Nudos y funciones de Morse I

December 8, 2014

Variedades Topológicas

Una n-variedad topológica es un espacio segundo numerable Hausdorff M para el cual existe una familia de pares $\{(M_\alpha, \phi_\alpha)\}$ con las propiedades:

1. Para todo α, M_α es un subconjunto abierto de M y $M = \cup_\alpha M_\alpha$.
2. Para todo α, ϕ_α es un homeomorfismo de M_α a un abierto de $\mathbb{R}^n$ (o bien a $\mathbb{R}^n$).

Un par (M_α, ϕ_α) se llama una carta de M. La familia $\{(M_\alpha, \phi_\alpha)\}$ se conoce como un atlas de M.

Frecuentemente nos referimos a una variedad topológica simplemente como una variedad. La dimensión de una n-variedad es n.

Dos n-variedades son equivalentes si son homeomorfas.

$\mathbb{R}^n$ y cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$.

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.
La proyección estereográfica $h : S^n - \{(0, ..., 0, 1)\} \to \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo para cualquier punto $x \in S^n$ tal que $x \neq (0, ..., 0, 1)$ tiene como vecindad $S^n - \{(0, ..., 0, 1)\}$ que es homeomorfa a R^n.
Para exhibir una vecindad de $(0, ..., 0, 1)$ que sea homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ componemos la reflexión en $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ con h para obtener $h' : S^n - \{(0, ..., 0, -1)\} \to \mathbb{R}^n$. Entonces $S^n - (0, ..., 0, -1)$ es una vecindad de $(0, ..., 0, 1)$ homeomorfa a R^n.

$T^n = S^1 \times S^1 \times ... \times S^1$ se llama el toro de dimensión n. El toro se obtiene como un espacio cociente de $\mathbb{R}^n$. Consideremos el grupo G generado por las traslaciones de distancia 1 en cada eje coordenado. Entonces identificamos dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ si y solo si existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$. Denotemos la función cociente $q : \mathbb{R}^n \to T^n$.

Para ver que T^n es una n-variedad, sea $[x] \in T^n$ y sea U la esfera de radio $1/4$ con centro en $x \in \mathbb{R}^4$. Observemos que $g(U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G$. Se sigue que $q^{-1}|_{q(U)} : q(U) \to U$ es un homeomorfismo. El conjunto de tales homeomorfismos es un atlas para T^n

Sea M una n-variedad. Una subvariedad p-dimensional de M es un subconjunto cerrado L de M para el cual existe un atlas $\{(M_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de M tal que para todo $x \in L$ hay una carta en el atlas con $x \in M_\alpha$ y

$$\phi_\alpha(L \cap M_\alpha) = \{0\} \times \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n$$

Una subvariedad es a su vez una variedad.
Ejem: Diametro de una esfera.

Sean L y M variedades. Una función $f : L \to M$ es un encaje si es un homeomorfismo sobre su imagen $f(L)$ y $f(L)$ es una subvariedad de M.

Sea $H^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$.
Una n-variedad con frontera es un espacio M Hausdorff y segundo numerable con un atlas tal que para todo α, ϕ_α es un homeomorfismo de M_α a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ o H^n.
La frontera de M es el conjunto de todos los puntos de M que tienen una vecindad homomorfa a H^n pero ninguna vecindad homomorfa a $\mathbb{R}^n$.
La frontera de M se denota por ∂M.
Los puntos que no estn en la frontera se llaman puntos interiores.
Dos n-variedades con frontera son equivalentes si son homomorfas.

El conjunto $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ es una n-variedad con frontera, se le conoce como la n-bola.
Un par de pantalones es una 2-variedad con frontera.
Un antifaz.
Un toro con un agujero es una 2-variedad con frontera.

Sea M una n-variedad con frontera. Una subvariedad p-dimensional de M es un subconjunto cerrado L de M para el cual existe un atlas $\{(M_\alpha, \phi_\alpha)\}$ de M tal que para todo $x \in L$ en el interior de M existe una carta en el atlas tal que $x \in M_\alpha$ y

$$\phi_\alpha(L \cap M_\alpha) = \{0\} \times \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n$$

y para todo $x \in L$ en la frontera de M existe una carta en el atlas tal que $x \in M_\alpha$, y

$$\phi_\alpha(L \cap M_\alpha) = \{0\} \times H^p \subset H^n$$

y tal que

$$\phi_\alpha(x) \in \{0\} \times \partial H^p \subset \partial H^n$$

Ejem: El diametro de un disco.
La frontera, ∂M, de una n-variedad M no es una subvariedad de M, sin embargo si es un a (n-1)-variedad que está contenida en M.

Decimos que una n-variedad M es cerrada si M es compacta y $\partial M = \emptyset$.

EJERCICIOS

Demuestra que el producto de dos variedades es una variedad. ¿Qué puedes afirmar de la dimensión? (Con esto pueden obtener una demostración de que T^n es una variedad.)

Demuestra que la frontera de una n-variedad con frontera es una (n-1)-variedad sin frontera.

Convéncete, con dibujos, que el antifaz y el par de pantalones son homeomorfos.

Argumenta que la 1-esfera es homeomorfa al trebol.

Variedades diferenciables

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función C^q si tienes derivadas parciales continuas de orden q. Una función es diferenciable, o C^∞, si tienes derivadas parciales de todos los ordenes.

Una C^q-variedad, para $q \in [0, \infty]$, es una variedad topológica M con un atlas que satisface la condición de ser C^q, lo que significa que para cualquier par de cartas (M_α, ϕ_α) y (M_β, ϕ_β) en el atlas, la función $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ (donde esté definida) es C^q. Una C^∞-variedad también se llama una variedad diferenciable o variedad suave. Dado un atlas para una variedad, una función de la forma $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ se llama función de transición y se denota por $\phi_{\alpha\beta}$.

La esfera S^n es una n-variedad con un atlas con dos cartas:

$$(S^n - (0,0,...,1), h),\ (S^n - (0,0,...,-1), h')$$

donde

$$h(x_1,...,x_{n+1}) = \tfrac{1}{1-x_{n+1}}(x_1,...,x_n) \text{ y}$$
$$h'(x_1,...,x_{n+1}) = \tfrac{1}{1+x_{n+1}}(x_1,...,x_n)$$

Así que para demostrar que S^n es diferenciable, debemos demostrar que la funciones de transición $h' \circ h^{-1}$ y $h \circ h'^{-1}$ son diferenciables. Veremos que $h' \circ h^{-1}$ es diferenciable.

$$h^{-1}(y_1,...,y_n) = (\tfrac{2y_1}{1+y_1^2+...+y_n^2}, ..., \tfrac{2y_n}{1+y_1^2+...+y_n^2}, \tfrac{-1+y_1^2+...+y_n^2}{1+y_1^2+...+y_n^2})$$
$$h' \circ h^{-1}(y_1,...,y_n) = \tfrac{1}{y_1^2+...+y_n^2}(y_1,....,y_n)$$

Se sigue que $h' \circ h^{-1}$ es diferenciable excepto en el origen donde la composición no está definida. Por lo tanto S^n es una variedad suave.