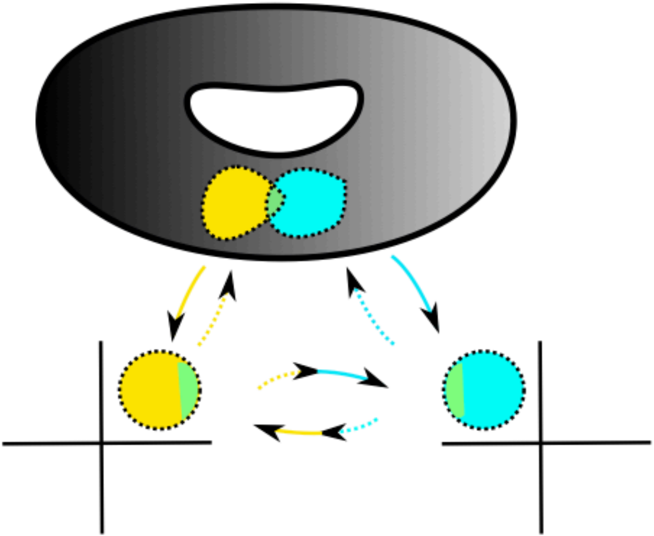
Nudos y funciones de Morse II

December 8, 2014

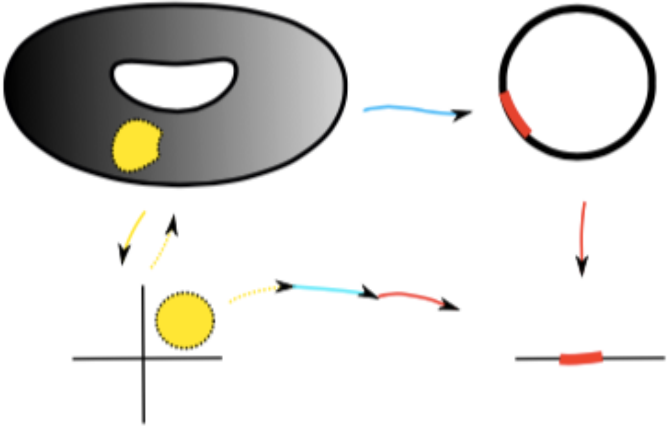
Variedades diferenciables

Una C^q-variedad, para $q \in [0, \infty]$, es una variedad topológica M con un atlas que satisface la condición de ser C^q, lo que significa que para cualquier par de cartas (M_α, ϕ_α) y (M_β, ϕ_β) en el atlas, la función $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ (donde esté definida) es C^q. Una C^∞-variedad también se llama una variedad diferenciable o variedad suave. Dado un atlas para una variedad, una función de la forma $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ se llama función de transición y se denota por $\phi_{\alpha\beta}$.

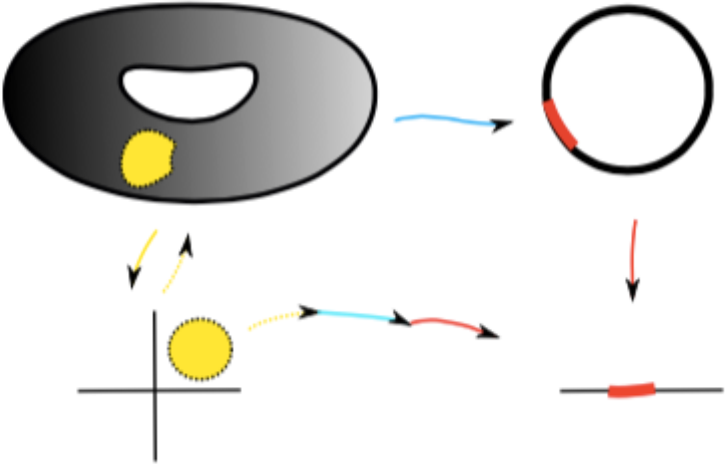


1. La esfera S^n es una n-variedad diferenciable.
2. El producto de variedades diferenciables es diferenciable
3. T^n es una variedad diferenciable.

Sea M una variedad con atlas $\{(M_\alpha, \phi_\alpha)\}$ y sea N una variedad con atlas $\{(N_\beta, \psi_\beta)\}$. Decimos que la función $f : M \to N$ es C^q si para todo α, β, la función $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ (donde esté definida) es C^q.

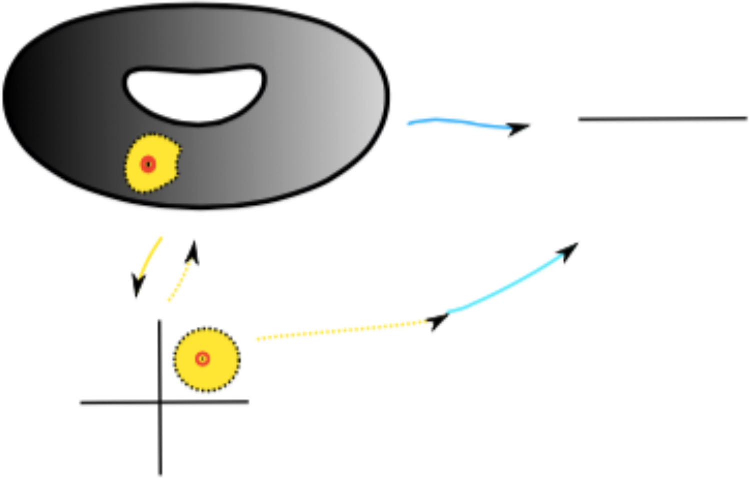


Una funcón C^q entre C^q-variedades con C^q inversa se llama C^q-difeomorfismo. Un C^∞-difeomorfismo simplemente será llamado difeomorfismo.



Dos C^q-variedades son equivalentes si existe un C^q-difeomorfismo entre ellas.

Sea M una C^q-variedad para $q \geq 1$, $x \in M$, y (M_α, ϕ_α) una carta con $x \in M_\alpha$.
Decimos que x es un punto crítico de una función $f : M \to \mathbb{R}$ si es un punto crítico de la función $f \circ \phi_\alpha^{-1}$. Es decir si el gradiente $\nabla(f \circ \phi_\alpha^{-1})$ es cero en $\phi_\alpha(x)$.
Si el gradiente no es cero en x, decimos que x es un punto regular.
Si x es un punto crítico, entonces $f(x)$ se llama valor crítico, y si x es un punto regular entonces $f(x)$ se llama valor regular.



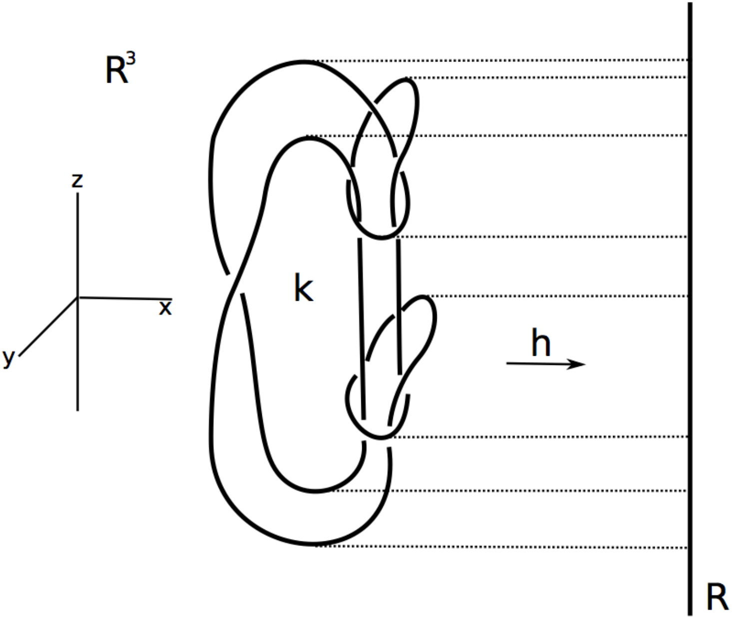
Un punto crítico de una función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es no degenerado si el Hessiano de g no es cero en x.
(Hessiano es el determinante de la matriz Hessiana de segundas derivadas parciales.)

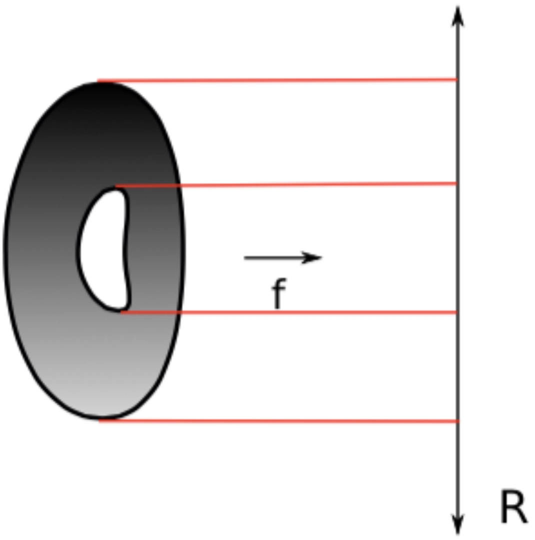
Para $M, x, (M_\alpha, \phi_\alpha), f$ como antes, decimos que x es un punto crítico no degenerado de f si es un punto crítico no degenerado de $f \circ \phi_\alpha^{-1}$.

Se puede verificar que estas dos definiciones no dependen de la carta usada.

Una función de Morse sobre una variedad M es una función suave $f : M \to \mathbb{R}$ que satisface:

- f solo tiene puntos críticos no degenerados.
- Para cualesquiera puntos críticos $x \neq y$, se tiene $f(x) \neq f(y)$.


R3
z
x
y
k
h
R


f
R

Teorema de Morse

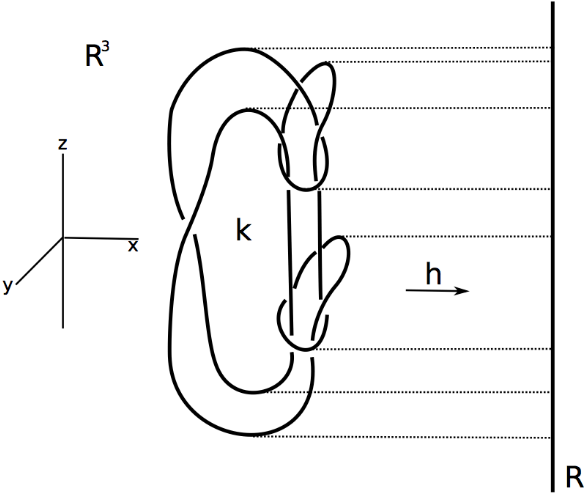
Si x es un punto crítico no degenerado de $f : M \to \mathbb{R}$, entonces existen coordenadas locales para las cuales:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = -\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2.$$

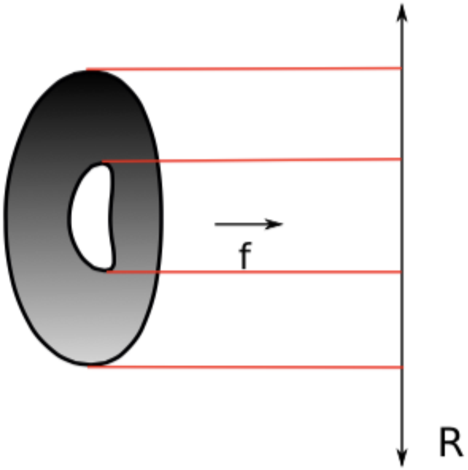
El número k se conoce como índice del punto crítico.

Sea una función de Morse $f : M \to \mathbb{R}$, M es una n-variedad.

1. solo tiene un nńumero finito de puntos críticos.
2. Si no hay valores críticos entre dos valores regulares, entonces sus niveles regulares son difeomorfos. Mas aún, los valores regulares que yacen entre dos valores críticos consecutivos tienen una estructura producto. A saber:
$$f^{-1}((a, b))$$
es difeomorfo a
$$f^{-1}(c) \times (a, b)$$
siempre que (a, b) es un intervalo que no contiene puntos críticos y $c \in (a, b)$.
3. Los niveles regulares son subvariedades de dimensión $n - 1$.



Observamos puntos críticos de indice 0 y1.



Observamos puntos críticos de indice 0,1y 2.

EJERCICIOS

Encuentra otras funciones de Morse sobre el toro haciendo otros dibujos que representen al toro en $\mathbb{R}^3$.
Calcula: $\sharp$maximos+$\sharp$minimos-$\sharp$ sillas para las funciones del ejercicio anterior y del toro parado.
¿A qué te recuerda este número?

Nudos en S^3

1. Un nudo en S^3 es un encaje suave de S^1 en S^3.
2. Escribimos K para denotar tal clase de equivalencia.
3. Como $\mathbb{R}^3 = S^3 - \{\text{punto}\}$, es equivalente considerar a los nudos en $\mathbb{R}^3$.

El nudo trivial es la clase de equivalencia que contiene al circulo $S^1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

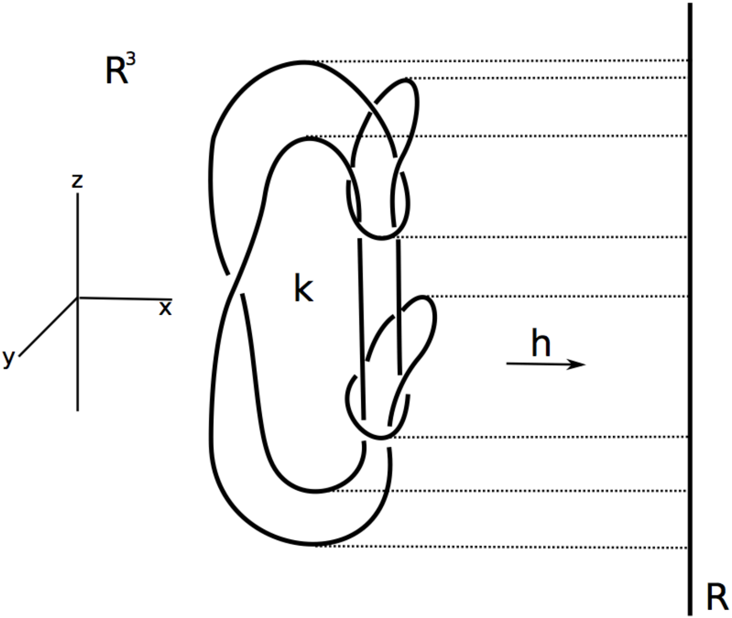
En adelante, no haremos distinción entre un nudo y sus representantes.

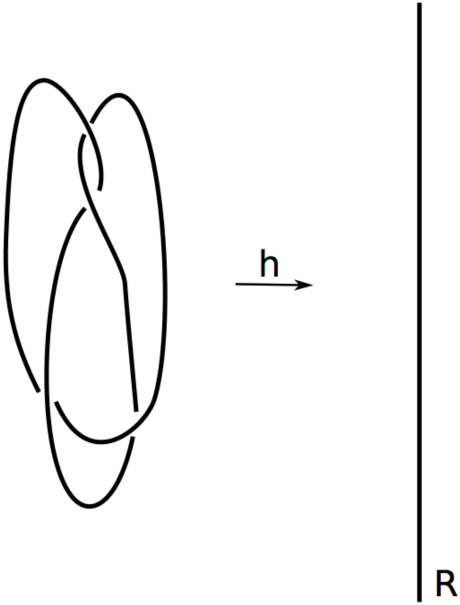
Funciones de Morse y nudos

Tomemos k un nudo en $\mathbb{R}^3$.
Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función altura estándar $h(x, y, z) = z$.
De tal manera que $h|k$ es una función de Morse.
O sea que; $h|k$ es una función diferenciable que solo tiene puntos críticos no degenerados.

1. $h|k$ solo tiene un número finito de puntos críticos.
2. Si p, q son puntos críticos, entonces $h(p) \neq h(q)$.
3. $h|k$ solo son máximos y mínimos.

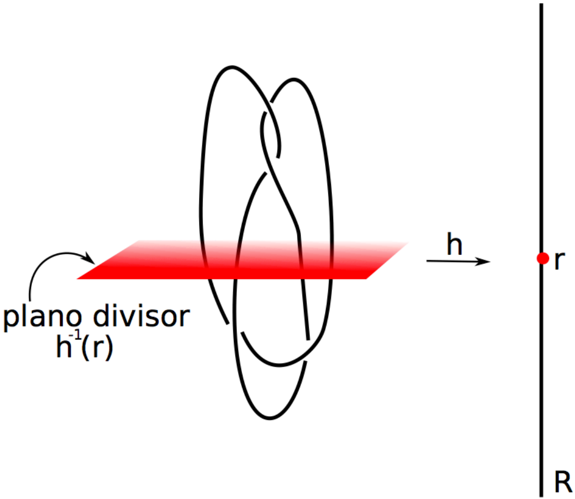
Nudo en posición de Morse




h
R

Posición de puentes

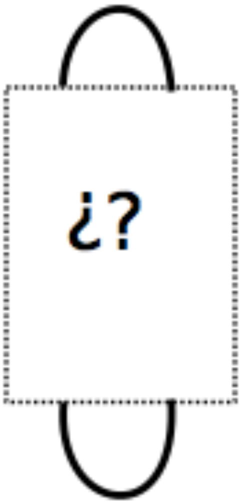
Si una posición de Morse para un nudo k es tal que vemos todos los máximos por arriba de todos los mínimos, decimos que es una posición de puentes para k.

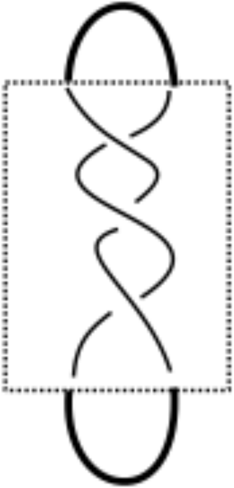


El número de puentes de una posición de puentes es el número de máximos.
El número de puentes de un nudo k es el mínimo número de puentes sobre todas las posiciones de puentes para k. Se denota por $b(k)$.
La posición de puente que realiza $b(k)$ se llama posición de puentes mínima.

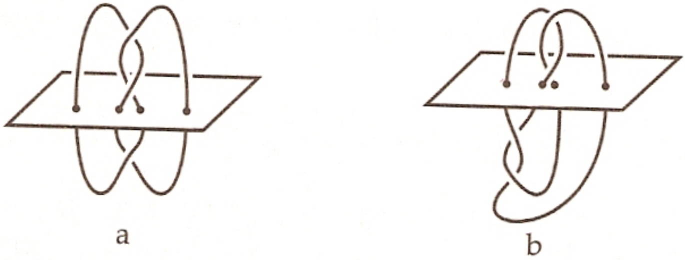
El número de puentes del nudo trivial es **1**.

Y es el único nudo con número de puentes 1.

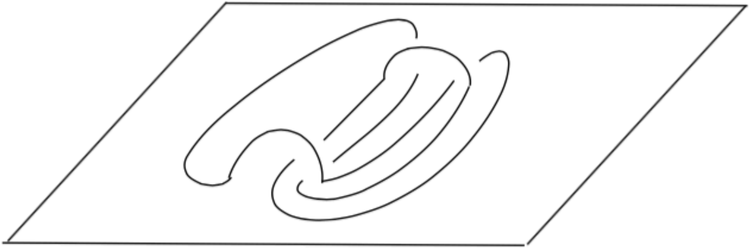




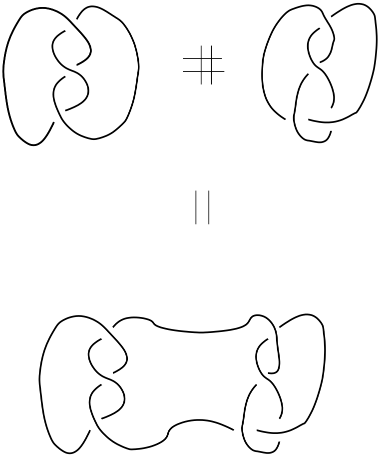
Mientras que el trébol y el nudo ocho tienen número de puente dos:



Los nudos con número de puentes 2 ya están clasificados.



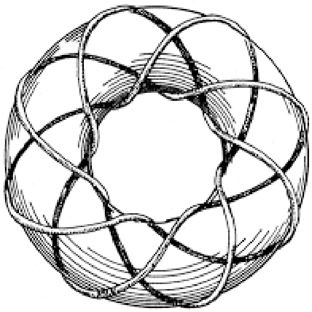
SUMA CONEXA



Igualdad de Schubert: $b(K_1 \sharp K_2) = b(K_1) + b(K_2) - 1$

Demuestra la desigualdad facil de la igualdad de Schubert.

Nudos toroidales



$T(p,q)$, $(p,q)=1$, p-meridianos y q-longitudes.
En el dibujo $T(8,3)$

Demuestra que $b(T(p, q))$ es a lo más $min\{p, q\}$