

# Compactificaciones de variedades de conglomerado y convexidad

A. Nájera Chávez  
joint with M.-W. Cheung and T. Magee

arXiv:1912.13052

## Simetría especular (mirror symmetry)

La simetría especular es una teoría que se originó a finales de los años 80 en el contexto de la teoría de cuerdas (física teórica).

## Simetría especular (mirror symmetry)

La simetría especular es una teoría que se originó a finales de los años 80 en el contexto de la teoría de cuerdas (física teórica). Esta teoría se basa en el siguiente **principio**:

Sea  $X$  un espacio que tiene la estructura de una **variedad algebraica** y de una **variedad simpléctica**.

## Simetría especular (mirror symmetry)

La simetría especular es una teoría que se originó a finales de los años 80 en el contexto de la teoría de cuerdas (física teórica). Esta teoría se basa en el siguiente **principio**:

Sea  $X$  un espacio que tiene la estructura de una **variedad algebraica** y de una **variedad simpléctica**. **Debe de existir** otro espacio  $X^\vee$ , que es simultáneamente una variedad algebraica y una variedad simpléctica, **tal que** la **geometría algebraica** de  $X$  es **equivalente** a la **geometría simpléctica** de  $X^\vee$  y viceversa.

## Simetría especular (mirror symmetry)

La simetría especular es una teoría que se originó a finales de los años 80 en el contexto de la teoría de cuerdas (física teórica). Esta teoría se basa en el siguiente **principio**:

Sea  $X$  un espacio que tiene la estructura de una **variedad algebraica** y de una **variedad simpléctica**. **Debe de existir** otro espacio  $X^\vee$ , que es simultáneamente una variedad algebraica y una variedad simpléctica, **tal que** la **geometría algebraica** de  $X$  es **equivalente** a la **geometría simpléctica** de  $X^\vee$  y viceversa.

Gran parte de la investigación en esta teoría es:

- hacer formal la palabra **equivalente**
- construir  $X^\vee$  a partir de  $X$ .

## El contexto de esta charla

A principio de los años 2000 Gross-Sibert iniciaron el programa de simetría especular para variedades **log-Calabi-Yau**.

## El contexto de esta charla

A principio de los años 2000 Gross-Sibert iniciaron el programa de simetría especular para variedades **log-Calabi-Yau**. Las variedades de conglomerado son una familia especial de forman una clase muy especial de variedades log-Calabi-Yau y varios aspectos de este programa se simplifican para estas variedades.

## El contexto de esta charla

A principio de los años 2000 Gross-Sibert iniciaron el programa de simetría especular para variedades **log-Calabi-Yau**. Las variedades de conglomerado son una familia especial de forman una clase muy especial de variedades log-Calabi-Yau y varios aspectos de este programa se simplifican para estas variedades.

**Eslogan:** Vía la simetría especular, varias técnicas de geometría tórica pueden generalizarse al universo de las variedades de conglomerado. En particular, se puede compactificar variedades de conglomerado usando "**politopos convexos**".



## El contexto de esta charla

A principio de los años 2000 Gross-Sibert iniciaron el programa de simetría especular para variedades **log-Calabi-Yau**. Las variedades de conglomerado son una familia especial de forman una clase muy especial de variedades log-Calabi-Yau y varios aspectos de este programa se simplifican para estas variedades.

**Eslogan:** Vía la simetría especular, varias técnicas de geometría tórica pueden generalizarse al universo de las variedades de conglomerado. En particular, se puede compactificar variedades de conglomerado usando "**politopos convexos**".

**Objetivo:** Caracterizar a los conjuntos que compactifican a las variedades de conglomerado como aquellos conjuntos que son "**convexos por líneas quebradas**".

# Plan

- 1 Variedades de conglomerado
- 2 Funciones theta
- 3 Compactificaciones y convexidad

# Variedades log-Calabi-Yau

## Definición

Sea  $U$  una variedad algebraica (sobre  $\mathbb{C}$ ) afín, suave, conexa y que contiene un toro algebraico  $T \cong (\mathbb{C})^r$  como abierto denso. Decimos que  $U$  es **log-Calabi-Yau** si la forma de volumen estándar

$$\omega = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dz_r}{z_r}$$

en  $T$  se extiende a una forma de volumen en  $U$  sin ceros ni polos.

# Ejemplos

- Toros algebraicos
- Pegado de toros algebraicos usando aplicaciones birracionales que preservan  $\omega$ .
- Una explosión de una variedad tórica en un centro de co-dimensión 2 que es un divisor suave en la frontera tórica, luego remover la transformada estricta de la frontera.
- Varias variedades Fano en teoría de representaciones (Grassmannianas, variedades de bandera,...) son ejemplos de compactificaciones de variedades de conglomerado. La variedad de conglomerado es el complemento de un divisor anti-canónico.

## Notación tórica

- $N \cong \mathbb{Z}^r$
- $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$
- $T_N = N \otimes \mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^*)^r$
- $T_M = M \otimes \mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^*)^r$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  el emparejamiento de evaluación

$N \equiv$  grupo de caracteres de  $T_M$

$M \equiv$  grupo de caracteres de  $T_N$

- $\mathbb{C}[T_N] = \mathbb{C}[M]$
- $\mathbb{C}[T_M] = \mathbb{C}[N]$

# Mutaciones

## Definition

Sea  $(m, n) \in M \times N$  tal que  $\langle m, n \rangle = 0$

$$\begin{aligned}\mu_{(m,n)} : T_N &\dashrightarrow T_N \\ \mu_{(m,n)}^*(z^{m'}) &= z^{m'}(1 + z^m)^{\langle m', n \rangle}\end{aligned}$$

La mutación dual es  $\mu_{(-n,m)} : T_M \dashrightarrow T_M$

**Propiedad clave:** Las mutaciones preservan la forma de volumen estándar.

**Consecuencia:**  $\mu_{(m,n)}$  define una variedad log-CY pegando dos copias de  $T_N$  y  $\mu_{(-n,m)}$  define otra variedad log-CY pegando dos copias de  $T_M$ .

# Cluster transformations

Fijamos la siguiente información:

- $\{\cdot, \cdot\} : N \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  una forma bilineal anti-simétrica
- $\mathbf{s} := \{e_1, \dots, e_r\}$  una **semilla** (i.e. una  $\mathbb{Z}$ -base de  $N$ )
- $v_k := \{e_k, \cdot\} \in M$

La pareja  $(v_k, -e_k)$  define dos mutaciones

$$\mu_{(v_k, -e_k)} : T_N \dashrightarrow T_N \quad \text{and} \quad \mu_{(e_k, v_k)} : T_M \dashrightarrow T_M$$

## Observación

Las "famosas" **transformaciones de conglomerado** son

$$\mu_k^A := \mu_{(v_k, -e_k)} \quad \text{y} \quad \mu_k^X := \mu_{(e_k, v_k)}$$

La semilla  $\{e_1, \dots, e_r\}$  junto con la forma  $\{\cdot, \cdot\}$  define un **carcaj** (es decir, una gráfica dirigida)  $Q$ .

- vértices =  $\{1, \dots, r\}$
- $\{e_i, e_j\}$  = número de flechas de  $i$  ta  $j$

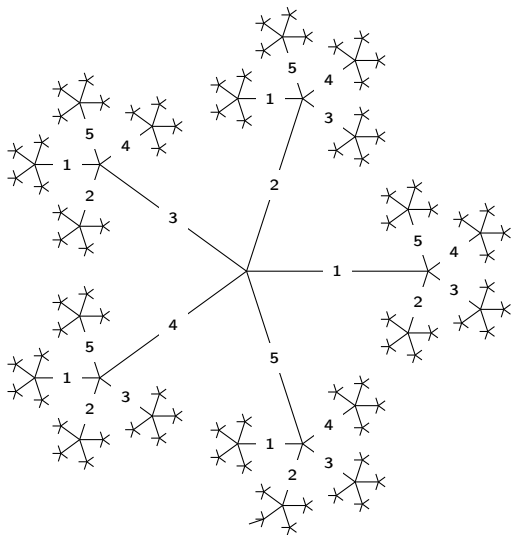
La aplicación  $\mu_{(e_k, v_k)}^{\text{trop}} : N \dashrightarrow N$  es lineal por pedazos. Da lugar a la noción de mutación de semillas y, consecuentemente, a la noción de mutación de carcajes.

Las variedades de conglomerado asociadas a  $Q$  se obtienen iterando indefinidamente la mutación de carcajes y el proceso de pegado.

$$Q \begin{cases} \nearrow \mathcal{A}_Q = \bigcup T_N / \text{pegado tipo } \mathcal{A} \\ \searrow \mathcal{X}_Q = \bigcup T_M / \text{pegado tipo } \mathcal{X} \end{cases}$$



EL proceso de iteración puede visualizarse en un árbol  $r$ -regular  $\mathbb{T}^r$

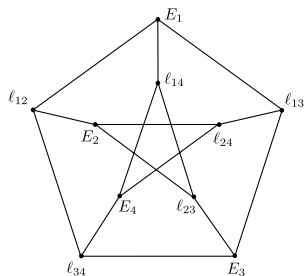


## Ejemplos

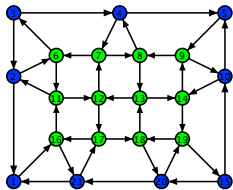
- Si  $Q = 1 \rightarrow 2$  entonces

$$\mathcal{A}_Q \cong \mathcal{X}_Q \cong \text{dP}_5 \setminus C,$$

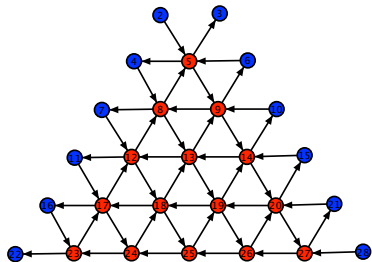
, donde  $\text{dP}_5$  es la superficie de del Pezzo de grado 5 y  $C$  un ciclo anticanónico de curvas con auto-intesección igual a  $-1$ .



- variedades "positroid" dentro de Grassmannianas



- Celda de Bruhat grande dentro de una variedades de bandera  $\mathcal{F}_n = SL_n/B$



## Conexión con geometría tropical

Un semi-campo  $(\mathbb{P}, \oplus, \cdot)$  es un campo sin resta.

### Ejemplos

- $(\mathbb{Z}, \min, \cdot) =: \mathbb{Z}^t$
- $(\mathbb{R}, \min, \cdot) =: \mathbb{R}^t$
- $(\mathbb{Q}_{s.r.}(x_1, \dots, x_r), +, \cdot)$ , dónde  $\mathbb{Q}_{s.r.}(x_1, \dots, x_r)$  es el conjunto de funciones racionales en  $x_1, \dots, x_r$  que no involucran restas.

**Observación:** Las mutaciones no involucran restas.

**Consecuencia:** Si  $\mathbb{P}$  es un semi-campo y  $\mathcal{V}$  una variedad de conglomerado. Por lo tanto  $\mathcal{V}(\mathbb{P})$  está bien definido.

Recordemos  $\mathcal{V} = \bigcup T_L$  (con  $L = N$  ó  $M$ ). Se puede demostrar que

$$\mathcal{V}(\mathbb{P}) \cong L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}$$

identificación **no-canónica** como conjuntos.

En geometría tórica tenemos lo siguiente:

$T_L$  tiene como **dual**  $T_{L^*}$ . Luego  $T_{L^*}(\mathbb{Z}^t) = L^* \otimes \mathbb{Z} = L^*$ .

$T_{L^*}(\mathbb{Z}^t) = L^*$  parametriza a una base de  $\Gamma(T_L, \mathcal{O}_{T_L})$ .

En variedades de conglomerado tenemos lo siguiente:

### Conjetura (Fock-Goncharov)

- El espacio tropical  $\mathcal{X}_Q(\mathbb{Z}^t)$  parametriza una base de  $\Gamma(\mathcal{A}_Q, \mathcal{O}_{\mathcal{A}_Q})$ .
- el espacio tropical  $\mathcal{A}_Q(\mathbb{Z}^t)$  parametriza una base de  $\Gamma(\mathcal{X}_Q, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_Q})$

En 2012 Gross-Hacking-Keel dieron contraejemplos a la conjetura.

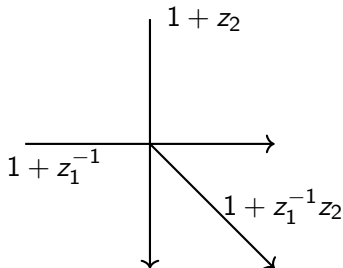
El fenómeno se entendió mucho mejor en una secuela por GHK-Kontsevich  $\rightsquigarrow$  **funciones theta en variedades de conglomerado.**

# Diagramas de difusión y funciones theta

Los diagramas de difusión (a. k. a. estructuras "wall-crossing") son artefactos combinatorios. Tienen un sabor a geometría tropical, pero **no es claro** cuales son los entes geométricos detrás de ellos.

### Ejemplo

El diagrama de difusión de  $1 \rightarrow 2$



Tanto el programa de Kontsevich-Soibelman como el de Gross-Siebert para la reconstrucción de la variedad espejo se basan en los diagramas de dispersión.

- $\{\cdot, \cdot\} : N \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  forma bilineal anti-simétrica
- $\mathbf{s} := \{e_1, \dots, e_r\}$  una **semilla**
- $N_{\mathbf{s}}^+ = \{\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i \mid \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\}$

## Definición

Una **pared** en  $M_{\mathbb{R}}$  es una pareja  $(\mathfrak{d}, f_{\mathfrak{d}})$  donde

- $\mathfrak{d} \subseteq M_{\mathbb{R}}$  es un cono convexo, racional y poliedral de co-dimensión 1, contenido en un hiper-plano  $n^{\perp}$  para algún  $n \in N_{\mathbf{s}}^+$
- $f_{\mathfrak{d}} \in \mathbb{C}[[M]]$ , la **función de dispersión**, es una serie de la forma

$$f_{\mathfrak{d}} = 1 + \sum_{k \geq 1} c_k z^{k\{n, \cdot\}}$$

- Un **diagrama de dispersión**  $\mathfrak{D}$  es una colección de paredes tal que, para cada  $k \geq 0$ , el conjunto  $\{(\mathfrak{d}, f_{\mathfrak{d}}) \in \mathfrak{D} \mid f_{\mathfrak{d}} \neq 1 \text{ mód } (z^{k\{e_i, \cdot\}})\}$  es finito para cada  $i$ .



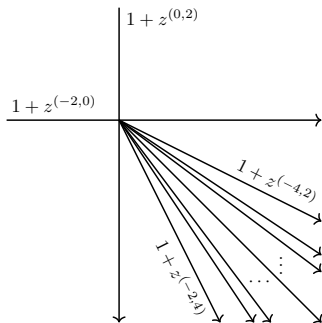
**Recordemos:** habíamos definido  $v_k := \{e_k, \cdot\} \rightsquigarrow z^{v_k} \in \mathbb{C}[M]$ .

“Teorema” (Gross-Hacking-Keel-Kontsevich) Sea

$$\mathfrak{D}_{in,s} := \left\{ \left( e_i^\perp, 1 + z^{v_k} \right) \mid 1 \leq i \leq r \right\}.$$

Entonces, existe un único diagrama de dispersión **consistente**  $\mathfrak{D}'$  que contiene a  $\mathfrak{D}_{in,s}$  y que codifica un atlas para  $\mathcal{X}_Q$  y una subálgebra canónica de  $\Gamma(\mathcal{A}_Q, \mathcal{O}_{\mathcal{A}_Q})$ .

$$Q : 1 \Rightarrow 2$$



- Existe una pared que pasa por  $(n + 1, -n)$  y  $(n, -n - 1)$  para cada  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ . La función de dispersión es  $1 + z^{(-2n-2,2n)}$  y  $1 + z^{(-2n,2n+2)}$ , respectivamente.
- Hay una pared especial que pasa por  $(1, -1)$  cuya función de dispersión es  $(1 - z^{(-2,2)})^{-2}$ .

Vamos a definir las funciones theta de manera combinatoria.

**Idea clave 1:** Las funciones theta se definen contando discos pseudo-holomorfos en  $\mathcal{X}_Q^{\text{ann}}$ .

**Idea clave 2:** La multiplicación de funciones theta codifica invariantes de Gromov-Witten en  $\mathcal{X}_Q^{\text{ann}}$ .

**Esto se formalizó en 2019 por Keel y Yue Yu en el caso afín.**

## Definición

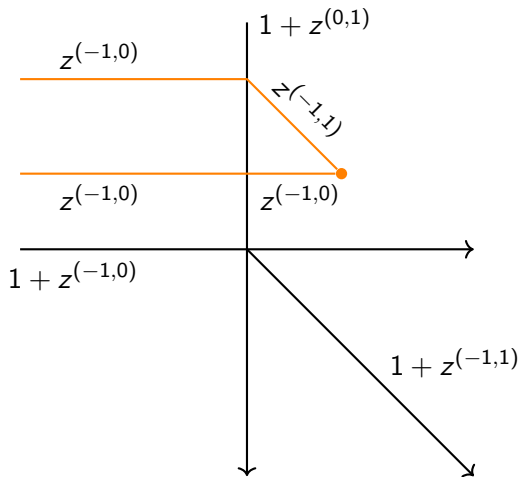
Sea  $m \in M \setminus \{0\}$ . Una **línea quebrada** con **exponente inicial**  $m$  es una aplicación propia lineal por pedazos

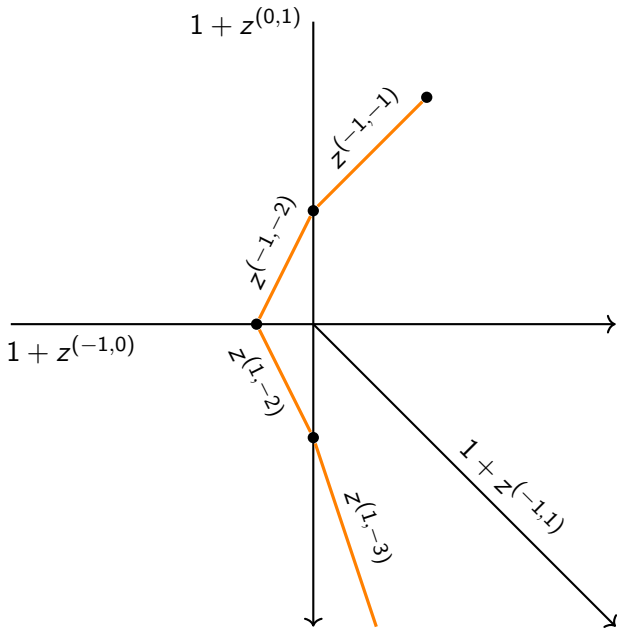
$$\gamma : (-\infty, 0] \rightarrow M_{\mathbb{R}} \setminus \text{Sing}(\mathfrak{D})$$

que no es lineal solamente en paredes, con un número finito de dominios de linealidad y un monomio  $c_L z^{m_L} \in \mathbb{C}[M]$  para cada dominio de linealidad  $L$  tal que

- $\gamma(0)$  no pertenece a ninguna pared
- el monomio asociado al único dominio de linealidad infinito es  $z^m$ .
- Para  $t$  en un dominio de linealidad  $L$ ,  $\gamma'(t) = -m_L$ .
- la manera en la que  $\gamma$  puede “quebrarse” es controlada por las funciones de dispersión.

Dos líneas quebradas con exponente inicial  $(-1, 0)$





# Funciones theta

## Definición

- Sea  $\gamma$  una línea quebrada. Sea  $\text{Mono}(\gamma)$  el monomio asociado al último dominio de linealidad  $\gamma$ .
- Para  $x_0 \in M_{\mathbb{R}} \setminus \text{Supp}(\mathfrak{D})$  definimos la función theta como

$$\vartheta_{x_0, \mathfrak{m}} = \sum_{\gamma} \text{Mono}(\gamma),$$

donde la suma es sobre todas las líneas quebradas  $\gamma$  con exponente inicial  $\mathfrak{m}$  y  $\gamma(0) = x_0$ .

**Idea clave:** Las funciones theta son la generalización de los caracteres de un toro al mundo de conglomerado.

# Compactificaciones y convexidad



## Hechos (GHKK 17')

- $\mathcal{D}_S$  contiene un abanico simplicial  $\Delta^+$  llamado el abanico de (Fock-Goncharov). El 1-esqueleto de complejo dual es el cociente del árbol  $\mathbb{T}^r$  por las periodicidades de la mutación.
- La función  $\vartheta_{x_0, m}$  es la misma si  $x_0$  varía en el interior de un cono maximal de  $\Delta^+$ .
- Si  $\vartheta_{x_0, m}$  es una suma finita, entonces es una función regular en  $\mathcal{A}_Q$ .
- Si fijamos una carta tórica inicial para  $\mathcal{A}_Q$ , podemos hablar de  $\vartheta_m$  pues  $\vartheta_{x_0, m}$  es la expresión de la función global correspondiente a una carta que depende de  $x_0$ .

# Multiplicación e invariantes de GW

## Teorema (GHKK 17')

$$\vartheta_p \cdot \vartheta_q = \sum_r \alpha(p, q, r) \vartheta_r, \quad (0.1)$$

dónde

$$\alpha(p, q, r) := \sum c(\gamma^{(1)}) c(\gamma^{(2)}).$$

Acá la suma es sobre todas las parejas  $(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})$

- que terminan en  $r$
- con monomio inicial  $I(\gamma^{(1)}) = p, I(\gamma^{(2)}) = q$
- (balancing condition) los monomios finales satisfacen  $F(\gamma^{(1)}) + F(\gamma^{(2)}) = r,$

y

$$\text{Mono}(\gamma^{(i)}) := c(\gamma^{(i)}) z^{F(\gamma^{(i)})}$$

es el monomio asociado al último dominio de linealidad de  $\gamma^{(i)}$ .

## Definición

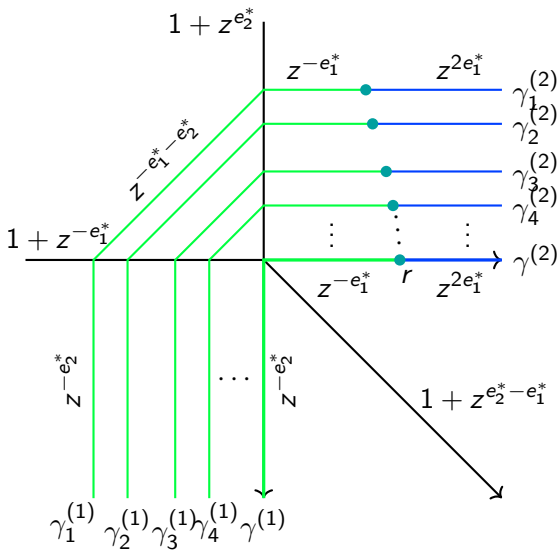
Un conjunto cerrado  $S$  de  $M_{\mathbb{R}}$  es **convexo por líneas quebradas** si para cualquier pareja de puntos racionales  $s_1, s_2$  en  $S$ , cada segmento de una línea quebrada con extremos  $s_1$  y  $s_2$  está enteramente contenida en  $S$ .

## Teorema (CMNC 19')

Un conjunto  $S$  determina una compactificación de  $\mathcal{A}_Q$  si y sólo si es compacto y convexo por líneas quebradas.

## Detalles técnicos escondidos

Para la noción de convexidad por líneas quebradas necesitamos trabajar con líneas quebradas singulares.



## References

- CMNC** Man-Wai Cheung, Timothy Magee, Alfredo Nájera Chávez. Compactifications of cluster varieties and convexity. *arxiv preprint arXiv:1912.13052 [math.AG]*, (2019)
- GHK15** Mark Gross, Paul Hacking and Sean Keel. Birational geometry of cluster algebras. *Algebraic Geometry*, 2(2):137–175 (2015)
- GHKK17** Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(2):497–608 (2017)
- KY 19** Sean Keel and Tony Yue Yu. The Frobenius structure theorem for affine log Calabi-Yau varieties containing a torus. *arxiv preprint arXiv:1908.09861 [math.AG]*, (2019)