el disco unitario en el plano,  $I$  es el intervalo  $[0, 1]$ ,  $x, y$  son puntos en el interior de  $D^2$ . Decimos que este es el *ovillo trivial*.

El conjunto de ovillos racionales es el conjunto de ovillos triviales en una 3-bola fija bajo la relación de igualdad.

**Teorema.** Existe una correspondencia 1 – 1 entre la colección de ovillos racionales y el conjunto  $\mathbb{Q} \cup \{1/0\}$ , esto es, a cada ovillo racional le asociamos un número racional, tal que ovillos diferentes tienen asociados a números racionales diferentes.

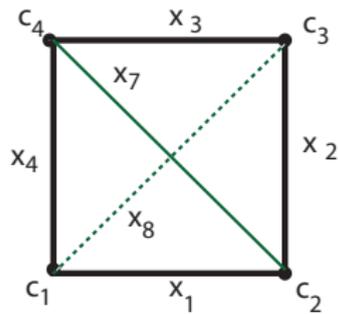
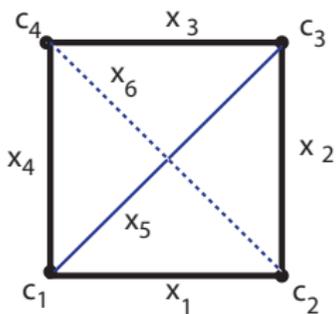
A continuación damos un bosquejo de la prueba de este teorema.

Consideramos una 3-bola modelo. Sean  $c_1 = (0, 0, 0)$ ,  $c_2 = (1, 0, 0)$ ,  $c_3 = (1, 1, 0)$  y  $c_4 = (0, 1, 0)$  4 puntos in  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $x_i$  el segmento de  $\mathbb{R}^2$  que une  $c_i$  y  $c_{i+1}$ , mod 4.



Consideramos un disco  $D_1$  en el semiespacio superior con  $\partial D = x_1 \cup x_2 \cup x_3 \cup x_4$ , y  $D_2$  un disco en el semiespacio inferior con la misma frontera. Luego  $D_1 \cup D_2$  acota una 3-bola  $B$ , como una almohada.

Sea  $x_5$  un arco en  $D_1$  que une  $c_1$  y  $c_3$ , y sea  $x_6$  un arco en  $D_2$  que une  $c_2$  y  $c_4$ . Sea  $x_7$  un arco en  $D_1$  que une  $c_2$  y  $c_4$ , y sea  $x_8$  un arco en  $D_2$  que une  $c_1$  y  $c_3$ .



Consideramos pares ordenados  $(p, q)$  de enteros, tal que  $(p, q) = (1, 0), (0, 1)$ , o bien  $p, q \neq 0$ , y son primos relativos. Construimos ahora un ovillo  $(B, t, p, q)$

Supongamos primero que  $p, q \neq 0$ . Tomamos  $|p| - 1$  puntos en el arco  $x_1$ , y otros  $|p| - 1$  puntos en el arco  $x_3$ , los cuales dividen los respectivos arcos en segmentos de igual longitud. Tomamos  $|q| - 1$  puntos en el arco  $x_2$ , y otros  $|q| - 1$  puntos en el arco  $x_4$ , los cuales dividen los arcos en segmentos de la misma longitud.

Si  $p/q > 0$ , conectamos los  $|p| + |q| - 1$  puntos en  $x_1 \cup x_4$  (los puntos elegidos más  $c_1$ ) con el mismo número de puntos en  $x_2 \cup x_3$ , con líneas de pendiente  $p/q$  en  $D_1$ . Hay una única manera de hacerlo. Ahora conectamos los  $|p| + |q| - 1$  puntos en  $x_1 \cup x_2$  al mismo número de puntos en  $x_3 \cup x_4$  con líneas de pendiente  $-p/q$  en  $D_2$ .

Si  $p/q < 0$  hacemos algo similar, pero cambiando de signo las pendientes de las líneas.



Supóngase que tenemos el par  $(1, 0)$ . Tomamos dos líneas de pendiente  $1/0$  empezando en  $c_1$  y  $c_2$  y terminando en  $c_3$  y  $c_4$ , o sea estamos tomando los arcos  $x_2$  and  $x_4$ .

Tomemos ahora el par  $(0, 1)$ . Tomamos dos líneas de pendiente  $0/1$  empezando en  $c_1$  y  $c_4$  y terminando en  $c_2$  y  $c_3$ , o sea estamos tomando los arcos  $x_1$  and  $x_3$ .

Tenemos pues dos arcos en  $\partial B$ . Empujamos los arcos hacia el interior de  $B$  pero dejando fijos sus extremos, el resultado es un ovillo al que denotamos por  $(B, t, p, q)$ .

Nótese que estos ovillos son triviales. Esto es porque podemos deslizar los arcos sobre la frontera, moviendo sus extremos, hasta que se vean pequeños y sea obvio que es un ovillo trivial.

Nótese también que  $(B, t, p, q) = (B, t, -p, -q)$ , o sea el ovillo solo depende de  $p/q$ .

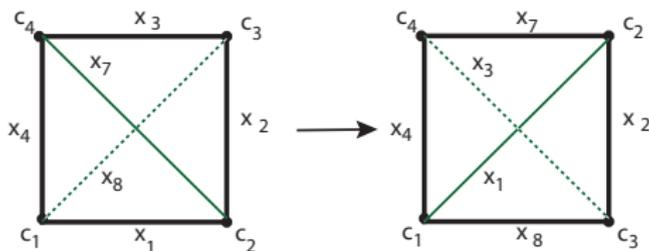
**Lema.** Sea  $(B, t)$  un ovrillo racional, es decir un ovrillo trivial en la bola  $B$  y tal que los extremos de  $t$  son los puntos  $(c_1, c_2, c_3, c_4)$ . Entonces  $(B, t)$  es igual a un ovrillo  $(B, t, p, q)$ .

*Demostración.* Como  $(B, t)$  es un ovrillo trivial, existen discos  $E_1$  y  $E_2$  contenidos en  $B$ , tal que  $\partial E_1 = \alpha_1 \cup t_1$ , donde  $\alpha_1 = E_1 \cap \partial B$ , y  $\partial E_2 = \alpha_2 \cup t_2$ , donde  $\alpha_2 = E_2 \cap \partial B$ . Luego  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son arcos en  $\partial B$  con extremos en  $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ . Podemos pensar que  $t_1$  y  $t_2$  son arcos muy pegaditos a  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Ahora hay que mover  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  hasta que se vean en la forma requerida.

Para probar el teorema, hay que probar que  $(B, t, p, q) \neq (B, t, r, s)$  si  $(p, q) \neq (r, s)$ .

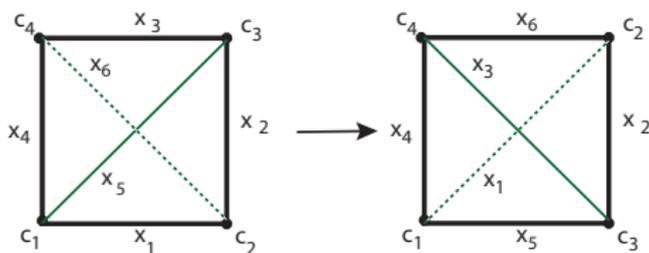
Definimos 4 homeomorfismos de  $B$  en  $B$ , haciendo torceduras:

Torcedura horizontal positiva:



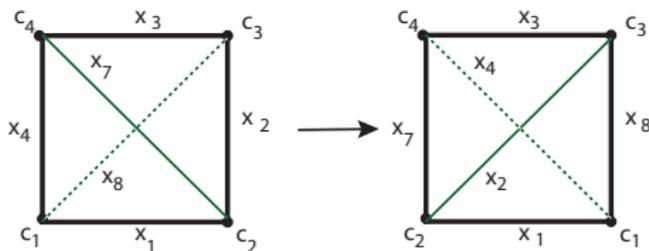
$$(B, t, p, q) \rightarrow (B, t, p + q, q)$$

Torcedura horizontal negativa:



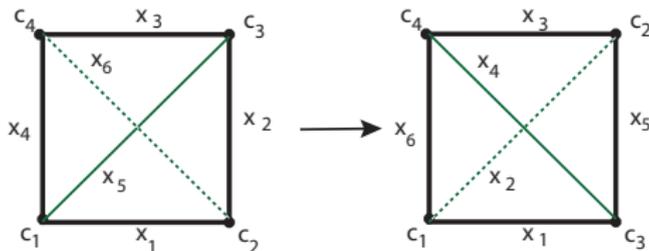
$$(B, t, p, q) \rightarrow (B, t, p - q, q)$$

Torcedura vertical positiva:



$$(B, t, p, q) \rightarrow (B, t, p, p + q)$$

Torcedura vertical negativa:



$$(B, t, p, q) \rightarrow (B, t, p, -p + q)$$

Entonces al aplicar estas torceduras varias veces, podemos transformar cualquier ovrillo  $(B, t, p, q)$  al ovrillo  $(B, t, 1, 0)$  o al ovrillo  $(B, t, 0, 1)$ .

Al revés, dados  $(B, t, 1, 0)$  o  $(B, t, 0, 1)$ , podemos obtener cualquier oville racional por una sucesión de torceduras.

Luego, si tenemos al oville  $(B, t, 0, 1)$  y una sucesión de enteros  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , podemos formar un oville racional al hacer  $a_1$  torceduras horizontales, luego  $a_2$  torceduras verticales, y así seguimos, esto es,  $a_i$  torceduras horizontales si  $i$  es impar y  $a_i$  torceduras verticales si  $i$  par, donde las torceduras son positivas o negativas dependiendo si  $a_i$  es positivo o negativo. Al hacer esto podemos dejar los arcos en la frontera, o bien empujarlos hacia el interior para obtener la figura usual de un oville racional.

Ahora queremos calcular el número racional asociado al ovillo obtenido después de realizar las torceduras dadas por  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ .

Si tomamos  $(B, t, 0, 1)$  y hacemos una torcedura horizontal positiva, obtenemos  $(B, t, 1, 1)$ , luego al hacer  $a_1$  torceduras horizontales obtenemos  $(B, t, a_1, 1)$ , donde el signo de la torcedura está incluido en  $a_1$ .

Si ahora hacemos una torcedura vertical, obtenemos  $(B, t, a_1, \pm a_1 + 1)$ , y al hacer  $a_2$  torceduras verticales obtenemos  $(B, t, a_1, a_2 a_1 + 1)$ , o sea, el número racional asociado es

$$\frac{a_1}{a_2 a_1 + 1} = \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1}}.$$

Supongamos por inducción que después de hacer una sucesión de torceduras  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , el número racional asociado es  $\frac{p}{q} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\dots}}$  si  $n$  es impar, y  $\frac{p}{q} = \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\dots}}}$  si  $n$  es par.

Supóngase que hacemos  $a_{n+1}$  torceduras. Supóngase primero que  $n + 1$  es impar, entonces la torcedura es horizontal. En este caso el racional asociado es  $\frac{p+a_{n+1}q}{q} = a_{n+1} + \frac{p}{q} = a_{n+1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\dots}}}$ .

Ahora si  $n + 1$  par, las torceduras son verticales. En este caso el racional asociado es

$$\frac{p}{a_{n+1}p+q} = \frac{1}{a_{n+1} + \frac{q}{p}} = \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\dots}}}}$$

Hemos probado que si  $n$  es impar, entonces el racional obtenido de la sucesión  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  está dado por la fracción continua  $a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \dots}$ , y si  $n$  es par está dado por la fracción continua  $0 + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \dots}}$ .

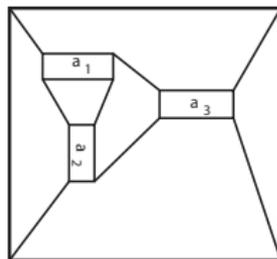
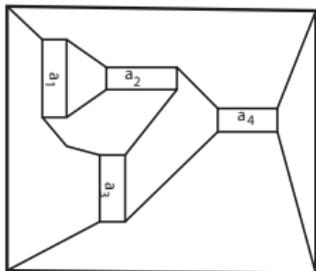
Analogamente, empecemos ahora con el ovillo  $(B, t, 1, 0)$ , y una sucesión de enteros  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , tal que hacemos  $a_i$  torceduras verticales si  $i$  es impar y  $a_i$  torceduras horizontales si  $i$  par.

De manera similar se prueba que si  $n$  es par, entonces el racional asociado a la sucesión está dado por la fracción continua

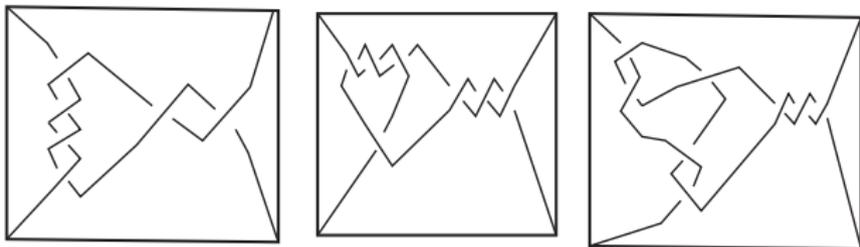
$a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \dots}$ , y si  $n$  es impar, entonces está dado por la fracción continua  $0 + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \dots}}$ .

Tenemos la siguiente convención:

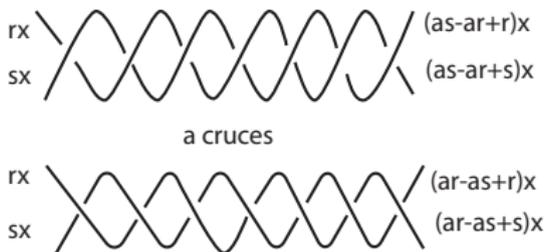
Una  $n$ -ada de enteros  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$  representa al ovillo racional de la figura de la izquierda si  $n$  es par, y al ovillo racional de la figura de la derecha si  $n$  es impar. En cualquier caso, el número racional asociado es  $\frac{p}{q} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\dots}}$ .



Ahora es claro que si dos ovillos están dados por dos fracciones continuas diferentes pero del mismo número racional, entonces los ovillos deben ser iguales, aún si no lo parecen. Simplemente porque al empujarlos a la frontera producen lo mismo. Por ejemplo las sucesiones  $[4, 2]$ ,  $[-3, -1, 3]$  and  $[2, 1, -2, 3]$  representan al ovillo racional  $(B, t, 9, 4)$ .



**Lema.** Supóngase que tenemos un diagrama con una  $n$ -coloración, y en el diagrama hay una sucesión de  $a$  cruces como en la figura, donde los cruces de la izquierda tienen colores  $rs$  y  $sx$ . Entonces los arcos de la izquierda tienen colores  $(as - ar + r)x$ ,  $(as - ar + s)x$  en el caso de la figura de arriba y colores  $(ar - as + r)x$ ,  $(ar - as + s)x$  en la figura de abajo.



Sea  $(B, t, p, q)$  un ovillo racional, y supóngase por simplicidad que  $p/q > 0$ . Entonces el ovillo está dado por una sucesión  $[a_1, a_2, \dots, a_r]$ , donde  $a_i \geq 0$  para todo  $i$ .

Coloreamos los arcos de  $(B, t, p, q)$ , de modo que el arco que sale de  $x_4$  tiene color 0, y el primer arco que lo cruza tiene color  $x$ . Queremos probar que el arco que sale de  $c_3$  tiene color  $px$ , el que sale de  $c_2$  tiene color  $(p + q)x$  y el que sale de  $c_1$  tiene color  $qx$ .

Hacemos la prueba por inducción en el número de términos de una sucesión de torceduras. Suponemos primero que la sucesión tiene un número impar de términos. En el primer paso tenemos  $[a_1]$ ,  $a_1 > 0$ . Aplicando el lema con  $r = 0$  and  $s = 1$ , los arcos de la derecha están coloreados con  $a_1x$  and  $(a_1 + 1)x$ , pero en esta caso  $p = a_1$ ,  $q = 1$ .

Supongamos ahora que tenemos el ovillo racional dado por  $[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$ ,  $a_i \geq 0$  para todo  $i$ , el cual satisface la hipótesis de inducción, esto es si  $p/q$  es el número asociado a la fracción continua, entonces los arcos que llegan a los puntos  $c_4$ ,  $c_3$ ,  $c_2$  and  $c_1$  están coloreado por  $0$ ,  $px$ ,  $(p+q)x$  and  $qx$  respectivamente.

Ahora hacemos  $a_n$  torceduras verticales,  $a_n \geq 0$ . Entonces la parte superior del ovillo no cambia y la parte inferior cambia a  $(a_n p + q)x$  and  $(a_n p + p + q)x$ .

Ahora hacemos  $a_{n+1}$  torceduras horizontales,  $a_{n+1} \geq 0$ , entonces la parte izquierda del ovillo no cambia, la parte superior derecha cambia a  $(a_{n+1}a_n p + a_{n+1}q + p)x$  y la inferior derecha cambia a  $(a_{n+1}a_n p + a_{n+1}q + a_n p + p + q)x$ .

Nótese que  $\frac{a_{n+1}a_n p + a_{n+1}q + p}{a_n p + q} = a_{n+1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{(p/q)}}$ .

Esto completa la inducción.

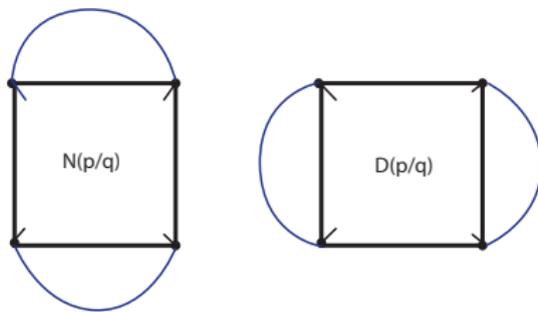
El caso cuando el número de términos de la sucesión es par, se hace de la misma manera.

El caso cuando  $p/q < 0$  se sigue al observar que tal ovrillo racional se puede expresar como  $[a_1, a_2, \dots, a_r]$ , donde todos los  $a_i$  son positivos, excepto  $a_r$  que es negativo.

Sea  $(B, t)$  un ovillo. Definimos el numerador  $N$  del ovillo como el nudo o enlace en  $\mathbb{R}^3$  que se obtiene de la unión de los arcos del ovillo y los arcos  $x_1$  y  $x_3$ .

Definimos el denominador  $D$  del ovillo como el nudo o enlace en  $\mathbb{R}^3$  que se obtiene de la unión de los arcos del ovillo y los arcos  $x_2$  y  $x_4$ .

Para un ovillo racional  $(B, t, p, q)$ , denotamos por  $N(p/q)$  y  $D(p/q)$  a su numerador y denominador, respectivamente.



Extendemos la  $n$ -coloración del ovillo  $(B, t, p, q)$  a su numerador  $N(p/q)$ . Se sigue que  $N(p/q)$  tiene una  $n$ -coloración solo si  $px \equiv 0 \pmod n$ .

Nótese que todos los colores de los arcos del diagrama son múltiplos de  $x$ , luego si  $x$  y  $n$  no son primos relativos, el máximo común divisor de los colores usados y  $n$  será más grande que 1, y la coloración no será esencial.

Entonces para que la coloración sea esencial,  $x$  y  $n$  deben ser primos relativos. Multiplicando todos los colores de los arcos con el inverso de  $x \pmod n$ , podemos suponer que  $x = 1$ . Luego  $p \equiv 0 \pmod n$ . De esto se sigue que  $N(p/q)$  tiene una  $n$ -coloración esencial si y solo si  $n$  divide a  $p$ .

Analogamente, el denominador  $D(p/q)$  tiene una  $n$ -coloración esencial si y solo si  $n$  divide a  $q$ .

Esto implica que si  $(B, t, p, q) = (B, t, r, s)$ , entonces  $p = \pm r$ , y  $q = \pm s$ .

Finalmente, supóngase que  $(B, t, m, p, q) = (B, t, m, -p, q)$ . Si hacemos una torcedura horizontal positiva a cada uno de los ovillos, debemos de obtener ovillos iguales. Pero obtenemos los ovillos correspondientes a  $(p + q)/q$  and  $(-p + q)/q$ . Y estos será iguales solo si  $|p + q| = |p - q|$ , esto es, solo si  $p = 0$  or  $q = 0$ .

Esto completa la prueba del teorema.

Sea  $K_{p/q}$  el numerador del ovillo  $(B, t, p, q)$ . Es fácil ver que  $K_{p/q}$  es un nudo o enlace de dos puentes. Y al revés, si  $K$  es un nudo de dos puentes, no es difícil probar que  $K$  es el numerador de un ovillo racional.

Si  $K_{p/q}$  y  $K_{r/s}$  son dos nudos de dos puentes, se sigue de nuestros argumentos de coloraciones que  $K_{p/q} \neq K_{r/s}$  si  $p \neq \pm r$ .

Sin embargo,  $K_{p/q}$  y  $K_{p/s}$  si pueden ser equivalentes aún cuando  $q$  sea distinto de  $s$ . Se conoce una clasificación completa de estos nudos pero requiere más trabajo.

## Intercambio de ovillos

Denotamos por  $\tilde{B}(p/q)$  al oவில்lo racional determinado por el número racional  $p/q$ .

Sea  $K$  un nudo o enlace. Sea  $\tilde{B}$  una 3-bola en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\tilde{B} \cap K$  consiste de dos arcos, de modo que el oவில்lo  $(\tilde{B}, t)$ , donde  $t = \tilde{B} \cap K$ , es un oவில்lo trivial. Reacomodando el nudo y fijando  $\tilde{B}$ , podemos suponer que  $(\tilde{B}, t)$  es el oவில்lo racional  $\tilde{B}(1/0)$ . Ahora quitamos  $\tilde{B}(1/0)$  y ponemos en su lugar al oவில்lo  $\tilde{B}(p/q)$ .

A esta operación la llamamos intercambio de ovillos.

Por ejemplo si  $q = 2$ , hacer un intercambio es equivalente a hacer un cambio de cruce. Si  $q = 1$ , un intercambio es equivalente a hacer una operación por bandas. Entonces cualquier nudo se puede llevar al trivial haciendo intercambios de tipo  $p/2$ , o sea cambiando cruces. También todo nudo se puede llevar al trivial haciendo intercambios de tipo  $p/1$ .

Y si tomamos un  $p/q$  fijo, con  $q > 2$ , ¿será posible desanudar a cualquier nudo con intercambios  $p/q$ ?

Ahora quiero saber si podemos desanudar nudos que tengan alguna propiedad, pero haciendo solo un intercambio.

Por ejemplo, sea  $K$  un nudo o enlace compuesto. ¿Será posible desanudar a  $K$  con solo una movida?

Si  $K$  es un nudo o enlace compuesto, existe una esfera  $S$  que toca a  $K$  en dos puntos, tal que la esfera acota dos bolas, y ninguna de ellas corta el nudo o enlace en un arco trivial. A tal esfera la llamamos una esfera de descomposición para  $K$ .

Nótese que si  $K$  es compuesto y se desanuda con un intercambio, entonces la bola  $\tilde{B}$  del intercambio necesariamente interseca a la esfera de descomposición de  $K$ .

**Teorema.** *Sea  $K$  un nudo o enlace compuesto. Supóngase que al hacer un  $p/q$ -intercambio, obtenemos el nudo trivial. Entonces  $|q| = 1$ . Además  $K$  tiene solo dos sumandos, y la esfera de descomposición intersecta al ovrillo del intercambio  $(B, t)$  en un solo disco.*

En particular esto dice que los nudos con número de desanudamiento usual igual a uno son primos.

**Teorema.** Supóngase que  $K$  es un nudo o enlace trivial, tal que al hacer un intercambio de ovillos en una bola  $\tilde{B}$ , obtenemos el nudo trivial. Entonces el ovillo complementario de  $\tilde{B}$  es también un ovillo trivial, es decir si  $\hat{B} = S^3 - \text{int}\tilde{B}$ , entonces  $(\hat{B}, \hat{B} \cap K)$  es un ovillo trivial.

Decimos que un ovillo  $(B, t)$  es primo si:

- a) no existe disco propiamente encajado en  $B$  que separa las cuerdas de  $B$ .
- b) Las cuerdas del ovillo no tienen nudos locales.

**Teorema.** Sean  $(B_1, t_1)$  y  $(B_2, t_2)$  dos ovillos primos, y sea  $K = (B_1, t_1) \cup (B_2, t_2)$ , tal que los ovillos se pegan por la frontera de manera adecuada. Entonces  $K$  es primo, o sea no es trivial ni compuesto ni trivial.

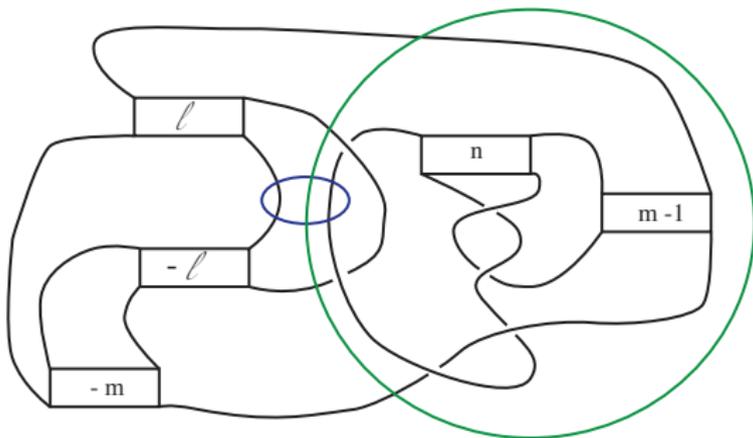
Sea  $K$  un enlace primo. Una esfera de Conway es una esfera que toca a  $K$  en cuatro puntos y lo divide en ovillos primos.

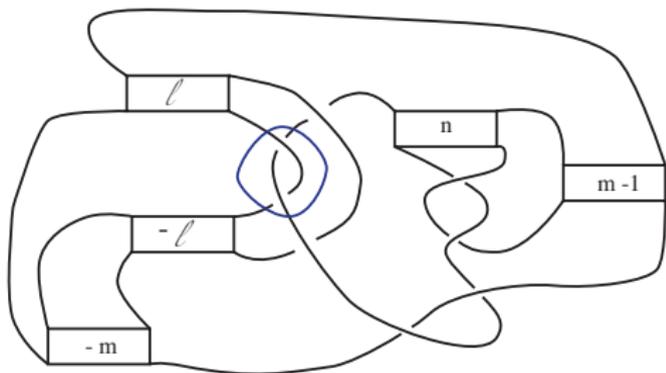
**Teorema.** *Sea  $K$  un enlace que tiene una esfera de Conway  $S$ . Supóngase que al hacer un  $p/q$ -intercambio obtenemos el nudo trivial. Entonces hay dos posibilidades:*

a) *La bola  $\tilde{B}$  del intercambio no interseca a  $S$ .*

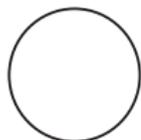
b) *Si la bola  $\tilde{B}$  interseca a  $S$ , entonces  $|q| \leq 2$ . Además, si  $|q| = 2$ , entonces la bola  $\tilde{B}$  interseca a la esfera  $S$  en exactamente un disco.*

Existe una familia de nudos  $K(\ell, m, n)$  que cumple con la condición (b) del teorema, es decir los nudos admiten una esfera de Conway, se desanudan con un intercambio  $p/2$ , y no existe intercambio  $p/q$  ajeno de la esfera de Conway que desanude a  $K(\ell, m, n)$ .



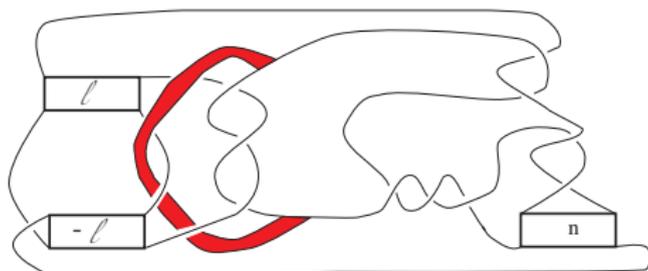


$=$



Existen también familias de nudos que cumplen con la condición (b), pero que se desanudan con un intercambio  $p/1$ , donde la bola  $\tilde{B}$  intersecta a la esfera de Conway  $S$  en un solo disco.

También hay ejemplos de nudos que cumplen con la condición (b), que se desanudan con un intercambio  $p/1$ , donde la bola  $\tilde{B}$  intersecta a la esfera de Conway  $S$  en dos discos.



Se desconoce si existe una cota para el número de discos de intersección entre una esfera de Conway y una bola de intercambio que lo desanude.

Los teoremas antes mencionados son el resultado del trabajo de muchos matemáticos.

Todas estas construcciones tienen que ver con cirugía de Dehn en nudos y cubiertas dobles ramificadas, algo de lo que ya no platicamos.

## Bibliografía

Textos sobre Teoría de Nudos:

Dale Rolfsen, *Knots and Links*, AMS Chelsea Publishing, 1976.

W.B. Raymond Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*,  
Graduate Texts in Mathematics 175, Springer-Verlag, 1997.

Uno más elemental:

Colin C. Adams, *The Knot Book*, W.H.Freeman & Co Ltd, 1994.

Hay muchos artículos sobre ovillos racionales, por ejemplo:

L.H. Kauffman, S. Lambropoulou, *On the classification of rational knots*, Enseign. Math., II. Sér. 49, No. 3-4, 357-410 (2003).

L.H. Kauffman, S. Lambropoulou, *On the classification of rational tangles*, Adv. Appl. Math. 33, No. 2, 199-237 (2004).

La prueba dada aquí se sigue del artículo:

M. Eudave-Muñoz, *On rational tangles*, preprint.

Un artículo panorámico sobre intercambio de ovillos y cirugía de Dehn es el siguiente:

Cameron Gordon, *Dehn Surgery and 3-Manifolds*, in *Low Dimensional Topology*, IAS/Park City Mathematics Series, Volume 15, 2009, T.S. Mrokwia, P.S. Ozsváth, Editors.