Sobre extensiones de grupos algebraicos

Giancarlo Lucchini Arteche

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile

8 de junio de 2020

Resumen

Sean G, H grupos (algebraicos). Una **extensión** E de G por H es una sucesión exacta corta

$$1 \to H \to E \to G \to 1.$$

Decimos que dos extensiones E_1, E_2 son **isomorfas** si existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & H \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & G \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Objetivo

Estudiar/clasificar las extensiones de G por H.

Ejemplo: Si G actúa sobre H por automorfismos de grupo (equivalentemente, si tenemos un morfismo de grupos $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H)$), el producto semidirecto $E = H \rtimes_\varphi G$ es una extensión de G por H.

Sea G un grupo. El grupo de automorfismos exteriores de G es

$$\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Int}(G),$$

donde $\mathrm{Int}(G)$ es el subgrupo de automorfismos interiores. Para $g \in G$, denotamos $\mathrm{int}(g)$ la conjugación por g.

Sean G, H grupos. Una **acción exterior** de G sobre H es un morfismo

$$\kappa : G \to \mathrm{Out}(H).$$

Proposición

Toda extensión E de G por H induce naturalmente una acción exterior de G sobre H.

En particular, si H es abeliano, E induce una G-acción sobre H ya que $\mathrm{Out}(H) = \mathrm{Aut}(H)$.

Proposición

Toda extensión E de G por H induce naturalmente una acción exterior de G sobre H.

Demostración. Para $g \in G$, sea $s_g \in E$ una preimagen y sea $\mathrm{int}(s_g) \in \mathrm{Aut}(E)$ la conjugación por s_g en E. Como $H \lhd E$, $\mathrm{int}(s_g)$ induce un automorfismo $\varphi_g \in \mathrm{Aut}(H)$.

Definimos $\kappa : G \to \mathrm{Out}(H) : g \mapsto [\varphi_g]$, donde $[\,\cdot\,]$ denota la clase módulo $\mathrm{Int}(H)$.

κ está bien definido: Si cambiamos s_g por r_g, tenemos $r_g = hs_g$ con $h \in H$. Esto implica que $\mathrm{int}(r_g) = \mathrm{int}(h) \circ \mathrm{int}(s_g)$ y por lo tanto definen la misma clase módulo $\mathrm{Int}(H)$. ☺

Esto nos permite definir el siguiente conjunto:

Definición

$\mathrm{Ext}(G, H, \kappa) := \{$*extensiones de* G *por* H *que inducen* $\kappa\}/$*isomorfismo.*

Y tenemos entonces un nuevo objetivo:

Objetivo

Estudiar $\mathrm{Ext}(G, H, \kappa)$ *para un* $\kappa : G \to \mathrm{Out}(H)$ *dado.*

Sea H un grupo y sea Z su centro. Z es característico en H, lo que nos da un morfismo natural

$$\mathrm{Aut}(H) \to \mathrm{Aut}(Z),$$

que es trivial en $\mathrm{Int}(H)$. En otras palabras, tenemos un morfismo

$$\mathrm{Out}(H) \to \mathrm{Aut}(Z).$$

Y deducimos entonces lo siguiente:

Observación

Toda acción exterior $\kappa : G \to \mathrm{Out}(H)$ induce una G-acción sobre Z (que abusivamente denotaremos por κ).

En particular, podemos considerar el conjunto $\mathrm{Ext}(G, Z, \kappa)$ (recordemos que $\mathrm{Aut}(Z) = \mathrm{Out}(Z)$).

Teorema (clásico para grupos)

El conjunto $\mathrm{Ext}(G,Z,\kappa)$ *posee una estructura natural de grupo abeliano. Además,* $\mathrm{Ext}(G,Z,\kappa)$ *actúa naturalmente sobre* $\mathrm{Ext}(G,H,\kappa)$ *de forma simplemente transitiva (i.e. hay una sola órbita y los estabilizadores son triviales).*

Observación

Esto reduce el estudio de extensiones al caso abeliano, el cual se puede atacar usando cohomología de grupos ya que

$$\mathrm{Ext}(G,A,\kappa)\cong H^2(G,A),$$

para un G*-módulo* A *cuya acción está dada por* $\kappa : G\to \mathrm{Aut}(A)$*.*

Sea E una extensión de G por H con acción exterior κ.

Escojamos una "sección conjuntista" $s : G \to E : g \mapsto s_g$. Esto define una función $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H) : g \mapsto \varphi_g$ que levanta a κ. (¡Esto ya lo hicimos antes!)

Para $g, g' \in G$, tenemos $s_{gg'} \cdot s_{g'}^{-1} \cdot s_g^{-1} \in H$, lo que define una función $u : G \times G \to H$.

Hecho: El par (φ, u) satisface

(1) $\varphi_{gg'} = \mathrm{int}(u_{g,g'}) \circ \varphi_g \circ \varphi_{g'}$;

(2) $u_{g,g'g''} \cdot \varphi_g(u_{g',g''}) = u_{gg',g''} \cdot u_{g,g'}$.

Podemos ver a E como el conjunto $H \times G$ con la ley de grupo dada por

$$(h, g) \cdot (h', g') = (h\varphi_g(h')u_{g,g'}^{-1}, gg').$$

En efecto, si $\pi : E \to G$ es la proyección, el isomorfismo $E \to H \times G$ está dado por

$$e \mapsto (es_{\pi(e)}^{-1}, \pi(e)).$$

Esto establece una biyección entre $\mathrm{Ext}(G, H, \kappa)$ y el conjunto de pares (φ, u) que satisfacen (1) y (2), llamados **2-cociclos**, módulo una cierta relación de equivalencia (que se obtiene cambiando la sección, i.e. los s_g).

Para H abeliano (por ejemplo, para Z), se puede olvidar la función φ, ya que sencillamente es **igual** a κ.
Más importante aún, las funciones u que satisfacen (2) se pueden **multiplicar**. Esto define una estructura de grupo abeliano sobre $\mathrm{Ext}(G, Z, \kappa)$.

La acción de $\mathrm{Ext}(G, Z, \kappa)$ sobre $\mathrm{Ext}(G, H, \kappa)$ está definida por

$$(\kappa, v) \cdot (\varphi, u) := (\varphi, vu).$$

Está bien definida dado que v toma valores en el **centro** Z, por lo que vu sigue satisfaciendo (2).

La simple transitividad es un cálculo directo: dados (φ, u) y (φ', u'), salvo modificar el segundo usando la relación de equivalencia para que sea de la forma (φ, u'), obtenemos (¡como por arte de magia!) que $u'u^{-1}$ toma valores en Z y satisface (2).

Sea E una extensión de G por H. Como ya vimos, la conjugación por elementos de E produce una acción sobre H. Y en general tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{int}"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{int}"'] & G \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Int}(H) \arrow[r] & \mathrm{Aut}(H) \arrow[r] & \mathrm{Out}(H) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Como claramente la conjugación es trivial para el centro Z de H, el diagrama precedente se factoriza por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H/Z \arrow[r] \arrow[d] & E/Z \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Int}(H) \arrow[r] & \mathrm{Aut}(H) \arrow[r] & \mathrm{Out}(H) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

De hecho, si definimos $E_0 := E/Z$, tenemos que $E_0 \cong G \times_{\mathrm{Out}(H)} \mathrm{Aut}(H)$. Es decir que E_0 puede ser visto como el subgrupo de $G \times \mathrm{Aut}(H)$ de los pares que tienen la misma imagen en $\mathrm{Out}(H)$. En particular, E_0 actúa naturalmente sobre H.

De ahora en adelante, G y H pueden ser considerados como **grupos algebraicos** (o como grupos para el que no trabaje con grupos algebraicos).

Definición (Acción exterior, definición relativa)

Sean E_1, E_2 extensiones de G por H. Decimos que E_1 y E_2 **inducen la misma acción exterior** *si existe un isomorfismo de extensiones $E_1/Z \to E_2/Z$ compatible con las acciones inducidas sobre H.*

Esto nos evita tener que definir una acción exterior en el contexto de grupos algebraicos. Podemos entonces definir $\mathrm{Ext}(G, H, E)$ como el conjunto de extensiones de G por H que inducen la misma acción exterior que E, módulo isomorfismo.

Queremos estudiar este nuevo conjunto (que es el mismo de antes si G y H son grupos).

Algunas observaciones técnicas:

Observación

En el caso de H abeliano, la primera condición es vacía y recuperamos por ende el grupo $\mathrm{Ext}(G,H)$ clásico, definido vía G-acciones (cf. por ejemplo $\mathrm{SGA3}$).

En particular, a partir de una extensión E de G por H, recuperamos una acción de G sobre el centro Z de H. En efecto, basta con ver que E actúa sobre Z por conjugación y que esta acción es trivial para el subgrupo H de E. Denotaremos por $\mathrm{Ext}(G,Z,E)$ el conjunto correspondiente.

Algunas observaciones técnicas:

Observación

Si denotamos por E_0 a la extensión $E_1/Z = E_2/Z$, existe una extensión natural

$$1 \to H \times_{H/Z} H \to E_1 \times_{E_0} E_2 \to G \to 1,$$

y la "compatibilidad" es equivalente a $\Delta(H) \lhd (E_1 \times_{E_0} E_2)$ con $\Delta : H \to H \times_{H/Z} H$ la inclusión diagonal.

Esto permite deshacerse incluso de la noción de acción si se necesita, pero ésta está bien definida en muchos contextos, aún más generales que el de los grupos algebraicos.

Sea E una extensión de G por H. El teorema ahora es el siguiente (para grupos es el mismo de antes):

Teorema (nuevo para grupos algebraicos)

El conjunto $\mathrm{Ext}(G, Z, E)$ *posee una estructura natural de grupo abeliano. Además,* $\mathrm{Ext}(G, Z, E)$ *actúa naturalmente sobre* $\mathrm{Ext}(G, H, E)$ *de forma simplemente transitiva.*

Esta vez daremos una visión más conceptual de la estructura de grupo (que también es clásica).

Recordemos que todo grupo puede ser considerado como un grupo algebraico en lo que sigue.

Sea A un grupo abeliano con una G-acción y sean E_1, E_2 extensiones de G por A (que inducen dicha acción). Como A es abeliano, el morfismo suma

$$+ : A \times A \to A,$$

resulta ser un morfismo de grupos. El morfismo es además G-equivariante, ya que la G-acción es por definición compatible con la estructura de grupo de A.

Así, podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \times A \arrow[r] \arrow[d, "+"'] & E_1 \times_G E_2 \arrow[r] \arrow[d, "+_*"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & E_3 \arrow[r] & G \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

donde E_3 es por definición el cociente $(E_1 \times_G E_2)/\mathrm{Ker}(+)$.

Así, podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & A \times A \arrow[r] \arrow[d, "+"'] & E_1 \times_G E_2 \arrow[r] \arrow[d, "+_*"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ 1 \arrow[r] & A \arrow[r] & E_3 \arrow[r] & G \arrow[r] & 1, \end{tikzcd}$$

donde E_3 es por definición el cociente $(E_1 \times_G E_2)/\mathrm{Ker}(+)$.

Si denotamos por $[E]$ la clase de E en $\mathrm{Ext}(G, A)$, tenemos por definición $[E_3] := [E_1] + [E_2]$. Esto es lo que se conoce como la **suma de Baer**.

Hecho: La suma de Baer que acabamos de definir define una estructura de grupo abeliano sobre $\mathrm{Ext}(G, A)$, la cual coincide en el caso de los grupos clásicos con la que definimos mediante 2-cociclos. En particular, el elemento neutro corresponde al producto semidirecto $A \rtimes G$ para la acción fijada desde el comienzo.

Sean G, H, Z como en el teorema. Veamos ahora la acción de $\mathrm{Ext}(G, Z, E)$ sobre $\mathrm{Ext}(G, H, E)$.

Sea E_1 una extensión de G por H y sea $E' \in \mathrm{Ext}(G, Z, E_1)$. Como Z conmuta con todo H, el morfismo multiplicación

$$m : Z \times H \to H,$$

resulta ser un morfismo de grupos. El morfismo es además E_1-equivariante, ya que la E_1-acción sobre Z es la restricción de la E_1-acción sobre H y esta última es por definición compatible con la estructura de grupo de H.

De esto podemos deducir que el subgrupo $\mathrm{Ker}(m) \subset Z \times H$ es normal en $E' \times_G E_1$.

Así, podemos considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & Z \times H \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & E' \times_G E_1 \arrow[r] \arrow[d, "m_*"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & H \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & G \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

donde E_2 es por definición el cociente $(E' \times_G E_1)/\mathrm{Ker}(m)$.

Esto nos permite definir la acción como $[E'] \cdot [E_1] := [E_2]$. Nótese que en el caso de H abeliano la acción no es más que la suma de Baer por la izquierda.

Hecho: Esto define una verdadera acción. Tanto en el caso de la suma de Baer como en esta generalización, la asociatividad se chequea usando productos fibrados triples e isomorfismos canónicos de éstos.

Veamos la transitividad de la acción. Sean E_1, E_2 extensiones de G por H que inducen la misma acción exterior. Sea E_0 el cociente $E_1/Z = E_2/Z$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H \times_{H/Z} H \arrow[r] \arrow[d, "\nabla"'] & E_1 \times_{E_0} E_2 \arrow[r] \arrow[d, "\nabla_*"'] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\
1 \arrow[r] & Z \arrow[r] & E' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

donde $\nabla : H \times_{H/Z} H \to H$ es una "antimultiplicación" (moralmente $(h_1, h_2) \mapsto h_2 h_1^{-1}$), de forma que $\mathrm{Ker}(\nabla) = \Delta(H)$.

Como observamos antes, tenemos que $\Delta(H) \lhd (E_1 \times_{E_0} E_2)$, por lo que $E' := (E_1 \times_{E_0} E_2)/\Delta(H)$ está bien definida.

La clase $[E'] \in \mathrm{Ext}(G, Z, E_1)$ es la que buscamos: Tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E_1 \times_{E_0} E_2 \arrow[r, "\nabla_*"] \arrow[d, "p_1"'] & E' \arrow[d] \\
E_1 \arrow[r] & G.
\end{tikzcd}$$

Esto nos da un morfismo canónico $E_1 \times_{E_0} E_2 \to E' \times_G E_1$ hacia el grupo de la construcción precedente. Éste resulta ser un isomorfismo (inyectividad y sobreyectividad son fáciles de chequear). Si consideramos entonces la flecha cociente de la construcción precedente

$$E' \times_G E_1 \to (E' \times_G E_1)/\mathrm{Ker}(m),$$

su traducción via el isomorfismo anterior resulta ser la flecha

$$p_2 : E_1 \times_{E_0} E_2 \to E_2,$$

lo que nos dice que $[E_2] = [E'] \cdot [E_1]$, como queríamos. ☺