

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES TROPICALES

CRISTHIAN GARAY LÓPEZ

RESUMEN. Presentamos una introducción a la teoría de las ecuaciones diferenciales tropicales y explicamos cómo estas se pueden aplicar de manera concreta a problemas de sistemas *clásicos* de ecuaciones diferenciales algebraicas.

1. INTRODUCCIÓN

El presente artículo pretende ser una excursión guiada al formalismo y filosofía detrás de las ecuaciones diferenciales tropicales, con el propósito de presentar una versión del teorema fundamental de la geometría algebraica diferencial tropical como aparece formulado en [3]. Este resultado abre la puerta a múltiples aplicaciones a la teoría de (soluciones en series de potencias de) ecuaciones diferenciales clásicas, lo cuál justifica la importancia de su desarrollo más amplio de esta teoría.

Como excursión guiada, se enfatiza la presentación de las ideas para que sea accesible a un público amplio, digamos, para estudiantes a partir del último año de la licenciatura en matemáticas o carreras afines que sepan rudimentos de estructuras algebraicas y de ecuaciones diferenciales. El lector interesado en un acercamiento más riguroso y general al estado del arte de este tema puede consultar [2]. La forma en la que presentamos el tema es mediante ejercicios básicos esparcidos a lo largo del documento, que aunque no son esenciales para llenar huecos en la exposición, creemos que ayudan a la comprensión de los conceptos.

Más allá de las aplicaciones dictadas por el teorema fundamental, creemos que esta teoría representa un buen ejemplo de aplicación de los semianillos (conmutativos con identidad), y en ella también aparece de manera natural el concepto de valuación generalizada. Estos son básicamente los dos pilares sobre los que se basa la teoría, y se pueden ver como extensiones naturales de sus contrapartes usuales, a saber, los anillos conmutativos y las valuaciones de Krull.

El presente trabajo está dividido de la siguiente manera: en la sección 2 presentamos la motivación de la teoría de las ecuaciones diferenciales tropicales. En la sección 3, introducimos el concepto de semianillo como objeto algebraico rector de la teoría, ya que este comprende de manera unificada tanto el marco clásico como el tropical. Los objetos relevantes son los polinomios diferenciales con coeficientes en un semianillo de series de potencias formales y sus soluciones en series de potencias.

En la sección 4, vemos como los conceptos introducidos en la sección anterior interactúan por medio de los mapeos de tropicalización, los cuales permiten describir una correspondencia entre soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales clásicas con sus contrapartes tropicales. Finalmente, en la sección 5, discutiremos

la descripción de otros caminos y conceptos más avanzados, como el de (cuasi) valuaciones, el cual es una generalización reciente del concepto de valuación de Krull.

2. MOTIVACIÓN

Contrariamente a la Matemática, sin adjetivos, la Matemática *tropical* no existe como tal; existen aplicaciones, o métodos tropicales aplicados a la Matemática *clásica*. En esencia, existen dos mundos paralelos: el clásico y el tropical, y el segundo se está frecuentemente subordinado al primero. En esta sección vamos a explicar esto.

Originalmente, el computólogo brasileño Imre Simon fue de los primeros en estudiar problemas de matemáticas aplicadas usando estructuras algebraicas cuyo representante más famoso (probablemente) es el siguiente: $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot, -\infty, 0)$, donde $a \odot b := a + b$ y $a \oplus b := \max\{a, b\}$ (con respecto al orden usual). Estos se nombraron como semianillos max-plus, puesto que \mathbb{T} es muy cercano al concepto de anillo con dichas operaciones, o con el galicismo *semianillos tropicales*, porque Simon es Brasileño, lo cual es tropical a ojos de los franceses. Esta historia se puede consultar en [9].

Una vez que el origen del nombre ha sido aclarado, el lector se podrá convencer sin mucho esfuerzo que varios de los conceptos básicos del álgebra conmutativa se pueden formular sobre \mathbb{T} como si este fuera un anillo, por ejemplo, un polinomio tropical (o con coeficientes en \mathbb{T}) es una suma de la forma

$$p(x) = a_0 \oplus a_1 \odot x \oplus \cdots \oplus a_d \odot x^{\odot d}, \quad a_0, \dots, a_d \in \mathbb{T}.$$

De la misma manera, podemos definir módulos tropicales (o \mathbb{T} -módulos), series formales tropicales, etc. Inclusive conceptos más atrevidos fuera del álgebra, como curvas algebraicas tropicales (los *ceros* de polinomios tropicales), o como será el caso de este artículo, ecuaciones diferenciales tropicales (los *ceros* de polinomios diferenciales tropicales).

En este contexto, cuando hablamos de un objeto matemático, hay de dos tipos: clásicos o usuales, y nuevos o tropicales, y *tropicalizar* es viajar del mundo clásico al tropical, con el fin de analizar un problema desde otra perspectiva, frecuentemente con el fin de entenderlo mejor o de resolverlo. Una vez tropicalizado, la forma del problema cambia, pero algunos de sus aspectos fundamentales se conservan. O probablemente solo queramos estudiar un aspecto particular de un problema; puede que sea tan complicado que uno espere solamente entender mejor algunos aspectos de él. Este es el caso de las ecuaciones diferenciales, o más bien de sus soluciones.

2.1. El teorema de la correspondencia de Mikhalkin. Los problemas de conteo o *combinatorios*¹ tradicionalmente son propensos a ser transformados, y uno de los ejemplos más exitosos (sino es que el más) de tropicalización de un problema fue dado por G. Mikhalkin [8] para resolver un problema de conteo de curvas algebraicas. Recordemos que una curva algebraica de grado d en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ es el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo de grado d en las variables x, y, z .

¹Entendiendo combinatoria como el arte de lo discreto.

Problema 2.1. *Elegimos dos números naturales $d \geq 1$, $0 \leq g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ y sea \mathcal{P} una configuración de $3d + g - 1$ puntos en el plano proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$: Contar el número $N(d, g)$ de curvas algebraicas de grado d (y género g) que pasan por \mathcal{P} .*

Ejemplo 2.2. *Este problema es una generalización de nociones de geometría bien conocidas. Por ejemplo, si $d = 1$, entonces $g = 0$, y \mathcal{P} es una configuración de 2 puntos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, luego $N(1, 0) = 1$, pues por dos puntos en el plano pasa una única línea.*

Elegimos este problema por varias razones: tiene una larga historia, es difícil de resolver (aunque no es difícil de formular), y básicamente fue el trabajo que puso lo tropical en el mapa de la matemática, o al menos de la geometría algebraica. Mikhalkin resolvió completamente este problema no contando curvas algebraicas irreducibles de grado d , lo cual es difícil, sino de la siguiente manera:

1. primero se dio cuenta de que había un problema tropical análogo: calcular el número $N^{\text{trop}}(d, g)$ de curvas tropicales de grado d que pasan por una configuración \mathcal{Q} de $3d + g - 1$ puntos en el plano proyectivo tropical, digamos que estas son $C_1, \dots, C_{N^{\text{trop}}(d, g)}$,
2. después vio que el problema original se podía tropicalizar, lo que significa que si $D_1, \dots, D_{N(d, g)}$ son las curvas que pasan por la configuración original \mathcal{P} y si $\mathcal{Q} = \text{trop}(\mathcal{P})$ es la tropicalización de \mathcal{P} , entonces $\{\text{trop}(D_j) : j = 1, \dots, N(d, g)\} = \{C_i : i = 1, \dots, N^{\text{trop}}(d, g)\}$,
3. defines la multiplicidad $\mu(C_i)$ de C_i como el número de curvas D_j que se tropicaliza en C_i .

Luego, el problema sale por definición, pues el número $N(d, g)$ es la suma de las multiplicidades $\mu(C_1) + \dots + \mu(C_{N^{\text{trop}}(d, g)})$. Las ventajas de este método son dos, a saber, el mundo tropical es independiente del mundo algebraico, es decir, podemos comenzar directamente con una configuración tropical \mathcal{Q} , y las multiplicidades de las curvas tropicales se calculan combinatoriamente.

Teorema 2.3 (El teorema de la correspondencia de Mikhalkin). *El número $N(d, g)$ se puede calcular tropicalmente.*

Se llama teorema de la correspondencia porque cada una de las curvas D_j que nos interesan, se envía en una de las curvas tropicales C_i ; básicamente queremos usar la combinatoria para resolver problemas clásicos, como el anterior. Es difícil hacerle justicia a un resultado tan bello en un espacio tan pequeño, pero el lector interesado puede consultar [7][Section 1.7], o el artículo original [8] para saber más.

Después del teorema de la correspondencia de Mikhalkin, el punto fuerte de la aplicación de métodos tropicales a problemas clásicos fue la obtención de resultados tipo teorema de correspondencia. El propósito de este artículo es probar que el teorema fundamental 4.14 se puede ver como un caso particular de teorema de correspondencia para el caso de soluciones en series de ecuaciones diferenciales.

2.2. Soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales. Está de más decir que las ecuaciones diferenciales siempre han sido un área importantísima no solo de las matemáticas tanto puras como aplicadas, sino también de casi cualquier otra rama del conocimiento humano. También está de más decir que resolverlas es bastante complicado, y que dentro de los métodos de solución particularmente tratables está el de proponer soluciones en series de potencias formales.

Concretamente, consideraremos K un campo de característica cero (podemos suponer $K = \mathbb{C}$) y relaciones *algebraicas* con coeficientes en $K[[t, u]]$ de tipo

$$(1) \quad P(t, u; x, x_t, x_u, x_{tu} \dots, y, y_t, y_u, y_{tu}, \dots).$$

Una ecuación diferencial clásica es el enunciado $P = 0$, y buscamos parejas $\varphi(t, u), \psi(t, u) \in K[[t, u]]$ de manera que al hacer la sustitución $x = \varphi, y = \psi$ en (1), la siguiente expresión

$$(2) \quad P|_{x=\varphi, y=\psi} := P(t, u; \varphi, \varphi_t, \varphi_u, \varphi_{tu}, \dots, \psi, \psi_t, \psi_u, \psi_{tu}, \dots) = 0$$

sea verdadera. Aquí $\varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\psi_{tu} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial u}$, etc.

Insistimos en que las relaciones (1) deben de ser algebraicas, por lo que no permitimos expresiones que involucren cosas como raíces cuadas, normas o valores absolutos, o funciones trigonométricas. Entonces lo que hacemos es considerar expansiones $\varphi(t, u) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} a_{i,j} t^i u^j$, $\psi(t, u) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} b_{i,j} t^i u^j$ con $a_{i,j}, b_{i,j} \in K$, sustituirlas en (2) para obtener una serie $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} f_{i,j}(\{a_{m,n}, b_{m,n}\}) t^i u^j = 0$, y luego resolver el sistema infinito de ecuaciones algebraicas $\{f_{i,j}(\{a_{m,n}, b_{m,n}\}) = 0 : (i,j) \in \mathbb{N}^2\}$ para los vectores infinitos de coeficientes $(a_{m,n}), (b_{m,n}) \in K^{\mathbb{N}} \times K^{\mathbb{N}}$.

Ejemplo 2.4. Sea $P(t; x, x') = x - x'$. Al proponer $\varphi(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i t^i \neq 0$ y hacer la sustitución $P|_{x=\varphi} = \varphi - \varphi'$, obtenemos $\sum_{i \geq 1} (a_{i-1} - i a_i) t^{i-1} = 0$, lo que da $\{a_i = \frac{a_{i-1}}{i} : i \geq 1\}$, y finalmente $\varphi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_0}{i!} t^i$, $a_0 \in K$.

Ahora consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas $\{P_i = 0\}_i$ con coeficientes en $K[[t, u]]$ como en (1). Una cuestión muy importante, pero claramente muy difícil, es el siguiente

Problema 2.5. ¿Qué se puede decir del conjunto de todas las parejas $(\varphi, \psi) \in K[[t, u]]^2$ que satisfacen el sistema $\{P_i = 0\}_i$?

Luego, no estamos interesados ni en hallar soluciones concretas de estos sistemas ni en interpretarlas, contrariamente a lo que ocurre comúnmente en Física u otras ciencias, y más bien nos interesan las propiedades globales de los conjuntos de soluciones. Esto es todo lo que necesitamos saber de ecuaciones diferenciales clásicas.

A inicios de 2015, D. Grigoriev introdujo el concepto de ecuación diferencial tropical en [6]. Él ya había estudiado previamente la estructura de las soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales algebraicas, y se preguntó si había un *teorema de correspondencia* entre las soluciones de sus ecuaciones diferenciales tropicales, y las soluciones de un sistema clásico. Por lo tanto, el objetivo inicial de la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales era aplicarla al estudio del conjunto de soluciones en series de potencias de sistemas clásicos de ecuaciones diferenciales.

El mismo año se probó que dicha correspondencia existía para el caso ordinario [1], y después para el caso parcial [3]. A partir de ahora, nos dedicaremos a explicar esta correspondencia, la cual se puede consultar en el Teorema 4.14.

3. ECUACIONES DIFERENCIALES ALGEBRAICAS CON COEFICIENTES EN UN SEMI ANILLO

En esta parte, asumiremos que el lector tiene conocimientos básicos de estructuras algebraicas. En particular todas nuestras estructuras serán conmutativas y con identidad, por lo que procuraremos no repetirlo.

Como ya comentamos, los semianillos ofrecen un marco algebraico capaz no solo de describir la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales, sino también los aspectos que necesitamos de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales. Por lo tanto, en un intento de poner ambos mundos al mismo nivel, los introduciremos como casos particulares de la teoría de semianillos. El lector que quiera saber más sobre esta estructura algebraica, puede consultar [5].

Los semianillos conmutativos con identidad son 5-tuples $S = (S, +, \times, 0, 1)$ muy comunes en la naturaleza matemática, donde cada símbolo representa lo que el lector tiene en mente. De entrada cualquier anillo conmutativo con identidad es un semianillo, pero la clase de semianillos es estrictamente más grande que la de anillos; por ejemplo, los números naturales $S = \mathbb{N}$ equipados con la suma y el producto usuales, o el conjunto potencia $S = \mathcal{P}(X)$ de un conjunto $X \neq \emptyset$, equipado con la unión y la intersección como suma y producto, respectivamente.

Ejercicio 3.1. *Verificar que lo único que le falta a los ejemplos anteriores para ser anillos es que la ecuación $a + b = 0$ a veces no tiene solución en S .*

Pretenderemos que un semianillo S es un anillo en el que no siempre nos es posible hacer restas, o mejor aún: que un anillo es un semianillo en el que podemos restar. En un curso *clásico* de álgebra abstracta probablemente se nos diga que no es bueno trabajar en una estructura S en el que las ecuaciones del Ejercicio 3.1 no tengan solución en S , después de todo hemos estado acostumbrados desde siempre a trabajar con grupos, que son estructuras algebraicas donde todo elemento es invertible: por ejemplo las simetrías de figuras geométricas bajo la composición, el grupo de Galois de una extensión de campos, o la construcción K de Grothendieck, la cual le asocia a todo monoide un grupo (de manera universal).

El hecho de no tener inversos aditivos a veces puede ser remediado agregándolos artificialmente –como en el caso de \mathbb{N} .– Sin embargo, nosotros estaremos interesados en un cierto tipo de semianillos en los que esto no tiene remedio, y de los cuales $\mathcal{P}(X)$ es un ejemplo.

Ejercicio 3.2 (No se le pueden añadir inversos a $(\mathcal{P}(X), \cup)$). *Probar que el único homomorfismo de semigrupos $(\mathcal{P}(X), \cup, \emptyset) \rightarrow (G, +, 0)$ con G un grupo, es el homomorfismo 0.*

En este trabajo, nuestro ejemplo principal de semianillo será el siguiente.

Definición 3.3. *El semianillo booleano \mathbb{B} es el conjunto ordenado $\{0 < 1\}$ con la suma $a + b = \max\{a, b\}$ y el producto de toda la vida.*

Al semigrupo $(\mathbb{B}, +, 0)$ tampoco se le pueden añadir inversos (se prueba como en el Ejercicio 3.2). Si seguimos con la idea de que esto es *problemático*, entonces la moraleja es que a veces se pueden *remediar los problemas*, y a veces no. Sin embargo nosotros estaremos contentos con estos fenómenos porque los veremos como oportunidades de acceder a nuevos mundos sin alejarnos tanto del contexto usual; después de todo, dentro de los semianillos se encuentran los anillos.

El objeto principal de estudio de esta sección serán las soluciones en series de potencias (formales) de ecuaciones diferenciales en dos mundos muy diferentes: el clásico y el tropical. Entonces, lo primero que vamos a hacer es construir las series de potencias con coeficientes en un semianillo.

Definición 3.4. Si S es un semianillo, definimos el semianillo $S[[t, u]]$ de series de potencias formales en las variables t, u como el conjunto de todas las expresiones

$$(3) \quad a = a(t, u) = \sum_{(i,j) \in A} a_{i,j} t^i u^j, \quad a_{i,j} \in S, \quad A \subset \mathbb{N}^2,$$

equipado con la suma y el producto de series usuales.

El conjunto soporte de la serie (3) es $\text{Supp}(a) := \{(i, j) \in A : a_{i,j} \neq 0\}$.

Vamos a equipar a $S[[t, u]]$ con tantas derivadas (diferenciales) como variables: si a es de la forma (3), definimos

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sum_{(i,j) \in A} i a_{i,j} t^{i-1} u^j, \quad \frac{\partial a}{\partial u} = \sum_{(i,j) \in A} j a_{i,j} t^i u^{j-1},$$

donde, como siempre, $ia = \underbrace{a + \dots + a}_{i\text{-veces}}$ para $i \in \mathbb{N}$. Notemos que $\frac{\partial}{\partial t} \circ \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \circ \frac{\partial}{\partial t}$,

por lo que denotamos a esta composición en común como $\frac{\partial^2}{\partial t \partial u}$.

Ejercicio 3.5. Sea \mathbb{B} el semianillo de la Definición 3.3. Muestre que $(\mathbb{B}[[t, u]], +, \times, 0, 1)$ es un semianillo conmutativo con identidad, y describa concretamente sus elementos. Luego, muestre que $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u} : \mathbb{B}[[t, u]] \rightarrow \mathbb{B}[[t, u]]$ son derivadas (i.e. operador lineal que satisface la regla de Leibniz para la derivación de un producto), y describa cómo actúan concretamente en los elementos de $\mathbb{B}[[t, u]]$.

Ya que tenemos algunas derivadas con que trabajar, introduzcamos ahora operadores diferenciales.

Definición 3.6. Un monomio diferencial en las variables $\{x, y\}$ y con coeficientes en el semianillo $S[[t, u]]$ es una expresión de la forma

$$(4) \quad a(t, u) x_I^{m_I} y_J^{m_J}, \quad \text{con } a(t, u) \in S[[t, u]], \quad I, J \in \mathbb{N}^2, \quad m_I, m_J \in \mathbb{N}$$

Si $I = (i_1, i_2), J = (j_1, j_2)$, se supone que el monomio (4) es una forma abreviada de escribir el siguiente operador diferencial:

$$(5) \quad S[[t, u]] \times S[[t, u]] \longrightarrow S[[t, u]]$$

$$(\varphi(t, u), \psi(t, u)) \mapsto a x_I^{m_I} y_J^{m_J} |_{x=\varphi, y=\psi} = a \left(\frac{\partial^{i_1+i_2} \varphi(t, u)}{\partial t^{i_1} \partial u^{i_2}} \right)^{m_I} \left(\frac{\partial^{j_1+j_2} \psi(t, u)}{\partial t^{j_1} \partial u^{j_2}} \right)^{m_J}.$$

Para ahorrar espacio, escribiremos $a x_I^{m_I} y_J^{m_J} |_{x=\varphi, y=\psi}$ en vez de la forma desarrollada del operador a la derecha de (5).

Dado que una suma finita de monomios es un polinomio, una suma finita $P = a_1(t, u) x_{I_1}^{m_{I_1}} y_{J_1}^{m_{J_1}} + \dots + a_n(t, u) x_{I_n}^{m_{I_n}} y_{J_n}^{m_{J_n}}$ de monomios diferenciales se llama un polinomio diferencial, y en este caso induce por linealidad un operador diferencial $P : S[[t, u]] \times S[[t, u]] \rightarrow S[[t, u]]$ que manda $(\varphi(t, u), \psi(t, u))$ en $P(\varphi, \psi)$, la suma de las evaluaciones $\sum_k a_k x_{I_k}^{m_{I_k}} y_{J_k}^{m_{J_k}} |_{x=\varphi, y=\psi}$.

Ejercicio 3.7. Sea S un semianillo. Describa el operador diferencial determinado por el siguiente polinomio diferencial:

$$P = a(t, u) x_{(1,0)} y_{(1,0)} + b(t, u) y_{(1,1)}^2 + c(t, u) x_{(0,0)} x_{(1,0)}^2 x_{(0,1)}^3 x_{(1,1)}^4.$$

La ventaja de este acercamiento general es que el operador $P : S[[t, u]] \times S[[t, u]] \rightarrow S[[t, u]]$ inducido por el polinomio P es válido para series con coeficientes en cualquier semianillo S . A partir de ahora nos enfocaremos solamente en dos semianillos radicalmente diferentes, a saber \mathbb{B} y \mathbb{C} .

Definición 3.8. Si P es un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{C}[[t, u]]$, decimos que una pareja $(\varphi(t, u), \psi(t, u)) \in \mathbb{C}[[t, u]]^2$ es solución de P si $P(\varphi, \psi) = 0$.

Ejercicio 3.9. Calcular todas las soluciones $\varphi = \sum_{(i,j)} a_{i,j} t^i u^j \in \mathbb{C}[[t, u]]$ del polinomio diferencial complejo $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$ en una variable x .

Ahora viene una pequeña discusión filosófica. Si P es un polinomio diferencial con coeficientes $S[[t, u]]$, entonces el enunciado $P = 0$ es una ecuación (de igualdad) diferencial (pues P es un polinomio diferencial). Este enunciado tiene sentido para cualquier semianillo S , y podemos investigar la naturaleza del conjunto de parejas $(\varphi, \psi) \in S[[t, u]]^2$ que satisfacen la ecuación diferencial $P = 0$. Si acaso S es un anillo, recuperamos a la definición usual de solución de una ecuación diferencial de la sección 2.2 y estamos contentos, sin embargo, veremos que esta noción no da buenos resultados en el caso $S = \mathbb{B}$, por lo que tendremos que definir el concepto de solución de manera diferente.

Es por eso que la Definición 3.8 tiene un cambio sutil, ya que reemplazamos los conceptos de anillos de *ecuación diferencial* $P = 0$ y de *solución de* $P = 0$ por el de *solución de* P , evitando hacer mención a la condición $P = 0$. Por lo tanto, aunque el acercamiento por semianillos unifica ciertas cosas, otras deben de ser tratadas por separado.

3.1. Soluciones para polinomios diferenciales con coeficientes en \mathbb{B} . Recordemos que \mathbb{B} solo tiene dos elementos, y del Ejercicio 3.5 sabemos que los elementos de $\mathbb{B}[[t, u]]$ y las derivaciones son fáciles de describir, puesto que si $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, entonces el operador $\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial u^n} : \mathbb{B}[[t, u]] \rightarrow \mathbb{B}[[t, u]]$ envía $a = \sum_{(i,j) \in A} t^i u^j$ en $\frac{\partial^{m+n} a}{\partial t^m \partial u^n} = \sum_{(i,j) \in (A - (m,n))_{\geq (0,0)}} t^i u^j$.

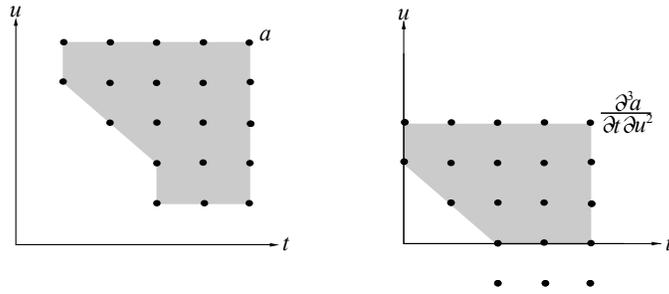


FIGURA 1. La serie booleana $a(t, u)$ identificada con su soporte y la acción del operador $\frac{\partial^3}{\partial t \partial u^2}$ en ella.

Así que derivar series booleanas es muy fácil: el operador $\frac{\partial^{m+n}}{\partial t^m \partial u^n}$ actúa en los elementos $a \in \mathbb{B}[[t, u]]$ como operadores de desplazamiento por el vector entero $(-m, -n)$ en su soporte $\text{Supp}(a) \subset \mathbb{N}^2$ (ver Figura 1).

Pero ahora nos preguntamos,

Problema 3.10. Dado un polinomio diferencial P con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$, ¿cuándo decimos que la pareja $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[[t, u]]^2$ es una solución de P ?

Veremos a continuación que aunque la definición clásica $P(\varphi, \psi) = 0$ tiene sentido también en este caso, lamentablemente no da resultados muy interesantes.

Ejercicio 3.11. Un semianillo S es idempotente si $a + a = a$ para todo $a \in S$. Mostrar que en un semianillo idempotente se tiene que $\sum_i a_i = 0$ si y solo si $a_i = 0$ para todo i .

En el siguiente ejercicio nos damos cuenta de que como la estructura de semianillo es muy cercana a la de anillo, muchos de los conceptos de anillos *se transfieren* de manera natural a semianillos.

Ejercicio 3.12. Mostrar que $\mathbb{B}[[t, u]]$ es idempotente, y que no tiene divisores de cero, esto es, si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Sean $P = a_1(t, u)x_{I_1}^{m_{I_1}}y_{J_1}^{m_{J_1}} + \dots + a_n(t, u)x_{I_n}^{m_{I_n}}y_{J_n}^{m_{J_n}}$ un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$ y $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[[t, u]]^2$. Del ejercicio 3.12, tenemos que $\mathbb{B}[[t, u]]$ es idempotente, por ende obtenemos que $P(\varphi, \psi) = 0$ si y solo si la evaluación de cada monomio $a_i(t, u)x_{I_i}^{m_{I_i}}y_{J_i}^{m_{J_i}}|_{x=\varphi, y=\psi}$ es 0, y por el mismo ejercicio sabemos que $\mathbb{B}[[t, u]]$ no tiene divisores de cero, por lo tanto deducimos que $x_{I_i}^{m_{I_i}}|_{x=\varphi} = 0$, o que $y_{J_i}^{m_{J_i}}|_{y=\psi} = 0$.

Luego si $I = (i_1, i_2)$, usamos la definición $x_I^{m_I}|_{x=\varphi} = \left(\frac{\partial^{i_1+i_2}\varphi(t, u)}{\partial t^{i_1}\partial u^{i_2}}\right)^{m_I}$, y esto es cero si $\varphi(t, u)$ es un polinomio en las variables t, u tales que $\deg_t(\varphi) < i_1$ y $\deg_u(\varphi) < i_2$.

Ejercicio 3.13. Dado un polinomio diferencial P con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$, formular las condiciones concretas sobre el par $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[[t, u]]^2$ para que se cumpla $P(\varphi, \psi) = 0$.

Al trabajar sobre semianillos idempotentes, frecuentemente encontramos problemas del tipo del Ejercicio 3.13, en el que la traducción palabra-por-palabra de los conceptos clásicos no sirve de mucho, por lo que se tiene que encontrar un reemplazo adecuado a nuestros fines. Para formular *correctamente* el concepto de solución de un polinomio diferencial P con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$, necesitaremos lo siguiente.

Definición 3.14. El polígono de Newton $New(A)$ de $A \subset \mathbb{N}^2$ es la envoltura convexa en \mathbb{R}^2 del conjunto

$$\{I + J \in \mathbb{N}^2 : I \in A \text{ y } J \in \mathbb{N}^2\}.$$

El conjunto $Vert(A)$ de vértices de A son los puntos extremos del polígono $New(A)$.

Luego $New(A)$ son todas las combinaciones convexas finitas de elementos de la forma $(i + m, j + n)$ con $(i, j) \in A$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Es un hecho básico de teoría de la convexidad que $Vert(A)$ siempre es un conjunto finito. Dada una serie booleana $\varphi = \sum_{(i, j) \in A} t^i u^j$ con conjunto soporte A , decimos que el polinomio $\sum_{(i, j) \in Vert(A)} t^i u^j$ es el polinomio de vértices de φ y lo denotamos por $V(\varphi)$.

Ejemplo 3.15. El polinomio de vértices de la serie $\varphi = tu^4 + t^2u^3 + t^3u^3 + t^4u$ es $V(\varphi) = tu^4 + t^4u$, de acuerdo a la Figura 2.

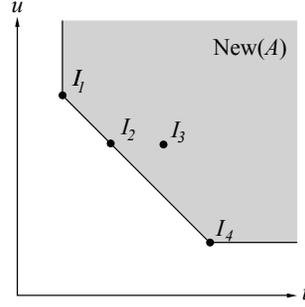


FIGURA 2. El conjunto soporte A de la serie $\varphi = tu^4 + t^2u^3 + t^3u^3 + t^4u$, su polígono de Newton, y su conjunto de vértices $\text{Vert}(A) = \{I_1, I_4\}$.

Con lo anterior podemos dar la definición de soluciones de polinomios diferenciales con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$.

Definición 3.16. Sea $P = a_1(t, u)x_{I_1}^{m_{I_1}}y_{J_1}^{m_{J_1}} + \cdots + a_n(t, u)x_{I_n}^{m_{I_n}}y_{J_n}^{m_{J_n}}$ un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$. Decimos que una pareja $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[[t, u]]^2$ es solución de P si cada monomio $t^i u^j$ del polinomio $V(P(\varphi, \psi))$, aparece en $V(a_i(t, u)x_{I_i}^{m_{I_i}}y_{J_i}^{m_{J_i}}|_{x=\varphi, y=\psi})$ para al menos dos monomios diferentes de P .

Ejemplo 3.17. Retomemos el polinomio $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$ con coeficientes en $\mathbb{C}[[t, u]]$ del Ejercicio 3.9. Ya que todos los coeficientes numéricos de las series $t, u, t^2 + u^3$ son 1, podemos interpretar a P también como un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$.

Vamos a probar que $\varphi = t^2 + tu + u^3 \in \mathbb{B}[[t, u]]$ es una solución de P según la Definición 3.16. Primero evaluamos cada monomio de P en $x = \varphi = t^2 + tu + u^3$:

$$tx_{(1,0)}|_{x=\varphi} = t \frac{\partial}{\partial t}(t^2 + tu + u^3) = t^2 + tu,$$

y de manera similar para los otros dos monomios. Así obtenemos el valor de P evaluado en φ :

$$P(\varphi) = (t^2 + tu) + (tu + u^3) + (t^2 + u^3) = t^2 + tu + u^3.$$

Luego, de la Figura 3b calculamos el conjunto de vértices $V(P(\varphi)) = V(t^2 + tu + u^3) = t^2 + tu + u^3$, y de la Figura 3a calculamos el conjunto de vértices de cada uno de los tres monomios de P evaluados en φ : $V(t^2 + tu) = t^2 + tu$, $V(tu + u^3) = tu + u^3$ y $V(t^2 + u^3) = t^2 + u^3$. Finalmente vemos que la condición de la Definición 3.16 se satisface.

Observación 3.18. Aunque la Definición 3.16 es misteriosa, es importante notar que dado un polinomio diferencial P con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$ y una pareja $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[[t, u]]^2$ (que a priori es un objeto infinito), solo es necesario hacer un número finito de verificaciones para ver si (φ, ψ) es o no solución de P . En general, P impone un número finito de condiciones sobre el soporte de los elementos de su espacio de soluciones, como podemos ver en el Ejercicio 3.19.

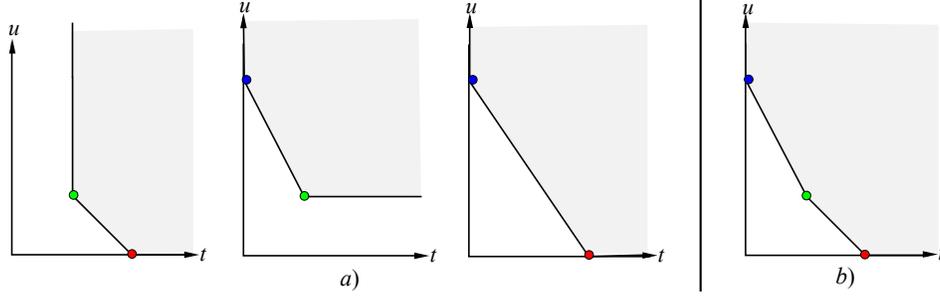


FIGURA 3. Polígonos de Newton junto con sus conjuntos de vértices para los elementos del Ejemplo 3.17: a) para cada uno de los tres monomios de P evaluados en φ ; y b) $V(P(\varphi))$.

Ejercicio 3.19. En el Ejemplo 3.17, mostramos que la serie $\varphi = t^2 + tu + u^3 \in \mathbb{B}[[t, u]]$ era una solución explícita de $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$. Muestre usando la Definición 3.16 que el espacio de soluciones $\varphi \in \mathbb{B}[[t, u]]$ de P está descrito por el siguiente número finito de condiciones:

$$\left\{ \varphi = \sum_{(i,j) \in A} t^i u^j : (1,0), (0,1), (0,2) \notin A, \text{ y } (2,0), (0,3) \in A \right\}.$$

Es claro que el fenómeno descrito en la Observación 3.18 no sucede para las soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales con coeficientes en un anillo. Por ejemplo, el polinomio diferencial $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$ impone un conjunto infinito de ecuaciones sobre los coeficientes de los elementos $\varphi = \sum_{i,j} a_{i,j} t^i u^j \in \mathbb{C}[[t, u]]$ de su espacio de soluciones, los cuales incluyen $a_{i,i} = 0$ para todo $i \geq 1$, y $ia_{i,j} + ja_{i,j} = 0$ cada vez que $i, j \geq 1$, $i \neq j$. Volveremos sobre esto más tarde.

Ya hemos definido de manera separada el concepto de solución de un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{C}[[t, u]]$ y en $\mathbb{B}[[t, u]]$, y hemos visto que los formalismos obtenidos son bastante diferentes. Lo que haremos a continuación será conectar estos dos mundos con diversos morfismos de *tropicalización* (es decir de objetos definidos sobre \mathbb{C} hacia objetos definidos sobre \mathbb{B}), lo cual nos dará acceso a enunciados de comparación. Y lo increíble es ¡que los soportes de las soluciones de ciertos sistemas sobre estos dos semianillos coinciden!

4. ¿PARA QUÉ SIRVEN LAS ECUACIONES DIFERENCIALES TROPICALES?

Como dijimos al inicio, el objetivo inicial de la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales tal y como se introdujo en la sección 3.1, era el de aplicarla hacia el problema de encontrar soluciones en series de potencias formales para sistemas clásicos de ecuaciones diferenciales. De hecho, para muchas personas, los desarrollos ofrecidos por los métodos tropicales son estériles si no se pueden aplicar a los problemas de la matemática clásica.

Concretamente, sea K un campo de característica cero, y $\{P_i\}_i$ un conjunto de polinomios diferenciales con coeficientes en $K[[t, u]]$, como los que manejamos en la sección anterior para el caso $K = \mathbb{C}$. Recordemos que en el problema 2.5

nos preguntamos la naturaleza del conjunto de todas las parejas de series $(\varphi, \psi) \in K[[t, u]]^2$ que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales $\{P_i = 0\}_i$.

Esto cae en la rama conocida como geometría algebraica (diferencial), puesto que nos interesa hallar los ceros comunes de un sistema de polinomios (diferenciales).

En esta sección discutiremos algunos aspectos del teorema fundamental de la geometría algebraica diferencial tropical, tal y como está en [3]. Esta es la parte más técnica de este trabajo, pues tiende el puente entre el mundo clásico y el tropical. Para poder hablar de cosas interesantes, en esta sección vamos a cambiar \mathbb{C} por un campo de característica cero K , y como no queremos dar falsas esperanzas, aunque complique las cosas, lo supondremos algebraicamente cerrado y no-numerable. Luego, campos como la cerradura algebraica de los números racionales \mathbb{Q}^{alg} , o el campo de los números reales \mathbb{R} , quedarán excluidos.

Definición 4.1. *Sea S un semianillo. El semianillo de polinomios diferenciales con coeficientes en $S[[t, u]]$ y en dos variables diferenciales x, y es el siguiente semianillo de polinomios en infinitas variables:*

$$(6) \quad S[[t, u]][x_{(i,j)}, y_{(k,l)}] : (i, j), (k, l) \in \mathbb{N}^2$$

Para ahorrar espacio, vamos a denotar el semianillo (6) como $S[[t, u]]\{x, y\}$, lo cual es un pequeño abuso de notación, pero lo corregiremos más adelante.

Sea $\Sigma \subset K[[t, u]]\{x, y\}$ un conjunto arbitrario de polinomios diferenciales. Denotaremos por $\text{Sol}(\Sigma)$ el conjunto de las parejas $(\varphi, \psi) \in K[[t, u]]^2$ que sean solución común a todos los elementos $P \in \Sigma$, en el sentido de la Definición 3.8. El sueño sería poder describir el conjunto $\text{Sol}(\Sigma)$, pero dado que este problema es muy difícil, nos contentaremos con poder decir algo –cualquier cosa– sobre él.

Para hacer esto, trasladaremos la discusión al mundo discreto al tropicalizar tanto nuestros polinomios diferenciales de Σ como las parejas $(\varphi, \psi) \in K[[t, u]]^2$ de las soluciones de $\{\Sigma = 0\}$.

Definición 4.2. *Si $\varphi = \sum_{(i,j) \in A} a_{i,j} t^i u^j$ es un elemento de $K[[t, u]]$ con conjunto soporte $\text{Supp}(\varphi) = A$, su soporte booleano es el elemento de $\mathbb{B}[[t, u]]$ definido por*

$$\text{sp}(\varphi) := \sum_{(i,j) \in A} t^i u^j.$$

Notemos que al pasar al contexto de objetos sobre \mathbb{B} estamos tropicalizando, ya que las series $\mathbb{B}[[t, u]]$ se pueden identificar efectivamente con su soporte, que son subconjuntos del conjunto discreto \mathbb{N}^2 .

Si P es un polinomio diferencial con coeficientes en $K[[t, u]]$, lo podemos transformar en un polinomio diferencial $\text{sp}(P)$ con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$ al tomar el soporte booleano de los coeficientes de sus monomios diferenciales.

Definición 4.3. *Sea $a_1 x_{I_1}^{m_{I_1}} y_{J_1}^{m_{J_1}} + \dots + a_n x_{I_n}^{m_{I_n}} y_{J_n}^{m_{J_n}} = P$ un polinomio diferencial con coeficientes en $K[[t, u]]$. Definimos su polinomio diferencial soporte como*

$$\text{sp}(P) := \text{sp}(a_1) x_{I_1}^{m_{I_1}} y_{J_1}^{m_{J_1}} + \dots + \text{sp}(a_n) x_{I_n}^{m_{I_n}} y_{J_n}^{m_{J_n}}.$$

Como se dice frecuentemente en el área, los objetos que acabamos de definir son *sombras combinatorias* de los objetos clásicos de los que provienen.

Ejemplo 4.4. En el Ejemplo 3.17, consideramos el polinomio diferencial $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$ con coeficientes en $\mathbb{C}[[t, u]]$, y justificamos el hecho de que podíamos tratarlo como un polinomio con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$ simplemente diciendo que las series t , u , $t^2 + u^3$ tenían coeficientes $\{0, 1\}$. Lo que en realidad hicimos fue tomar $sp(P) = sp(t)x_{(1,0)} + sp(u)x_{(0,1)} + sp(t^2 + u^3) = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$, y aunque P y $sp(P)$ se escriben igual, representan objetos distintos.

La primera relación que nos indica que vamos por el camino correcto es la siguiente.

Ejercicio 4.5. En el Ejercicio 3.9, se calcularon las soluciones $\varphi = \sum_{(i,j)} a_{i,j} t^i u^j \in \mathbb{C}[[t, u]]$ de $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + (t^2 + u^3)$. Muestre que si φ es una solución de P , entonces la serie booleana $sp(\varphi)$ es una solución de $sp(P)$ en el sentido de la Definición 3.16.

Claramente con el ejercicio anterior, queremos motivar la validez del siguiente resultado.

Proposición 4.6. Sea $P \in K[[t, u]]\{x, y\}$. Si $(\varphi, \psi) \in K[[t, u]]^2$ es una solución de P , entonces $(sp(\varphi), sp(\psi)) \in \mathbb{B}[[t, u]]^2$ es solución de $sp(P) \in \mathbb{B}[[t, u]]\{x, y\}$.

Demostración. Para probar esto necesitamos un poco más de herramientas que las que hemos introducido, pero trataremos de dar una idea de las partes esenciales. Un concepto clave es el de valuación, el cual se puede consultar en la sección 5.

Primero escribimos $P = a_1 x_{I_1}^{m_{I_1}} y_{J_1}^{m_{J_1}} + \dots + a_n x_{I_n}^{m_{I_n}} y_{J_n}^{m_{J_n}}$, $A_i = \text{Supp}(a_i)$ para $i = 1, \dots, n$, y $A = \text{Supp}(\varphi)$, $B = \text{Supp}(\psi)$, de manera que $sp(a_i) = \sum_{(i,j) \in A_i} t^i u^j$, $sp(\varphi) = \sum_{(i,j) \in A} t^i u^j$ y $sp(\psi) = \sum_{(i,j) \in B} t^i u^j$.

Por definición, $sp(P) = sp(a_1) x_{I_1}^{m_{I_1}} y_{J_1}^{m_{J_1}} + \dots + sp(a_n) x_{I_n}^{m_{I_n}} y_{J_n}^{m_{J_n}}$ es un polinomio diferencial con coeficientes en $\mathbb{B}[[t, u]]$, y $(sp(\varphi), sp(\psi)) \in \mathbb{B}[[t, u]]^2$ son un par de series booleanas, por lo que la siguiente evaluación tiene sentido :

$$(7) \quad \begin{aligned} sp(P)(sp(\varphi), sp(\psi)) &= sp(a_1) x_{I_1}^{m_{I_1}} y_{J_1}^{m_{J_1}} |_{x=sp(\varphi), y=sp(\psi)} + \dots \\ &\quad + sp(a_n) x_{I_n}^{m_{I_n}} y_{J_n}^{m_{J_n}} |_{x=sp(\varphi), y=sp(\psi)}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la evaluación (7) es por definición una serie booleana en las variables t, u , y si C es su conjunto soporte, entonces podemos escribir

$$sp(P)(sp(\varphi), sp(\psi)) = \sum_{(i,j) \in C} t^i u^j = \sum_{(i,j) \in \text{Vert}(C)} t^i u^j + \xi,$$

donde $V(sp(P)(sp(\varphi), sp(\psi))) = \sum_{(i,j) \in \text{Vert}(C)} t^i u^j$ es el polinomio de vértices de la evaluación (7) y ξ tiene soporte $C \setminus \text{Vert}(C)$. De acuerdo a la Definición 3.16, tenemos que verificar que para cualquier monomio en $t^i u^j$ con $(i, j) \in \text{Vert}(C)$, existen al menos dos monomios diferentes en la expansión (7) que lo contienen en su respectivo polinomio de vértices. Claro, bajo la hipótesis de que $P(\varphi, \psi) = 0$ se satisface.

Ahora notamos que si tenemos un monomio diferencial $x_I^{m_I}$ y una serie $\varphi \in K[[t, u]]$, entonces

$$(8) \quad sp(x_I^{m_I})|_{x=\varphi} = x_I^{m_I}|_{x=sp(\varphi)},$$

que quiere decir que, en este caso, las operación de tomar el soporte booleano y la operación de evaluar conmutan. Invitamos al lector a convencerse de (8), pero debe de ser claro puesto que el campo K es de característica cero y los soportes son los mismos.

En general tenemos

$$(9) \quad \text{sp}(ax_I^{m_I}y_J^{m_J}|_{x=\varphi,y=\psi}) \subseteq \text{sp}(a)x_I^{m_I}y_J^{m_J}|_{x=\text{sp}(\varphi),y=\text{sp}(\psi)},$$

lo que quiere decir que el mapeo sp *no es multiplicativo*. Esto viene del hecho de que puede haber cancelaciones aditivas del lado izquierdo de (9), pero éstas no son reflejadas del lado derecho puesto que no hay inversos aditivos. Sin embargo, veremos que esto no afecta de ninguna manera el cálculo del polinomio de vértices que nos interesa, ¡por una maravillosa propiedad de unicidad de los vértices de la suma de dos politopos convexos que se halla escondida en el siguiente enunciado!

Hecho: Sean $\varphi, \psi \in \mathbb{B}[t, u]$ con conjuntos soportes A y B respectivamente, y sea $\gamma = \varphi\psi$ su producto con conjunto soporte C . Si (i_C, j_C) es un vértice de C , entonces existen únicos vértices (i_A, j_A) de A y (i_B, j_B) de B tales que $(i_C, j_C) = (i_A, j_A) + (i_B, j_B)$.

En particular, esto quiere decir que el polinomio de vértices del lado derecho de (9) *tiene un único levantamiento* $p(t, u)$ en el monomio $ax_I^{m_I}y_J^{m_J}|_{x=\varphi,y=\psi}$, ya que la unicidad de la expresión $(i_C, j_C) = (i_A, j_A) + (i_B, j_B)$ implica que no puede haber cancelaciones aditivas. Luego podemos escribir

$$a_i x_I^{m_{I_i}} y_{J_i}^{m_{J_i}}|_{x=\varphi,y=\psi} = p_i(t, u) + \Xi_i,$$

donde $\text{sp}(p_i(t, u)) = \sum_{(i,j) \in \text{Vert}(C)} t^i u^j$ es un polinomio que agrupa los *términos iniciales* (el levantamiento del polinomio de vértices), y Ξ_i es una serie con *términos de orden superior* (todo lo demás). Ahora tenemos

$$P(\varphi, \psi) = (p_1(t, u) + \Xi_1) + \cdots + (p_n(t, u) + \Xi_n) = 0,$$

y concentrémonos en los soportes de los elementos de la expresión anterior. Vemos que $\text{sp}(p_i(t, u))$ consiste de los *mínimos* de $\text{sp}(a_i)x_I^{m_{I_i}}y_{J_i}^{m_{J_i}}|_{x=\text{sp}(\varphi),y=\text{sp}(\psi)}$, y los mínimos de la suma $\sum_i \text{sp}(a_i)x_I^{m_{I_i}}y_{J_i}^{m_{J_i}}|_{x=\text{sp}(\varphi),y=\text{sp}(\psi)}$ forman precisamente el polinomio de vértices $V(\text{sp}(P)(\text{sp}(\varphi), \text{sp}(\psi))) = \sum_{(i,j) \in \text{Vert}(C)} t^i u^j$ de la evaluación (7).

Finalmente, dado que $P(\varphi, \psi) = 0$, entonces cada mínimo global debe de aparecer como mínimo local en al menos dos monomios de P para que los coeficientes puedan ser capaces de sumar 0, luego, como los mínimos locales (monomiales) sí pasan a mínimos locales en $\text{sp}(p)$, hemos deducido que éste último polinomio se anula en el punto indicado, de acuerdo a la Definición 3.16. \square

Por lo tanto, dado un polinomio diferencial $P \in K[[t, u]]\{x, y\}$, ya vimos que los soportes booleanos de sus soluciones son soluciones de su polinomio diferencial soporte $\text{sp}(P)$. El siguiente paso es preguntarse ¿Qué tanto difiere el conjunto de soluciones de $\text{sp}(P)$ del de P ? No es difícil ver que en general $\text{sp}(P)$ tiene soluciones *artificiales* (combinatorias), es decir, que no vienen dadas como el soporte booleano de una solución *verdadera* (algebraica) de P .

Ejercicio 4.7 (Soluciones tropicales artificiales). Sea P el polinomio diferencial complejo del Ejemplo 3.9. Del Ejemplo 3.17 sabemos que $\psi = t^2 + tu + u^3 \in \mathbb{B}[[t, u]]$ es solución del polinomio booleano $sp(P)$. Muestre que P no tiene soluciones $\Psi \in \mathbb{C}[[t, u]]$ tales que $sp(\Psi) = \psi$.

Ejercicio 4.8 (Soluciones tropicales artificiales bis). Sea $P = x - x_1 \in \mathbb{C}[[t]]\{x\}$ el polinomio diferencial del Ejemplo 2.4. Muestre que el conjunto de soluciones de $sp(P)$ es

$$\left\{ a = \sum_i t^i \in \mathbb{B}[[t]] : 0, 1 \in \text{Supp}(a) \right\} \cup \{0\}.$$

Entonces, ¿Qué utilidad tiene la teoría tropical para la teoría clásica? Es aquí donde entra el enunciado del teorema fundamental de la geometría algebraica diferencial tropical, el cual dice :

dado cualquier sistema $\Sigma \subset K[[t, u]]\{x, y\}$ si es posible, usando métodos tropicales, calcular exactamente el conjunto de soportes de sus soluciones

$\{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) : \text{existe } (\varphi, \psi) \in \text{Sol}(\Sigma) \text{ con } \text{Supp}(\varphi) = A, \text{Supp}(\psi) = B\}$, a condición de que calculemos los conjuntos de soluciones de suficientes polinomios diferenciales tropicales asociados a Σ .

Esto es, bajo ciertas condiciones, las soluciones comunes de ciertos sistemas de polinomios diferenciales tropicales serán exactamente los soportes booleanos de soluciones de sistemas clásicos. Clarifiquemos esto.

4.1. El teorema fundamental. Notemos que $S[[t, u]] \subset S[[t, u]][x_{(i,j)}, y_{(k,l)}] : (i, j), (k, l) \in \mathbb{N}^2$, y por razones técnicas, necesitamos extender las derivadas $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}$ que ya tenemos en los elementos de $S[[t, u]]$, a derivadas de polinomios diferenciales.

Entonces, dado un polinomio diferencial P , queremos definir los polinomios diferenciales $\frac{\partial P}{\partial t}$ y $\frac{\partial P}{\partial u}$. Como $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}$ deben ser lineales, basta definir su acción en un monomio diferencial $a(t, u)x_I^{m_I}y_J^{m_J}$ como en (4), y finalmente como debe extender las derivadas de series que ya teníamos, y satisfacer la regla de Leibniz para la derivación de un producto, es suficiente definir su acción en las variables $x_{(i,j)}, y_{(k,l)}$. Los definimos como operadores de desplazamiento, concretamente:

$$\frac{\partial x_{(i,j)}}{\partial t} := x_{(i+1,j)} \quad \frac{\partial x_{(i,j)}}{\partial u} := x_{(i,j+1)},$$

y de manera similar para las $y_{(k,l)}$.

Ejemplo 4.9. Sea $P = ax_{(1,0)}y_{(1,0)} + by_{(1,1)}^2 + cx_{(0,0)}x_{(1,0)}^2x_{(0,1)}^3x_{(1,1)}^4$ el polinomio del Ejercicio 3.7. Calculemos $\frac{\partial P}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\partial a}{\partial t}x_{(1,0)}y_{(1,0)} + a\frac{\partial}{\partial t}(x_{(1,0)}y_{(1,0)}) + \frac{\partial b}{\partial t}y_{(1,1)}^2 + 2by_{(1,1)}y_{(2,1)} + \\ &+ \frac{\partial c}{\partial t}x_{(0,0)}x_{(1,0)}^2x_{(0,1)}^3x_{(1,1)}^4 + c\frac{\partial}{\partial t}(x_{(0,0)}x_{(1,0)}^2x_{(0,1)}^3x_{(1,1)}^4), \end{aligned}$$

y luego tenemos que desarrollar cada uno de los términos entre paréntesis, por ejemplo: $\frac{\partial}{\partial t}(x_{(1,0)}y_{(1,0)}) = x_{(1,0)}y_{(2,0)} + x_{(2,0)}y_{(1,0)}$, etc.

Ahora si ya podemos introducir el concepto más importante de esta sección. Es la pareja $(S[[t, u]][x_{(i,j)}, y_{(k,l)}], \{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}\})$ la que se denota tradicionalmente como $S[[t, u]]\{x, y\}$.

Definición 4.10. *Un ideal G del anillo $K[[t, u]]\{x, y\}$ es diferencial si $\frac{\partial P}{\partial t}, \frac{\partial P}{\partial u} \in G$ cada vez que $P \in G$.*

Ejercicio 4.11. *Sea $P \in K[[t, u]]\{x, y\}$. Muestre que el ideal (usual) $[P]$ generado por $\{\frac{\partial^{m+n} P}{\partial t^m \partial u^n} : (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ en $K[[t, u]]\{x, y\}$ es un ideal diferencial, y que es el más pequeño que contiene a P .*

Recordemos que dada una familia $\Sigma \subset K[[t, u]]\{x, y\}$, denotamos por $\text{Sol}(\Sigma)$ el conjunto de las parejas $(\varphi, \psi) \in K[[t, u]]^2$ que son solución común a todos los elementos $P \in \Sigma$, en el sentido de la Definición 3.8. También existe el ideal diferencial $[\Sigma]$ generado por Σ (ver Ejercicio 4.11), y ambos sistemas tienen las mismas soluciones (ver Ejercicio 4.18). Insistimos en que esto se parece mucho al conjunto de puntos $K[[t, u]]$ -racionales de un esquema afín no Noetheriano, por lo que a veces las llamamos AD-variedades, por Algebraica Diferencial.

De manera similar, si $P \in \mathbb{B}[[t, u]]\{x, y\}$, denotamos por $\text{Sol}(P) \subset \mathbb{B}[[t, u]]^2$ el conjunto de todas las parejas $(\varphi, \psi) \in \mathbb{B}[[t, u]]^2$ que son solución de P .

Definición 4.12. *Una AD-variedad tropical es cualquier conjunto de la forma*

$$X := \bigcap_{P \in G} \text{Sol}(\text{sp}(P))$$

donde $G \subset K[[t, u]]\{x, y\}$ es un ideal diferencial.

Dada una familia $\Sigma \subset K[[t, u]]\{x, y\}$, la tropicalización $\text{Sol}(\text{sp}([\Sigma]))$ de su AD-variedad asociada $\text{Sol}(\Sigma)$ es la AD-variedad tropical asociada al ideal diferencial $[\Sigma]$.

Ejemplo 4.13 (AD-Hipersuperficies tropicales). *Llamamos AD-hipersuperficie al conjunto de ceros $\text{Sol}(P)$ de un solo polinomio $P \in K[[t, u]]\{x, y\}$, (por obvias razones).*

Para calcular la tropicalización de esta hipersuperficie, primero tenemos que calcular el ideal diferencial $[P] \subset K[[t, u]]\{x, y\}$ como en el Ejercicio 4.11, y la tropicalización es $\bigcap_{Q \in [P]} \text{Sol}(\text{sp}(Q))$.

Ahora si estamos listos para ver cuáles sistemas tropicales vienen del álgebra.

Teorema 4.14 (Teorema fundamental). *Sea $\Sigma \subset K[[t, u]]\{x, y\}$ arbitrario, con K un campo de característica cero, algebraicamente cerrado y no numerable.*

Entonces para cualquier (φ, ψ) en la AD-variedad tropical $\text{Sol}(\text{sp}([\Sigma]))$, existe una solución $(\Phi, \Psi) \in K[[t, u]]^2$ del sistema $\{\Sigma = 0\}$ tal que $\text{sp}(\Phi) = \varphi$, $\text{sp}(\Psi) = \psi$.

Este es un teorema de correspondencia parcial, porque dice que el conjunto de soportes $\{(\text{sp}(\Phi), \text{sp}(\Psi))\}$ de soluciones (Φ, Ψ) de un sistema $\{\Sigma = 0\}$ se tropicaliza precisamente en la AD-variedad tropical $\text{Sol}(\text{sp}([\Sigma]))$. Para tener un verdadero teorema de correspondencia, tenemos que describir las fibras

$$\text{sp}^{-1}(\varphi, \psi) = \{(\Phi, \Psi) \in \text{Sol}(\Sigma) : \text{sp}(\Phi) = \varphi, \text{sp}(\Psi) = \psi\}, \quad (\varphi, \psi) \in \text{Sol}(\text{sp}([\Sigma])).$$

Este resultado es el caso $m = n = 2$ del teorema fundamental, el cual es válido para cualquier número de variables $K[[t_1, \dots, t_m]]\{x_1, \dots, x_n\}$, $m, n \geq 1$.

Observación 4.15. *En la Observación 3.18 vimos que podíamos cambiar un sistema infinito de ecuaciones (las impuestas sobre los coeficientes de una serie φ que deben satisfacer una ecuación diferencial $P = 0$ dada) por un sistema finito de ecuaciones (las restricciones sobre el conjunto soporte de una serie φ que*

satisface el polinomio diferencial tropical $sp(P)$). Tenemos que pagar este cambio de la siguiente forma. Todo sistema clásico $\{\Sigma = 0\}$ es equivalente a un sistema finito $\{P_1 = \dots = P_k = 0\}$, de esto sentimos que muy probablemente debemos de resolver un número infinito de ecuaciones diferenciales tropicales del sistema $\{sp(Q) : Q \in [\Sigma]\}$ para describir completamente el conjunto $Sol(sp([\Sigma]))$. Por lo tanto, tenemos acceso a los siguientes dos paradigmas:

- Clásico: Resolver un número finito de sistemas (de ecuaciones) infinitos,
- Tropical: Resolver un número infinito de sistemas (de ecuaciones) finitos.

Ejemplo 4.16. Continuando con el Ejemplo 4.13, vamos calcular la AD-hipersuperficie tropical X asociada al polinomio diferencial $P = tx_{(1,0)} + ux_{(0,1)} + t^2 + u^3$ en $\mathbb{C}[[t, u]]\{x, y\}$. Por definición tenemos que $X = \bigcap_{Q \in [P]} Sol(sp(Q))$, y por el Teorema 4.14, tenemos que $X = \{sp(\Phi) : P(\Phi) = 0\}$. Dado que la solución general de P es de la forma $\Phi = c - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}u^3$, $c \in \mathbb{C}$, tenemos $X = \{1 + t^2 + u^3, t^2 + u^3\}$. Vemos que las fibras son

$$sp^{-1}(\varphi) = \begin{cases} \{c - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}u^3 : c \in \mathbb{C}^*\}, & \text{si } \varphi = 1 + t^2 + u^3, \\ \{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}u^3\}, & \text{si } \varphi = t^2 + u^3 \end{cases}$$

Ejercicio 4.17. Calcule la AD-hipersuperficie tropical asociada al polinomio diferencial ordinario $P = x - x_1$ del Ejemplo 2.4.

Para terminar de reforzar esto, veamos una diferencia clara entre el comportamiento de estos dos conjuntos de soluciones.

Ejercicio 4.18. Demuestre que si $P \in K[[t, u]]\{x, y\}$ y $(\varphi, \psi) \in Sol(P)$, entonces $(\varphi, \psi) \in Sol(\frac{\partial P}{\partial t})$. De esto deduzca que Σ y $[\Sigma]$ tienen las mismas soluciones.

Veamos que esto no es cierto si $P \in \mathbb{B}[[t, u]]\{x\}$. Sea $P = x_{1,0} + x_{(0,1)} + (t^2 + u^2)$ y $\varphi = t^2u + u^3$. Muestre que $\varphi \in Sol(P)$, pero $\varphi \notin Sol(\frac{\partial P}{\partial t})$.

A continuación, ilustramos con [3][Example 28] cómo esta teoría se puede usar concretamente para hallar condiciones necesarias y relaciones en los soportes de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 4.19. Consideremos $\{P_1, P_2, P_3\} = \Sigma \subset \mathbb{C}[[t, u]]\{x, y\}$ dado por

$$P_1 = x_{(1,0)}^2 - 4x_{(0,0)}, P_2 = x_{(1,1)}y_{(0,1)} - x_{(0,0)} + 1, P_3 = y_{(2,0)} - x_{(1,0)}.$$

Usando paquetes de cálculo simbólico, se puede probar que las parejas $(\Phi, \Psi) \in Sol(\Sigma)$ están dadas por:

$$\begin{aligned} \Phi &= a^2 + 2at + \sqrt{2}au + t^2 + \sqrt{2}tu + \frac{u^2}{2}, \\ \Psi &= b + ct + \frac{a^2 - 1}{\sqrt{2}}u + at^2 + \sqrt{2}atu + \frac{au^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2u}{\sqrt{2}} + \frac{tu^2}{2} + \frac{u^3}{6\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

donde $a, b, c \in K$ son arbitrarios.

Ahora consideramos $sp(P_1) = x_{(1,0)}^2 + x_{(0,0)}$, y evaluamos en (φ, ψ) de soportes A y B respectivamente, lo que da $sp(P_1)(\varphi, \psi) = (\frac{\partial \varphi}{\partial t})^2 + \varphi$. Si la pareja es solución, podemos probar de la Definición 3.16 que $(0, 0) \in A$ si y solo si $(1, 0) \in A$, lo cual es de esperarse, ya que los monomios correspondientes en un levantamiento Φ son simultáneamente nulos o no nulos.

En la Figura 4 codificamos los coeficientes de las series soluciones del sistema del Ejemplo 4.19 como funciones de tres parámetros $a, b, c \in K$

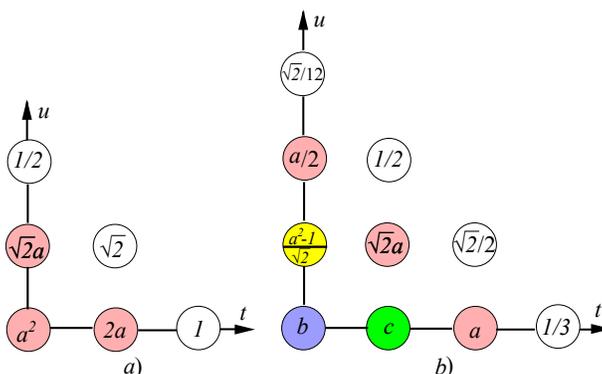


FIGURA 4. Coeficientes de las parejas de soluciones del sistema del Ejemplo 4.19 a) para Φ ; y b) para Ψ .

Ejercicio 4.20. Calcule la AD-variedad tropical $Sol(sp([\Sigma]))$ para el sistema del Ejemplo 4.19 usando la Figura 4. Además, dada $(\varphi, \psi) \in Sol(sp([\Sigma]))$, calcule la fibra $sp^{-1}(\varphi, \psi)$.

5. OTRAS DIRECCIONES

Es importante mencionar que existe una tercera caracterización de las AD-variedades tropicales en términos de ideales iniciales libres de monomios (ver [4]). Esta caracterización es *local* en el sentido que permite concentrarse en la siguiente pregunta:

Problema 5.1. Dado $A \subset \mathbb{N}^2$, ¿será que el sistema $\{\Sigma = 0\}$ tiene una solución con soporte A ?

Cuando se le adjunta esa tercera caracterización, se le conoce como el teorema fundamental porque es el análogo en geometría algebraica diferencial del llamado teorema fundamental de la geometría algebraica tropical [7][Theorem 3.2.3], el cual da tres formas equivalentes de definir variedades tropicales sobre un campo valuado (K, v) , con v de rango 1.

Hablando de valuaciones, y como comentamos al inicio, éstas son muy importantes en esta teoría.

Definición 5.2. Una cuasivaluación es un mapeo $v : R \rightarrow S$ de un anillo R a un semianillo idempotente S que satisface

1. $v(0) = 0$ y $v(\pm 1) = 1$;
2. $v(a + b) + v(a) + v(b) = v(a) + v(b)$; y
3. $v(ab) + v(a)v(b) = v(a)v(b)$.

La cuasivaluación v es una valuación si es multiplicativa, i.e., satisface $v(ab) = v(a)v(b)$ para cualesquiera $a, b \in R$.

Este concepto es una generalización del de valuación clásica, o de Krull, que se obtiene al usar el orden de un monoide totalmente ordenado $(M, \times, 1, \leq)$ para inducir una suma idempotente $a \oplus b = \max\{a, b\}$ y convertir a M en un semianillo idempotente.

Gran parte de la riqueza y novedad combinatoria de la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales es que podemos construir un semianillo idempotente S y una valuación $v : K[[t, u]] \rightarrow S$ en el sentido de la Definición 5.2 que no es de Krull. Veamos esto de manera rápida y sin tantos detalles: dado $A \subset \mathbb{N}^2$, decimos que A es un conjunto de vértices si $\text{Vert}(A) = A$, en el sentido de la Definición 3.14. Si S es la familia de conjuntos de vértices, definimos $v : K[[t, u]] \rightarrow S$ como la función que a cada serie $\varphi \in K[[t, u]]$ le asigna los vértices de su conjunto soporte $v(\varphi) = \text{Vert}(\text{Supp}(\varphi))$. Entonces con las definiciones adecuadas de suma y producto en S , la aplicación v se vuelve una valuación generalizada. Como comentamos en la prueba de la Proposición 4.6, la propiedad multiplicativa de v es la más sutil, y se deduce de una propiedad de vértices de una suma de Minkowski de dos politopos descritos en términos de sus vértices.

Ahora sí, vamos a discutir el orden de S .

Ejercicio 5.3. *Dados dos conjuntos de vértices $P, Q \in S$, escribimos $P \leq Q$ si $P \subset \text{New}(Q)$ (ver la Definición 3.14). Mostrar que \leq es una relación de orden.*

Encuentre dos monomios $(i, j), (k, l) \in \mathbb{N}^2$ que no estén relacionados bajo \leq .

Lo interesante es que la teoría de ecuaciones diferenciales tropicales da una razón para estudiar este tipo de valoraciones generalizadas.

Es necesario mencionar que de momento, las restricciones del Teorema fundamental 4.14 no pueden ser aligeradas. En particular, hay ejemplos concretos de ecuaciones diferenciales con coeficientes en \mathbb{Q}^{alg} (el cual satisface todas las hipótesis, excepto ser no numerable) en donde el teorema falla. Y apenas estamos empezando a explorar el caso de campos de característica positiva.

Pero veamos dónde sí se puede aplicar este teorema. Básicamente cuando decimos K campo algebraicamente cerrado, característica 0 y no numerable, pensamos en dos arquetipos muy diferentes entre sí, a saber:

1. Arquimediano: \mathbb{C} ,
2. No-Arquimediano: $\mathbb{Q}_p^{\text{alg}}$,

Los nombres vienen del hecho de que estos campos se pueden volver campos topológicos métricos por medio de una valuación de Krull $v : K^* \rightarrow (\mathbb{R}, +, 0, \leq)$ arquimedea en el primer caso, y no-arquimedea en el segundo. Hasta el momento solo hemos discutido soluciones en series de potencias formales de nuestros sistemas $\Sigma \subset K[[t, u]]\{x, y\}$, pero si consideramos como K a uno de estos campos topológicos, sería natural estudiar las propiedades de convergencia de dichas soluciones en la completación métrica \widehat{K} de estos campos, siendo $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ ya completo y $\mathbb{C}_p = \widehat{\mathbb{Q}_p^{\text{alg}}}$ lo complejos p -ádicos.

Luego, las series $\varphi \in \widehat{K}[[t, u]]$ con radio de convergencia positivo se pueden interpretar como funciones analíticas $\varphi : U \rightarrow \widehat{K}$ en una vecindad $U \ni 0$ del origen en el plano analítico asociado a \widehat{K} ; lo que es interesante es que el teorema fundamental 4.14 es ciego ante campo \widehat{K} , pero las condiciones de convergencia son radicalmente

diferentes en los dos casos anteriores: el caso \mathbb{C} lleva a la teoría de soluciones holomorfas en varias variables de ecuaciones diferenciales parciales, y el segundo lleva a la teoría de soluciones analíticas no-arquimedeanas de ecuaciones diferenciales parciales p -ádicas. Esto también se encuentra todavía muy abierto.

Las dos consideraciones finales es que esta teoría se puede percibir como una aplicación de la teoría semianillos. Para un tratamiento más completo véase [5].

Finalmente, los poliedros (polígonos) de Newton que aparecen en esta teoría se pueden expresar en la forma $\text{New}(A) = \Delta + \mathbb{R}^2$, donde Δ es la envoltura convexa de $\text{Vert}(A)$, y es un polígono de retícula. Encontrar una base de vértices para este tipo de polígonos es un problema muy activo en estos momentos, y sería interesante saber si se pueden diseñar algoritmos eficientes para aplicarlos a la resolución de ecuaciones diferenciales tropicales.

Agradecimientos. Queremos agradecer a Violeta López de la ESFM-IPN, y al M. en C. Alejandro Martínez Méndez, quienes hicieron comentarios sobre una versión preliminar de este artículo los cuales ayudaron a mejorar la exposición.

REFERENCIAS

- [1] F. Aroca, C. Garay López, and Z. Toghani, *The fundamental theorem of tropical differential algebraic geometry*, Pacific J. Math. **283** (2016) no. 2, 257–270.
- [2] E. Cotterill, C. Garay, and J. Luviano, *Using tropical differential equations*, arXiv:2012.14067 (2020).
- [3] S. Falkensteiner, C. Garay López, M. Haiech, M.P. Noordman, Z. Toghani and F. Boulier, *The fundamental theorem of tropical partial differential algebraic geometry*, Proc. 45th ISSAC (2020), 178–185.
- [4] S. Falkensteiner, C. Garay López, M. Haiech, M.P. Noordman, Z. Toghani and F. Boulier, *On Initials and the Fundamental Theorem of Tropical Partial Differential Geometry*, hal-03122437 (2020).
- [5] J. Golan, *Semirings and their applications*, Springer, 1999.
- [6] D. Grigoriev, *Tropical differential equations*, Adv. Appl. Math. **82** (2017), 120–128.
- [7] D. Maclagan and B. Sturmfels, *Introduction to tropical geometry*, AMS, 2015.
- [8] G. Mikhalkin, *Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2* , J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 2, 313–377.
- [9] J.-E. Pin. *Tropical Semirings*, J. Gunawardena. Idempotency (Bristol, 1994), Cambridge Univ.Press, Cambridge, pp.50-69, Publ. Newton Inst. **11** (1998). hal-00113779

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A.C. (CIMAT), JALISCO S/N, COL. VALENCIANA CP. 36023 GUANAJUATO, GTO, MÉXICO
 Email address: cristian.garay@cimat.mx