Nudos y funciones de Morse III

December 9, 2014

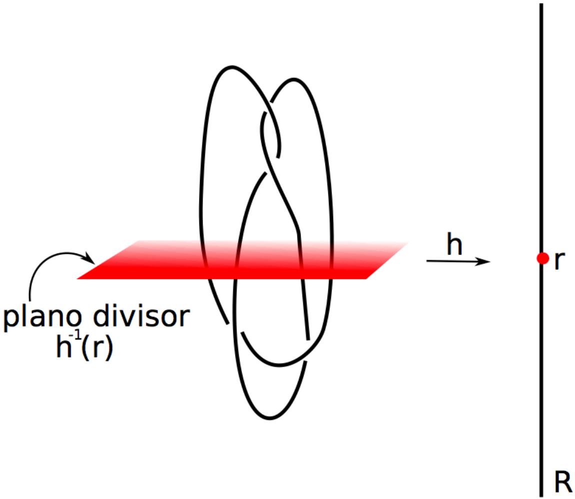
Funciones de Morse y nudos

Tomemos k un nudo en $\mathbb{R}^3$.
Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función altura estándar $h(x, y, z) = z$.
De tal manera que $h|k$ es una función de Morse.
O sea que; $h|k$ es una función diferenciable que solo tiene puntos críticos no degenerados.

1. $h|k$ solo tiene un número finito de puntos críticos.
2. Si p, q son puntos críticos, entonces $h(p) \neq h(q)$.
3. $h|k$ solo son máximos y mínimos.

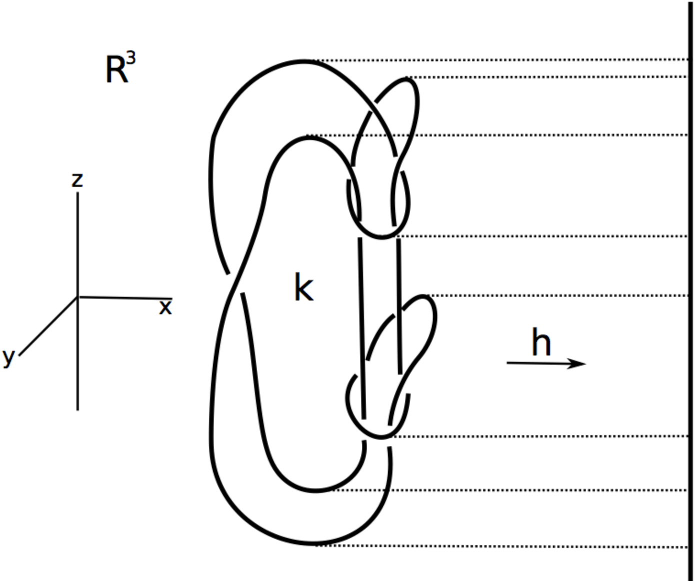
Posición de puentes

Si una posición de Morse para un nudo k es tal que vemos todos los máximos por arriba de todos los mínimos, decimos que es una posición de puentes para k.

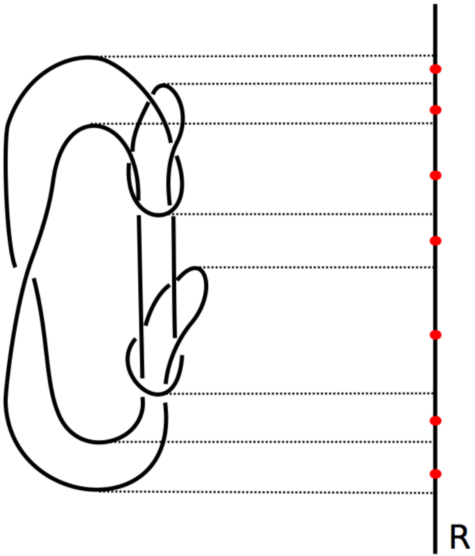


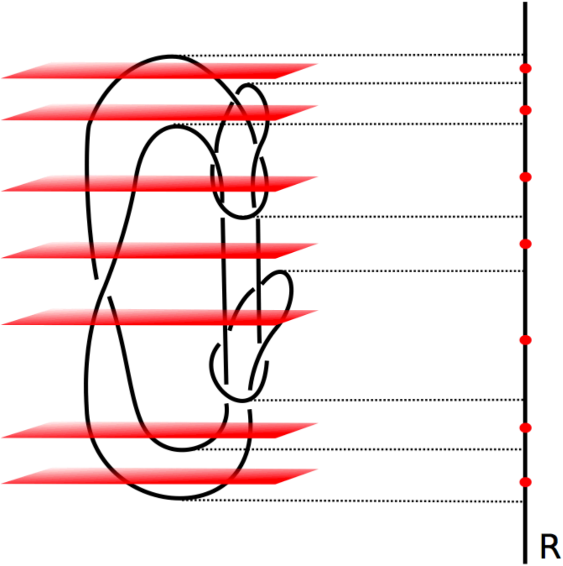
Posición delgada y ancho de un nudo

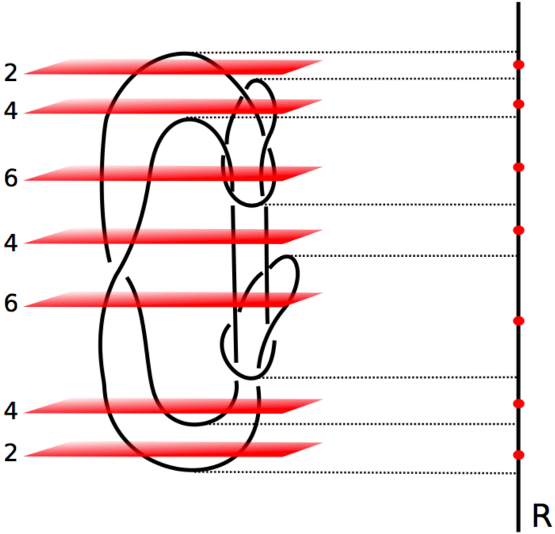
En general si un nudo está en posición de Morse:

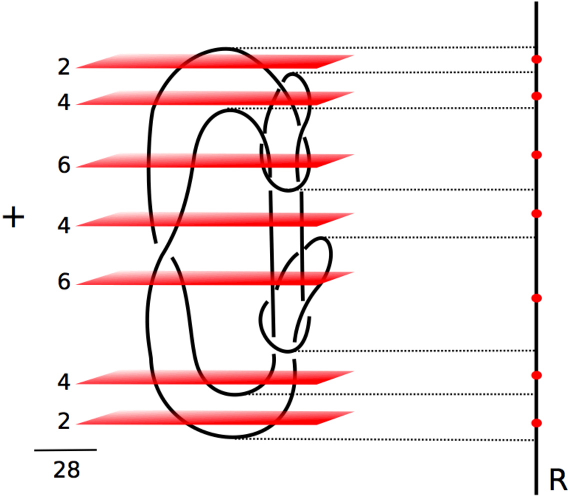


Sea k en posición de Morse.




R

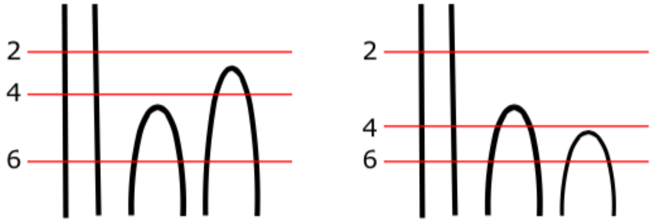

2
4
6
4
6
4
2
R

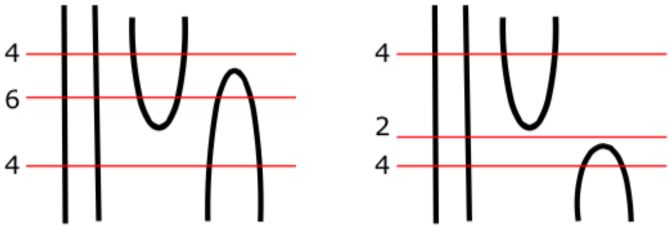


28 es el ancho de esta posción de Morse.

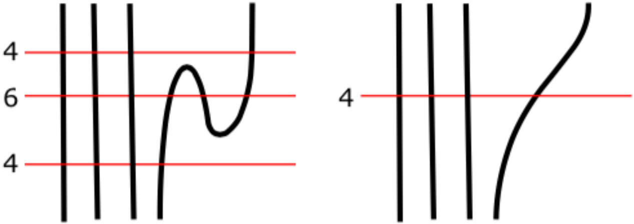
- El ancho de un nudo k es el mínimo sobre todos los anchos de las posibles posiciones de Morse. Se denota por $w(k)$.
- La posición de Morse que realiza el ancho del nudo se llama posición delgada para k.

Cambios del ancho

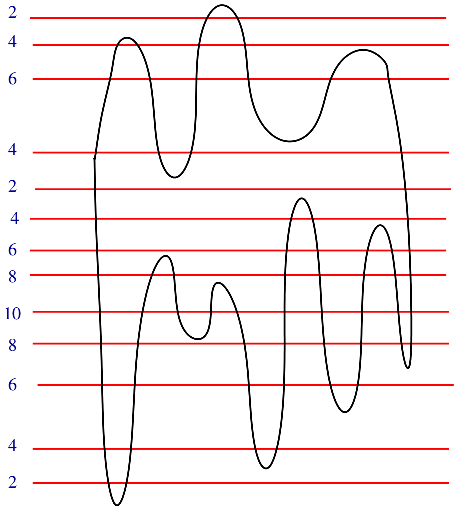




4
6
4
4
2
4

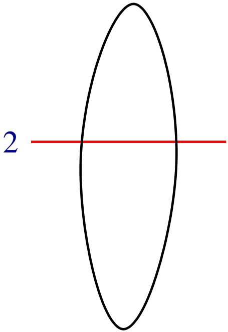

4
6
4
4

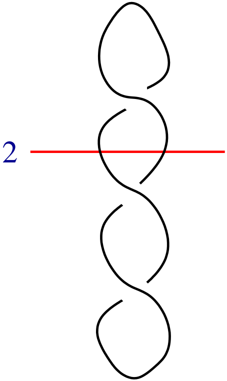
Un posición de Morse que no es delgada:



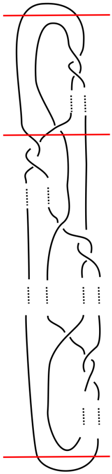
¿Cuál es el ancho del nudo trivial?

¿Cuál es el ancho del nudo trivial?





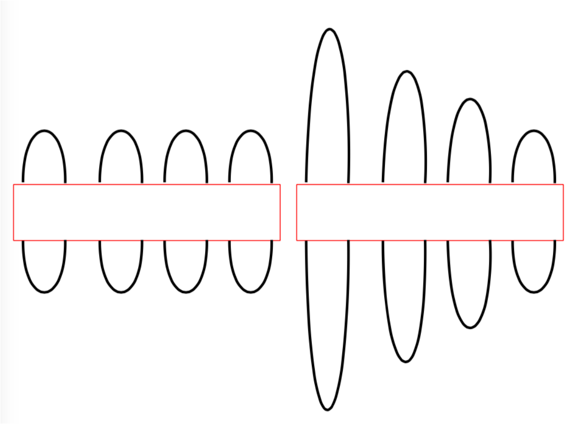
Nudos de dos puentes:

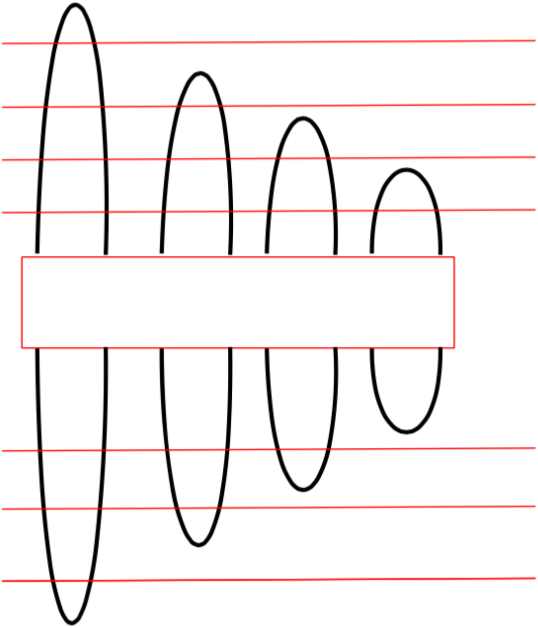


Si K es un nudo de dos puentes, $w(K) \leq 8$

Demostrar que si K es dos puentes entonces $w(K) = 8$.
Sugerencia: Demuestra que el nudo trivial es el único nudo con ancho < 8

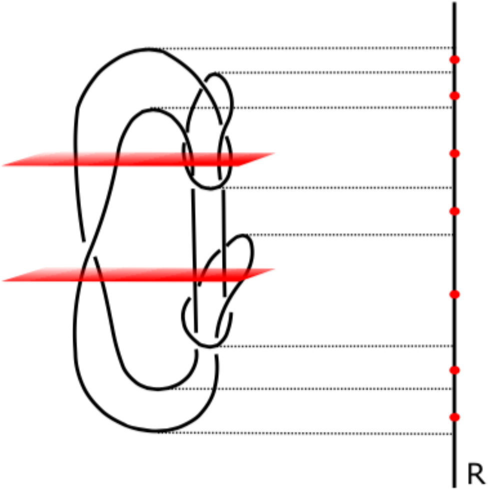
Sea un nudo K en posición de puentes con b puentes, ¿cuál es el ancho de tal presentación?





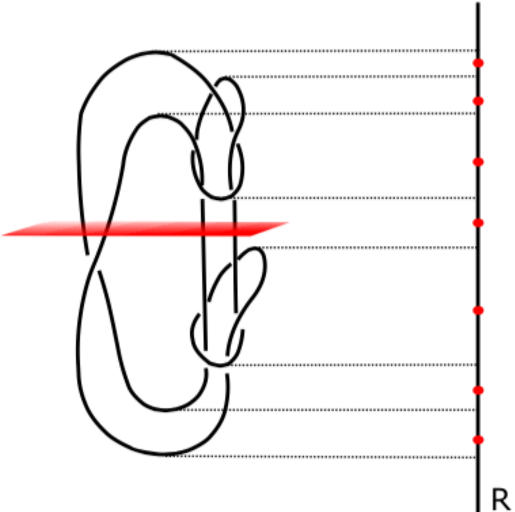
Niveles gruesos

Una superficie regular P tal que el primer punto crítico arriba de P es un máximo y el primer punto crítico debajo de ella es un mínimo, se llama nivel grueso:

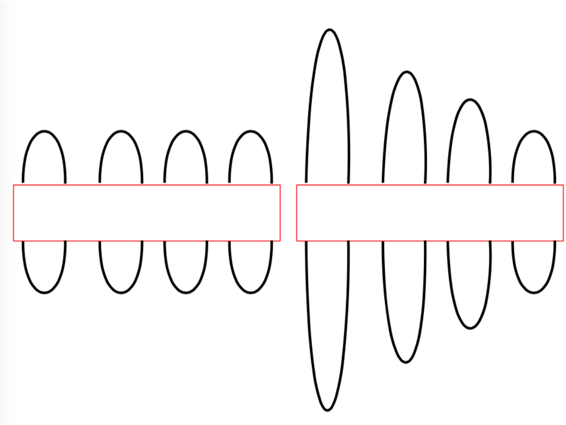


Niveles delgados

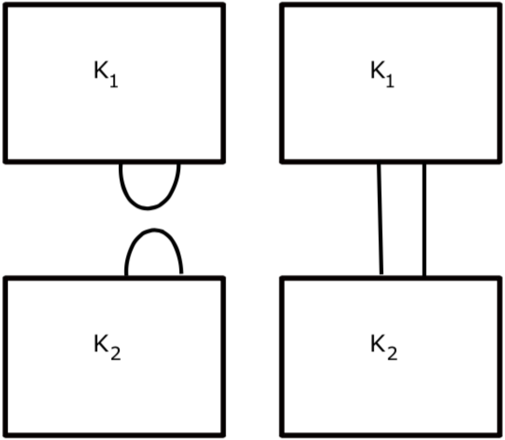
Una superficie regular P tal que el primer punto crítico arriba de P es un mínimo y el primer punto crítico debajo de ella es un máximo, se llama nivel delgado:



Un nudo es posición de puentes solo tiene un nivel grueso y ningún nivel delgado:



SUMA CONEXA

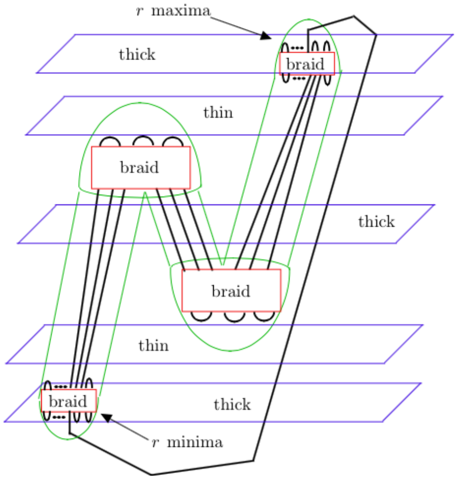


$$w(K_1 \sharp K_2) \leq w(K_1) + w(K_2) - 2$$

¿Es cierta la igualdad?

¿Es cierta la igualdad? NO
Scharlemann y Thompson, construyeron un nudo K_1 tal que $w(K_1 \sharp K_2) = w(K_1)$, con K_2 cualquier nudo de 2-puentes. (De hecho dice que parece que, y luego Blair y Tomova demuestran la conjetura)

El nudo K_1



r maxima
thick
braid
thin
braid
thick
braid
thin
braid
thick
r minima

Volvamos a los niveles gruesos y delgados.
Supongamos que el nudo K es un nudo en posición delgada intersecta a los niveles gruesos (en orden) $a_0, a_1, ..., a_m$ veces, y a los niveles gruesos (en orden) $b_1, ..., b_m$ veces. Entonces:

$$w(K) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m} a_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2$$

$$w(K) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m} a_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2$$

Supongamos que posición delgada para K coincide con posición de puentes.

$$w(K) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m} a_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} b_i^2$$

Supongamos que posición delgada para K coincide con posición de puentes.
Si para el nudo K posición delgada coincide con posición de puentes, entonces $m = 0$, a_0 es igual a $2b$, donde b es el número de puentes de K. El ancho de esta presentación es, $2b^2$. Se tiene que $\frac{1}{2}a_0^2 = 2b^2$.